ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΥΡΕΣΗΣ ΜΕΓΙΣΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥΣ ΣΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΕΡΔΟΥΣ

ΜΙΧΑΗΛ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ Α. Μ. 335

ΜΙΧΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ Α. Μ. 230

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: κ. ΚΑΛΑΠΟΔΗ Α.

ΠΑΤΡΑ 2008

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία ασχολείται με τις μεθόδους εύρεσης μέγιστων τιμών συναρτήσεων και την εφαρμογή τους στη συνάρτηση κέρδους.
Οι συναρτήσεις κέρδους εμφανίζονται σε οποιοδήποτε στάδιο παραγωγικής διαδικασίας καθώς επίσης και όπου υπάρχουν συναρτήσεις κόστους, για παράδειγμα σε επιχειρήσεις και βιομηχανίες όπου χρειάζεται να βρεθεί το μέγιστο δυνατό κέρδος.

Η διάρθρωση της εργασίας είναι η εξής:

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρεται η έννοια της πραγματικής σύναρτησης μιας μεταβλητής και των μορφών της, της πραγματικής συναρτήσης πολλών μεταβλητών και της γραμμικής συνάρτησης. Επίσης, δίνεται ο ορισμός της ακρότατης τιμής για κάθε μια από αυτές τις συναρτήσεις.

Το δεύτερο κεφάλαιο περιλαμβάνει τις μεθόδους μεγιστοποίησης των συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, τη μέθοδο της πρώτης παραγώγου για τη βελτιστοποίηση συνάρτησης μιας μεταβλητής, τη μέθοδο των μερικών παραγώγων για τη βελτιστοποίηση συνάρτησης δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών, τη μέθοδο πολλαπλασιαστών Lagrange για την εύρεση ακροτάτων τιμών μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών με περιορισμό, τη γραφική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού και τη μέθοδο Simplex.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα αναφερθούν αναλυτικά η συνάρτηση κέρδους μιας μεταβλητής, η συνάρτηση κέρδους πολλών μεταβλητών και η συνάρτηση κέρδους πολλών μεταβλητών με περιορισμό. Τέλος, θα δούμε την εφαρμογή τους σε πραγματικά προβλήματα.

Κεφάλαιο

1ο

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι βασικές μορφές των συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές επιχειρηματικού σχεδιασμού και η έννοια της “ακρότατης τιμής” για τις συναρτήσεις αυτές.

1.1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Η βιβλιογραφία που χρησιμοποιείται σε αυτή την ενότητα είναι: [2[, [3] και [6]

Ορισμός **:** *Μια συνάρτηση ορίζεται όταν συσχετίσουμε κάθε στοιχείο ενός συνόλου D (Domain) με ένα και μόνο στοιχείο ενός συνόλου R (Range) μέσω ενός κανόνα f. Η συνάρτηση συμβολίζεται με* ***f:D→R*** *και έχει τύπο* ***y=f(x)****.*

Τα σύνολα D ή D(f) και R ή R(f) ονομάζονται πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών της συνάρτησης αντίστοιχα. Αν το R(f) είναι υποσύνολο του IR των πραγματικών αριθμών τότε η συνάρτηση λέγεται πραγματική, ενώ αν D(f)∈ IR η συνάρτηση λέγεται πραγματικής μεταβλητής.

Οι πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής μπορούν να έχουν διάφορες μορφές. Παρακάτω θα δούμε ποιες είναι οι μορφές αυτές και θα προσδιορίσουμε το πεδίο ορισμού της κάθε μιας. Εμείς θα παρουσιάσουμε τις κυριότερες μορφές συναρτήσεων που εμφανίζονται σε επιχειρησιακά προβλήματα.

<u>Μορφές πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής</u>

- Η συνάρτηση της μορφής $f(x)=a_n x_n+a_{n-1}x_{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, όπου a_i, i=0,1,2,… είναι πραγματικοί συντελεστές και n φυσικός αριθμός λέγεται **πολυωνυμική συνάρτηση**. Τότε το πεδίο ορισμού ορίζεται ως D(f)=IR. Αν $f(x)=a_0$, η συνάρτηση f λέγεται ***σταθερή***, ενώ αν $f(x)=a_1x+a_0$ λέγεται ***γραμμική***.

- Η συνάρτηση της μορφής $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$,όπου f(x) και g(x) πολυωνυμικές συναρτήσεις καλείται **ρητή συνάρτηση** και το πεδίο ορισμού της είναι $D(F)=IR-\{x\in IR : g(x)=0\}$.

- Η συνάρτηση της μορφής $G(x)=\sqrt[\nu]{f(x)}$, όπου f(x) πολυωνυμική συνάρτηση και ν φυσικός αριθμός ($\nu\geq 2$) καλείται **άρρητη συνάρτηση** και το πεδίο ορισμού της είναι $D(G)=\begin{cases} IR, & \text{εάν } \nu= \text{περιττός} \\ \{x\in IR: f(x)\geq 0\}, & \text{εάν } \nu= \text{άρτιος}\end{cases}$

- Αν f(x) και g(x) είναι δοσμένες συναρτήσεις, η συνάρτηση fog με τύπο: (fog)(x)=f(g(x)) ονομάζεται **σύνθεση των συναρτήσεων** f και g. Τότε το πεδίο ορισμού της είναι $D(fog)=\{x\in IR: x\in D(g) \text{ και } g(x)\in D(f)\}$.

- Οι συναρτήσεις της μορφής $y=\log_a x$, όπου $a>0, a\neq 1$ λέγονται **λογαριθμικές συναρτήσεις** και το πεδίο ορισμού τους ορίζεται $D(y)=(0,+\infty)$.

- Οι συναρτήσεις της μορφής $y=a^x$ με $a>0$ και $a\neq 1$ λέγονται **εκθετικές συναρτήσεις** με πεδίο ορισμού D(y)=IR.

Παραπάνω είδαμε τις κυριότερες μορφές των πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής οι οποίες συναντώνται σε διαφορά προβλήματα οικονομικής φύσης και αφορούν τη μεγιστοποίηση (βελτιστοποίηση) ή ελαχιστοποίηση της συνάρτησης **y=f(x)**. Τα σημεία στα οποία εμφανίζεται η ελάχιστη ή μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης καλούνται ακρότατα.

Τοπικά και ολικά ακρότατα

Τα οικονομικά μαθηματικά ασχολούνται αρκετά συχνά με προβλήματα που αφορούν την εύρεση της μέγιστης ή της ελάχιστης τιμής μιας συνάρτησης. Πολλές φορές μία **συνάρτηση** εκφράζει κάποια μεγέθη μιας επιχείρησης, όπως το κόστος ή το κέρδος. Τα ακρότατα μιας συνάρτησης μας υποδεικνύουν σε ποια σημεία μεγιστοποιείται ή ελαχιστοποιείται και σε ποια μένει σταθερή.

Τοπικά ακρότατα είναι το **τοπικό ελάχιστο** και το **τοπικό μέγιστο** και **ολικά ακρότατα** είναι το **ολικό ελάχιστο** και το **ολικό μέγιστο**.

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού D, λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x_0 \in D$, όταν υπάρχει ανοικτό διάστημα A με $x_0 \in A$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap D$$

Το σημείο x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου** ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της f**.

Αν η ανισότητα $f(x) \leq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in D$ τότε θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο σημείο x_0 **ολικό μέγιστο** ή απλώς **μέγιστο**.

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού D, λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x_0 \in D$, όταν υπάρχει ανοικτό διάστημα με $x_0 \in A$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap D$$

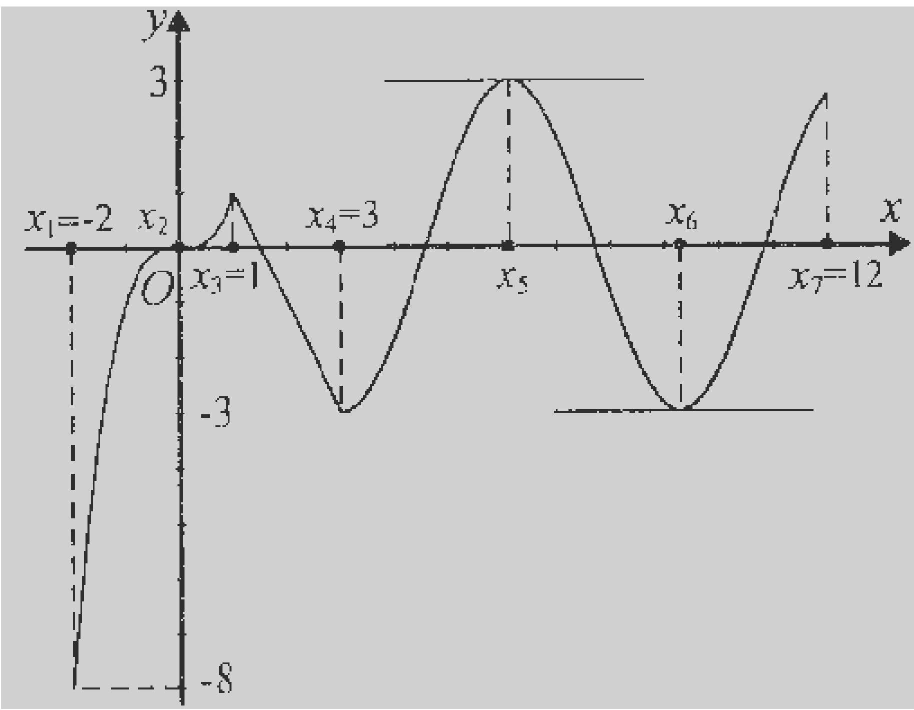
Το σημείο x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου** ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της f**.

Αν η ανισότητα $f(x) \geq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in D$ τότε θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο σημείο x_0 **ολικό ελάχιστο** ή απλώς **ελάχιστο**.

Έστω ότι έχουμε την συνάρτηση:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x^3} & \mathbf{-2 \leq x \leq 1} \\ \mathbf{-2x + 3} & \mathbf{1 < x \leq 3} \\ \mathbf{3\sigma\upsilon\nu(x-3)} & \mathbf{3 < x \leq 12} \end{cases}$$

Κατασκευάζουμε την γραφική παράσταση ώστε να απεικονίσουμε γραφικά τα σημεία όπου εμφανίζονται τα τοπικά και ολικά ακρότατα της συνάρτησης. Αναλυτικά το πώς εντοπίζουμε τις πιθανές θέσεις των ακροτάτων θα το δούμε στο επόμενο κεφάλαιο όπου θα περιγράψουμε την μέθοδο μεγιστοποίησης συνάρτησης μιας μεταβλητής με το κριτήριο της πρώτης παραγώγου.



Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι φανερό ότι τα σημεία με x_1 = -2, x_4 = 3, x_6 = 9.3 είναι σημεία τοπικού ελαχίστου, ενώ τα σημεία με x_3 =1, x_5 = 6.14, x_7=12 είναι σημεία τοπικού μεγίστου. Επιπλέον η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση x_1 = -2 και ολικό μέγιστο στη θέση X_5 = 6.14.

1.2. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ Η ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Η βιβλιογραφία που χρησιμοποιείται σε αυτή την ενότητα είναι: [1], [3] και [8].

<u>Ορισμός</u> **:** Έστω ***D*** ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών **(x,y)**. Μία **πραγματική συνάρτηση *f* δύο μεταβλητών** ορισμένη στο ***D*** είναι ένας κανόνας που αποδίδει τον μοναδικό πραγματικό αριθμό

$$z = f(x,y)$$

σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος **(x,y)** του ***D***.

Το ***D*** είναι το **πεδίο ορισμού** της ***f*** και το σύνολο των τιμών που παίρνει η συνάρτηση είναι το **πεδίο τιμών** της μεταβλητής ***z***.

Οι **ανεξάρτητες μεταβλητές** είναι οι **μεταβλητές εισόδου** και η **εξαρτημένη μεταβλητή** είναι η **μεταβλητή εξόδου**.

Παρατήρηση: Ανάλογα ορίζεται και η **συνάρτηση τριών μεταβλητών w=f(x,y,z)**

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αποτελείται από όλες τις τριάδες (x,y,z) για τις οποίες έχει νόημα η έκφραση **f**.

Παράδειγμα 1

Το πεδίο ορισμού της $f(x,y)=\sqrt{x-y^2}$ είναι το κλειστό μη φραγμένο χωρίο που περιέχεται στην παραβολή $y=x^2$ για τα σημεία του οποίου ισχύει $y \geq x^2$ και ορίζεται η ρίζα.

Παράδειγμα 2

Συνάρτηση	Πεδίο Ορισμού	Πεδίο τιμών
$f(x,y)=\sqrt{x-y^2}$	$y \geq x^2$	$[0,+\infty]$
$f(x,y)=\frac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
$f(x,y,z)=xy\ln(z)$	$z>0$	$(-\infty,+\infty)$
$f(x,y)=x^2+y^2$	R^2	$[0,+\infty]$

Ακρότατα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Μία συνάρτηση f(x,y) με πεδίο ορισμού D, λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $(x_0,y_0) \in D$, όταν υπάρχει ανοικτό διάστημα A με $(x_0, y_0) \in A$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0) \text{ για κάθε } (x, y) \in A \cap D$$

Το σημείο **(x_0, y_0)** λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου** ενώ το **$f(x_0, y_0)$** **τοπικό μέγιστο της f**.

Αν η ανισότητα **$f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$** ισχύει για κάθε **$(x,y) \in D$** τότε θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο σημείο **(x_0,y_0)** **ολικό μέγιστο** ή απλώς **μέγιστο**.

Μία συνάρτηση f(x,y) με πεδίο ορισμού D, λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $(x_0,y_0) \in D$, όταν υπάρχει ανοικτό διάστημα A με $(x_0, y_0) \in A$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f(x,y) \geq f(x_0, y_0) \text{ για κάθε } (x, y) \in A \cap D$$

Το σημείο **(x_0, y_0)** λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου** ενώ το **$f(x_0, y_0)$** **τοπικό ελάχιστο της f**.

Αν η ανισότητα **$f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$** ισχύει για κάθε **$(x,y) \in D$** τότε θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο σημείο **(x_0,y_0)** **ολικό ελάχιστο** ή απλώς **ελάχιστο**.

1.3. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ)

Η βιβλιογραφία που χρησιμοποιείται σε αυτή την ενότητα είναι: [7]

Στην ενότητα 1.1. είδαμε τη μορφή που μπορεί να έχει μια γραμμική συνάρτηση μιας μεταβλητής,

για παράδειγμα, $f(x)= 3x+2\ln x$ ή $f(x)=2x^3-4x^2+5x-10$

Μια συνάρτηση της μορφής $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=a_1x_1+a_2x_2 +\ldots+a_nx_n+a_0$ καλείται **γραμμική συνάρτηση πολλών μεταβλητών** ενώ όταν $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)= a_0$ τότε λέγεται **σταθερή**.

για παράδειγμα, $f(x_1,x_2,x_3)= 25x_1+7x_2 +4\ln x_3$ ή $f(x,y,z)= 3x^2+5y^3+6z$

Προσέγγιση αντικειμενικής συνάρτησης:

Η αντικειμενική συνάρτηση είναι μια γραμμική συνάρτηση μιας ή και περισσοτέρων μεταβλητών και εκφράζει συνήθως την μεγιστοποίηση κέρδους ή την ελαχιστοποίηση κόστους. Ας δούμε παρακάτω τον γενικό ορισμό της αντικειμενικής συνάρτησης που συναντάμε στον γραμμικό προγραμματισμό:

Στον γραμμικό προγραμματισμό μία συνάρτηση της μορφής $\mathbf{max}Z = \mathbf{c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n}$ η οποία εκφράζει το συνολικό κέρδος της επιχείρησης και προσπαθούμε να την μεγιστοποιήσουμε υπό κάποιους περιορισμούς $\mathbf{g_i(i=1,2,\ldots,m)}$ της μορφής $\mathbf{a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{in}x_n \leq , = ,\geq 0}$, καλείται **αντικειμενική συνάρτηση**.

Παράγοντες που καθορίζουν και από τους οποίους εξαρτάται η αντικειμενική συνάρτηση

<u>Διατύπωση (περιγραφή) του προβλήματος (αντικειμενικής συνάρτησης και περιορισμών) με γραμμικές συναρτήσεις</u>

<u>Αντικειμενική συνάρτηση</u>: Κριτήριο αξιολόγησης μιας "κατάστασης της φύσης", συνήθως μεγιστοποίηση κέρδους(ή οφέλους) ή ελαχιστοποίηση κόστους (ή συνεπειών).

<u>Γραμμικοί περιορισμοί</u>: Περιγράφουν τη λειτουργία του συστήματος:
(1) Διαθεσιμότητα πόρων (κεφάλαιο, πρώτες ύλες, κ.λπ.).
(2) Δυναμικότητα μηχανών (σταθερή ή μεταβλητή)
(3) Προδιαγραφές (σύνθεση προϊόντων)
(4) Περιορισμοί κάλυψης ζήτησης
(5) Περιορισμοί στη συνέχεια της ροής προϊόντων και υλικών (για κάθε μέσο χωριστά).

<u>Σταθερές</u>: Προκύπτουν από τα δεδομένα του προβλήματος**.**

<u>Μεταβλητές</u>: Χαρακτηρίζουν τις αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν. Αφορούν τους παράγοντες που πρέπει να καθορίσουμε ή τις ποσότητες που πρέπει να ορίσουμε στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Διακρίνονται σε πρωτεύουσες (κύριες) μεταβλητές, αυτές που είναι απόλυτα απαραίτητες για τη διατύπωση του προβλήματος, και σε δευτερεύουσες (βοηθητικές) μεταβλητές, αυτές που συντελούν σε καλύτερη και πιο ευέλικτη διατύπωση του προβλήματος.

<u>Ακέραιες μεταβλητές</u>: Χρησιμοποιούνται όταν υπάρχουν οι ακόλουθοι (κυρίως) λόγοι:

· "Μεγάλες μονάδες" που δεν απεικονίζονται από συνεχή μεγέθη

· Αποφάσεις του τύπου ΝΑΙ-ΟΧΙ, π.χ. επιλογή διαδρομής, επιλογή τυποποιημένης επένδυσης

· Ασυνέχειες σε συναρτήσεις, π.χ. κόστη με σταθερό και μεταβλητό μέρος.[2]

Σταθερές, μεταβλητές, αντικειμενική συνάρτηση και γραμμικοί περιορισμοί είναι τα στοιχεία που συνθέτουν ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Από τα δεδομένα του προβλήματος ξεχωρίζουμε τις σταθερές από τις μεταβλητές και εκφράζουμε την αντικειμενική συνάρτηση που δηλώνει το κέρδος της επιχείρησης με μία ισότητα και τους περιορισμούς που υπόκεινται σε ισότητες ή ανισότητες.

Η αντικειμενική συνάρτηση εξαρτάται από τα δεδομένα του προβλήματος. Η σύνθεσή της γίνεται με βάση τους σταθερούς και μεταβλητούς συντελεστές του προβλήματος .Οι περιορισμοί καθορίζουν το πλαίσιο στο οποίο θα κινηθούμε για να φτάσουμε σε μια βέλτιστη λύση. Με άλλα λόγια οι περιορισμοί αναφέρονται σε κανόνες που διέπουν τα βήματα της λύσης και αναφέρονται συνήθως στα μέσα που διαθέτουμε και στις δυνατότητές μας να φτάσουμε σε μία το δυνατόν καλύτερη λύση.

A. *Κριτήριο Βελτιστοποίησης*

- **Μεγιστοποιούμε το κέρδος ή ελαχιστοποιούμε το κόστος**

- **Εκφράζουμε κέρδος/ κόστος μέσω μίας (συνήθως) γραμμικής συνάρτησης, της οποίας προσπαθούμε να βρούμε ακρότατη τιμή**

- **Εκφράζουμε τις δυνατότητες μας και τους διαθέσιμους πόρους με εξισώσεις ή ανισώσεις (περιορισμοί)**

B. *Μοντελοποίηση*

- **Χρησιμοποιούμε μεταβλητές απόφασης x_j για να περιγράψουμε συνθετικά στοιχεία του προβλήματος**

- **Ορίζουμε το πεδίο των μεταβλητών απόφασης**

- **Εκφράζουμε τη συνάρτηση κέρδους σαν γραμμική έκφραση των μεταβλητών απόφασης**

- **Εκφράζουμε τους περιορισμούς σαν γραμμικές ανισώσεις των μεταβλητών απόφασης**

Γ. *Παράδειγμα* [4]

Μια εταιρεία διαθέτει 30 μηχανικούς, 24 τεχνικούς και για 18 ώρες εργασίας την ημέρα εξυπηρετεί 2 τύπους συμβολαίων (και κατά μέρος):

- **Με 5 μηχανικούς, 2 τεχνικούς και 1 ώρα εργασίας έχει κέρδος 8.**
- **Με 3 μηχανικούς, 3 τεχνικούς και 3 ώρες εργασίας έχει κέρδος 6.**

Έχει πολλές προσφορές συμβολαίων. Πόσα από το πρώτο και πόσα από το δεύτερο θα πρέπει να αναλάβει;

Δ. *Διατύπωση και ορισμός μοντέλου*

Έστω x συμβόλαια από το πρώτο είδος, και y από το δεύτερο.

- **Κέρδος: $Z = 8x + 6y$**

- **Περιορισμοί**

  - **Μηχανικοί: $5x + 3y \leq 30$**
  - **Τεχνικοί: $2x + 3y \leq 24$**
  - **Ώρες: $x + 3y \leq 18$**

- **Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος**

Μετά την διατύπωση και την κατασκευή του μοντέλου το επόμενο βήμα είναι να επιλέξουμε τη μέθοδο επίλυσής του. Θα δούμε παρακάτω τεχνικές του γραμμικού προγραμματισμού, περιγράφοντας τα βήματα επίλυσης, αναλύοντας τα αποτελέσματα και πώς αυτά επηρεάζονται από τυχόν αλλαγές.

Κεφάλαιο

2ο

ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΕΓΙΣΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παραθέσουμε τις μεθόδους μεγιστοποίησης των συναρτήσεων περιγράφοντας αναλυτικά τις διαδικασίες και τα βήματα που ακολουθούνται για να φτάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα που είναι η βέλτιστη η μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης.

Η βιβλιογραφία που χρησιμοποιείται σε αυτή την ενότητα είναι: [3] και [11].

2.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΩΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ- ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Παράγωγος συνάρτησης σε σημείο – Ορισμός, ερμηνεία

«Η παράγωγος $f'(x_0)$ μιας συνάρτησης $y=f(x)$ σε ένα σημείο $x_0 \in D(f)$ ορίζεται από την σχέση:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

όταν βέβαια το όριο αυτό υπάρχει και είναι πεπερασμένος αριθμός.»[2]

Γενικά, έστω μια συνάρτηση f, η οποία παραγωγίζεται σε κάθε $x_0 \in D$ όπου D είναι ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, τότε η συνάρτηση f΄(x) λέγεται πρώτη παράγωγος συνάρτηση της f ή απλώς παράγωγος της f και συμβολίζεται με f΄ ή $\frac{df}{dx}$.

Μερικές φορές χρησιμοποιούμε και τους συμβολισμούς y=f΄(x) ή y=$\frac{df(x)}{dx}$.

Για τις συναρτήσεις που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, το D είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Αν τώρα και η f΄ παραγωγίζεται σ' ένα υποσύνολο του D , τότε η παράγωγος της f΄ θα συμβολίζεται με f΄΄(x) ή $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	
Συνάρτηση f	**Πρώτη παράγωγος f΄**
c (σταθερή	0
x^k , κ φυσικός	kx^{k-1}
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$, $x \neq 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
ημx	συνx
συνx	-ημx
lnx	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

Ο επόμενος πίνακας, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται, μας δίνει μια «μηχανική» διαδικασία εύρεσης της παραγώγου στο x_0 συναρτήσεων που προκύπτουν από απλούστερες συναρτήσεις με τις πράξεις της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης.

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε υπάρχει η παράγωγος στο x_0 των συναρτήσεων f+g, cf με $c\in R$, $f*g$, f/g και ισχύει :

1. $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

2. $(cf)'(x_0)=cf'(x_o)$

3. $(f*g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$

4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2},(g(x_0)\neq 0)$

Κριτήριο πρώτης παραγώγου

Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα (a,b) και ότι στο $x_0\in(a,b)$ είναι $f'(x_0)=0$. Η f παρουσιάζει στο x_0:

- Τοπικό μέγιστο, αν για κάθε $x\in(a,x_0]$ ισχύει $f'(x)\geq 0$ και για κάθε $x\in[x_0,b)$ ισχύει $f'(x)\leq 0$
- Τοπικό ελάχιστο, αν για κάθε $x\in(a,x_0]$ ισχύει $f'(x)\leq 0$ και για κάθε $x\in[x_0,b)$ ισχύει $f'(x)\geq 0$

Συνοψίζοντας, διαπιστώνουμε ότι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A είναι:

1. Τα άκρα του Α (αν ανήκουν σ' αυτό).

2. Τα εσωτερικά σημεία του Α, στα οποία η f

α) δεν παραγωγίζεται ή β) παραγωγίζεται και η παράγωγός της μηδενίζεται.

Τα σημεία της $2^{ης}$ περίπτωσης τα ονομάζουμε κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και υπάρχει και η παράγωγος **$f'(x_0)$**, τότε θα ισχύει: **$f'(x_0)=0$**

Στην περίπτωση που ο προσδιορισμός τέτοιων διαστημάτων είναι δύσκολος μπορεί να μας βοηθήσει το παρακάτω θεώρημα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται:

Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και x ένα εσωτερικό σημείο του Δ για το οποίο ισχύει f΄(x)= o.
α) Αν υπάρχει η f΄΄(x) και ισχύει f΄΄(x)<0, τότε το f(x) είναι τοπικό μέγιστο
β) Αν υπάρχει η f΄΄ (x) και ισχύει f΄΄ (x)>0, τότε το f(x) είναι τοπικό ελάχιστο

Παράδειγμα:

Δίνεται η συνάρτηση f(x)= x^2 – 2x + 2, $x \in [0,3]$
Άρα θα προσπαθήσουμε να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης.

Είναι f΄(x)= 2x – 2.Η εξίσωση f'΄(x)=0 έχει ρίζα το x =1. Το πρόσημο της f ΄καθώς και η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον πίνακα:

x	0	1	3
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

Έχουμε f(0)=2 και f(3)=5 ενώ στο x=1 η f έχει τοπικό ελάχιστο το f(1)=1. Έτσι η f έχει μέγιστη τιμή την f(3)=5 δηλ. το άνω άκρο του διαστήματος και ελάχιστη τιμή την f(1)=1.

Παράδειγμα:

Η συνάρτηση f(x)=x^3 – 12x + 5 είναι συνάρτηση μίας μεταβλητής και είναι ορισμένη στο R. Ας υποθέσουμε ότι εκφράζει το κέρδος μιας επιχείρησης. Η παράγωγος της f(x) θα είναι f΄(x)=3x^2 –12. Λύνουμε την f΄(x)=0. Οι ρίζες που μηδενίζουν την εξίσωση είναι x=2 και x= -2. Άρα στα σημεία αυτά θα έχουμε τα τοπικά ακρότατα. Στη συνάρτηση κέρδους μας ενδιαφέρει να υπάρχει ένα τοπικό ή ολικό μέγιστο. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται σε ποια διαστήματα αυξάνεται και φθίνει η συνάρτηση και που παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο.

x	$-\infty$	-2		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	21	$\searrow$	-11	$\nearrow$	

τ. μέγιστο *τ. ελάχιστο*

Άρα για την τιμή x=-2 όπου η παράγωγος f΄(x) της συνάρτησης f(x) μηδενίζεται, η συνάρτηση f(x) παρουσιάζει τοπικό μέγιστο δηλ. παίρνει την μέγιστη τιμή της. Αν η συνάρτηση αυτή, όπως υποθέσαμε στην αρχή αφορά το κέρδος μιας επιχείρησης το οποίο εξαρτάται από το μέγεθος x τότε θα είχαμε μέγιστο κέρδος όταν ο παράγοντας x ήταν ίσος με x= -2.

2.2. ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ- ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Θέση ακροτάτων σημείων

Θεωρούμε την συνάρτηση z=f(x,y). Υποθέτουμε ότι η f έχει ένα σχετικό μέγιστο ή ένα σχετικό ελάχιστο στο σημείο (α,b). Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι f_x(α,b) και f_y(α,b). Τότε ισχύει:

$f_x(\alpha,b)=0$ και $f_y(\alpha,b)=0$

Δίνονται στη συνέχεια τα βήματα για τον εντοπισμό ακροτάτων για μια συνάρτηση δύο μεταβλητών και στη συνέχεια ένα παράδειγμα με συνάρτηση τριών μεταβλητών, όπου ακολουθείται η αντίστοιχη μεθοδολογία.

Βήματα εντοπισμού ακροτάτων σημείων:

1^o Βήμα: Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Έστω (x_0,y_0) λύση του συστήματος. Το σημείο αυτό αποτελεί πιθανό τοπικό ακρότατο.

2ο Βήμα: Υπολογίζουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξης

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

3ο Βήμα: Υπολογίζουμε για κάθε πιθανό ακρότατο τις εξής ορίζουσες:

$$\Delta_1(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$$

$$\Delta_2(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

4ο Βήμα:

1) Αν $\Delta_1(x_0,y_0) > 0$ και $\Delta_2(x_0,y_0) > 0$ τότε η f παρουσιάζει στο (x_0,y_0) τοπικό ελάχιστο.
2) Αν $\Delta_1(x_0,y_0)<0$ και $\Delta_2(x_0,y_0)>0$ τότε η f παρουσιάζει στο (x_0,y_0) τοπικό μέγιστο.
3) Αν $\Delta_2(x_0,y_0)<0$ τότε η f παρουσιάζει στο (x_0,y_0) σαγματικό σημείο.
4) Αν $\Delta_2(x_0,y_0)=0$ τότε δεν έχουμε συμπέρασμα.

Παράδειγμα:

Υποθέτουμε ότι έχουμε μία επιχείρηση που διαθέτει τα προιόντα της στην αγορά και η συνάρτηση κέρδους είναι:

$$f(x,y,z) = 10x-2x^2+30y-3y^2+70z-4z^2-20$$

Ζητείται να βρεθούν οι ποσότητες x,y,z των προιόντων που πρέπει να διαθέσει η επιχείρηση αυτή ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος της.

1^o **Βήμα:** Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} \partial f(x,y,z)/\partial x = 0 \\ \partial f(x,y,z)/\partial y = 0 \\ \partial f(x,y,z)/\partial z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10-4x=0 \\ 30-6y=0 \\ 70-8z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=10/4=2.5 \\ y=5 \\ z=70/8=8.7 \end{cases}$$

$(x_0,y_0,z_0)=(10/4,5,70/8)$ η λύση του συστήματος. Το σημείο αυτό αποτελεί πιθανό τοπικό ακρότατο

2^o **Βήμα:** Υπολογίζουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξης

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} = (10-4x)_x = -4, \quad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y} = (30-6y)_x = 0, \quad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial z} = (70-8z)_x = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial x} = (10-4x)_y = 0, \quad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} = (30-6y)_y = -6, \quad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial z} = (70-8z)_y = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial x} = (10-4x)_z = 0, \quad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial y} = (30-6y)_z = 0, \quad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} = (70-8z)_z = -8$$

3ο Βήμα: Υπολογίζουμε τις εξής ορίζουσες:

$\Delta_1(x_0, y_0, z_0) = \partial^2 f(x,y,z)/\partial x^2 \Rightarrow \quad \partial^2 f(10/4,5,70/8)/\partial x^2 = -4 < 0$

$$\Delta_2(x_0, y_0, z_0)= \begin{vmatrix} \partial^2 f(x,y,z)/\partial x^2 & \partial^2 f(x,y,z)/\partial x \partial y \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = (-4)(-6)=24>0$$

$$\Delta_3(x_0, y_0, z_0)= \begin{vmatrix} \partial^2 f(x,y,z)/\partial x^2 & \partial^2 f(x,y,z)/\partial x \partial y & \partial^2 f(x,y,z)/\partial x \partial z \\ \partial^2 f(x,y,z)/\partial y \partial x & \partial^2 f(x,y,z)/\partial y^2 & \partial^2 f(x,y,z)/\partial y \partial z \\ \partial^2 f(x,y,z)/\partial z \partial x & \partial^2 f(x,y,z)/\partial z \partial y & \partial^2 f(x,y,z)/\partial z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = (-4)(-6)(-8)= -192<0$$

4^o Βήμα:

Έχουμε $\Delta_1(10/4,5,70/8)=-4<0$, $\Delta_2(10/4,5,70/8)=24>0$ και $\Delta_3(10/4,5,70/8)=-192<0$ τότε η f παρουσιάζει στο (10/4,5,70/8) τοπικό μέγιστο.

2.3. ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΩΝ LAGRANGE- ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ

Μερικές φορές ζητείται η ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση (βελτιστοποίηση) μιας συνάρτησης όταν ισχύουν ορισμένοι περιορισμοί, όπως στο ακόλουθο παράδειγμα:

Ένας αρχιτέκτονας θέλει να μεγιστοποιήσει το εμβαδόν ενός σπιτιού ορθογωνίου σχήματος που κτίζει ενώ το κόστος του σπιτιού διατηρείται σταθερό, και ίσο με 500.000.000.

Αν οι διαστάσεις του πατώματος του σπιτιού είναι x και y, τότε το κόστος δίνεται από τον τύπο:

$c(x) = xy + 20y + 20x + 474.000.000$

Άρα ο αρχιτέκτονας ζητεί να μεγιστοποιήσει το εμβαδόν $A(x)=xy$ του ορθογωνίου πατώματος του σπιτιού όταν ισχύει:

$c(x) = xy + 20y + 20x + 474.000.000 = 500.000.000 (*)$

Στην περίπτωση αυτή, έχουμε βελτιστοποίηση μιας συνάρτησης με τύπο $A(x)=xy$ όταν αυτή υπόκειται στον περιορισμό (*).

Προβλήματα βελτιστοποίησης συναρτήσεων που υπόκεινται σε περιορισμούς λύνονται με την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange, η οποία πήρε το όνομά της από τον Γάλλο μαθηματικό Louis Lagrange (1763-1813). Παραθέτουμε στη συνέχεια την μέθοδο χωρίς να την αποδείξουμε.

<u>Μέθοδος πολλαπλασιαστών Lagrange</u>

Όλα τα σχετικά ακρότατα της συνάρτησης $z=f(x,y)$, υπό τον περιορισμό $g(x,y)=0$, βρίσκονται μεταξύ των σημείων εκείνων για τα οποία υπάρχει μια τιμή του $\lambda \in IR$ τέτοια ώστε

$G_x=0$, $G_y=0$ και $G_\lambda=0$, όπου $G(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$

Οι συνθήκες που ισχύουν είναι:

1) Αν $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) <0$ τότε η f παρουσιάζει στο $(x_0, y_0,)$ δεσμευμένο τοπικό ελάχιστο.
2) Αν $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) >0$ τότε η f παρουσιάζει στο $(x_0, y_0,)$ δεσμευμένο τοπικό μέγιστο.

Όπου $\Delta(x_0,y_0,\lambda_0)=$
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 G(x,y,l)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 G(x,y,l)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 G(x,y,l)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 G(x,y,l)}{\partial y^2} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}$$

Παράδειγμα:

Έστω ότι έχουμε τη συνάρτηση $f(x,y)= x^2-3y^2$ η οποία υπόκειται στον περιορισμό $g(x,y)= x+2y-1=0$.Θέλουμε να εντοπίσουμε τα δεσμευμένα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης.

Βήμα 1ο :

Μετασχηματίζουμε την συνάρτηση συμπεριλαμβάνοντας αυτή τη φορά τον περιορισμό με τη βοήθεια του πολλαπλασιαστή Lagrange. Άρα έχουμε:

$G(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)= x^2-3y^2+\lambda(x+2y-1)= x^2-3y^2+\lambda x+2\lambda y-\lambda$

Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \partial G(x,y,\lambda)/\partial x =0 \\ \partial G(x,y,\lambda)/\partial y =0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+\lambda=0 \\ -6y+2\lambda=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases} \begin{cases} \lambda=6 \\ x=-3 \\ y=2 \end{cases}$$

2ο Βήμα: Υπολογίζουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξης

$\partial^2 G(x,y,\lambda)/\partial x^2=(2x+\lambda)_X=2$, $\partial^2 G(x,y,\lambda)/\partial x\partial y=(-6y+2\lambda)_x=0$, $\partial g(x,y)/\partial x=(x+2y-1)_X=1$

$\partial^2 G(x,y,\lambda)/\partial y\partial x=(2x+\lambda)_y=0$, $\partial^2 G(x,y,\lambda)/\partial y^2=(-6y+2\lambda)_y=-6$, $\partial g(x,y)/\partial y=(x+2y-1)_y=2$

3ο Βήμα:

$$\Delta(-3,2,6)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 G(x,y,l)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 G(x,y,l)}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 G(x,y,l)}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 G(x,y,l)}{\partial y^2} & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=2(0-4)-0+1(0+6)=-8+6=-2<0$$

4ο Βήμα:

Άρα έχουμε $\Delta_1<0$,άρα η f παρουσιάζει δεσμευμένο τοπικό ελάχιστο στο σημείο (-3,2).

2.4. ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ο πιο εύκολος τρόπος για να κατανοήσουμε τη μεθοδολογία επίλυσης των προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού είναι να αναλύσουμε τον τρόπο επίλυσης ενός προβλήματος ΓΠ μέσω της γραφικής μεθόδου. Η εφαρμογή της γραφικής μεθόδου είναι δυνατή μόνο όταν ο αριθμός των μεταβλητών του προβλήματος είναι δύο ώστε να είναι δυνατή η απεικόνιση των μεταβλητών σε ένα σύστημα αξόνων. Όταν υπάρχουν περισσότερες από δύο μεταβλητές (όπως συμβαίνει σε όλα τα πραγματικά προβλήματα) η εφαρμογή της γραφικής μεθόδου δεν είναι δυνατή.

Παρ' όλο που η γραφική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων ΓΠ δεν είναι δυνατόν να εφαρμοσθεί σε προβλήματα πραγματικού μεγέθους, θα προχωρήσουμε κατ' αρχήν στην ανάλυση των προβλημάτων ΓΠ κάνοντας χρήση της γραφικής μεθόδου γιατί πιστεύουμε ότι αυτό θα συμβάλει στην καλύτερη κατανόηση της μεθοδολογίας.

Πρόβλημα:

Η επιπλοποιεία ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ παράγει τραπέζια και καρέκλες κοινής χρήσης. Η διαδικασία παραγωγής και για τα δύο προϊόντα είναι παρόμοια και απαιτεί διαφορετικές ώρες εργασίας για το κάθε προϊόν στα δύο τμήματα της επιχείρησης, το ξυλουργείο και το βαφείο. Για την παραγωγή κάθε τραπεζιού απαιτούνται 8 ώρες στο ξυλουργείο και 4 ώρες στο βαφείο, ενώ για κάθε καρέκλα οι ώρες που απαιτούνται είναι 8 στο ξυλουργείο και 2 στο βαφείο. Για τον επόμενο μήνα η ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ έχει προσδιορίσει ότι οι διαθέσιμες ώρες παραγωγής στο ξυλουργείο ανέρχονται συνολικά σε 960 ενώ στο βαφείο είναι μόλις 400. Για κάθε τραπέζι το μικτό κέρδος της επιχείρησης είναι 14.000 δρχ. ενώ για κάθε καρέκλα είναι 10.000 δρχ.

Το πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ είναι ο καθορισμός των ποσοτήτων παραγωγής σε τραπέζια και καρέκλες ώστε να πετύχει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος. (Αγνοούμε προς στιγμή το τυχόν στοκ που υπάρχει και υποθέτουμε ότι η ζήτηση είναι ικανή να απορροφήσει την οποιαδήποτε ποσότητα θα παραχθεί)

Ας δούμε τα βήματα που ακολουθούμε για να διατυπώσουμε το παραπάνω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

Διατύπωση του προβλήματος- Καθορισμός συνάρτησης, μεταβλητών, περιορισμών

α) Μεταβλητές

Κατ' αρχήν θα πρέπει να ορίσουμε τις **μεταβλητές** του προβλήματος. Οι μεταβλητές του προβλήματος αφορούν τους παράγοντες εκείνους τους οποίους μπορούμε να καθορίσουμε ή **τις ποσότητες που προσπαθούμε να προσδιορίσουμε** στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Στην προκειμένη περίπτωση στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε τις ποσότητες τραπεζιών και καρεκλών που πρέπει να παραχθούν ώστε να επιτύχουμε μεγιστοποίηση των κερδών.

Επομένως ας χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό:

X_1=ποσότητα (αριθμός) τραπεζιών που θα παραχθούν και

X_2=ποσότητα (αριθμός) καρεκλών που θα παραχθούν

Μπορούμε να τοποθετήσουμε λοιπόν τα δεδομένα του προβλήματος στον πίνακα που ακολουθεί:

Τμήμα Παραγωγής	Απαιτούμενες ώρες για την παραγωγή μίας μονάδας		Διαθέσιμες ώρες το μήνα
	X_1 (τραπέζια)	X_2 (καρέκλες)	
Ξυλουργείο	8 ώρες	8 ώρες	960 ώρες
Βαφείο	4 ώρες	2 ώρες	400 ώρες
Κέρδος ανά μονάδα προιόντος	14.000 δρχ.	10.000 δρχ.	

β) Αντικειμενική συνάρτηση

Το επόμενο βήμα είναι να διατυπώσουμε μέσω μιας μαθηματικής σχέσης το στόχο του προβλήματος. Στη συγκεκριμένη περίπτωση σκοπός μας είναι η μεγιστοποίηση των κερδών της επιχείρησης. Κάθε μονάδα από τα X_1 (τραπέζια) αποφέρει κέρδος 14.000 δραχμών. Επομένως το κέρδος από την παραγωγή X_1 τραπεζιών είναι14.000X_1. Αντίστοιχα, το κέρδος από τα X_2 κομμάτια καρεκλών είναι10.000X2.

Το συνολικό λοιπόν κέρδος της επιχείρησης

Συνολικό κέρδος : 14.000X_1+10.000X_2

Για κάθε συνδυασμό ορισμένης ποσότητας τραπεζιών (X_1) και καρεκλών (X_2) η τιμή της συνάρτησης 14.000X_1 + 10.000X_2 αντιστοιχεί στο κέρδος που προκύπτει από το δεδομένο συνδυασμό παραγωγής.

Η συνάρτηση αυτή που εκφράζει το συνολικό κέρδος της επιχείρησης, και την οποία θα προσπαθήσουμε να μεγιστοποιήσουμε καλείται **αντικειμενική συνάρτηση.**

γ) Περιορισμοί

Όπως είναι λογικό η αύξηση των ποσοτήτων παραγωγής οδηγεί και στην αύξηση των κερδών. Αλλά οι ποσότητες παραγωγής δεν μπορεί να αυξηθούν απεριόριστα διότι οι διαθέσιμες ώρες στα τμήματα ξυλουργείου και βαφείου είναι συγκεκριμένες και επομένως με τη συνεχή αύξηση της παραγωγής θα εξαντληθούν. Το επόμενο λοιπόν βήμα είναι η διατύπωση των περιορισμών του προβλήματος. Η γενική διατύπωση των περιορισμών στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι ότι οι απαιτούμενες για την παραγωγή ώρες σε κάθε τμήμα δεν πρέπει να ξεπερνούν τις διαθέσιμες ώρες.

Ας δούμε λοιπόν το ξυλουργικό τμήμα:

Κάθε τραπέζι απαιτεί 8 ώρες στο ξυλουργείο. Επομένως τα X_1 τραπέζια απαιτούν συνολικά $8X_1$ ώρες. Κάθε καρέκλα απαιτεί επίσης 8 ώρες στο ξυλουργείο. Άρα οι X_2 καρέκλες απαιτούν συνολικά $8X_2$ ώρες.

Συνοψίζοντας λοιπόν έχουμε:

Απαιτούμενες ώρες στο ξυλουργείο:$8X_1+ 8X_2$

Διαθέσιμες ώρες στο ξυλουργείο : 960

Συνεπώς ο περιορισμός που αφορά τις ώρες στο ξυλουργείο θα έχει τη μορφή:

Περιορισμός ξυλουργείου: $8X_1+8X_2 \leq 960$

Αντίστοιχα, ο περιορισμός που αφορά τις ώρες στο βαφείο θα είναι:

Περιορισμός βαφείου: $4X_1+2X_2 \leq 400$

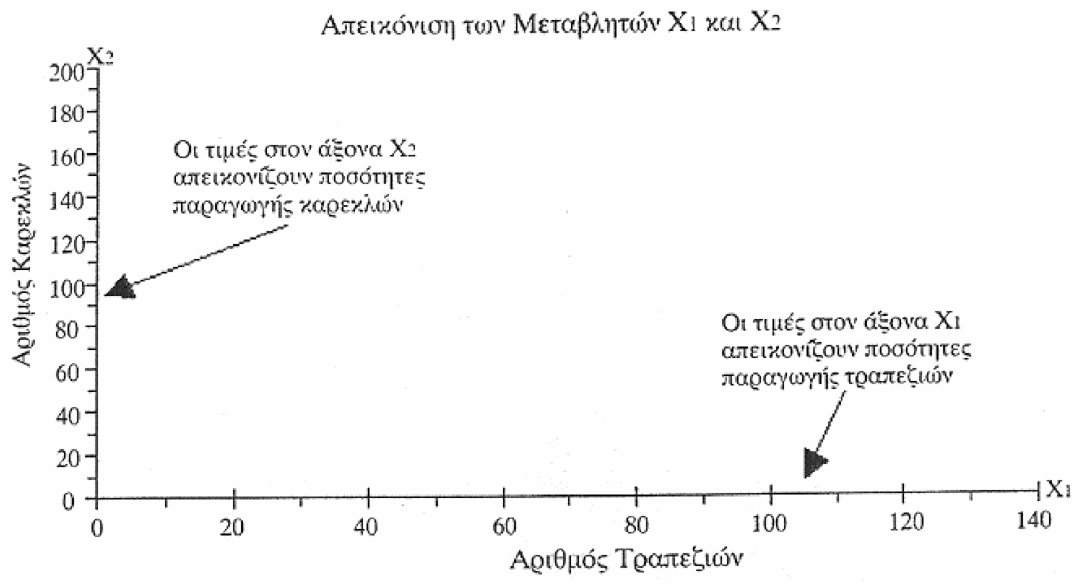
Και οι δύο περιορισμοί του προβλήματος αφορούν το διαθέσιμο δυναμικό παραγωγής και οπωσδήποτε επηρεάζουν το ύψος στο οποίο μπορεί να φτάσει το συνολικό κέρδος.

Εφικτές λύσεις

Πριν προχωρήσουμε στην ανεύρεση της βέλτιστης λύσης (της λύσης που μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί αντίστοιχα την αντικειμενική συνάρτηση) σε ένα πρόβλημα ΓΠ**,** θα πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε το σύνολο ή αλλιώς την περιοχή των εφικτών λύσεων**.** Μια λύση καλείται εφικτή όταν δεν παραβιάζει κανέναν από τους περιορισμούς του προβλήματος

Χρησιμοποιώντας ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων, μπορούμε να απεικονίσουμε τη μεταβλητή X_1 (αριθμός τραπεζιών που θα παραχθούν) στον οριζόντιο άξονα, και τη μεταβλητή X_2 (αριθμός καρεκλών) στον κατακόρυφο άξονα. Είναι ευνόητο ότι μας ενδιαφέρουν μόνον οι μη αρνητικές τιμές των X_1 και X_2 (δεν έχει έννοια π.χ. να βρούμε μία λύση που να δηλώνει ότι παράγουμε -15 τραπέζια).

Μαθηματικώς αυτό σημαίνει ότι σε ένα σύστημα αξόνων μας ενδιαφέρει μόνον το πρώτο τεταρτημόριο. Ας δούμε το παρακάτω σχήμα:



Το πλήρες πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Μεγιστοποίηση Συνολικού Κέρδους: $14.000X_1 + 10.000X_2$

υπό τους περιορισμούς:

$8X_1 + 8X_2 \leq 960$ **Περιορισμός ξυλουργείου**
$4X_1 + 2X_2 \leq 400$ **Περιορισμός βαφείου**
$X_1 \geq 0$
$X_2 \geq 0$

Περιοχή εφικτών λύσεων

α) Περιορισμός Ξυλουργείου

Για να παραστήσουμε τον πρώτο περιορισμό γραφικώς θα πρεέπει να θεωρήσουμε την αντίστοιχη ανισότητα σαν ισότητα:

$8X_1 + 8X_2 = 960$

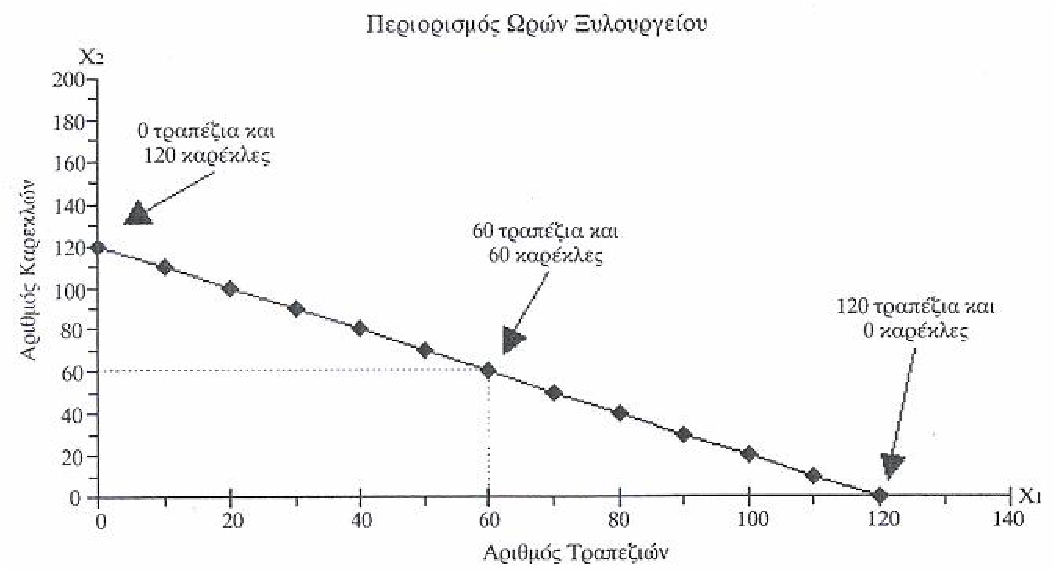
Μια γραμμική εξίσωση με δύο μεταβλητές παρίσταται γραφικώς με ευθεία γραμμή. Ο πιο εύκολος τρόπος να χαράξουμε την ευθεία γραμμή είναι να βρούμε δύο σημεία από τα οποία διέρχεται η ευθεία.

Όταν δεν παράγουμε καθόλου τραπέζια ($X_1 = 0$) τότε για να εξαντλήσουμε όλες τις διαθέσιμες ώρες στο ξυλουργείο θα πρέπει να παράγουμε 120 καρέκλες:

Άρα το σημείο (0,120) είναι το ένα σημείο από το οποίο διέρχεται η ευθεία $8X_1 + 8X_2 = 960$. Το σημείο αυτό βρίσκεται επί του κατακόρυφου άξονα. Ομοίως όταν δεν παράγουμε καθόλου καρέκλες ($X_2 = O$) τότε για να εξαντλήσουμε όλες τις διαθέσιμες ώρες στο ξυλουργείο θα πρέπει να παράγουμε 120 τραπέζια.

Άρα το σημείο (120,0) είναι ένα δεύτερο σημείο της ευθείας. Το σημείο αυτό βρίσκεται επί του οριζόντιου άξονα.

Ο περιορισμός των ωρών στο ξυλουργείο απεικονίζεται γραφικώς στο παρακάτω σχήμα:



Στο σχήμα παρατηρούμε την ευθεία γραμμή που αντιπροσωπεύει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς παραγωγής καρεκλών και τραπεζιών που αναλώνουν τη συνολική διαθέσιμη ποσότητα των 960 ωρών στο τμήμα ξυλουργείου. Ο αρχικός περιορισμός του προβλήματος ήταν ότι οι αναλωθείσες ώρες δεν πρέπει να ξεπερνούν τις 960. Επομένως οποιοδήποτε σημείο που βρίσκεται είτε επί της γραμμής είτε κάτω από αυτή, αντιπροσωπεύει ένα συνδυασμό παραγωγής που δεν απαιτεί περισσότερες από 960 ώρες στο ξυλουργείο.

β) Περιορισμός Βαφείου

Ας δούμε ακολούθως ποια σημεία ικανοποιούν τον δεύτερο περιορισμό. Ακολουθώντας τον ίδιο τύπο ανάλυσης και θεωρώντας την ανισότητα ως ισότητα έχουμε:

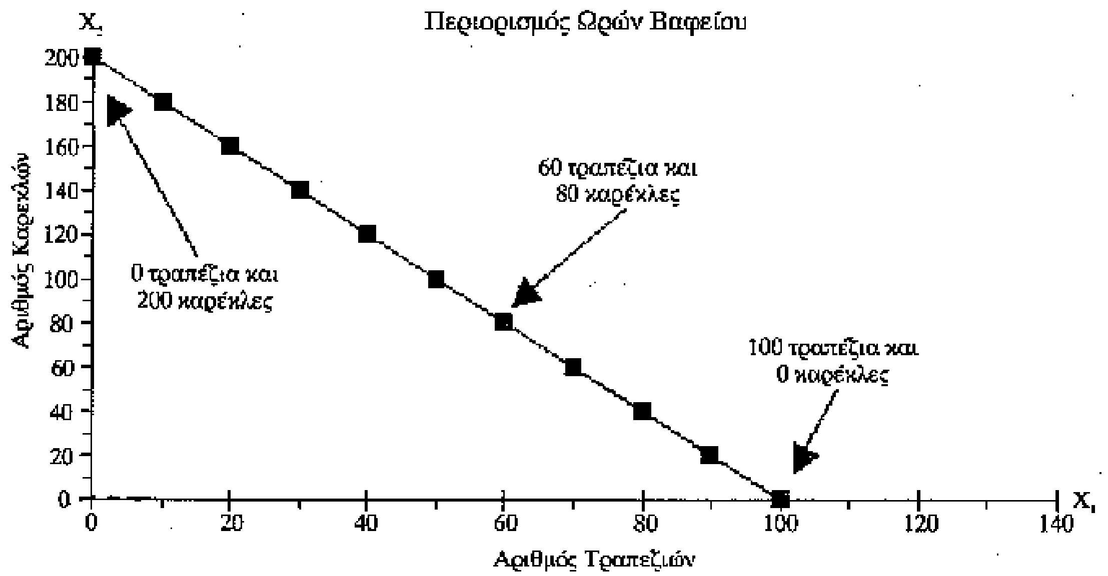
$$4X_1 + 2X_2 = 400$$

Όταν δεν παράγουμε καθόλου τραπέζια ($X_1 = 0$) τότε για να εξαντλήσουμε όλες τις διαθέσιμες ώρες στο τμήμα βαφείου θα πρέπει να παράγουμε 200 καρέκλες

Το πρώτο σημείο από το οποίο διέρχεται η ευθεία είναι το (0,200).

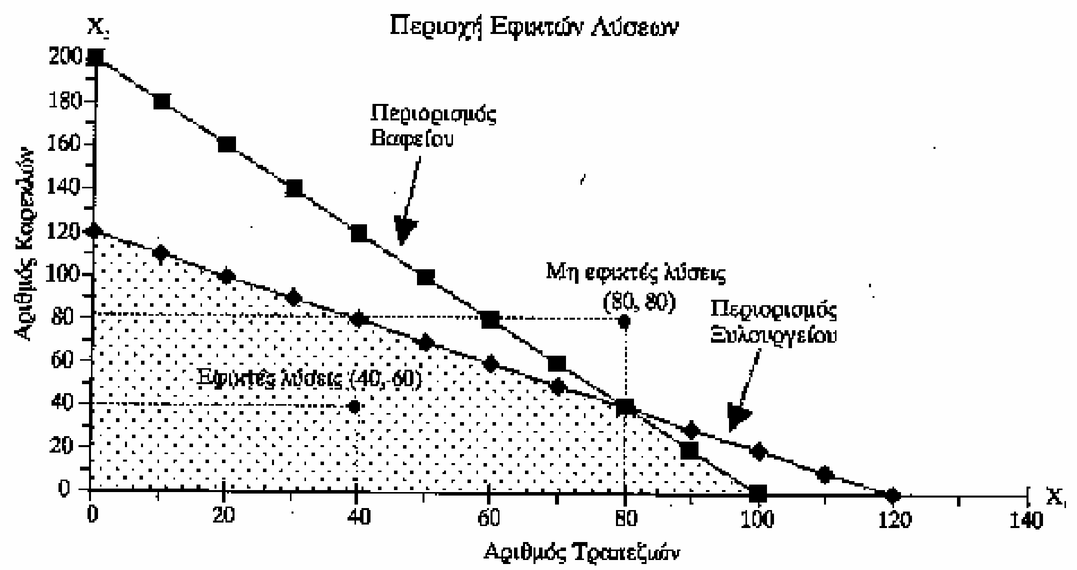
Ομοίως όταν δεν παράγουμε καθόλου καρέκλες ($X_2 = 0$) τότε για να εξαντλήσουμε όλες τις διαθέσιμες ώρες στο βαφείο θα πρέπει να παράγουμε 100 τραπέζια. Το δεύτερο σημείο για την ευθεία είναι το (100,0).

Ενώνοντας τα δύο αυτά σημεία έχουμε τον περιορισμό των ωρών στο βαφείο, ο οποίος απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



γ) Περιορισμοί Βαφείου και Ξυλουργείου

Αφού λοιπόν εξετάσαμε τη γραφική παράσταση καθενός από τους περιορισμούς ξεχωριστά, ας προχωρήσουμε στο επόμενο βήμα.Κάθε επιλέξιμος συνδυασμός παραγωγής μιας ποσότητας τραπεζιών και μιας ποσότητας καρεκλών θα πρέπει να ικανοποιεί και τους δύο περιορισμούς ταυτοχρόνως. Να μην απαιτεί δηλαδή περισσότερες από 960 ώρες στο ξυλουργείο και περισσότερες από 400 ώρες στο βαφείο. Ας τοποθετήσουμε λοιπόν και τους δύο περιορισμούς στο ίδιο γράφημα.



Η σκιασμένη περιοχή αντιπροσωπεύει την περιοχή των λύσεων που δεν απαιτούν περισσότερες από 960 ώρες στο ξυλουργείο και περισσότερες από 400 ώρες στο βαφείο. Αυτή η περιοχή περιλαμβάνει όλα τα σημεία που αντιπροσωπεύουν συνδυασμούς παραγωγής οι οποίοι είναι δυνατόν να υλοποιηθούν με τις δεδομένες διαθέσιμες ώρες. Κάθε σημείο έξω από την περιοχή των εφικτών λύσεων, αντιπροσωπεύει λύση που δεν είναι εφικτή.

Για παράδειγμα θα ήταν εφικτό να παράγουμε 40 τραπέζια και 60 καρέκλες διότι το σημείο (40,60) βρίσκεται μέσα στην περιοχή των εφικτών λύσεων, αλλά όχι 80 τραπέζια και 80 καρέκλες.

Προσδιορισμός Βέλτιστης Λύσης

Βέλτιστη λύση ενός προβλήματος ΓΠ είναι εκείνη η λύση, από το σύνολο των εφικτών λύσεων, η οποία μεγιστοποιεί (ή ελαχιστοποιεί αντίστοιχα) την αντικειμενική συνάρτηση. Αφού εντοπίσαμε την περιοχή των εφικτών λύσεων, ας δούμε πως μπορούμε να προσδιορίσουμε ποια από τις εφικτές λύσεις δίνει το μεγαλύτερο κέρδος, ποια δηλαδή είναι η βέλτιστη λύση.

Ας αρχίσουμε με το να προσδιορίσουμε ποιες λύσεις μας δίνουν κάποιο προκαθορισμένο σταθερό κέρδος. Ας επιλέξουμε τυχαία κάποια τιμή για το συνολικό κέρδος, ας πούμε για παράδειγμα 840.000 δραχμές.

Ποιες λύσεις του προβλήματος δίνουν κέρδος 840.000 δραχμές;

Η απάντηση είναι όλες οι λύσεις που ικανοποιούν την εξίσωση:

Κέρδος: $14.000\ X_1 + 10.000\ X_2 = 840.000$

α) Ισοκερδής ευθεία

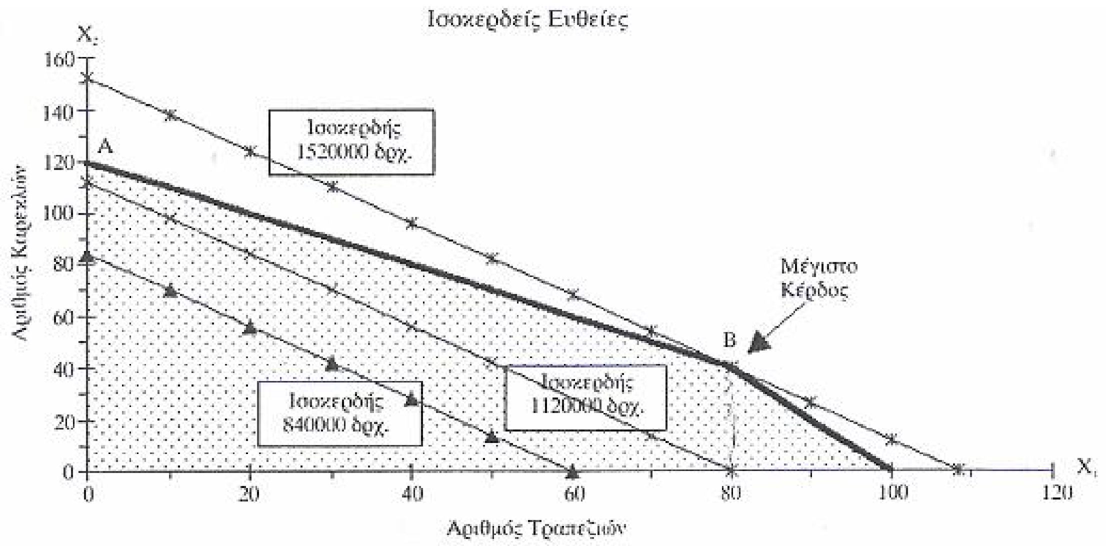
Όλες οι λύσεις που δίνουν κέρδος 840.000 δραχμές βρίσκονται σε μια ευθεία γραμμή που αποκαλείται ισοκερδής ευθεία των 840.000 δραχμών. Η ευθεία αυτή μπορεί να ορισθεί από τα δύο σημεία των αξόνων ακολουθώντας τη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως στη χάραξη των περιορισμών. Θέτοντας X_1 =0, βρίσκουμε X_2 =84, και αντίστοιχα θέτοντας X_2=0, βρίσκουμε X_1=60

Δηλαδή το κέρδος των 840.000 δραχμών μπορεί να επιτευχθεί είτε παράγωντας 84 καρέκλες και καθόλου τραπέζια (84·10.000 = 840.000) ή με την παραγωγή 60 τραπεζιών και καθόλου καρεκλών (60·14.000 = 840.000) ή με οποιονδήποτε συνδυασμό που βρίσκεται πάνω στην ισοκερδή ευθεία που ενώνει αυτά τα δύο σημεία (π.χ. 40 τραπεζιών και 28 καρεκλών: (40·14.000+ 28·10.000=840.000).

Προφανώς η ισοκερδής ευθεία των 840.000 δραχμών δεν δίνει το μεγαλύτερο κέρδος στην επιχείρηση. Αυτό είναι προφανές διότι υπάρχουν άλλα σημεία εντός της περιοχής των εφικτών λύσεων τα οποία βρίσκονται πάνω από τη συγκεκριμένη ισοκερδή ευθεία, επομένως δίνουν κέρδος μεγαλύτερο από 840.000.

β) Βελτίωση κέρδους

Για να επιτύχουμε μεγαλύτερο κέρδος θα πρέπει να μετακινήσουμε την ισοκερδή ευθεία προς τα δεξιά, διατηρώντας την όμως παράλληλη προς την αρχική της θέση. Σε κάθε νέα θέση παίρνουμε μια νέα ισοκερδή ευθεία. Το σχήμα παρακάτω μας βοηθά να κατανοήσουμε καλύτερα:



Έτσι για παράδειγμα μπορούμε να χαράξουμε μια δεύτερη ισοκερδή ευθεία που αντιστοιχεί σε κέρδος 1.120.000 δραχμών, επαναλαμβάνοντας τους ίδιους υπολογισμούς που εκτελέσαμε προηγουμένως αλλά για την νέα εξίσωση κέρδους:

$$14.000\ X_1 + 10.000\ X_2 = 1.120.000$$

Θέτοντας X_1=0, βρίσκουμε X_2=112 και αντίστοιχα θέτοντας X_2=0, βρίσκουμε X_1 =80.

Με αυτόν τον τρόπο αυξάνοντας κάθε φορά την τιμή του κέρδους παίρνουμε μία νέα ισοκερδή ευθεία παράλληλη με την αρχική (διότι οι συντελεστές του X_1 και X_2 δεν αλλάζουν) που βρίσκεται δεξιότερα και πίσω από την προηγούμενη.

γ) Μεγιστοποίηση κέρδους

Επομένως εφόσον στόχος μας είναι η μεγιστοποίηση των κερδών, θα πρέπει να προσπαθήσουμε να μετακινήσουμε την ισοκερδή ευθεία όσο πιο ψηλά και δεξιά μπορούμε, χωρίς όμως να ξεφύγουμε από τα όρια της περιοχής των εφικτών λύσεων.

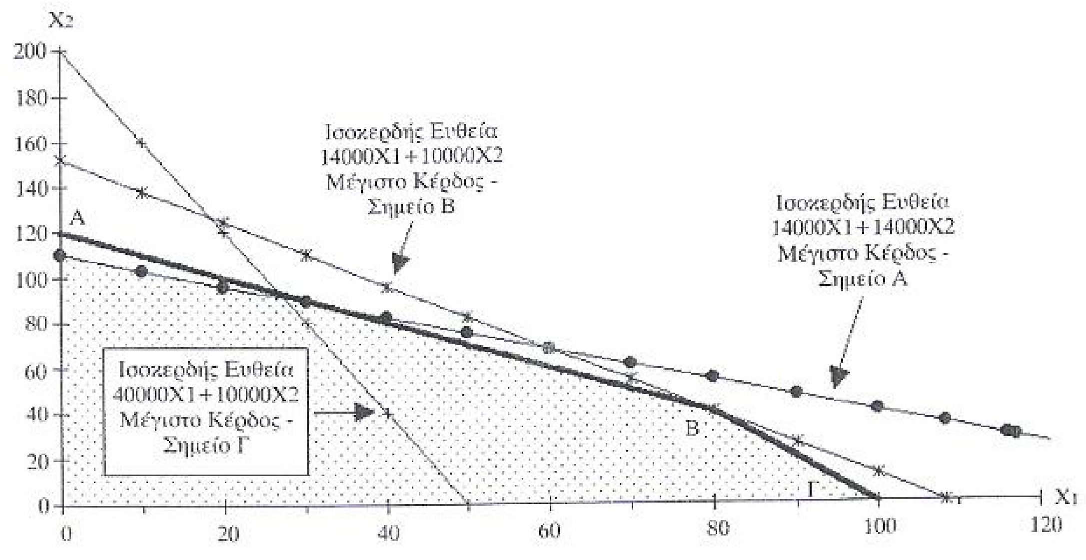
Ποιο είναι το τελευταίο ακραίο σημείο (ή σημεία) της περιοχής των εφικτών λύσεων από τα οποία θα περάσει η ισοκερδής ευθεία; Προφανώς στην περίπτωση του συγκεκριμένου παραδείγματος είναι το σημείο Β της περιοχής των εφικτών λύσεων. Αυτό είναι και το σημείο στο οποίο μεγιστοποιείται και το συνολικό κέρδος, διότι κάθε άλλη ισοκερδής ευθεία που θα αντιστοιχούσε σε μεγαλύτερο κέρδος θα βρίσκονταν εκτός της περιοχής των εφικτών λύσεων.

δ) Ακραία σημεία της περιοχής εφικτών λύσεων

Εφ' όσον προσπαθούμε να απομακρύνουμε την ισοκερδή ευθεία από την αρχή των αξόνων όσο το δυνατόν περισσότερο (διότι η μεγαλύτερη απομάκρυνση σημαίνει και μεγαλύτερο κέρδος). Είναι προφανές ότι το τελευταίο σημείο από το οποίο μπορεί να περάσει μια ισοκερδής ευθεία θα είναι μία από τις κορυφές της περιοχής των εφικτών λύσεων δηλαδή το σημείο Α ή Β ή Γ. Το ποια συγκεκριμένη κορυφή θα είναι αυτή, εξαρτάται από την κλίση της ισοκερδούς ευθείας. Στην προκειμένη περίπτωση αν η κλίση της ευθείας ήταν λίγο μικρότερη, το τελευταίο σημείο από το οποίο θα περνούσε πριν βρεθεί εκτός της περιοχής των εφικτών λύσεων θα ήταν το σημείο Α. Αντίθετα αν η κλίση της ισοκερδούς ευθείας ήταν μεγαλύτερη, το τελευταίο σημείο θα ήταν το σημείο Γ.

Η κλίση της ισοκερδούς ευθείας καθορίζεται όμως από τους συντελεστές κέρδους των X_1και X_2. Για παράδειγμα αν το κέρδος για τα τραπέζια και καρέκλες ήταν το ίδιο π.χ. 14.000 δραχμές τότε η ισοκερδής ευθεία θα είχε μικρότερη κλίση και το τελευταίο σημείο της εφικτής περιοχής από το οποίο θα περνούσε θα ήταν το σημείο Α. Αντίθετα αν το κέρδος για τα τραπέζια ήταν 40.000 δραχμές και το κέρδος για τις καρέκλες 10.000 δραχμές η κλίση της ισοκερδούς ευθείας θα ήταν πολύ μεγαλύτερη και επομένως το τελευταίο σημείο από το οποίο θα περνούσε θα ήταν το σημείο Γ.

Βλέπουμε στο σχήμα παρακάτω:


X2
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
20
40
60
80
100
120
X1
A
B
Γ
Ισοκερδής Ευθεία
14000X1+10000X2
Μέγιστο Κέρδος -
Σημείο Β
Ισοκερδής Ευθεία
14000X1+14000X2
Μέγιστο Κέρδος -
Σημείο Α
Ισοκερδής Ευθεία
40000X1+10000X2
Μέγιστο Κέρδος -
Σημείο Γ

2.5. Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Στη προηγούμενη ενότητα εξετάσαμε ένα παράδειγμα προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού το οποίο είχε μόνο δύο μεταβλητές. Έχοντας μόνον δύο μεταβλητές η επίλυση του προβλήματος ήταν δυνατή με τη βοήθεια της γραφικής μεθόδου. Αφού ορίσαμε την περιοχή των εφικτών λύσεων, προσπαθήσαμε να δούμε ποιο από τα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων δίνει το μεγαλύτερο κέρδος. Η γραφκή προσέγγιση μας δίνει την ευκαιρία να κατανοήσουμε τις βασικές αρχές των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Σε πραγματικές όμως εφαρμογές του γραμμικού προγραμματισμού ο αριθμός των μεταβλητών είναι πολύ μεγαλύτερος των δύο, και επομένως η γραφική προσέγγιση επίλυσης δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί.

Σε πραγματικές εφαρμογές ο αριθμός των μεταβλητών και των περιορισμών των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού ανέρχεται σε δεκάδες, εκατοντάδες και μερικές φορές ακόμα και σε χιλιάδες. Χρειαζόμαστε επομένως μια συστηματική μέθοδο επίλυσης των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού η οποία να είναι δυνατόν να υλοποιηθεί μέσω κατάλληλων προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού οποιουδήποτε μεγέθους. Η συστηματική αυτή μέθοδος είναι η μέθοδος **Simplex.**

Ποια είναι η προσέγγιση που ακολουθεί η μέθοδος Simplex; Σε βασικές γραμμές είναι ανάλογη με την προσέγγιση που ακολουθήσαμε στη γραφική μέθοδο.Στη γραφική μέθοδο εξετάσαμε όλα τα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων. Διαπιστώσαμε ότι η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης είναι δυνατόν να επιτευχθεί μόνο στα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων. Η μέθοδος Simplex εξετάζει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μόνο στα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων, με ένα συστηματικό αλγεβρικό τρόπο.

Η διαδοχική εξέταση των ακραίων σημείων γίνεται με έναν επαναληπτικό τρόπο, δηλαδή, με το να επαναλαμβάνεται το ίδιο σύνολο των διαδικασιών και αλγεβρικών πράξεων σε διαδοχικά βήματα έως ότου επιτύχουμε να εντοπίσουμε τη βέλτιστη λύση. Κάθε βήμα της μεθόδου Simplex αντιστοιχεί στην επιλογή ενός ακραίου σημείου της περιοχής των εφικτών λύσεων. Σε κάθε νέο βήμα το επόμενο ακραίο σημείο της περιοχής των εφικτών λύσεων επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτη σης να αυξάνεται (ή αντίστοιχα να μειώνεται αν η αντικειμενική συνάρτηση αφορά την ελαχιστοποίηση του κόστους) και επομένως σταδιακά πλησιάζουμε προς τη βέλτιστη λύση. Η μέθοδος simplex εκτός από τον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης, δηλαδή τις τιμές των μεταβλητών και το αντίστοιχο βέλτιστο κέρδος ή κόστος, μας παρέχει επίσης πλήθος άλλων πληροφοριών οικονομικής φύσεως τις οποίες δεν είναι δυνατόν να παράγουμε με άλλο τρόπο.

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε τη μέθοδο Simplex μέσω ενός παραδείγματος. Θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο παράδειγμα που χρησιμοποιήσαμε στη γραφική μέθοδο.

Ο αρχικός πίνακας Simplex

Ας ξαναθυμηθούμε το πρόβλημα του παραδείγματος της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ:

X_1 = αριθμός τραπεζιών που θα παραχθούν
X_2 = αριθμός καρεκλών που θα παραχθούν

Μεγιστοποίηση Συνολικού Κέρδους : $14000\ X_1 + 10000X_2$

$8X_1 + 8X_2 \leq 960$ Περιορισμός ξυλουργείου

$4X_1 + 2X_2 \leq 400$ Περιορισμός βαφείου

$X_1 \geq 0$

$X_2 \geq 0$

v ***Μετατροπή ανισοτήτων σε ισότητες***

Το πρώτο βήμα της μεθόδου Simplex επιβάλει τη μετατροπή όλων των περιορισμών που διατυπώνονται με ανισότητες σε ισότητες. Η μετατροπή αυτή επιτυγχάνεται με τη χρήση μεταβλητών περιθωρίου (slack variables). Οι μεταβλητές περιθωρίου αντιπροσωπεύουν αχρησιμοποίητους πόρους στη διαδικασία μεγιστοποίησης του κέρδους. Στην περίπτωση του παραδείγματος που εξετάζουμε ορίζουμε δύο μεταβλητές περιθωρίου (μία για κάθε περιορισμό) ως εξής:

S_1 = Ώρες ξυλουργείου (από τις διαθέσιμες) που δεν θα χρησιμοποιηθούν στην παραγωγή καρεκλών και τραπεζιών

S_2 = Ώρες βαφείου που δεν θα χρησιμοποιηθούν.

Για παράδειγμα αν παράγουμε 70 τραπέζια (X_1 =70) και 40 καρέκλες (X_2=40), οι ώρες ξυλουργείου που θα απαιτηθούν είναι 8·70 + 8·40 = 880. Σε αυτήν την περίπτωση η τιμή της μεταβλητής S_1 είναι 80 ώρες (960 διαθέσιμες -880 χρησιμοποιηθείσες). Ο όρος μεταβλητές περιθωρίου έχει την έννοια ότι οι τιμές αυτών των μεταβλητών συμβολίζουν τη διαφορά μεταξύ της αριστερής πλευράς της ανισότητας (απαιτούμενη ποσότητα) και της αντίστοιχης δεξιάς πλευράς (διαθέσιμη ποσότητα). Στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται όλοι οι διαθέσιμοι πόροι ενός περιορισμού τότε η αντίστοιχη μεταβλητή περιθωρίου έχει την τιμή μηδέν.

Οι περιορισμοί του προβλήματος με την προσθήκη των μεταβλητών περιθωρίου γράφονται ως εξής:

$8X_1 + 8X_2 + S_1 = 960$ Περιορισμός ξυλουργείου
$4X_1 + 2X_2 + S_2 = 400$ Περιορισμός βαφείου

αν θέλουμε να συμπεριλάβουμε όλες τις μεταβλητές σε όλους τους περιορισμούς (σε όποιον περιορισμό δεν εμφανίζεται μία μεταβλητή ο αντίστοιχος συντελεστής της είναι μηδέν έχουμε:

$8X_1 + 8X_2 + 1S_1 + 0S_2 = 960$ Περιορισμός ξυλουργείου
$4X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 0S_2 = 400$ Περιορισμός βαφείου

Οι μεταβλητές περιθωρίου δεν συνεισφέρουν στο κέρδος της επιχείρησης επομένως μπορούμε να τις συμπεριλάβουμε στην αντικειμενική συνάρτηση με αντίστοιχους συντελεστές κέρδους μήδεν. Επομένως η αντικειμενική συνάρτηση μετά την προσθήκη και των μεταβλητών περιγράφεται ως εξής:

Μεγιστοποίηση Συνολικού Κέρδους : $14000\ X_1 + 10000X_2 + 0S_1 + 0S_2$

Σημείωση: οι πραγματικές μεταβλητές X_1, X_2 αντιπροσωπεύουν ποσότητες παραγωγής των δύο προιόντων, ενώ οι μεταβλητές περιθωρίου S_1, S_2 ώρες παραγωγής που δεν απορροφούνται στην παραγωγή των ποσοτήτων X_1 και X_2.

v *Αλγεβρικός προσδιορισμός λύσεων γραμμικού προγραμματισμού*

Ας εξετάσουμε τους περιορισμούς του προβλήματος όπως διαμορφώθηκαν μετά την προσθήκη των μεταβλητών περιθωρίου. Έχουμε λοιπόν, ένα σύστημα δύο εξισώσεων με τέσσερις μεταβλητές. Εφόσον ο αριθμός των εξισώσεων είναι μικρότερος από τον αριθμό των αγνώστων, υπάρχουν πολλές λύσεις του συστήματος. Ένας απλός τρόπος λύσεων είναι να θέσουμε 2 από τις μεταβλητές ίσες με μηδέν και να λύσουμε το αλγεβρικό σύστημα που προκύπτει των 2 άλλων μεταβλητών με 2 εξισώσεις για να προσδιορίσουμε τις τιμές τους.

Μια εύκολη λύση είναι να θέσουμε τις μεταβλητές $X_1 = 0$ και $X_2 = 0$. Η λύση που προκύπτει σε αυτήν την περίπτωση είναι $S_1 = 960$ και $S_2 = 400$. Είναι ευνόητο ότι η λύση αυτή δεν είναι ιδιαίτερα ελκυστική διότι αντιπροσωπεύει την παραγωγή 0 τεμαχίων από καρέκλες και τραπέζια. Με μηδενική παραγωγή καμία από τις διαθέσιμες ώρες παραγωγής δεν χρησιμοποιείται. Γι' αυτό επομένως οι τιμές των μεταβλητών περιθωρίου είνα $S_1 = 960$ ώρες και $S_2 = 400$ ώρες ίσες δηλαδή με τις αρχικά διαθέσιμες ώρες παραγωγής.

Η μέθοδος Simplex όπως προαναφέραμε είναι μια επαναληπτική μέθοδος η οποία επαναλαμβάνει τα ίδια βήματα έως ότου προσδιορίσουμε τη βέλτιστη λύση. Σε κάθε βήμα της μεθόδου Simplex παίρνουμε μια νέα εφικτή λύση που είναι καλύτερη από τη προηγούμενη (βελτιώνει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης). Σαν αρχική λύση της μεθόδου Simplex χρησιμοποιούμε την $X_1 = 0$ και $X_2 = 0$ $S_1 = 960$ και $S_2 = 400$. Η συγκεκριμένη λύση είναι η λύση που μπορούμε να παράγουμε εύκολα για οποιοδήποτε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στην αρχική αυτή λύση είναι προφανώς 0.

v *Ο αρχικός πίνακας Simplex*

Αν τοποθετήσουμε τους συντελεστές των μεταβλητών των δύο περιορισμών και της αντικειμενικής σε ένα πίνακα θα έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

Συντ. Κέρδους	C_j →	14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	Bi
0	S_1	8	8	1	0	960
0	S_2	4	2	0	1	400
	Z_j	0	0	0	0	0
	C_j - Z_j	14.000	10.000	0	0	

Ο παραπάνω πίνακας καλείται πίνακας Simplex

Κάθε πίνακας Simplex αντιστοιχεί σε μία εφικτή λύση του προβλήματος. Ο αρχικός πίνακας simplex αντιστοιχεί στη λύση S_1 = 960 και S_2 =400και επομένως X_1 =0 και X_2=0.Κάθε πίνακας Simplex αντιστοιχεί σε μία εφικτή λύση του προβλήματος. Ο αρχικός πίνακας simplex αντιστοιχεί στη λύση S_1 = 960 και S_2 =400και επομένως X_1 =0 και X_2=0.

Όπως παρατηρούμε ο πίνακας Simplex εκτός των συντελεστών των μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς του προβλήματος περιλαμβάνει και κάποιες άλλες πληροφορίες όπως η στήλη που επιγράφεται "βασικές μεταβλητές" και οι σειρές Z_j και C_j - Z_j. Οι επιπλέον αυτές πληροφορίες είναι απαραίτητες για την εφαρμογή της μεθόδου Simplex. Ας δούμε λοιπόν αναλυτικότερα τη δομή του πίνακα Simplex.

- ***Βασικές μεταβλητές και μη βασικές***

Σ' ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού οι μεταβλητές που έχουν μη μηδενικές τιμές ονομάζονται βασικές μεταβλητές ενώ οι υπόλοιπες μη βασικές. Ο αριθμός των βασικών μεταβλητών σε κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι ίσος με τον αριθμό των περιορισμών του προβλήματος. Η πρώτη στήλη του πίνακα Simplex περιλαμβάνει τους συντελεστές κέρδους που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές. Στη δεύτερη στήλη τοποθετούμε τις βασικές μεταβλητές (την S_1 και S_2 για τον αρχικό πίνακα). Οι επόμενες στήλες αποτελούν το κομμάτι του πίνακα Simplex και τα στοιχεία του, αντιστοιχούν στους συντελεστές των μεταβλητών του προβλήματος, ενώ τα στοιχεία της τελευταίας στήλης αντιστοιχουν στις τιμές των περιορισμών.

- ***Οι τιμές των βασικών μεταβλητών δίνονται στην τελευταία στήλη***

Δηλαδή η τιμή 960 αντιστοιχεί στην S_1 και η τιμή 400 στην S_2. Οι τιμές των μη βασικών μεταβλητών (όσων δεν εμφανίζονται στην πρώτη στήλη) είναι μηδέν. Δηλαδή X_1=0 και X_2=0.

Η πρώτη σειρά του πίνακα (C_j) περιλαμβάνει τους συντελεστές κέρδους όλων των μεταβλητών.

Για να εξηγήσουμε την έννοια των τιμών στις σειρές Z_j και C_j-Z_j του πίνακα, πρέπει πρώτα να δώσουμε την οικονομική ερμηνεία των στοιχείων του πίνακα Simplex.

- ***Οικονομική ερμηνεία του πίνακα Simplex – Συντελεστές ανταλλαγής***

Τα στοιχεία κάθε στήλης του πίνακα Simplex είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές των περιορισμών του προβλήματος. Για παράδειγμα η πρώτη στήλη (8,4) περιέχει τους συντελεστές του X_1 στον πρώτο και δεύτερο περιορισμό αντίστοιχα. Ποιά είναι όμως η οικονομική ερμηνεία των συντελεστών αυτών;

Τα στοιχεία της στήλης X_1 καλούνται συντελεστές ανταλλαγής μεταξύ της X1 και των βασικών μεταβλητών του πίνακα, δηλαδή των S_1 και S_2 και ερμηνεύονται ως εξής:

Για να αυξήσουμε την τιμή της X_1 κατά μία μονάδα (για να παράγουμε δηλαδή ένα τραπέζι) απαιτείται να μειώσουμε τις τιμές των S_1 και S_2 κατά 8 και 4 μονάδες αντίστοιχα (δηλαδή να ελαττώσουμε τις μη διαθέσιμες ώρες στο ξυλουργείο και το βαφείο κατα 8 και 4 αντίστοιχα). Η ερμηνεία αυτή είναι λογική αν σκεφθούμε ότι για την κατασκευή κάθε τραπεζιού απαιτούνται 8 ώρες στο ξυλουργείο και 4 ώρες στο βαφείο. Αντίστοιχη ερμηνεία μπορούμε να δώσουμε και για τα στοιχεία της στήλης X_2.

Κάτι άλλο που θα πρέπει επίσης να παρατηρήσουμε είναι ότι για κάθε βασική μεταβλητή η αντίστοιχη στήλη περιέχει μόνο ένα 1 στη θέση που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη μεταβλητή ενώ όλα τα άλλα στοιχεία της στήλης είναι 0.

Για παράδειγμα η στήλη της S_1 είναι (1,0) ενώ η στήλη της S_2 είναι (0,1).

v *Οι σειρές C_j, Z_j, $C_j – Z_j$*

Η σειρά C_j περιέχει τους συντελεστές κέρδους της αντικειμενικής συνάρτησης. Τα στοιχεία αυτής της σειράς μπορεί να ερμηνευθούν ώς η μικτή αύξηση που προκύπτει στο κέρδος αν η η τιμή της κάθε μεταβλητής αυξηθεί κατά μία μονάδα. Έτσι μία μονάδα της X_1 αποφέρει επιπλέον κέρδος 14.000 δρχ.

Τα στοιχεία της σειράς Z_j δηλώνουν το κατά πόσο θα μειωθεί το συνολικό κέρδος αν η τιμή της κάθε μεταβλητής αυξηθεί κατα μία μονάδα. Πώς όμως δικαιολογείται η μείωση του κέρδους; Ας θεωρήσουμε τη μεταβλητή X_1. Όπως εξηγήσαμε προηγουμένως, για να αυξηθεί η X_1 κατά μία μονάδα θα πρέπει να ελαττωθεί η S_1 κατά 8 μονάδες, και η S_2 κατά 4 μονάδες. Γενικώς, η μείωση κάποιων άλλων μεταβλητών ώστε να αυξηθεί η X_1 θα μπορούσε να έχει επιπτώσεις στο συνολικό κέρδος. Αν και οι άλλες μεταβλητές είχαν συνεισφορά στο κέρδος όπως αυτό ορίζεται στην αντικειμενική συνάρτηση, τότε τυχόν μείωση των τιμών τους θα είχε ως αποτέλεσμα και μείωση του κέρδους. Η μείωση των S_1και S_2 έχει κάποια επίπτωση στο συνολικό κέρδος; Στην προκειμένη περίπτωση όχι γιατί οι συντελεστές κέρδους των S_1 και S_2 είναι 0.

Η τελευταία γραμμή του πίνακα C_j-Z_j είναι η γραμμή που μας δίνει την καθαρή επίπτωση στο συνολικό κέρδος (αύξηση κέρδους - μείωση κέρδους) στην περίπτωση που κάθε μία από τις μη βασικές μεταβλητές του προβλήματος αυξηθεί κατά μία μονάδα.

v ***Κριτήριο Βελτιστοποίησης***

Η τελευταία αυτή γραμμή του πίνακα Simplex καθορίζει και κατά πόσο η δεδομένη λύση του πίνακα Simplex είναι βέλτιστη ή όχι. Αρνητικές τιμές C_j-Z_j δηλώνουν ότι στην περίπτωση που η τιμή της αντίστοιχης μεταβλητής αυξηθεί, θα υπάρχει μείωση του κέρδους.

Αντίθετα θετικές τιμές C_j-Z_j δηλώνουν ότι μπορεί να υπάρξει βελτίωση του κέρδυυς αν αυξηθεί η τιμή της συγκεκριμένης μεταβλητής με θετικό C_j-Z_j.Αν βέβαια όλες οι τιμές των C_j-Z_j είναι αρνητικές ή μηδέν τότε η λύση που έχουμε είναι η βέλτιστη.

v ***Επαναληπτική διαδικασία Simplex***

Βήμα 1^{o} :

Επιλέγουμε τη μεταβλητή που θα συμπεριληφθεί στις βασικές μεταβλητές. Η επιλογή γίνεται με βάση τη συνεισφορά κάθε μη βασικής μεταβλητής στο συνολικό κέρδος η οποία φαίνεται στα στοιχεία της σειράς C_j-Z_j. Η μεταβλητή με το μεγαλύτερο θετικό C_j -Z_j είναι αυτή που "μπαίνει" στη βάση.
Αν όλες οι μεταβλητές έχουν τιμές C_i - Z_i μικρότερες ή ίσες με μηδέν τότε η λύση που έχουμε είναι βέλτιστη. Τη στήλη που αντιστοιχεί στη μεταβλητή που μπαίνει στη βάση την ονομάζουμε οδηγό στήλη.

Βήμα 2^{0} :

Εφόσον μια από τις μη βασικές μεταβλητές "μπαίνει" στη βάση, μια από τις βασικές μεταβλητές θα πρέπει να "φύγει". Βρίσκουμε τη μεταβλητή της βάσης η οποία θα αντικατασταθεί από τη νέα μεταβλητή που επιλέχθηκε στο βήμα 1 ως εξής:

Διαιρούμε όλα τα στοιχεία της τελευταίας στήλης του πίνακα Simplex (ποσότητες) με τα αντίστοιχα θετικά στοιχεία (σε περίπτωση αρνητικής ή μηδενικής τιμής το αγνοούμε) της οδηγού στήλης. Το μικρότερο θετικό κλάσμα αντιστοιχεί στη μεταβλητή που θα αντικατασταθεί. Τη σειρά της μεταβλητής που θα αντικατασταθεί την αποκαλούμε οδηγό σειρά. Η τομή της οδηγού σειράς με την οδηγό στήλη μας δίνει το οδηγό στοιχείο.

Βήμα 3^0 :

Υπολογισμός νέων τιμών για την οδηγό σειρά. Για να βρούμε τις νέες τιμές της οδηγού σειράς διαιρούμε όλα τα στοιχεία με το οδηγό στοιχείο.

Βήμα 4^0 :

Υπολογισμός νέων τιμών για τις υπόλοιπες σειρές του πίνακα Simplex. Οι νέες τιμές κάθε σειράς εκτός της οδηγού σειράς υπολογίζονται ως εξής:

(Νέα σειρά) = (Προηγούμενη σειρά) – (Στοιχείο της οδηγού στήλης)(Νέα οδηγό σειρά)

Βήμα 5^0 :

Υπολογισμός των νέων τιμών για τις σειρές C_j και C_j-Z_j .

Ο δεύτερος πίνακας Simplex

Αφού αναπτύξαμε τα πέντε βήματα με τα οποία υπολογίζουμε τα στοιχεία του επόμενου πίνακα Simplex κάθε φορά,ας δούμε τώρα την εφαρμογή τους στο συγκεκριμένο παράδειγμα. Στόχος μας είναι να βρούμε μια νέα λύση η οποία θα μας δώσει μεγαλύτερο κέρδος. Ας θυμηθούμε ότι το κέρδος με την υπάρχουσα λύση του αρχικού πίνακα Simplex είναι 0. Η αρχική λύση είναι $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $S_1 = 960$, $S_2 = 400$.

Βήμα 1^o :

Η επιλογή για το ποια μεταβλητή θα είναι αυτή που θα συμπεριληφθεί στη βάση θα γίνει μεταξύ των X_1 και X_2 διότι αυτές είναι οι μη βασικές μεταβλητές. Επιλέγουμε τη μεταβλητή με τη μεγαλύτερη θετική τιμή στη σειρά C_j - Z_j. Η μεταβλητή X_1 έχει τιμή C_j-Z_j = 14.000 ενώ η X_2 έχει τιμή 10.000. Επομένως επιλέγουμε την X_1 διότι για κάθε μονάδα από την X_1 που θα παραχθεί το κέρδος θα αυξηθεί κατά 14.000. (Αντίθετα η επιλογή της X_2 θα οδηγούσε σε μικρότερη αύξηση, μόνο 10.000 δραχμών ανά μονάδα της X_2). Επομένως η στήλη της X_1 είναι η οδηγός στήλη. Το παρακάτω σχήμα μας βοηθά να κατανοήσουμε καλύτερα:

Συντ. Κέρδους	C_j	14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	Bi
0	S_1	8	8	1	0	960
0	S_2	4	2	0	1	400
	Z_j	0	0	0	0	0
	C_j - Z_j	14.000	10.000	0	0	

Οδηγός σειρά

Κέρδος

Οδηγό στοιχείο

Οδηγός στήλη

Βήμα 2^0 :

Μετά την επιλογή της X_1 για να συμπεριληφθεί στη νέα βάση θα πρέπει να δούμε ποια από τις ήδη βασικές μεταβλητές S_1 και S_2 θα αντικατασταθεί από την X_1. Αν υπολογίσουμε τους λόγους των ποσοτήτων της τελευταίας στήλης προς τους συντελεστές της οδηγού στήλης έχουμε:

Για την S_1 : 960 ώρες ξυλουργείου / 8 ώρες ανά τραπέζι = 120 τραπέζια

Για την S_2 : 400 ώρες βαφείου / 4 ώρες ανά τραπέζι = 100 τραπέζια

Αυτό σημαίνει ότι η μεταβλητή που αντιστοιχεί στο μικρότερο κλάσμα θα αντικατασταθεί από την X_1. Ποια είναι όμως η οικονομική εξήγηση γι' αυτήν την αντικατάσταση;

v *Οικονομική ερμηνεία της αντικατάστασης βασικών μεταβλητών*

Η μεταβλητή X_1 επιλέγεται γιατί κάθε αύξηση της X_1 κάτι μία μονάδα (παραγωγή ενός τραπεζιού) αυξάνει το κέρδος κατά 14.000 δραχμές. Άρα λογικά θα επιθυμούσαμε να αυξήσουμε την τιμή X_1 όσο το δυνατόν περίσσότερο γίνεται. Επειδή όμως αύξηση της ποσότητας της X_1 σημαίνει ανάλωση πόρων είναι προφανές ότι η αύξηση της X_1 είναι εφικτή μόνο εφόσον υπάρχουν διαθέσιμοι πόροι και περιορίζεται από ποσότητα των διαθέσιμων πόρων .

Για κάθε μονάδα της X_1 που παράγεται πρέπει να μειώσουμε τη S_1 κατά 8 μονάδες και εφόσον έχουμε μόνο 960 μονάδες της S_1 διαθέσιμες η ανώτερη τιμή για την X_1 είναι το 960/8=120. Ομοίως για κάθε μονάδα X_1 πρέπει να μειώσουμε τη S_2 κατά 4 μονάδες.

Εφόσον, έχουμε 400 μονάδες της S_2 διαθέσιμες, η μεγαλύτερη ποσότητα X_1 που μπορεί να παραχθεί είναι 400/4= l00 μονάδες. Άρα η αύξηση της X_1 δεν μπορεί να υπερβεί τις 100 μονάδες. Αν θέσουμε $X_1 = 100$ τότε θα χρησιμοποιηθεί όλη η ποσότητα των 400 ωρών της S_2 και επομένως η τιμή της S_2 θα είναι 0, και δεν θα είναι πλέον βασική μεταβλητή.

Βήμα 3^0 :

Αφού αποφασίσαμε πλέον ότι η μεταβλητή X_1 θα αντικαταστήσει την S_2, θα πρέπει να υπολογίσουμε ξανά τις τιμές για το δεύτερο πίνακα Simplex. Κατ' αρχήν θα αντικαταστήσουμε την οδηγό σειρά. Το οδηγό στοιχείο είναι το 4. Διαιρούμε επομένως όλα τα στοιχεία της οδηγού σειράς με το 4. Άρα η νέα οδηγός σειρά είναι:

4/4=1   2/4=1/2 =0.5   0/4=0   1/4=1/4=0.25   400/4=100

Άρα ο νέος πίνακας Simplex θα έχει την εξής μορφή:

Συντ. Κέρδους	C_j	14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	Bi
0	S_1					
14.000	X_1	1	1/2	0	1/4	400
	Z_j					
	$C_j - Z_j$					

Όπως βλέπουμε η X_1 αντικατέστησε την S_2 στη βάση. Η τιμή της X_1 είναι 100 μονάδες, ενώ ο συντελεστής κέρδους της X_1 εμφανίζεται στη στήλη συντελεστών κέρδους των βασικών μεταβλητών.

Βήμα 4^0 :

Απομένει τώρα να υπολογίσουμε τις νέες τιμές για τη σειρά που αντιστοιχεί στην S_1 καθώς και τις νέες τιμές στις σειρές Z_j και C_j- Z_j. Για να υπολογίσουμε τη νέα σειρά S_1 θα κάνουμε τις εξής πράξεις όπως προαναφέραμε προηγουμένως:

(Προηγούμενες τιμές σειράς S_1) – (στοιχείο της οδηγού στήλης σειράς S_1) (Νέες τιμές της οδηγού σειράς) = Νέες τιμές σειράς S_1.

Το στοιχείο της οδηγού στήλης που αντιστοιχεί στη σειρά S_1 (στον προηγούμενο πίνακα Simplex) είναι το 8. Επομένως οι νέες τιμές της οδηγού σειράς αφού πολλαπλασιασθούν με 8 θα αφαιρεθούν από τις τιμές της σειράς S_1. Έχουμε λοιπόν:

	X_1	X_2	S_1	S_2	Bi
Προηγ.τιμές S_1	8	8	1	0	960
(οδ.στοιχείο)x(νέα οδ.σειρά)	(-)8x1	(-)8x1/2	(-)8x0	(-)8x1/4	(-)8x100
νέες τιμές S1	=0	=4	=1	=-2	=160

Επομένως ο νέος πίνακας Simplex μετά τον υπολογισμό και της σειράς S_1 θα έχει την εξής μορφή:

Συντ. Κέρδους	C_j →	14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	Bi
0	S_1	0	4	1	-2	160
14.000	X_1	4	1/2	0	1/4	100
	Z_j					0
	C_j - Z_j					

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ο νέος πίνακας Simplex έχει και αυτός δύο μοναδιαίες στήλες που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές S_1 [η στήλη (1,0)] και X_1 [η στήλη (0,1)].

Βασικά οι αλγεβρικές πράξεις που εκτελέσαμε για να πάρουμε τις νέες τιμές του πίνακα Simplex είχαν ακριβώς αυτό σαν στόχο. Το να μετατρέψουμε δηλαδή την στήλη που αντιστοιχεί στην νέα βασική μεταβλητή X_1 σε μοναδιαία στήλη. Η διαίρεση με το οδηγό στοιχείο έδωσε την τιμή 1 στη θέση της τομής της σειράς X_1 με τη στήλη X_1. Ο πολλαπλασιασμός των νέων τιμών της οδηγού σειράς με το 8 και η αφαίρεση του γινομένου από τη σειρά S_1 είχε σαν αποτέλεσμα να μηδενίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης X_1.

Βήμα 5^0 :

Απομένει τώρα ο υπολογισμός των νέων τιμών για τις σειρές Z_j και C_j-Z_j. Η σειρά Z_j αντιστοιχεί στη μείωση του κέρδους στην περίπτωση που επιλέξουμε μια από τις μη βασικές μεταβλητές να συμπεριληφθεί στη βάση. Στο σημείο αυτό μπορούμε να εξηγήσουμε καλύτερα την έννοια των τιμών της σειράς Z_j. Κατ' αρχήν η νέα λύση που προέκυψε είναι X_1 = 100, τεμάχια X_2 = 0 καρέκλες και S_1 = 160 ώρες S_2 = 0 ώρες. Δηλαδή παραγωγή 100 τραπεζιών' καθόλου καρεκλών με περίσσευμα 160 ωρών στο ξυλουργείο και 0 ωρών στο βαφείο. Ας υποθέσουμε ότι εξετάζουμε την περίπτωση παραγωγής και κάποιας ποσότητας καρεκλών. Αυτό σημαίνει ότι θέλουμε να αυξήσουμε την τιμή της X_2 από 0 που είναι τώρα σε μια θετική ποσότητα, δηλαδή να τη συμπεριλάβουμε στη βάση (αντικαθιστώντας κάποια από τις μεταβλητές S_1 ή X_1). Ο νέος πίνακας Simplex μας δίνει την εξής πληροφορία (στήλη X_2).

- ***Συντελεστές ανταλλαγής***

Για να αυξηθεί η τιμή της X_2 κατά μία μονάδα απαιτείται να μειώσουμε την S_1 κατά 4 και τη X_1 κατά 1/2 μονάδες. Δηλαδή να παράγουμε 1/2 λιγότερα τραπέζια και να μειώσουμε κατά 4 ώρες τις διαθέσιμες στο ξυλουργείο. Οι παραπάνω συντελεστές ανταλλαγής (όπως τους αποκαλέσαμε επαληθεύονται αν ανατρέξουμε στα αρχικά δεδομένα του προβλήματος.

Η μείωση της X_1 κατά 1/2 θα ελευθερώσει ορισμένες ώρες στα τμήματα ξυλουργείου και βαφείου. Συγκεκριμένα αφού το 1 τραπέζι απαιτεί 8 ώρες ξυλουργείου και 4 ώρες βαφείου, η μείωση της παραγωγής τραπεζιών κατά 1/2 θα έχει ως αποτέλεσμα την απελευθέρωση 4 ωρών ξυλουργείου και 2 ωρών στο βαφείο. Αν πάρουμε επίσης και 4 ώρες από αυτές που περίσσευαν στο ξυλουργείο, θα έχουμε 8 συνολικά ώρες ξυλουργείου και 2 ώρες βαφείου που είναι ακριβώς οι ώρες που χρειάζονται για την παραγωγή 1 καρέκλας.

- ***Οι τιμές C_j-Z_j***

Από την πλευρά των κερδών τώρα, η παραγωγή 1 καρέκλας θα έχει θετική συνεισφορά 10.000 δραχμών στα κέρδη (σειρά C_j). Παράλληλα όμως θα έχει και αρνητικό αποτέλεσμα γιατί η αύξηση της παραγωγής καρεκλών θα γίνει σε βάρος της παραγωγής των τραπεζιών. Εφόσον θα πρέπει να μειώσουμε την παραγωγή των τραπεζιών κατά 1/2 θα έχουμε απώλεια κερδών 7.000 δραχμών (το κέρδος για κάθε τραπέζι είναι 14.000 δραχμές). Η τιμή της Z_j που αντιστοιχεί στη στήλη X_2 είναι 7.000.

Για να υπολογίσουμε τις τιμές της σειράς Z_j πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές ανταλλαγής στη στήλη κάθε μιας μεταβλητής με τους αντίστοιχους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών και προσθέτουμε τα γινόμεναως εξής:

Συντ. Κέρδους	C_j	14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	Bi
0	S_1	0	4	1	-2	160
14.000	X_1	1	1/2	0	1/4	100
	Z_j	0·0+ 14.000·1	0·4 +14.000·1/2	0·1 +14.000·0	0·(-2) +14.000·1/4	0
		14.000	7.000	0	3.500	
	C_j-Z_j	0	3.000	0	-3.500	

Οι τιμές της σειράς C_j - Z_j προκύπτουν από αφαίρεση των τιμών της σειράς Z_j από τη σειρά C_j. Βλέπουμε λοιπόν ότι η αύξηση της X_2 κατά 1 μονάδα (παραγωγή μίας καρέκλας) θα έχει σαν αποτέλεσμα καθαρή αύξηση των κερδών κατά 3.000 δραχμές.

Τέλος ο υπολογισμός του κέρδους που αντιστοιχεί στη λύση του τρέχοντος πίνακα Simplex υπολογίζεται με την άθροιση των γινομένων της τελευταίας στήλης που δίνει τις τιμές των μεταβλητών με τους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών.

Κέρδος = 160   0 + 100   14.000 = 14.000.000

Μετά την ολοκλήρωση όλων των υπολογισμών ο δεύτερος πίνακας Simplex έχει ως εξής:

Συντ. Κέρδους	C_j →	14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	Bi
0	S_1	0	4	1	-2	160
14.000	X_1	4	1/2	0	1/4	100
	Z_j	14.000	7.000	0	3.500	1.400.000
	C_j - Z_j	0	3.000	0	-3.500	

Ο τρίτος πίνακας Simplex

Εφόσον η σειρά C_j - Z_j του δεύτερου πίνακα Simplex περιλαμβάνει και θετικές τιμές η λύση που μας δίνει ο δεύτερος πίνακας Simplex δεν είναι η βέλτιστη λύση. Επομένως θα πρέπει να επαναλάβουμε τα πέντε βήματα του αλγορίθμου Simplex για να πάρουμε τον τρίτο κατά σειρά πίνακα.

Βήμα 1^{o} :

Η μεταβλητή που θα συμπεριληφθεί στη βάση είναι η X_2 διότι είναι η μόνη με θετική τιμή 3.000 στη σειρά C_j - Z_j. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε καρέκλα που θα αρχίσουμε να παράγουμε, το κέρδος θα αυξάνει κατά 3.000. Επομένως η στήλη της X_2 είναι η οδηγός στήλη.

Συντ. Κέρδους	C_j	14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	Bi
0	S_1	0	4	1	-2	160
14.000	X_1	1	0-lαν	0	1	100
	Z_j	14.000	7.000	0	3.500	
	C_j-Z_j	0	3.000	0	-3.500	

Οδηγό στοιχείο

Οδηγός στήλη

Οδηγός σειρά

Βήμα 2^o :

Μετά την επιλογή της X_2 για να συμπεριληφθεί στη βάση θα πρέπει να δούμε ποια από τις ήδη βασικές μεταβλητές S_1 και X_1 θα αντικατασταθεί. Αν υπολογίσουμε τους λόγους των ποσοτήτων της τελευταίας στήλης προς τους συντελεστές της οδηγού στήλης ώστε να προσδιορίσουμε τη μέγιστη ποσότητα καρεκλών που μπορεί να παραχθεί, έχουμε:

Μετά την επιλογή της X_2 για να συμπεριληφθεί στη βάση θα πρέπει να δούμε ποια από τις ήδη βασικές μεταβλητές S_1 και X_1 θα αντικατασταθεί. Αν υπολογίσουμε τους λόγους των ποσοτήτων της τελευταίας στήλης προς τους συντελεστές της οδηγού στήλης ώστε να προσδιορίσουμε τη μέγιστη ποσότητα καρεκλών που μπορεί να παραχθεί, έχουμε:

Για την S_1 : 160 ώρες ξυλουργείου / 4 ώρες ανά καρέκλα =40 καρέκλες

Για την X_1 : l00 τραπέζια / 1/2 τραπέζια ανά καρέκλα =200 καρέκλες

Αυτό σημαίνει ότι η S_1 θα αντικατασταθεί από την X_2.

Η νέα οδηγός σειρά, οδηγός στήλη και οδηγό στοιχείο φαίνονται στον προηγούμενο πίνακα Simplex.

Βήμα 3^{o} :

Αφσύ ορίσαμε πλέσν ότι η μεταβλητή X_2 θα αντικαταστήσει την S_2, θα πρέπει να υπολογίσουμε ξανά τις τιμές για τον τρίτο πίνακα Simplex. Κατ' αρχήν θα αντικαταστήσουμε τη σειρά οδηγό. Το οδηγό στοιχείο είναι το 4. Διαιρούμε επομένως όλα τα στοιχεία της οδηγού σειράς με το 4. Άρα η νέα οδηγός σειρά είναι:

0/4=0   4/4=1   1/4=1/4   -2/4=-1/2   160/4=40

Επομένως ο νέος πίνακας Simplex θα έχει την εξής μορφή:

Συντ. Κέρδους	C_j →	14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	Bi
10.000	X_2	0	1	1/4	-1/2	40
14.000	X_1					
	Z_j					
	C_j - Z_j					

Όπως βλέπουμε η X_2 αντικατέστησε την S_1 στη βάση. Η τιμή της X_2 είναι 40 μονάδες, ενώ ο συντελεστής κέρδους της X_2 εμφανίζεται στη στήλη συντελεστών κέρδους των βασικών μεταβλητών.

Βήμα 4^{o} :

Απομένει τώρα να υπολογίσουμε τις νέες τιμές για τη σειρά που αντιστοχεί στην X_1 καθώς και τις νέες τιμές στις σειρές Z_j και C_j - Z_j. Για να υπολογίσουμε τη νέα σειρά X_1 θα κάνουμε τις εξής πράξεις όπως και προηγουμένως:

(Προηγούμενες τιμές σειράς X_1) – (στοιχείο της οδηγού στήλης σειράς X_1) (Νέες τιμές της οδηγού σειράς) = Νέες τιμές σειράς X_1.

Το στοιχείο της οδηγού στήλης που αντιστοιχεί στη σειρά X_1 είναι το 1/2. Επομένως οι νέες τιμές της οδηγού σειράς αφού πολλαπλασιασθούν με 1/2 θα αφαιρεθούν από τις τιμές της σειράς X_1. Έχουμε λοιπόν:

	X_1	X_2	S_1	S_2	Bi
Προηγ.τιμές X_1	1	1/2	0	1/4	100
(οδ.στοιχείο) (νέα οδ.σειρά)	-(1/2) · 0	-1/2 · 1	-1/2 · 1/4	-1/2 · 1/4	-1/2 · 40
νέες τιμές X1	=1	=0	=-1/8	=1/2	=80

Επομένως ο νέος πίνακας Simplex μετά τον υπολογισμό και της σειράς X_1 θα έχει την εξής μορφή.

Συντ. Κέρδους ↓	C_j →	14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	Bi
10.000	X_2	0	1	1/4	-1/2	40
14.000	X_1	1	0	-1/8	1/2	80
	Z_j					
	C_j - Z_j					

Βήμα 5^{ο} :

Απομένει τώρα ο υπολογισμός των τιμών για τις σειρές Z_j και C_j-Z_j. Για να βρούμε τις τιμές της σειράς Z_j πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστέςμετατροπής για κάθε μεταβλητή με τους αντίστοιχους συντελεστές κέρδουςτων βασικών μεταβλητών και προσθέτουμε τα γινόμενα. Οι τιμές της σειράς C_j-Z_j προκύπτουν από αφαίρεση της σειράς Z_j από τη σειρά C_j. Τέλος, ο υπολογισμός του κέρδους που αντιστοιχεί στη λύση του τρέχοντος πίνακα Simplex υπολογίζεται με την άθροιση των γινομένων της τελευταίας στήλης που δίνει τις τιμές των μεταβλητών με τους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών.

Κέρδος = 40 · 10.000 + 80 ·14.000 = 1.520.000

Η ***τελική μορφή*** του πίνακα Simplex είναι η εξής:

Συντ. Κέρδους	C_j	14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	Bi
0	S_1	0	4	1	-2	160
14.000	X_1	1	1/2	0	1/4	100
	Z_j	0 · 0+ 14.000 · 1	0 · 4 +14.000 ·1/2	0 · 1 +14.000· 0	0 · (-2) +14.000· 1/4	0
		14.000	7.000	0	3.500	
	C_j-Z_j	0	3.000	0	-3.500	

- ***Κριτήριο Βελτιστοποίησης***

Ο παραπάνω τρίτος πίνακας Simplex είναι ο τελικός πίνακας Simplex για το παράδειγμα που αναλύουμε. Παρατηρούμε ότι η σειρά C_j - Z_j δεν περιέχει θετικά στοιχεία, συνεπώς δεν είναι δυνατόν να υπάρξει περαιτέρω αύξηση του κέρδους.

Οι βασικές μεταβλητές είναι οι X_1 και X_2 (πρώτη στήλη). Οι τιμές τους δίνονται στις αντίστοιχες θέσεις της τελευταίας στήλης. Οι τιμές των μη βασικών μεταβλητών είναι μηδέν.

Η βέλτιστη λύση είναι:

X_1 = 80 τραπέζια	S_1 = 0 ώρες διαθέσιμες στο ξυλουργείο
X_2 = 40 καρέκλες	S_2 = 0 ώρες διαθέσιμες στο βαφείο

Ο συνδυασμός αυτός της παραγωγής δίνει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος το οποίο ανέρχεται σε 1.520.000.

Αν δούμε συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα από τους τρεις διαδοχικούς πίνακες Simplex παρατηρούμε τα εξής:

- ***Αρχικός πίνακας Simplex***

Λύση: X_1 = 0 τραπέζια
X_2 = 0 καρέκλες
S_1 = 960 διαθέσιμες ώρες ξυλουργείου
(μη χρησιμοποιηθείσες)
S_2 = 400 διαθέσιμες ώρες βαφείου

Κέρδος: 0

- ***Δεύτερος πίνακας Simplex***

Λύση: X_1 = 100 τραπέζια
X_2 = 0 καρέκλες
S_1 = 160 διαθέσιμες ώρες ξυλουργείου
(μη χρησιμοποιηθείσες)
S_2 = 0 διαθέσιμες ώρες βαφείου (έχουν χρησιμοποιηθεί όλες οι διαθέσιμες ώρες)

Κέρδος: 1.400.000

ü ***Τρίτος πίνακας Simplex***

Λύση:	X_1 = 80 τραπέζια X_2 =40 καρέκλες S_1 = 0 διαθέσιμες ώρες ξυλουργείου S_2 = 0 διαθέσιμες ώρες βαφείου
Κέρδος:	1.520.000

Κεφάλαιο

3^{o}

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΕΡΔΟΥΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παραθέσουμε αριθμητικά παραδείγματα για κάθε μία από τις μεθόδους που αναφέρονται στο 2^{o} κεφάλαιο.

Η βιβλιογραφία που χρησιμοποιείται σε αυτή την ενότητα είναι : [3], [5] και [10] .

3.1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΕΡΔΟΥΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Το παρακάτω πρόβλημα έχει να κάνει με μία εταιρία η οποία κατασκευάζει και πουλά αερόσακους.Το κέρδος της επιχείρησης εκφράζεται μέσω μιας γραμμικής συνάρτησης μιας μεταβλητής. Η μόνη μεταβλητή στο πρόβλημα μας είναι η ποσότητα αερόσακων. Με τη βοήθεια της πρώτης παραγώγου μπορούμε να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης ή αν ισχύει $f'(x)=0$ και υπάρχει η $f''(x)$ ισχύει $f''(x)<0$ έχουμε κατευθείαν τη θέση της μέγιστης ποσότητας.

Ας δούμε αναλυτικά :

Η εταιρεία «PENGUIN» ειδικεύεται στην κατασκευή αερόσακων. Ο κάθε αερόσακος πουλιέται 60 χιλιάδες δραχμές, ενώ η παραγωγή αερόσακων γίνεται με βάση την ακόλουθη συνάρτηση κόστους:

$$TC = Q^2 + 30Q + 200$$

Ζητείται:

α) Να γίνει διαγραμματική απεικόνιση της συνάρτησης κόστους.
β) Στο ίδιο διάγραμμα να σχεδιαστεί και η συνάρτηση των συνολικών εσόδων
γ) Ποια είναι η ποσότητα που πρέπει να παράγει η επιχείρηση για να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της; Να γίνει διαγραμματική παρουσίαση.

ΛΥΣΗ:

α) Η διαγραμματική απεικόνιση της συνάρτησης κόστους παρουσιάζεται στο σχήμα, που βρίσκεται στο τέλος του προβλήματος.

β) Τα συνολικά έσοδα είναι:

TR=60Q, αφού 60 χιλιάδες δραχμές. είναι η τιμή των αερόσακων και Q η ποσότητα αερόσακων.
Η διαγραμματική απεικόνιση της συνάρτησης εσόδων παρουσιάζεται και αυτή στο σχήμα που προαναφέραμε.

γ) Η συνάρτηση κέρδους είναι:

$$\Pi = TR - TC \Rightarrow \Pi = 60Q - Q^2 - 30Q - 200 \Rightarrow \Pi = 30Q - Q^2 - 200$$

Τα κέρδη Π γίνονται μέγιστα όταν:

$\frac{d(\Pi)}{dQ} = 0$ αναγκαία συνθήκη

και

$\frac{d^2(\Pi)}{dQ^2} < 0$ επαρκής συνθήκη

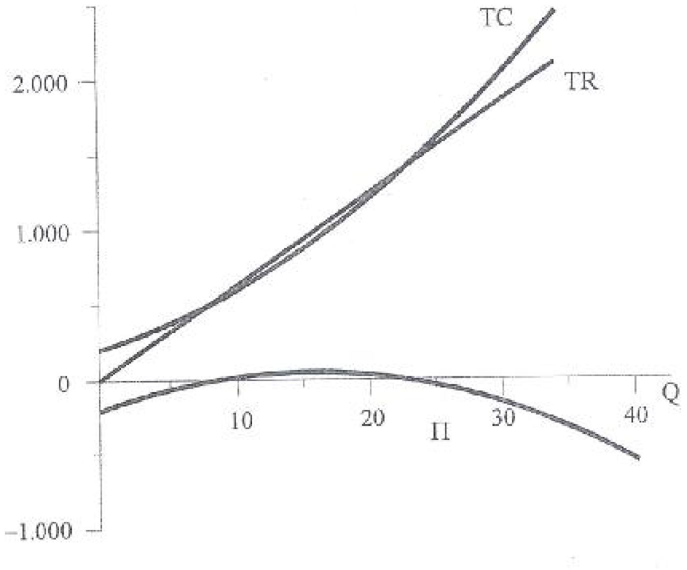
Ισχύει:

$$\frac{d\Pi}{dQ} = 0 \Rightarrow \frac{d(30Q - Q^2 - 200)}{dQ} = 0 \Rightarrow 30 - 2Q = 0 \Rightarrow Q = 15$$

$$\frac{d^2(\Pi)}{dQ^2} = \frac{d(30 - 2Q)}{dQ} = -2 < 0$$

Άρα τα κέρδη γίνονται μέγιστα για την ποσότητα $Q = 15$

Η διαγραμματική παρουσίαση αποτυπώνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



Σχήμα V.8

3.2. Συνάρτηση κέρδους πολλών μεταβλητών

Το παρακάτω πρόβλημα αναφέρεται στη άριστη κατανομή των συντελεστών της εργασίας και του κεφαλαίου έτσι ώστε να έχουμε την καλύτερη δυνατή παραγωγή. Η σχέση της παραγωγής με την εργασία και το Κεφάλαιο είναι φυσικό να είναι μια σχέση δύο μεταβλητών (L=εργασία,K=κεφάλαιο). Με την βοήθεια των μερικών παραγώγων μπορούμε να εντοπίσουμε τα επίπεδα των L και K όπου μεγιστοποιείται η παραγωγή. Εν συνεχεία η επιχείρηση επιθυμεί να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της και να βρεί πόσο θα είναι αυτά,τα οποία εκφράζονται συναρτήσει της παραγωγής και του συνολικού κόστους που δαπανεί η επιχείρηση για κάθε μονάδα παραγωγής. Η επιχείρηση θα πρέπει να εκφράσει το συνολικά καθαρά κέρδη μέσω μίας νέας συνάρτησης της μορφής: Έσοδα-Έξοδα και ακολουθώντας την ίδια μέθοδο να βρεί τα νέα επίπεδα L,K που μεγιστοποιούνται τα συνολικά κέρδη.

Ας δούμε αναλυτικά :

Η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης είναι της μορφής:

$$Q = 4LK - 3L^2 - 2K^2 + 6L + 14K$$

Ζητείται:

α) Να βρεθούν οι τιμές του κεφαλαίου (K) και της εργασίας (L) που μεγιστοποιούν την παραγωγή της επιχείρησης.
β) Η επιχείρηση παράγει σε μία αγορά πλήρους ανταγωνισμού και πουλάει το προϊόν της 2.500 δρχ. ανά παραγόμενη μονάδα και πληρώνει 700 δρχ. για κάθε μονάδα εργασίας και 1.400 δρχ. για κάθε μονάδα κεφαλαίου. Σε ποια επίπεδα του κεφαλαίου και της εργασίας θα μεγιστοποιούνται τα κέρδη της επιχείρησης, πόσα είναι τα μέγιστα κέρδη και ποια η ποσότητα που μεγιστοποιεί τα κέρδη;

ΛΥΣΗ:

α) Έχουμε τη συνάρτηση παραγωγής $Q = 4LK - 3L^2 - 2K^2 + 6L + 14K$

Οι πρώτου βαθμού αναγκαίες συνθήκες για ένα μέγιστο απαιτούν:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial Q}{\partial K} = 0$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = 4K - 6L + 6$$

για $4K - 6L + 6 = 0 \Rightarrow 4K - 6L = -6$ (1)

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 4L - 4K + 14$$

για $4L - 4K + 14 = 0 \Rightarrow 4L - 4K = -14$ (2)

Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε:

$$-2L = -20 \Rightarrow L = 10$$

Για $L = 10$ από την (1) προκύπτει ότι:

$$4K - 60 = -6 \Rightarrow 4K = 54 \Rightarrow K = 13.5$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = \frac{\partial(4L - 4K + 14)}{\partial K} = -4$$

Επίσης υπολογίζουμε:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = \frac{\partial(4K - 6L + 6)}{\partial L} = -6$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial K} = \frac{\partial(4K - 6L + 6)}{\partial K} = 4$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} = \frac{\partial(4L - 4K + 14)}{\partial L} = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} & \frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial K} & \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 24 - 16 = 8$$

Επειδή $\Delta_1 = -4 < 1$, $\Delta_2 = 8 > 0$ έχουμε μέγιστο στο (13.5 , 10).

Άρα για $L = 10$ και $K = 13.5$, η παραγωγή μεγιστοποιείται και είναι ίση με :
$Q = (4 \cdot 10 \cdot 13.5) - 3 \cdot (10)^2 - 2 \cdot (13.5)^2 + (6 \cdot 10) + (14 \cdot 13.5) = 124.5$ μονάδες.

β) Για να βρούμε σε τι επίπεδα κεφαλαίου και εργασίας μεγιστοποιούνται τα κέρδη, πρέπει να σχηματίσουμε τη συνάρτηση των κερδών. Για να σχηματίσουμε τη συνάρτηση των κερδών, απαιτείται να σχηματίσουμε τις συναρτήσεις των συνολικών εσόδων και του συνολικού κόστους.

Η συνάρτηση των συνολικών εσόδων δίνεται στη βάση των δεδομένων της άσκησης από τη σχέση:

$$TR = 2.500Q$$

Η συνάρτηση του συνολικού κόστους δίνεται, στη βάση, επίσης των δεδομένων της άσκησης, από τη σχέση:

$$TC = 700 \cdot L + 1.400K$$

Επομένως η συνάρτηση του κέρδους είναι:

$$\Pi = TR - TC \Rightarrow \Pi = 2.500(4LK - 3L^2 - 2K^2 + 6L + 14K) - 700L - 1.400K \Rightarrow$$
$$\Pi = 10.000LK - 7.500L^2 - 5.000K^2 + 15.000L + 35.000K - 700L - 1.400K \Rightarrow$$
$$\Pi = 10.000LK - 7.500L^2 - 5.000K^2 + 14.300L + 33.600K$$

Οι πρώτου βαθμού αναγκαίες συνθήκες για ένα μέγιστο απαιτούν:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial K} = 0$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = \frac{\partial(10.000LK - 7.500L^2 - 5.000K^2 + 14.300L + 33.600K}{\partial L} = 10.000K - 15.000L + 14.300$$

Για

$$10.000K - 15.000L + 14.300 = 0 \Rightarrow 10.000K - 15.000L = -14.300 \Rightarrow$$
$$100K - 150L = -143 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = \frac{\partial(10.000LK - 7.500L^2 - 5.000K^2 + 14.300L + 33.600K)}{\partial K} = 10.000L - 10.000K + 33.600$$

Για

$$10.000L - 10.000K + 33.600 = 0 \Rightarrow 10.000L - 10.000K = -33.600 \Rightarrow$$
$$100L - 100K = -336 \qquad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) $\Rightarrow -50L = -479 \Rightarrow L = 9{,}58$

Για $L = 9{,}58$ από (2) $\Rightarrow (100 \cdot 9{,}58) - 100K = -336 \Rightarrow 100K = 1.294 \Rightarrow K = 12{,}94$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial K^2} = \frac{\partial (10.000L - 10.000K + 33.600)}{\partial K} = -10.000 < 0 < 1$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial L^2} = \frac{\partial (10.000K - 15.000L + 14.300)}{\partial L} = -15.000 < 0$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial L \partial K} = \frac{\partial (10.000K - 15.000L + 14.300)}{\partial K} = 10.000$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial K \partial L} = \frac{\partial (10.000L - 10.000K + 33.600)}{\partial L} = 10.000$$

Οπότε:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial K^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial K \partial L} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial L \partial K} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial L^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10.000 & 10.000 \\ 10.000 & -15.000 \end{vmatrix} = 15 \cdot 10^7 - 10 \cdot 10^7 = 5 \cdot 10^7$$

Επειδή $\Delta_1 = -10.000 < 1$, $\Delta_2 = 5 \cdot 10^7 > 0$ έχουμε μέγιστο στο (12,94 , 9,58)

Συνεπώς για $L = 9{,}58$ και $K = 12{,}94$ έχουμε μεγιστοποίηση των κερδών Π της επιχείρησης που είναι ίσα με:

$$\Pi = 1.239.652 - 7.500 \cdot (9{,}58)^2 - 5.000 \cdot (12{,}94)^2 + (14.300 \cdot 9{,}58) + (33.600 \cdot 12{,}94) \Rightarrow$$
$$\Pi = 1.239.652 - 688.323 - 837.218 + 136.944 + 434.784 \Rightarrow \Pi = 285.889.$$

Η παραγωγή για τη μεγιστοποίηση των κερδών θα είναι ίση με:

$Q = (4 \cdot 9{,}58 \cdot 12{,}94) - 3 \cdot (9{,}58)^2 - 2 \cdot (12{,}94)^2 + (6 \cdot 9{,}58) + (14 \cdot 12{,}94) \Rightarrow Q = 124{,}28$ μονάδες.

3.3. Συνάρτηση κέρδους πολλών μεταβλητών με περιορισμό

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα μια εταιρία πώλησης ακινήτων διαφημίζεται σε δύο διαφορετικές εφημερίδες. Θεωρείται δεδομένο ότι η δαπάνες για διαφήμιση είναι σχετικές του αριθμού των πωλήσεων. Άρα το πρόβλημα της εταιρείας είναι πως θα διανείμει ένα διαθέσιμο ποσό για διαφήμιση στις δύο εφημερίδες. Ο όρος «διαθέσιμο» αμέσως μας κάνει να καταλάβουμε ότι το ποσό που θα δαπανηθεί και στις δύο εφημερίδες για διαφήμιση περιορίζεται σε κάποιο επίπεδο. Συμπερασματικά η συνάρτηση των πωλήσεων υπόκειται σε κάποιο περιορισμό. Με τη μέθοδο του πολλαπλασιαστή Lagrange μπορούμε να μετασχηματίσουμε την συνάρτηση και να βρούμε τα κατάλληλα ποσά Χ και Υ έτσι όπως πρέπει να διανεμηθούν.

Ας δούμε αναλυτικά :

Μια κτηματική εταιρεία πώλησης ακινήτων διαφημίζει τα ακίνητά της σε δύο εφημερίδες: Στα Παντειακά Νέα, τα οποία είναι μικρής εμβέλειας και στα Περιφερειακά Νέα, εθνικής εμβέλειας. Οι οικονομολόγοι της επιχείρησης πιστεύουν ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ των πωλήσεων Η και του ποσού που ξοδεύεται για διαφήμιση και στις δύο εφημερίδες. Η σχέση αυτή δίνεται από:

$$H=\frac{4.500X}{2+X}+\frac{1800Y}{20+Y}$$

όπου Χ είναι τα χρήματα (σε χιλ. δραχμές) που πληρώνονται για διαφήμιση στα Παντειακά Νέα και Υ τα χρήματα σε χιλ. δραχμές που πληρώνονται για διαφήμιση στα Περιφερειακά Νέα. Η αμοιβή της εταιρείας είναι το 12,5% και περιλαμβάνει το κόστος διαφήμισης. Εάν η εταιρεία έχει σχεδιάσει να δαπανήσει 2.000.000 δραχμές για διαφήμιση, πως θα έπρεπε να διανείμει αυτό το ποσό μεταξύ των δύο εφημερίδων, για να μεγιστοποιήσει τα καθαρά της κέρδη, και πόσα είναι αυτά;

ΛΥΣΗ:

Αν Η οι πωλήσεις της κτηματικής εταιρείας το καθαρό της κέρδος (αμοιβή), θα είναι: Π =0,125Η-2.000. (Όλα τα μεγέθη αναφέρονται σε χιλ. δραχμές). Προφανώς το κέρδος αυξάνεται όταν αυξάνονται και οι πωλήσεις Η.

Άρα θα πρέπει να βρούμε για ποιες τιμές των Χ,Υ η συνάρτηση:

$$H = \frac{4.500X}{2+X} + \frac{1.800Y}{20+Y}$$

παρουσιάζει μέγιστο, υπό τον περιορισμό Χ+Υ= 2.000 $\Rightarrow$ 2.000-Χ-Υ=0

Σχηματίζουμε τη συνάρτηση Lagrance:

$$LA(X,Y,\lambda) = \frac{4.500X}{2+X} + \frac{1.800Y}{20+Y} + \lambda(2.000-X-Y)$$

Οι πρώτου βαθμού αναγκαίες συνθήκες για ένα μέγιστο απαιτούν:

$$\frac{\partial LA}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial LA}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial LA}{\partial l} = 0,$$

$$\frac{\partial LA}{\partial X} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\frac{4.500X}{2+X} + \frac{1.800Y}{20+Y} + l(2.000 - X - Y))}{\partial X} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial(\frac{4.500X}{2+X})}{\partial X} + \frac{\partial(\frac{1.800Y}{20+Y})}{\partial X} + \frac{\partial(l(2.000 - X - Y))}{\partial X} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{9.000}{(2+X)^2} - l = 0 \Rightarrow \frac{9.000}{(2+X)^2} = l \qquad (1)$$

$$\frac{\partial LA}{\partial Y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\frac{4.500X}{2+X} + \frac{1.800Y}{20+Y} + l(2.000 - X - Y))}{\partial Y} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial(\frac{4.500X}{2+X})}{\partial Y} + \frac{\partial(\frac{1.800Y}{20+Y})}{\partial Y} + \frac{\partial(l(2.000 - X - Y))}{\partial Y} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{36.000}{(20+Y)^2} - l = 0 \Rightarrow \frac{36.000}{(20+Y)^2} = l \qquad (2)$$

$$\frac{\partial LA}{\partial l} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\frac{4.500X}{2+X} + \frac{1.800Y}{20+Y} + l(2.000 - X - Y))}{\partial l} = 0$$

$$\frac{\partial(\frac{4.500X}{2+X})}{\partial l} + \frac{\partial(\frac{1.800Y}{20+Y})}{\partial l} + \frac{\partial(l(2.000 - X - Y))}{\partial l}$$

X+Y=2.000 (3)

Διαιρώντας τις εξισώσεις (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{\frac{9.000}{(2+X)^2}}{\frac{36.000}{(20+Y)^2}}=\frac{l}{l}\Rightarrow\frac{9.000(20+Y)^2}{36.000(2+X)^2}=1\Rightarrow\frac{(20+Y)^2}{(2+X)^2}=4\Rightarrow\frac{20+Y}{2+X}=2\Rightarrow$$

20+Y=4+2X$\Rightarrow$2X-Y=16   (4)

Από την (3) και την (4) προκύπτει σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους

$$\begin{Bmatrix}X+Y=2.000\\2X-Y=16\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}X+Y=2.000\\Y=2X-16\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}X+(2X-16)=2.000\\Y=2X-16\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}3X=2.016\\Y=2X-16\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}X=672\\Y=1.328\end{Bmatrix}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε :

$$\frac{\partial^2 LA}{\partial X^2}=\frac{\partial(\frac{9.000}{(2+X)^2}-l)}{\partial X}=-18000(2+X)^{-3}=-\frac{18000}{(X+2)^3}=-\frac{18000}{(672+2)^3}=$$

$$-\frac{18000}{674^3}=-5{,}87885\cdot10^{-5}$$

Επίσης υπολογίζουμε:

$$\frac{\partial^2 LA}{\partial Y^2}=\frac{\partial(\frac{36.000}{(20+Y)^2}-l)}{\partial Y}=-72.000(20+Y)^{-3}=-2{,}93942\cdot10^{-5}$$

$$\frac{\partial^2 LA}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial(\frac{9.000}{(2+X)^2} - l)}{\partial Y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 LA}{\partial Y \partial X} = \frac{\partial(\frac{36.000}{(20+Y)^2} - l)}{\partial X} = 0$$

$$\frac{\partial(2.000 - X - Y)}{\partial X} = -1$$

$$\frac{\partial(2.000 - -X - Y)}{\partial Y} = -1$$

Οπότε έχουμε :

$$\Delta_1(X_{0,} Y_{0,} l) = \begin{vmatrix} -5{,}87885 \cdot 10^{-5} & 0 & -1 \\ 0 & -2{,}93942 \cdot 10^{-5} & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -5{,}87885 \cdot 10^{-5} & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$-1 \begin{vmatrix} 0 & -2{,}93942 \cdot 10^{-5} \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 5{,}87885 \cdot 10^{-5} + 2{,}93942 \cdot 10^{-5} = 8{,}818 \cdot 10^{-5} > 0$$

Αφού $\Delta_1(X_0, Y_0, l) > 0$ η LA παρουσιάζει δεσμευμένο μέγιστο στο (672,1328) .

Άρα, για να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της όταν διαθέτει X=672.000 για διαφήμιση στα Παντειακά Νέα και Y =1.328.000 δραχμές στα Περιφερειακά Νέα, οι πωλήσεις H θα είναι:

H= $\frac{4.500X}{2+X} + \frac{1.800Y}{20+Y} = 6.259.930$, άρα τα καθαρά κέρδη θα είναι:

Π= $0{,}125 \cdot H$ -2.000.000= 4.259.930 δραχμές.

3.4. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΕ ΤΗ ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Η βιβλιογραφία που χρησιμοποιείται σε αυτή την ενότητα είναι: [9]]

Το παρακάτω πρόβλημα έχει να κάνει με έναν βιοτέχνη επίπλων ο οποίος κατασκευάζει δύο προιόντα τα οποία επεξεργάζεται σε δύο εργαστήρια, γνωρίζοντας πόσες ώρες επεξεργασίας χρειάζεται την εβδομάδα σε κάθε εργαστήριο και το καθαρό κέρδος από κάθε προιόν, με τη μέθοδο της γραφικής επίλυσης θα βρούμε το καλύτερο δυνατό συνδυασμό παραγωγής των δύο προιόντων ,ώστε με την πώληση αυτών να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της επιχείρησης. Δηλαδή από τα στοιχεία που έχουμε θα κατασκευάσουμε αρχικά την αντικειμενική συνάρτηση του κέρδους Max Z καθώς και τους περιορισμούς που έχουμε. Στη συνέχεια από τους περιορισμούς θα βρούμε στην γραφική παράσταση την περιοχή των δυνατών λύσεων. Για να βρούμε την άριστη λύση, εκείνη δηλαδή που μεγιστοποιεί την γραμμική αντικειμενική συνάρτηση, θα ελέγξουμε όλες τις γωνίες (ακραία σημεία) για να βρούμε ποια μας δίνει το μέγιστο κέρδος.

Ας δούμε αναλυτικά :

Ένας βιοτέχνης επίπλων κατασκευάζει μόνο δύο προϊόντα τραπέζια και καρέκλες τα οποία πρέπει να επεξεργαστεί σε δύο εργαστήρια, στο εργαστήριο Ι (Ξυλουργείο) και εργαστήριο ΙΙ (Λουστράρισμα). Το εργαστήριο Ι έχει δυναμικότητα μέχρι 60 ώρες την εβδομάδα, ενώ το εργαστήριο ΙΙ μέχρι 48 ώρες την εβδομάδα. Για να κατασκευαστεί ένα τραπέζι απαιτούνται 4 ώρες επεξεργασίας στο εργαστήριο Ι και 2 ώρες επεξεργασίας στο εργαστήριο ΙΙ. Για να κατασκευαστεί μια καρέκλα απαιτούνται 2 ώρες στο εργαστήριο Ι και 4 ώρες στο εργαστήριο ΙΙ. Εάν το καθαρό κέρδος κάθε τραπεζιού είναι 8.000 δρχ. και το καθαρό κέρδος κάθε καρέκλας είναι 6.000 δρχ. να προσδιοριστεί ο καλύτερος δυνατός συνδυασμός παραγωγής καρεκλών και τραπεζιών, ώστε με την πώληση αυτών να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της επιχείρησης. (υποθέτουμε ότι υπάρχει απεριόριστη ζήτηση για τα δύο προϊόντα).

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Θα εκφράσουμε το πρόβλημα σε μαθηματική μορφή αφού ορίσουμε πρώτα τις μεταβλητές αποφάσεων.
Έστω ότι το X_1 αντιπροσωπεύει τον άριστο αριθμό τραπεζιών, που θα παραχθεί και θα πουληθεί σε μία βδομάδα ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος.
Έστω ότι το X_2 αντιπροσωπεύει αντίστοιχα τον άριστο αριθμό καρεκλών και Z το μέγιστο κέρδος.

Οι σχετικές πληροφορίες του προβλήματος μπορούν να ανακεφαλαιωθούν στον παρακάτω πίνακα.

Πληροφορίες παραγωγής τραπεζιών και καρεκλών

Εργαστήρια	Ώρες που απαιτούνται για την παραγωγή		Σύνολο διαθέσιμων ωρών (δυναμικότητας)
	Ενός τραπεζιού	Μιας καρέκλας	
Εργαστήριο I	4	2	60
Εργαστήριο II	2	4	48
Κέρδος ανά μονάδα	8.000 δρχ.	6.000 δρχ.	

Με βάση τις παραπάνω πληροφορίες θα προχωρήσουμε να καταστρώσουμε το πρόβλημα στην μαθηματική του μορφή.

Το συνολικό κέρδος από τα τραπέζια θα είναι 8.000 X_1 δρχ. και το συνολικό κέρδος από τις καρέκλες θα είναι 6.000 X_2 δρχ.

Άρα η αντικειμενική συνάρτηση του κέρδους η οποία θα πρέπει να μεγιστοποιηθεί θα είναι:

Max Z = 8.000 X_1 + 6.000 X_2

Η αντικειμενική αυτή συνάρτηση υπόκειται στους παρακάτω περιορισμούς:

$4X_1 + 2X_2 \leq 60$ περιορισμός εργαστηρίου I

και $2X_1 + 4X_2 \leq 48$ περιορισμός εργαστηρίου II

η αντικειμενική συνάρτηση υπόκειται επίσης στους περιορισμούς θετικότητας (μη αρνητικών τιμών) δηλαδή

$X_1 \geq 0$

και $X_2 \geq 0$

Θα προχωρήσουμε τώρα στη λύση του προβλήματος με την γραφική μέθοδο. Στους άξονες της X_1 και X_2 του διαγράμματος παρακάτω θα παρουσιάσουμε πρώτα τους περιορισμούς :

από τον περιορισμό του εργαστηρίου I έχουμε τα εξής:

$4X_1 + 2X_2 \leq 60$

αν X_1=0 τότε $X_2 = \frac{60}{2} = 30$ καρέκλες αν X_2=0 τότε $X_1 = \frac{60}{4} = 15$ τραπέζια

από τον περιορισμό του εργαστηρίου ΙΙ θα έχουμε τα εξής:

$2X_1 + 4X_2 \leq 48$

αν X_1=0 τότε $X_2 = \frac{48}{4} = 12$ καρέκλες

αν X_2=0 τότε $X_1 = \frac{48}{2} = 24$ τραπέζια

Η γραφική παράσταση παρουσιάζεται στο σχήμα παρακάτω.

Η περιοχή ΑΒΓΔ μας δίνει την περιοχή των δυνατών λύσεων. Για να βρούμε την άριστη λύση, εκείνη δηλαδή που μεγιστοποιεί την γραμμική αντικειμενική συνάρτηση, θα ελέγξουμε όλες τις γωνίες (ακραία σημεία) Α,Β,Γ και Δ για να βρούμε ποια μας δίνει το μέγιστο κέρδος.

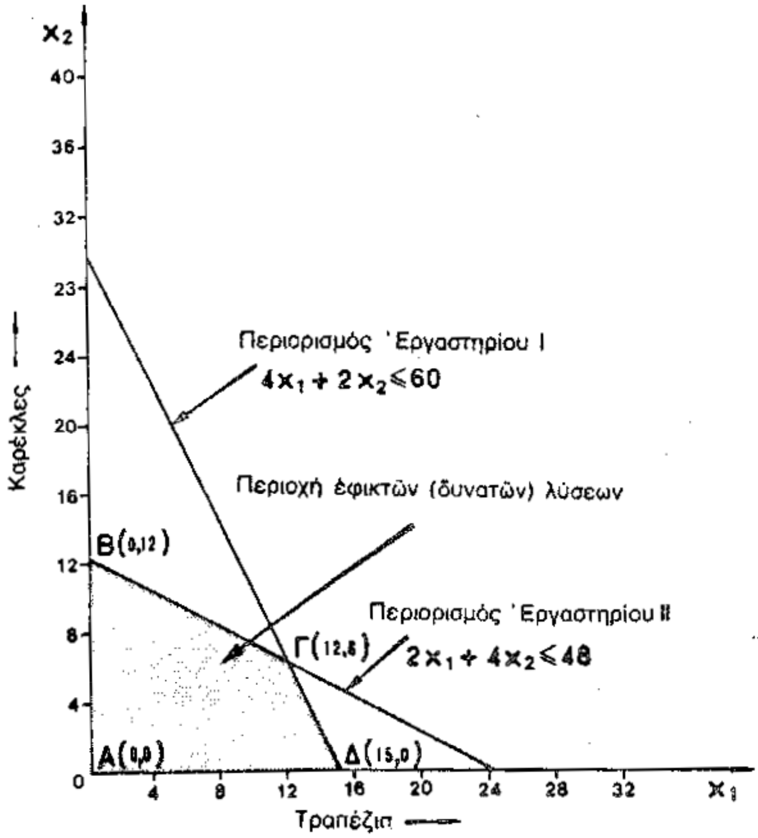
Οπότε έχουμε το εξής συνολικό κέρδος σε κάθε ακραίο σημείο:

Σημείο Α, (0,0), Z_A = 8.000 (0) + 6.000 (0)= 0 δρχ.

Σημείο Β, (0,12), Z_B =8.000 (0) + 6.000 (12)= 72.000 δρχ.

Σημείο Γ, (12,6), Z_Γ = 8.000 (12) +6.000 (6)= 132.000 δρχ.

Σημείο Δ, (15,0), Z_Δ =8.000(15) +6.000(0) = 120.000 δρχ.



Από το συνολικό κέρδος βλέπουμε ότι στο σημείο Γ έχουμε το μέγιστο κέρδος όπου η άριστη λύση είναι:

X_1=12

X_2=6

Z=132.000 δρχ.

Δηλαδή να παράγουμε 12 τραπέζια και 6 καρέκλες κάθε βδομάδα ώστε να επιτύχουμε το μέγιστο κέρδος των 132.000 δρχ.

Ένας δεύτερος τρόπος να βάλουμε (σχεδιάσουμε) στο διάγραμμα την αντικειμενική συνάρτηση Z= 8.000X_1+ 6.000 X_2, ώστε αφού μετακινήσουμε την γραμμή του ίσου κόστους να βρούμε την γωνία (το σημείο) των άριστων τιμών του X_1 και X_2.

Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζουμε τις διάφορες γραμμές του ίσου κέρδους (Isoprofit lines).

αν το συνολικό κέρδος είναι 48.000 δρχ. τότε θα έχουμε τα εξής:

Z= 8.000X_1+ 6.000 X_2 = 48.000 δρχ.

και όταν X_1=0 τότε X_2=8 καρέκλες

και όταν X_2=0 τότε X_1= 6 τραπέζια

αν το συνολικό κέρδος είναι 96.000 δρχ. τότε θα έχουμε τα εξής:

Z= 8.000X_1+ 6.000 X_2 = 96.000 δρχ

και όταν X_1=0 τότε X_2= 16 καρέκλες

και όταν X_2=0 τότε X_1= 12 τραπέζια

3.5. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ SIMPLEX

Το παρακάτω πρόβλημα έχει να κάνει με μία εταιρία η οποία προμηθεύεται δύο τύπους αλευριού τα οποία χρειάζεταιγια την παραγωγή αρτοσκευασμάτων. Η επιχείρηση είναι υποχρεωμένη να αγοράζει από 3 διαφορετικούς προμηθευτές μίγμα αλευριού.Γνωρίζοντας πόσες ποσότητες αλευριού μπορεί να αγοράσει από κάθε προμηθευτή και το καθαρό κέρδος από κάθε τύπου άλευρος, με τη μέθοδο Simplex θα βρούμε το καλύτερο δυνατό συνδυασμό παραγωγής των δύο ,ώστε να έχει μια άριστη διατήρηση αποθεμάτων με την πώληση αυτών να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της επιχείρησης. Άρα θα κατασκευάσουμε αρχικά την αντικειμενική συνάρτηση του κέρδους MaxZ και τους περιορισμούς που έχουμε. Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τον επαναληπτικό αλγόριθμο με την κατασκευή των πινάκων Simplex, έως ότου βρούμε αρνητικές τιμές Cj-Zj οι οποίες θα είναι ένδειξη μεγιστοποίησης.

Ας δούμε αναλυτικά :

Δύο τύποι αλευριού διατίθενται στην εταιρεία «Ζαχαροπλαστείο ΑΕ». Η συνάρτηση των εσόδων για τα συνολικά αποθέματα δίνεται από:

$Z=4X_1+6X_2$

Όπου X_1, X_2 είναι οι ποσότητες για κάθε τύπου αλεύρου εκφρασμένο σε τύπους και Z τα έσοδα σε εκατομμύρια δραχμές.

Ο κάθε προμηθευτής απαιτεί η εταιρεία να αγοράζει ένα μίγμα αλεύρου. Αν σε αυτό προστεθούν και οι δυσκολίες που προκύπτουν από τις μεταφορές, τότε η συνολική ποσότητα που μπορεί να αγοραστεί από κάθε προμηθευτή είναι περιορισμένη. Έτσι θα ισχύει:

Για τον προμηθευτή Α: $5X_1 + 8X_2 \leq 40$

Για τον προμηθευτή Β: $2X_1 + 5X_2 \leq 20$

Για τον προμηθευτή Γ: $X_2 \leq 3$

Να βρεθεί το άριστο επίπεδο αποθεμάτων που πρέπει να διατηρεί η εταιρεία «Ζαχαροπλαστείο ΑΕ» και τα αντίστοιχα έσοδα.

ΛΥΣΗ:

Ζητείται να μεγιστοποιηθεί η $Z=4X_1+6X_2$

Με τους περιορισμούς: $5X_1 + 8X_2 \leq 40$

$2X_1 + 5X_2 \leq 20$

$X_2 \leq 3$ και $X_1 \geq 0$ και $X_2 \geq 0$

Μετατρέπουμε τις τρεις ανισότητες σε ισότητες με την πρόσθεση τριών πλεονασματικών μεταβλητών S_1, S_2, S_3. Αναλόγως μετασχηματίζουμε την αντικειμενική συνάρτηση και τους μη αρνητικούς περιορισμούς.

Το πρόβλημα της μεγιστοποίησης θα γράφεται:

Να μεγιστοποιηθεί: $Z=4X_1+6X_2+0S_1+0S_2+0S_3$

Με τους περιορισμούς: $5X_1 + 8X_2 + S_1 = 40$

$2X_1 + 5X_2 + S_2 = 20$

$X_2 + S_3 = 3$

$X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$, $S_1 \geq 0$, $S_2 \geq 0$, $S_3 \geq 0$.

Η αρχική λύση για $(X_1, X_2)=(0,0)$ είναι $(S_1, S_2, S_3)= (40,20,3)$, που είναι δεκτή.

Ο πρώτος πίνακας Simplex είναι:

	Π	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Σταθερά
Γραμμή 0	1	-4	-6	0	0	0	0
Γραμμή 1	0	5	8	1	0	0	40
Γραμμή 2	0	2	5	0	1	0	20
Γραμμή 3	0	0	1	0	0	1	3

Επιλέγουμε για στήλη-οδηγό την X_2 (στήλη με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή στη γραμμή 0).

Οδηγός-γραμμή είναι η γραμμή 3, αφού min $\left\{\frac{40}{8},\frac{20}{5},\frac{3}{1}\right\}=3$. Άρα στοιχείο-οδηγός είναι το 1.

Μετατρέπουμε τη στήλη X_2 σε μοναδιαίο διάνυσμα ως εξής :

Πολλαπλασιάζουμε τη γραμμή 3 με το +6 και προσθέτουμε στη γραμμή 0
Πολλαπλασιάζουμε τη γραμμή 3 με το -8 και προσθέτουμε στη γραμμή 1

Πολλαπλασιάζουμε τη γραμμή 3 με το -5 και προσθέτουμε στη γραμμή 2

Προκύπτει έτσι ο δεύτερος πίνακας Simplex:

	Π	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Σταθερά
Γραμμή 0	1	-4	0	0	0	6	18
Γραμμή 1	0	5	0	1	0	-8	16
Γραμμή 2	0	2	0	0	1	-5	5
Γραμμή 3	0	0	1	0	0	3	3

Νέα οδηγός-στήλη είναι η X_1

Νέα οδηγός-γραμμή είναι η 2, αφού min $\left\{\frac{16}{5}, \frac{5}{2}\right\} = \frac{5}{2}$

Νέο οδηγός-στοιχείο είναι το 2

Μετατρέπουμε τη στήλη X_1 σε μοναδιαίο διάνυσμα ως εξής:

Διαιρούμε τα στοιχεία της γραμμής 2 με το 4 και προσθέτουμε στη γραμμή 0

Πολλαπλασιάζουμε τη γραμμή 2 με το -5 και προσθέτουμε στη γραμμή 1

Προκύπτει ο τρίτος πίνακας Simplex:

	Π	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Σταθερά
Γραμμή 0	1	0	0	0	2	-4	28
Γραμμή 1	0	0	0	1	-5/2	9/2	7/2
Γραμμή 2	0	1	0	0	1/2	-5/2	5/2
Γραμμή 3	0	0	1	0	0	1	3

Νέα οδηγός-στήλη, η S_3

Νέα οδηγός-γραμμή, η γραμμή 1

Νέο οδηγός-στοιχείο, το 9/2

Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία, προκύπτει ο τέταρτος πίνακας Simplex:

	Π	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Σταθερά
Γραμμή 0	1	0	0	8/9	2/9	0	280/9
Γραμμή 1	0	0	0	2/9	-5/9	1	7/9
Γραμμή 2	0	1	0	5/9	-8/9	0	40/9
Γραμμή 3	0	0	1	-2/9	5/9	0	20/9

Ο παραπάνω πίνακας δίνει τη βέλτιστη λύση, αφού δεν υπάρχουν αρνητικά στοιχεία στη γραμμή 0.

Άρα το άριστο επίπεδο αποθεμάτων είναι:

$$X_1 = 40/9$$

$$X_2 = 20/9$$

Ενώ τα αντίστοιχα έσοδα είναι:

$$Z = 4X_1 + 6X_2 = 4 \cdot \frac{40}{9} + 6 \cdot \frac{20}{9} = \frac{280}{9} = 31{,}11$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Απειροστικός Λογισμός, Σημειώσεις Μαθήματος, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
2. Βόσκογλου Μιχάλης, “ Μαθηματικά για τον τομέα Διοίκησης και Οικονομίας”, Μακεδονικές Εκδόσεις, Αθήνα 1999
3. Δαλιεράκη Ε., Κούτρας Μ., Λιουδάκης Δ., Μέτης Στ., “ Μαθηματικά Τεχνολογικής Κατεύθυνσης”, Εκδόσεις «ΟΕΒΔ», Αθήνα 1999
4. Κουνιάς Στρατής, Φακίνος Δημήτρης, “ Γραμμικός Προγραμματισμός”, Εκδόσεις «ΖΗΤΗ», Θεσσαλονίκη 1991
5. Παλάσκας Α. Άγγελος, “Εισαγωγή στην επιχειρησιακή έρευνα για τη λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων- Γραμμικός προγραμματισμός 1, Εκδοτικός οίκος «Αφοί Κυριακίδη», 1980
6. Σίμος Τ., “ Σημειώσεις Μαθηματικών για οικονομολόγους”, Ελλ. Αν. Πανεπιστήμιο, Αθήνα 2002
7. Τελέλης Ορέστης, “ Θεωρία Αποφάσεων και Βελτιστοποίηση”, Πανεπιστήμιο Αθηνών- Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Αθήνα 2004
8. Τζούφρας Ιωάννης, “ Σημειώσεις Μαθηματικών”, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Χίος 2001
9. Τσακλαγκάνος Β. Θεόδωρος, Οικονομάκης Η. Γιώργος, “ Ποσοτικοί μέθοδοι οικονομικής ανάλυσης- Ασκήσεις και εφαρμογές Τόμος Β”, Επιστημονική Βιβλιοθήκη Κριτική, 2000
10. Υψηλάντης Παντελής, “ Επιχειρησιακή Έρευνα”, Εκδόσεις «ΕΛΛΗΝ», Αθήνα 1998
11. Φράγκος Χρήστος, “ Ανώτερα Μαθηματικά”, Εκδόσεις «Αθ. Σταμούλης», Αθήνα 1999