ΑΤΕΙ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΧΟΛΗ:ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ: ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

<u>ΘΕΜΑ ΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ</u>

"ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΠΟΡΩΝ".

ΣΠΟΥΔΑΣΤΡΙΑ:ΚΑΛΑΒΡΟΥΖΙΩΤΗ ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ:ΒΑΣΙΟΥ ΓΕΩΡΓΙΑ

ΠΑΤΡΑ 2006

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μια από τις σπουδαιότερες ανακαλύψεις του αιώνα που πέρασε στον τομέα της επιχειρησιακής έρευνας, είναι αναμφισβήτητα ο δυναμικός προγραμματισμός. Όχι μόνο για τη διαδικασία θεωρητικής θεμελίωσής του αλλά κυρίως για τις λύσεις που έδωσε σε πάρα πολλά πρακτικά προβλήματα από τα μέσα του 20^{ου} αιώνα μέχρι και σήμερα.

Η θεωρία του Δυναμικού Προγραμματισμού αναπτύχθηκε από τον Dr. Richard Bellman κατά τη δεκαετία του 1950 και πιο συγκεκριμένα από το 1951 έως το 1957, όταν ήταν καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας (Berkeley) και ταυτόχρονα ερευνητής στην εταιρεία ερευνών Rand Corp. Από τότε έχει γίνει το θέμα πολλών θεωρητικών μελετών, καθώς επίσης και ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την ανάλυση πολλών προβλημάτων.

Ο δυναμικός προγραμματισμός αποτελεί την πιο κατάλληλη από τις μεθοδολογίες της Επιχειρησιακής Έρευνας για την επίλυση προβλημάτων που χαρακτηρίζονται από τη λήψη διαδοχικών αλληλένδετων αποφάσεων με αλληλοεξαρτώμενα αποτελέσματα και είναι μια μαθηματική τεχνική, που χρησιμοποιείται συχνά στη λήψη αποφάσεων, που μεγιστοποιεί τη συνολική αποτελεσματικότητα.

Σε αντίθεση με το γραμμικό προγραμματισμό, δεν υπάρχει μια τυποποιημένη μαθηματική διαμόρφωση του προβλήματος του δυναμικού προγραμματισμού. Μάλλον, ο δυναμικός προγραμματισμός είναι ένα γενικό πρότυπο προσέγγισης για την επίλυση προβλημάτων και γι `αυτό οι συγκεκριμένες εξισώσεις που χρησιμοποιούνται πρέπει να προσαρμόζονται σε κάθε συγκεκριμένη κατάσταση. Έτσι, χρειάζεται κάποιος βαθμός ευφυΐας και διορατικότητας στη γενική δομή των προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού. Οι ικανότητες αυτές μπορούν καλύτερα να αναπτυχθούν με την παράθεση μιας μεγάλης ποικιλίας εφαρμογών του δυναμικού προγραμματισμού και τη μελέτη των χαρακτηριστικών που είναι κοινά σε όλες αυτές τις καταστάσεις. Για το σκοπό αυτό θα παρουσιαστεί πιο κάτω ένας μεγάλος αριθμός επεξηγηματικών παραδειγμάτων.

1.2 Ο ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ο όρος δυναμικός φαίνεται ότι οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι πολλές εφαρμογές του δυναμικού προγραμματισμού περιλαμβάνουν μια διαχρονική ακολουθία αποφάσεων. Υπάρχουν όμως και προβλήματα χωρίς το χρονικό παράγοντα που λύνονται με επιτυχία με Δυναμικό Προγραμματισμό. Για το λόγο αυτό ίσως πιο κατάλληλος όρος είναι ο *πολυσταδιακός προγραμματισμός* (multistage programming).

Κατά τον Bellman Δυναμικός Προγραμματισμός είναι η μαθηματική θεωρία των πολυσταδιακών διαδικασιών αποφάσεων (multistage decision processes) . Ο δυναμικός προγραμματισμός είναι μέθοδος βελτιστοποιήσεως, επομένως ο παραπάνω ορισμός θα μπορούσε να περιορισθεί κάπως, ως εξής: "Δυναμικός Προγραμματισμός είναι η μαθηματική θεωρία των πολυσταδιακών διαδικασιών αποφάσεων, που αναφέρεται στη βελτιστοποίηση της λειτουργίας τους βάσει κάποιου επιλεγμένου κριτηρίου, γνωστού ως συναρτήσεως κόστους ή αντικειμενικής συναρτήσεως".

Κάποιος άλλος προσπάθησε να δώσει έναν άλλον ορισμό, ο οποίος έλεγε ότι Δυναμικός Προγραμματισμός είναι ο προγραμματισμός των δραστηριοτήτων ενός έργου, έτσι ώστε το συνολικό δυναμικό που θα χρειαστεί σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης του έργου να μην υπερβαίνει εκείνο που έχουμε στη διάθεσή μας την ίδια στιγμή, χωρίς να γίνει παραβίαση των τεχνολογικών περιορισμών που καθορίζουν τη σειρά εκτέλεσης των εργασιών.

Ο Δυναμικός Προγραμματισμός είναι ένα εξαιρετικά δύσκολο πρόβλημα ακόμη και για μικρά έργα. Επιχειρήθηκε η επίλυσή του με τη βοήθεια του Γραμμικού Προγραμματισμού και των σύγχρονων μεγάλων ηλεκτρονικών υπολογιστών, αλλά ακόμη και τότε μόνο σχετικά μικρού μεγέθους προβλήματα μπόρεσαν να λυθούν.

Πριν προχωρήσουμε στην ανάπτυξη του θέματος είναι σκόπιμο να καθορίσουμε πληρέστερα την έννοια των πολυσταδιακών διαδικασιών αποφάσεων. 'Εστω ότι έχουμε ένα φυσικό σύστημα ή διαδικασία, του οποίου η κατάσταση (state) σε μία χρονική στιγμή t καθορίζεται από ένα σύνολο τιμών των μεταβλητών του, δηλαδή από ένα διάνυσμα καταστάσεως. Οι μεταβλητές του συστήματος μπορεί να παριστάνουν διάφορα μεγέθη του, όπως συντεταγμένες θέσεως, όγκο, θερμοκρασία, πίεση κλπ. Οι μεταβλητές αυτές μπορεί να είναι είτε αιτιοκρατικές (deterministic), οπότε έχουν μία συγκεκριμένη τιμή σε κάθε χρονική στιγμή, είτε τυχαίες ή πιθανολογικές οπότε δεν έχουν συγκεκριμένη τιμή αλλά μία ορισμένη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας των τιμών τους.

Με την πάροδο του χρόνου το σύστημα υφίσταται μεταβολές είτε αιτιοκρατικής είτε πιθανολογικής (στοχαστικής) μορφής, δηλαδή οι μεταβλητές του υπόκεινται σε μετασχηματισμούς. Σε ορισμένες από τις μεταβλητές του συστήματος, που τις ονομάζουμε και ελεγχόμενες μεταβλητές, είναι δυνατόν να υπαγορεύουμε εμείς τους μετασχηματισμούς που θα υποστούν σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Ο καθορισμός των μετασχηματισμών που θα επιβάλουμε στο σύστημα ισοδυναμεί με μία απόφαση. Εάν πρέπει να πάρουμε μία μόνο απόφαση για ολόκληρο το διάστημα χρόνου που εξετάζουμε, τότε έχουμε διαδικασία αποφάσεων ενός σταδίου. Εάν, αντίθετα, πρέπει να πάρουμε αλληλουχία διαδοχικών αποφάσεων, τότε χρησιμοποιούμε τον όρο "πολυσταδιακή διαδικασία αποφάσεων". Μία τέτοια αλληλουχία διαδοχικών αποφάσεων ονομάζεται "πολιτική" (policy)· Βέλτιστη πολιτική είναι εκείνη που βελτιστοποιεί (μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί) την τιμή της επιλεγμένης αντικειμενικής συναρτήσεως της διαδικασίας.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι τα δυναμικά προβλήματα, δηλαδή εκείνα που περιλαμβάνουν στις μεταβλητές τους το χρόνο, μπορούν να αναχθούν σε πολυσταδιακές διαδικασίες αποφάσεων. Έτσι προέκυψε και η ονομασία "Δυναμικός Προγραμματισμός". Παρ' όλα αυτά η μέθοδος του δυναμικού προγραμματισμού μπορεί να εφαρμοσθεί και σε μη δυναμικά προβλήματα. Πράγματι είναι ενδεχόμενο μία φυσική διαδικασία, που ενδιαφέρει η βελτιστοποίηση της λειτουργίας της, να μπορεί να θεωρηθεί και μελετηθεί είτε σαν διαδικασία αποφάσεως ενός σταδίου, είτε σαν διαδικασία πολυσταδιακών αποφάσεων. Σε μία τέτοια περίπτωση τίθεται το ερώτημα, γιατί να προσφύγουμε στις διαδικασίες πολυσταδιακών αποφάσεων. Η απάντηση είναι ότι πολλές φορές αυτό συμφέρει από την άποψη ευκολίας υπολογισμών. Στην περίπτωση μιας αποφάσεως για ολόκληρο το εξεταζόμενο χρονικό διάστημα, αυτή έχει τη μορφή μετασχηματισμού που εξαρτάται από το χρόνο και, συνήθως, προκύπτει ως λύση διαφορικών εξισώσεων μη γραμμικών, που είναι πολύ δύσκολο να επιλυθούν. Με την κατάτμηση της διαδικασίας σε διαδοχικά στάδια μπορούμε να υποθέσουμε ότι στα υποδιαστήματα χρόνου, που αντιστοιχούν στα στάδια αυτά, οι μεταβλητές έχουν σταθερές τιμές (εισάγοντας έτσι βεβαίως μία προσέγγιση), οπότε οι αντίστοιχες στα υποδιαστήματα αυτά εξισώσεις περιορίζονται σε αλγεβρικές ή σε εξισώσεις διαφορών, που είναι ευκολότερο να επιλυθούν. Έτσι όμως ο αριθμός των απλούστερων αυτών εξισώσεων αυξάνει κατά πολύ συγκεκριμένα πολλαπλασιάζεται επί τον αριθμό των σταδίων της διαδικασίας που θεωρούμε. Οι εξισώσεις αυτές είναι αλληλοεξαρτημένες και η σύγχρονη επίλυση τους θα αποτελούσε και πάλι πολύ δύσκολο υπολογιστικό πρόβλημα. Εδώ έρχεται η αρχή της β ε λ τ ι σ τ ο π ο ι ή σ ε ω ς του Bellman να διευκολύνει τα πράγματα. Η αρχή αυτή εκφράζεται ως εξής: "Μία βέλτιστη πολιτική έχει την ιδιότητα ότι οποιαδήποτε και αν είναι η αρχική κατάσταση της διαδικασίας και η αρχική απόφαση, οι αποφάσεις που εναπομένουν πρέπει να συνιστούν μία βέλτιστη πολιτική σε σχέση με την κατάσταση της διαδικασίας που προέρχεται από την πρώτη απόφαση". Έτσι, αρχίζοντας από ένα στάδιο της πολυσταδιακής διαδικασίας, για το οποίο γνωρίζουμε την αρχική κατάσταση του συστήματος, επιλύουμε τις εξισώσεις του προβλήματος για το στάδιο αυτό, δηλαδή υπολογίζουμε τη βέλτιστη απόφαση λειτουργίας κατά το στάδιο αυτό, οπότε ορίζουμε την κατάσταση του συστήματος κατά την αρχή του επομένου σταδίου της διαδικασίας. Κατόπιν χρησιμοποιώντας την κατάσταση που υπολογίσαμε σαν αρχική κατάσταση του δευτέρου σταδίου προσδιορίζουμε τη βέλτιστη απόφαση για το στάδιο αυτό και επίσης την αρχική κατάσταση του επομένου σταδίου. Προχωρώντας έτσι, μπορούμε να προσδιορίσουμε μία αλληλουχία διαδοχικών αποφάσεων που αποτελεί τη βέλτιστη πολιτική για όλα τα στάδια της διαδικασίας. Η πολιτική αυτή, σύμφωνα με την αρχή βελτιστοποιήσεως του "Bellman", αποτελεί τη βέλτιστη πολιτική για ολόκληρη την πολυσταδιακή διαδικασία.

Συνήθως στα προβλήματα δυναμικού προγραμματισμού γνωρίζουμε, ή μπορούμε να καθορίσουμε, την τελική κατάσταση της διαδικασίας που θέλουμε να βελτιστοποιήσουμε και για το λόγο αυτό η αρίθμηση των σταδίων της πολυσταδιακής διαδικασίας γίνεται κατά αντίστροφη φορά, δηλαδή από το τέλος του συνολικού χρονικού διαστήματος που εξετάζουμε προς την αρχή. Αυτή είναι μία βασική χαρακτηριστική ιδιότητα των προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού (ξεκινώντας) από την αρχή (π.χ. πρόβλημα ελαχίστου χρόνου διαδρομής).

1.3 ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Ο Δυναμικός Προγραμματισμός δεν είναι μία συγκεκριμένη μέθοδος την οποία, μπορεί κανείς να εφαρμόσει απλώς ακολουθώντας ορισμένα βήματα, σε οποιοδήποτε πρόβλημα το οποίο χαρακτηρίζεται από διαδοχικές και αλληλοεξαρτώμενες αποφάσεις. Αντίθετα είναι μία γενική αρχή, ένας τρόπος αντιμετώπισης τέτοιων προβλημάτων. Έτσι, μολονότι θα προσδιορίσουμε ορισμένα βασικά βήματα τα οποία πρέπει να ακολουθήσουμε για να εφαρμόσουμε τον δυναμικό προγραμματισμό, οι ειδικότερες σχετικές λεπτομέρειες εφαρμογής του εξαρτώνται από το εκάστοτε πρόβλημα, και πιθανόν να χρειάζονται ορισμένη διαίσθηση ή φαντασία για να πραγματοποιηθούν. Γι΄ αυτό το λόγο, σ΄ αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τη γενική μεθοδολογία του μέσα από ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα. Σε επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε περισσότερες εφαρμογές. Μερικά από τα προβλήματα που λύνονται με Δυναμικό Προγραμματισμό μπορούν να λυθούν και με άλλες μεθόδους. Παραδείγματος χάριν, το κλασσικό πρόβλημα επιλογής της καλύτερης δραστηριότητας για χρηματοδότηση (capital budgeting) μπορεί να λυθεί με Δυναμικό Προγραμματισμό, καθώς επίσης και με Γραμμικό, Ακέραιο ή Μη Γραμμικό προγραμματισμό, ανάλογα με τη φύση των μεταβλητών και των σχέσεων μεταξύ τους. Πολλές φορές όμως, ο Δυναμικός Προγραμματισμός προσφέρει μια πολύ ευκολότερη λύση.

Γενικά, τα προβλήματα στα οποία η μέθοδος του Δυναμικού Προγραμματισμού μπορεί να συνεισφέρει είναι:

α)προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού (συνδυαστικά προβλήματα),

β)προβλήματα με μη γραμμική αντικειμενική συνάρτηση και

γ)προβλήματα με πιθανοτικά αποτελέσματα.

1.4 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΒΡΙΣΚΕΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Τα προβλήματα στα οποία ο Δυναμικός Προγραμματισμός έχει βρει μεγάλη εφαρμογή είναι εκείνα των οποίων η λύση παρουσιάζεται σαν ένα σύνολο από αλληλοεξαρτώμενες αποφάσεις. Συχνά οι αποφάσεις αυτές είναι χρονικά συνεχόμενες, δηλαδή λαμβάνονται σε διαδοχικές χρονικές περιόδους, εκφράζοντας την ίδια πολιτική, ή αποβλέποντας στον ίδιο στόχο. Παραδείγματος χάριν, ο διευθυντής παραγωγής ενός εργοστασίου αποφασίζει στην αρχή κάθε εβδομάδας την ποσότητα παραγωγής εκείνης της εβδομάδας. Οι διάφορες αποφάσεις του, μολονότι λαμβάνονται σε διαφορετικούς χρόνους είναι αλληλοεξαρτώμενες, εφόσον το επίπεδο παραγωγής μίας εβδομάδας εξαρτάται από τις αποφάσεις παραγωγής των προηγουμένων καθώς και των επομένων εβδομάδων. Το σύνολο των αποφάσεων του υλοποιεί το «πρόγραμμα παραγωγής» του εργοστασίου το οποίο θέτει τα όρια ή τις γενικές οδηγίες των αποφάσεων του, και το οποίο έχει τεθεί με σκοπό να επιτευχθούν ορισμένοι στόχοι (π.χ. αποθεματικής πολιτικής, πωλήσεων, κ.λ.π.). Οι στόχοι αυτοί μπορούν να αναθεωρηθούν κάθε τόσο, οπότε αλλάζει και το πρόγραμμα παραγωγής. Η χρονική διάρκεια για την οποία τίθεται πρόγραμμα παραγωγής και κατά την διάρκεια της οποίας οι στόχοι θεωρούνται σταθεροί αποκαλείται *ορίζοντας προγραμματισμού.*

Σε άλλες περιπτώσεις μολονότι οι αποφάσεις δεν είναι πράγματι χρονικά συνεχόμενες, διευκολύνει στην απόκτηση της λύσης το να μεταχειριστούμε το πρόβλημα σαν να ήταν χρονικά συνεχόμενες. Για παράδειγμα, προβλήματα *κατανομής πόρων*, σαν κι αυτά που εξετάζονται με μεθόδους γραμμικού ή ακέραιου προγραμματισμού, λύνονται με μία ταυτόχρονη απόφαση κατανομής πόρων μεταξύ διαφόρων δραστηριοτήτων (εναλλακτικών λύσεων). Εν τούτοις, θα δούμε ότι είναι συχνά χρήσιμο να αποσυνδέσουμε ένα τέτοιο πρόβλημα σε υποπροβλήματα (ή στάδια αποφάσεως) τα οποία λύνονται διαδοχικά, ένα υποπρόβλημα για κάθε δραστηριότητα.

Για να κάνουμε φανερό τι προβλήματα εννοούμε, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε τον τρόπο με τον οποίο θα καλύψουμε την προσωπική μας ανάγκη για αυτοκίνητο ιδιωτικής χρήσεως την επόμενη δεκαετία έχοντας τη μικρότερη δαπάνη. Θεωρητικά, είναι φανερό ότι μπορούμε να αποφασίζουμε οποιαδήποτε χρονική στιγμή να κρατήσουμε το αυτοκίνητο που έχουμε, ή να το πουλήσουμε και να πάρουμε ένα άλλο οποιουδήποτε τύπου, οποιασδήποτε ηλικίας. Για να απλουστεύσουμε όμως το πρόβλημα, χωρίς να αλλάξουμε τη φύση του, ας υποθέσουμε ότι θα αποφασίζουμε σχετικά μόνο στην αρχή κάθε χρόνου και ότι οι αποφάσεις που μπορούμε να πάρουμε είναι: να αγοράσουμε καινούργιο αυτοκίνητο του ίδιου τύπου, ή να διατηρήσουμε το παλιό. Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα, μπορούμε να υπολογίσουμε το κόστος που θα είχαμε αν παίρναμε κάθε δυνατή αλληλουχία αποφάσεων στη διάρκεια της δεκαετίας και να διαλέξουμε εκείνη την αλληλουχία των 10 αποφάσεων που θα δημιουργούσε το μικρότερο κόστος. Δυστυχώς, η υπολογιστική προσπάθεια για να αξιολογήσουμε όλες τις δυνατές αλληλουχίες αποφάσεων είναι υπερβολικά μεγάλη, αφού κι αν υποθέσουμε ότι οι ηλικίες του αυτοκινήτου είναι μόνο 10, οι αλληλουχίες των δυνατών αποφάσεων γίνονται $1O^{10}$. Πρακτικά λοιπόν είναι σχεδόν αδύνατο να διαλέγουμε την καλύτερη αλληλουχία αποφάσεων ανάμεσα από όλες τις δυνατές αλληλουχίες, ακόμη και στις περιπτώσεις που το πρόβλημα έχει σχετικά περιορισμένες διαστάσεις. Με το Δυναμικό Προγραμματισμό αυτή ακριβώς την αδυναμία υπερνικούμε, αφού βρίσκουμε, όπως θα δούμε, τη βέλτιστη αλληλουχία αποφάσεων χωρίς να απαριθμούμε και να αξιολογούμε όλες τις δυνατές αλληλουχίες των αποφάσεων.

Το παράδειγμα μας μπορούμε να το παραλληλίσουμε με μια διαδικασία η οποία εξελίσσεται: στην περίπτωση μας στη διάρκεια του χρόνου. Στις διαδικασίες αυτές λέμε *στάδιο της διαδικασίας* μια συγκεκριμένη φάση στην εξέλιξη της. Επειδή τα στάδια σε αυτές τις διαδικασίες είναι συνήθως πολλά, γι' αυτό τις λέμε και *πολυσταδιακές διαδικασίες.* Τα στάδια στη διαδικασία του παραδείγματός μας είναι οι αρχές των 10 χρόνων. Η διαδικασία σε κάθε στάδιο μπορεί να βρεθεί σε διάφορες καταστάσεις, που ορίζονται από τις τιμές της μεταβλητής-ή των μεταβλητών-, που την περιγράφουν. Η μεταβλητή που περιγράφει τη διαδικασία του παραδείγματος μας, είναι η ηλικία του αυτοκινήτου, αφού υποθέσαμε ότι το αυτοκίνητο θα είναι του ίδιου τύπου. Οι καταστάσεις λοιπόν αυτής της διαδικασίας είναι όλες οι δυνατές ηλικίες του αυτοκινήτου. Αυτό σημαίνει ότι τον πέμπτο, π.χ., ημερολογιακό χρόνο μπορεί να έχουμε αυτοκίνητο ηλικίας από Ο μέχρι *T* χρόνων, αν Τ είναι η μεγαλύτερη ηλικία στην οποία μπορεί να βρεθεί ο συγκεκριμένος τύπος αυτοκινήτου. Σε κάθε στάδιο μιας διαδικασίας μπορούμε να πάρουμε μια απόφαση ανάμεσα από όλες τις δυνατές αποφάσεις. Στο παράδειγμα μας οι δυνατές αποφάσεις σε κάθε στάδιο είναι η διατήρηση ή μη του αυτοκινήτου που έχουμε και ποιας ηλικίας θα είναι αυτό που θα αγοράσουμε αν το πουλήσουμε.

Στην αρχή ενός χρόνου, αν έχουμε ένα αυτοκίνητο ηλικίας t και πάρουμε την απόφαση να κρατήσουμε το αυτοκίνητο, γνωρίζουμε με βεβαιότητα ότι στην αρχή του επόμενου χρόνου θα έχουμε ένα αυτοκίνητο ηλικίας t+1 χρόνων, δηλαδή παίρνοντας μια απόφαση ξέρουμε με βεβαιότητα την κατάσταση στην οποία θα βρεθεί η διαδικασία στο επόμενο στάδιο. Τις διαδικασίες αυτές τις λένε καθοριστικές. Στις καθοριστικές διαδικασίες οι μεταβάσεις από στάδιο σε στάδιο και οι αλλαγές καταστάσεως σε κάθε μετάβαση μπορούν να προβλεφθούν με βεβαιότητα για ορισμένη αλληλουχία αποφάσεων. Πέρα όμως από τις καθοριστικές διαδικασίες, στον πραγματικό κόσμο, υπάρχουν και οι στοχαστικές διαδικασίες, δηλαδή οι διαδικασίες εκείνες που εξελίσσονται με βάση τις πιθανότητες. Αυτό σημαίνει ότι παίρνοντας μια απόφαση όταν η διαδικασία είναι σε ορισμένη κατάσταση σε κάποιο στάδιο, μπορούμε να ξέρουμε μόνο με ποια πιθανότητα θα βρεθεί σε ορισμένη κατάσταση στο επόμενο στάδιο. Μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών είναι οι μαρκοβιανές διαδικασίες, που θα μας απασχολήσουν σε αρκετή έκταση σε αυτό το κεφάλαιο. Η θεμελίωση αυτής της περιοχής οφείλεται στον R. Howard*.

Προτού προχωρήσουμε στην παρουσίαση του Δυναμικού Προγραμματισμού, πρέπει να πούμε ότι ο Δυναμικός Προγραμματισμός έχει γενικά αποδειχθεί ισχυρό εργαλείο για τη λύση των προβλημάτων της παραπάνω κατηγορίας. Πέρα από αυτό όμως πρέπει να ξέρουμε ότι συναντούμε προβλήματα λήψεως αποφάσεων σε πολλά στάδια, που μπορούμε να τα διαμορφώσουμε ως προβλήματα Δυναμικού Προγραμματισμού, στην πράξη προβλήματα που δεν είναι από τη φύση τους πολυσταδιακές διαδικασίες λήψεως αποφάσεων, αλλά που μπορούμε θαυμάσια να τα διαμορφώσουμε και να τα λύσουμε ευχερώς με το Δυναμικό Προγραμματισμό.

1.5 ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Για τη λύση των προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού χρησιμοποιούνται διάφορες μέθοδοι, οι οποίες με τη βοήθεια των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών δίνουν αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα. Μερικές από τις μεθόδους αυτές είναι οι εξής:

α) Μέθοδοι *εξομάλυνσης δυναμικού*

Με αυτές επιδιώκεται η ελάττωση των αιχμών ζήτησης του δυναμικού και η εξομάλυνση του από περίοδο σε περίοδο, μέσα σε μία προκαθορισμένη

* **Horward, R., A.,** Dynamic Programming and Marcov Processes, J. Willey, N.Y., 1960

διάρκεια του έργου. Είναι οι περισσότερο χρησιμοποιούμενες μέθοδοι γι' αυτό και θ' αναλυθούν λεπτομερώς παρακάτω.

β) Μέθοδοι κατανομής δυναμικού

Με τις μεθόδους αυτές γίνεται κατανομή του διαθέσιμου δυναμικού στις δραστηριότητες, ενώ ταυτόχρονα επιδιώκεται η εύρεση της μικρότερης διάρκειας του έργου μέσα στα πλαίσια του περιορισμένου δυναμικού.

γ) Διατύπωση των προβλημάτων ως (0,1) προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού.

Η μέθοδος εξομάλυνσης δυναμικού είναι μία προσεγγιστική μέθοδος κατά την οποία χρησιμοποιούνται τα χρονικά περιθώρια των δραστηριοτήτων για την εξομάλυνση των αιχμών ζητήσεως του δυναμικού. Τα χρονικά περιθώρια μίας δραστηριότητας είναι ένα μέτρο της ευελιξίας της σχετικά με το χρόνο έναρξης της. Η μέθοδος αυτή μπορεί ν' αναλυθεί σε τρία στάδια:

Στο *πρώτο στάδιο* της μεθόδου όλες οι δραστηριότητες προγραμματίζονται σύμφωνα με κάποιον κοινό κανόνα, για παράδειγμα με τους νωρίτερους χρόνους έναρξής τους, συσσωρεύοντας το σύνολο των μονάδων για το δυναμικό που απαιτείται σε κάθε χρονική περίοδο. Το στάδιο αυτό ονομάζεται *άθροιση δυναμικού.*

Στη συνέχεια, στο *δεύτερο στάδιο* γίνεται προσπάθεια εξομάλυνσης των απαιτήσεων των δραστηριοτήτων σε δυναμικό όσο το δυνατό περισσότερο, διατηρώντας τη διάρκεια του έργου στο ελάχιστο. Αυτό το στάδιο καλείται *εξομάλυνση δυναμικού ή προγραμματισμός περιορισμένου χρόνου.*

Τέλος, στο *τρίτο στάδιο* διατηρείται η διάρκεια του έργου όσο το δυνατό μικρότερη, μη επιτρέποντας στο δυναμικό να ξεπεράσει προκαθορισμένα επίπεδα. Αυτό το στάδιο καλείται *επιπεδοποίηση δυναμικού* ή *προγραμματισμός περιορισμένου δυναμικού* .

Πρέπει να τονισθεί ότι και στα τρία παραπάνω στάδια της μεθόδου πρώτα κατανέμεται η κρίσιμη διαδρομή και στη συνέχεια κατανέμονται μία προς μία όλες οι υπόλοιπες δραστηριότητες.

1.5.1 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ GANTT

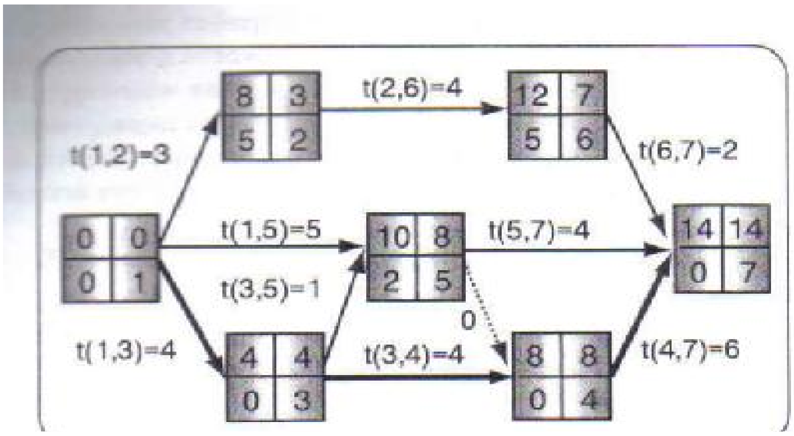
Η διαδικασία της εξομάλυνσης των αιχμών ζήτησης του δυναμικού διευκολύνεται, αν το δίκτυο μετά την επίλυση του μετατραπεί σε *διάγραμμα Gantt.* Αυτό είναι ένα λεπτομερές γραμμικό ημερολόγιο, στο οποίο σημειώνονται οι διάρκειες των εργασιών που προγραμματίζονται να γίνουν με αρχή την ημερομηνία έναρξης τους.

Η μετατροπή ενός δικτύου σε διάγραμμα *Gantt* γίνεται, αν προταχθούν στο διάγραμμα οι κρίσιμες δραστηριότητες και ακολουθήσουν όλες οι άλλες με τη σειρά που καθορίζουν οι νωρίτεροι χρόνοι έναρξης τους. Σύμφωνα με τα πιο πάνω οι απαιτήσεις σε κάθε είδος δυναμικού σημειώνονται σε κάθε χρονική περίοδο δύο φορές. Η πρώτη αντιστοιχεί στην έναρξη της δραστηριότητας στο νωρίτερό της χρόνο και η δεύτερη στον αργότερο χρόνο έναρξης της. Αφού σημειωθούν με τη σειρά οι δραστηριότητες του δικτύου, γράφεται πάνω σ' αυτές το δυναμικό που χρειάζεται κάθε δραστηριότητα, σε κάθε χρονική περίοδο, με μια συμβολική μορφή. Τα είδη του δυναμικού συνηθίζεται να κωδικοποιούνται με μια σειρά μονοψήφιων αριθμών, π.χ. 4-1-3, που σημαίνει τέσσερις μονάδες από το πρώτο είδος, μία μονάδα από το δεύτερο είδος και τρεις μονάδες από το τρίτο είδος δυναμικού.

Για να διακρίνεται η περίπτωση έναρξης στο νωρίτερο χρόνο από τον αργότερο, το δυναμικό σημειώνεται στο διάγραμμα με αγκύλη στην πρώτη περίπτωση και με παρένθεση στη δεύτερη. Το δυναμικό για τις κρίσιμες δραστηριότητες και για τα τμήματα που αντιστοιχούν σε κοινές ημέρες εκτέλεσης, ανεξάρτητα από νωρίτερα και αργότερα χρόνους έναρξης, σημειώνεται χωρίς αγκύλη ή παρένθεση.

Για να γίνουν κατανοητά τα παραπάνω παρουσιάζεται μία ολοκληρωμένη εφαρμογή του διαγράμματος *Gantt* σε ένα μικρό έργο.

Με το συμβολισμό που χρησιμοποιείται στη μέθοδο *Gantt*, είναι φανερό ότι το



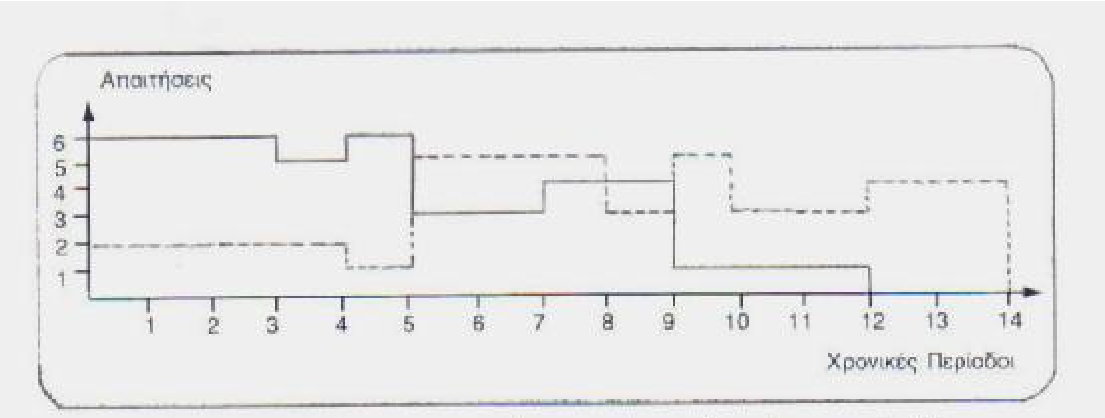
Σχήμα 1.5.1:Δίκτυο παραδείγματος διαγράμματος Gantt

Γεγονός		Διάρκεια		Χρονικές Περίοδοι													
ι	1	t(i,j)	Δ1-Δ2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	3	4	2-2	2-2	2-2	2-2	2-2										
3	4	4	1-3					1-3	1-3	1-3	1-3						
4	7	6	0-2									0-2	0-2	0-2	0-2	0-2	0-2
1	2	3	3-4	[3-4]	[3^]	[3-4]			(3-4)	(M)	(M)						
1	5	5	1-5	[1-5]	[1-5]	[1-5]	[1-5]	[1-5]	(1-5)	(1-5)	(1-5)	(1-5)	(1-5)				
2	6	4	2-4				[2-4]	[2-4]	[2-4]	[2-4]		(2-4)	(2-4)	(2-4)	(2-4)		
3	5	1	2-3					[2-3]					(2-3)				
6	7	2	3-4								[3-1]	[M]				(3-4)	(3-4)
5	7	4	1-1									[1-1]	[1-1]	1-1	1-1	(1-1)	(1-1)
Δυναμικό για νωρίτερο χρόνο έναρξης				6-11	6-11	6-11	5-11	6-15	3-7	3-7	4-7	+ 4-7	1-3	1-3	1-3	0-2	0-2
Δυναμικό για αργότερο χρόνο έναρξης				2-2	2-2	2-2	2-2	1-3	5-12	5-12	5-12	3-11	5-14	3-7	3-7	4-7	4-7

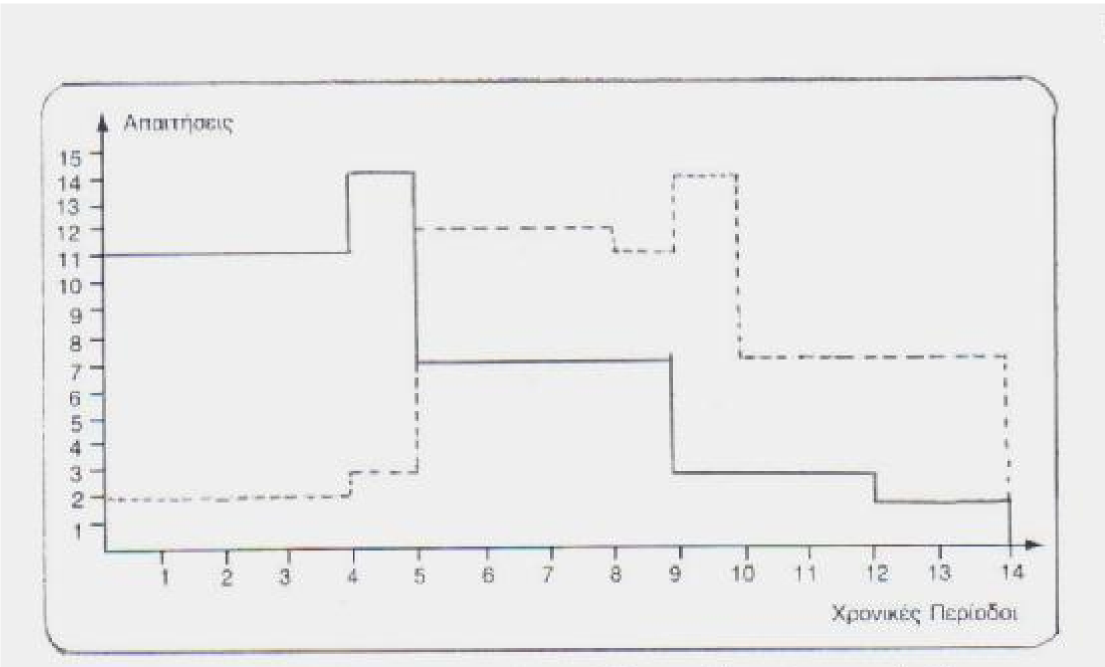
Πίνακας 1Α: διάγραμμα Gantt

έργο χρειάζεται δύο είδη δυναμικού. Όπως φαίνεται στον πίνακα 1Α, μετά από όλες τις καταχωρήσεις υπολογίζεται το δυναμικό που χρειάζεται σε κάθε χρονική περίοδο, τόσο για την περίπτωση που οι δραστηριότητες αρχίζουν να εκτελούνται στους νωρίτερα χρόνους (οπότε παραλείπονται στην άθροιση οι αριθμοί που βρίσκονται μέσα σε παρενθέσεις), όσο και για την περίπτωση που οι δραστηριότητες αρχίζουν να εκτελούνται στους αργότερους χρόνους (οπότε παραλείπονται στην άθροιση οι αριθμοί που είναι μέσα σε αγκύλες). Τα σχετικά αθροίσματα γράφονται στις δύο τελευταίες γραμμές του πίνακα.

Μετά τη συμπλήρωση του πίνακα, μπορεί πλέον να σχεδιασθεί η ζήτηση του δυναμικού σε σχέση με το χρόνο για κάθε είδος δυναμικού και για κάθε περίπτωση έναρξης των δραστηριοτήτων, δηλαδή για την έναρξη κάθε δραστηριότητας στο νωρίτερο ή στον αργότερο της χρόνο.



Σχήμα1.5.2: Διάγραμμα απαιτήσεων πρώτου είδους δυναμικού (Δ1)
[Νωρίτερος χρόνος έναρξης δραστηριότητας: Συνεχής γραμμή
Αργότερος χρόνος έναρξης δραστηριότητας: Διακεκομμένη γραμμή]

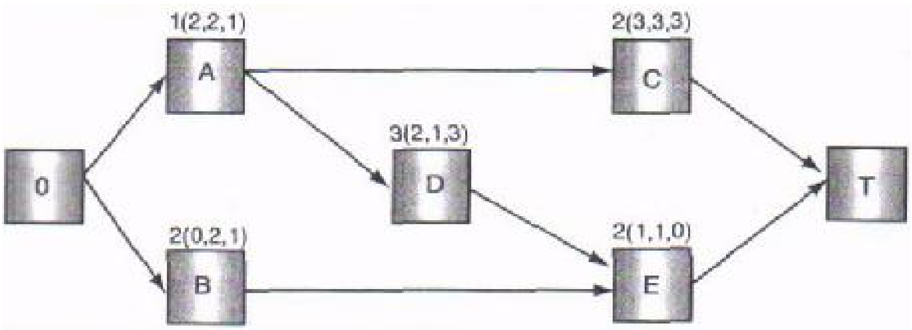


Σχήμα1. 5.3: Διάγραμμα απαιτήσεων δεύτερου είδους δυναμικού (Δ2)
[Νωρίτερος χρόνος έναρξης δραστηριότητας: Συνεχής γραμμή
Αργότερος χρόνος έναρξης δραστηριότητας: Διακεκομμένη γραμμή]

Παρατηρώντας τα διαγράμματα των σχημάτων 1.5.2 και 1.5.3, προκύπτει ότι υπάρχει ανομοιομορφία κατανομής του δυναμικού και στις δύο περιπτώσεις. Με τη βοήθεια των χρονικών περιθωρίων των δραστηριοτήτων και των προηγούμενων διαγραμμάτων μπορεί να βελτιωθεί η κατανομή του δυναμικού, δηλαδή να εξαλειφθεί όσο το δυνατόν περισσότερο η ανομοιομορφία που παρουσιάζει το δυναμικό κατά τη διάρκεια του έργου.

1.6 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Στον αρχικό προγραμματισμό του δυναμικού τα προβλήματα μπορούν να διατυπωθούν σαν (0,1) προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού. Ας θεωρηθεί για παράδειγμα το δίκτυο κόμβων του σχήματος 1.6.1.

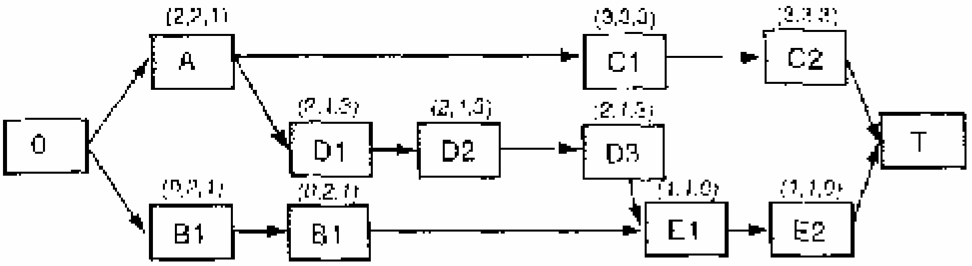


Σχήμα. 1.6.1: Δίκτυο παραδείγματος μαθηματικού προγραμματισμού

Σε κάθε κόμβο ο αριθμός που βρίσκεται έξω από τις παρενθέσεις αποτελεί τη διάρκεια της εργασίας, ενώ οι αριθμοί μέσα στις παρενθέσεις είναι διανύσματα που συμβολίζουν τις αντίστοιχες απαιτήσεις του κάθε τύπου δυναμικού. Έτσι, για παράδειγμα, η εργασία Α έχει διάρκεια μία χρονική μονάδα και απαιτεί για την ολοκλήρωσή της δύο μονάδες από το πρώτο είδος δυναμικού, δύο μονάδες από το δεύτερο είδος δυναμικού και μία μονάδα από το τρίτο είδος δυναμικού. Το αρχικό αυτό δίκτυο μετατρέπεται κατόπιν σε ένα ισοδύναμο δίκτυο, το οποίο περιέχει μόνον εργασίες που έχουν διάρκεια ίση με μία χρονική μονάδα (βλ. σχήμα 1.6.2).

Ορίζεται μία (0,1) μεταβλητή xi^x για μία υποεργασία x, η οποία ισούται με μηδέν για όλες τις χρονικές περιόδους t, εκτός από τη χρονική περίοδο κατά την οποία είναι προγραμματισμένη να εκτελεσθεί η εργασία x οπότε είναι ίση με τη μονάδα.

Η ελάχιστη δυνατή περίοδος t, όπου η x_i^x ορίζεται από τους χρονικούς 'εξαναγκασμούς', μπορεί να είναι διαφορετική από το μηδέν. Οι εξαναγκασμοί στον προγραμματισμό εργασιών υπάρχουν εξαιτίας των προτεραιοτήτων και των περιορισμών του δυναμικού. Οι ακόλουθες σχέσεις ερμηνεύονται ως εξής:



Σχήμα1.6.2: Δίκτυο παραδείγματος μαθηματικού προγραμματισμού

$\sum_i ix_i^{D_2}$ - $\sum_j jx_j^{D_1}$ =1 $\Rightarrow$ Η D_2 πρέπει ν' ακολουθήσει αμέσως μετά τη D_1.

$\sum_i ix_i^{B_1}$ - $\sum_j jx_j^{B2}$ ≥ 1 $\Rightarrow$ Η αρχή της E_1 πρέπει να βρίσκεται τουλάχιστον κατά μία χρονική περίοδο πίσω από τη B_2.

$\sum_i x_i^x$ =1 $\Rightarrow$ Η σχέση αυτή ισχύει για όλες τις εργασίες και υποεργασίες.

$\sum_{x=\mathrm{A},\mathrm{B}.k.l.p.} x_i^x \, r_j^x \leq R_J$ $\Rightarrow$ Η συνολική ποσότητα του j^{th} δυναμικού που χρησιμοποιείται σε κάθε περίοδο I δεν πρέπει να υπερβαίνει το διαθέσιμο δυναμικό R_J.

Η προσπάθεια που απαιτείται στη διατύπωση ακόμη και μεσαίου μεγέθους προβλημάτων ως προγράμματα (0,1), είναι σημαντική. Δυστυχώς το κόστος επίλυσης των προγραμμάτων (0,1) που παράγονται είναι συνήθως απλησίαστο και σε πολλές περιπτώσεις τα προβλήματα που παράγονται είναι πολύ μεγάλα για να λυθούν ακόμη και με χρήση σύγχρονων ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Μερική πρόοδος έχει γίνει στην ανάπτυξη περισσότερο αποτελεσματικών τρόπων επίλυσης αυτών των τύπων των προβλημάτων. Η μελλοντική έρευνα προς αυτή την κατεύθυνση μπορεί τελικά να φέρει τα προβλήματα δυναμικού μέσα στην πυξίδα των επίσημων φορμαλιστικών μεθόδων. Προς το παρόν όλα τα πρακτικά προγράμματα δυναμικού χρησιμοποιούν heuristics (αποφάσεις προγραμματισμού που είναι βασισμένες σε λογικούς κανόνες οι οποίοι βρέθηκαν να δίνουν καλά αποτελέσματα στην πράξη). Τα κριτήρια που χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό προτε-ραιοτήτων κυμαίνονται από απλούς έως ιδιαίτερα περίπλοκους συνδυασμούς των χρόνων των γεγονότων, των χρονικών περιθωρίων και των διαρκειών των δραστηριοτήτων.

1.7 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Όπως έχει προαναφερθεί σχεδόν σε κάθε περίπτωση εφαρμογής της μεθοδολογίας Δυναμικού Προγραμματισμού απαιτείται ιδιαίτερη διατύπωση και προσέγγιση. Εν τούτοις όλα τα προβλήματα στα οποία είναι δυνατή η εφαρμογή μεθοδολογίας δυναμικού προγραμματισμού έχουν ορισμένα κοινά γενικά χαρακτηριστικά. Αυτά τα χαρακτηριστικά θα εξετάσουμε και θα περιγράψουμε, κατ΄ αρχήν με γενικό τρόπο και ακολούθως μέσω ενός συγκεκριμένου παραδείγματος.

1.7.1 Επισκόπηση της Μεθοδολογίας του Δυναμικού Προγραμματισμού

Μετά την ολοκλήρωση της εφαρμογής της μεθοδολογίας του Δυναμικού Προγραμματισμού, μπορούμε να οριοθετήσουμε το γενικότερο πλαίσιο της εφαρμογής της.

Για να είναι δυνατή η επίλυση ενός προβλήματος με τη μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού απαιτούνται τα παρακάτω:

1)Διαχωρισμός της διαδικασίας λήψης αποφάσεων σε στάδια και προσδιορισμός:

α) των δυνατών *καταστάσεων στις* οποίες μπορεί να βρίσκεται το σύστημα σε κάθε στάδιο και

β) των εναλλακτικών αποφάσεων που αντιστοιχούν σε κάθε κατάσταση.

Ο καθορισμός των καταστάσεων πρέπει να γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε οι ορισθείσες καταστάσεις να περιλαμβάνουν αρκετές πληροφορίες για να είναι δυνατή η εφαρμογή της βελτιστοποίησης για κάθε κατάσταση σε κάθε στάδιο αρχίζοντας από το τελευταίο και τελειώνοντας με το πρώτο.

2) Καθορισμός της συνάρτησης αποτελέσματος (ελαχιστοποίηση απόστασης, ελαχιστοποίηση κόστους, μεγιστοποίηση κέρδους κ.ο.κ.) που αντιστοιχεί σε κάθε συνδυασμό δυνατής κατάστασης και εφικτής επιλογής. Αυτό οδηγεί στον ορισμό μιας μαθηματικής σχέσης για τη συνάρτηση F_N (S_N , D_N) *και* την F_N (S_N) καθώς και την επαναληπτική σχέση μεταξύ των δύο.

3) Προσδιορισμός διαδοχικά των τιμώ*ν* της $f^*_N(S_N)$ (για ένα πρόβλημα με Ν στάδια), της $f^*_{N-1}(S_{N-1})$, της $f^*_{N-2}(S_{N-2})$ ……, της $f^*_2(S_2)$ και τέλος της $f^*_1(S_1)$ χρησιμοποιώντας κάποιους πίνακες που θα δούμε παρακάτω.

4)Η βελτιστοποίηση σε οποιοδήποτε στάδιο Ν είναι ανεξάρτητη από τα προηγούμενα στάδια Ν-1, Ν-2 κ.ο.κ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Προγραμματισμός Παραγωγής

Μια βιομηχανική μονάδα προσπαθεί να προγραμματίσει τις ποσότητες παραγωγής ενός προϊόντος για το επόμενο τετράμηνο με βάση τη ζήτηση του προϊόντος και τους διαθέσιμους πόρους της έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος παραγωγής.

Ο προγραμματισμός παραγωγής βασίζεται στα ακόλουθα δεδομένα:

	Κόστος Παραγωγής (ανά τεμάχιο)	Προβλέψεις Πωλήσεων (τεμάχια)	Δυνατότητα Παραγωγής (τεμάχια)
Μάιος	5000	2000	6000
Ιούνιος	6000	4000	6000
Ιούλιος	7000	6000	4000
Αύγουστος	8000	3000	3000

Η επιχείρηση δεν επιθυμεί το απόθεμα στο τέλος κάθε μήνα να υπερβαίνει τα 5000 τεμάχια, ενώ δεν υπάρχει καθόλου αρχικό απόθεμα στην αρχή του Μαΐου.

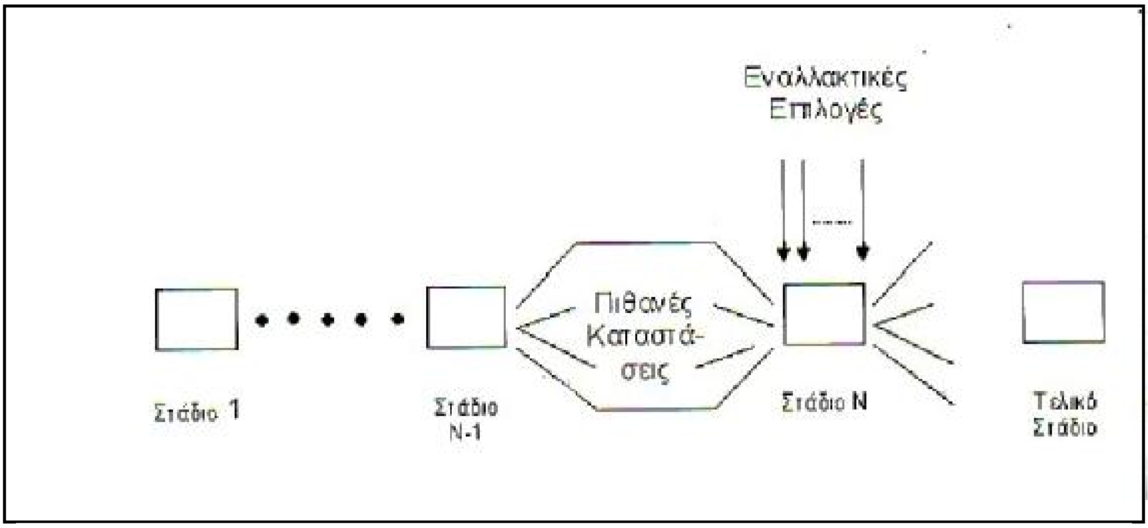
Όταν η παραγωγή παρουσιάζει μεταβολές από μήνα σε μήνα υπάρχει κάποιο επιπλέον κόστος για την επιχείρηση. Το κόστος αυτό αντιπροσωπεύει αποζημιώσεις απολυμένων, αν η παραγωγή μειωθεί ή αντίστοιχα κόστος προσλήψεων στην περίπτωση που η παραγωγή αυξηθεί. Το κόστος μεταβολής του ύψους της παραγωγής από μήνα σε μήνα υπολογίσθηκε σε 2 ευρώ ανά τεμάχιο.

Επίσης το κόστος αποθήκευσης ποσοτήτων που παράχθηκαν σε ένα δεδομένο μήνα και κρατούνται σε στοκ για να εξυπηρετήσουν τη ζήτηση σε επόμενο(ους) μήνα(ες) έχει υπολογισθεί σε 2 ευρώ ανά μήνα (ανά τεμάχιο).

<u>Στάδια Αποφάσεων</u>

Ένα από τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού είναι η δυνατότητα διαχωρισμού του προβλήματος σε διαδοχικά στάδια. Σε κάθε στάδιο απαιτείται η επιλογή μιας απόφασης από ένα δεδομένο σύνολο εναλλακτικών αποφάσεων.

Η απόφαση που λαμβάνεται σε κάθε στάδιο επηρεάζει το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα όχι μόνο του συγκεκριμένου σταδίου αλλά και όλων εκείνων που ακολουθούν.



Στο πρόβλημα προγραμματισμού παραγωγής του συγκεκριμένου παραδείγματος διακρίνουμε τη λήψη τεσσάρων διαδοχικών αποφάσεων που αφορούν το ύψος της παραγωγής σε κάθε έναν από τους μήνες του χρονικού ορίζοντα. Οι αποφάσεις αυτές είναι αλληλοεξαρτώμενες, διότι η απόφαση για το ύψος παραγωγής του Ιουνίου, εξαρτάται μερικώς και από την παραγωγή του Μαΐου. Αν το μήνα Μάιο είχε παραχθεί ποσότητα μεγαλύτερη της αντίστοιχης ζήτησης ώστε να δημιουργηθεί απόθεμα, είναι πιθανόν η παραγωγή του Ιουνίου να είναι χαμηλότερη σε σχέση με την περίπτωση κατά την οποία δεν θα υπήρχε διαθέσιμο απόθεμα από τον προηγούμενο μήνα.

<u>Καταστάσεις</u>

Σε κάθε στάδιο διακρίνουμε ένα σύνολο πιθανών καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρίσκεται το υπό ανάλυση σύστημα. Η κατάσταση στην οποία μπορεί να βρίσκεται το σύστημα σε ένα συγκεκριμένο στάδιο επηρεάζει την απόφαση που θα ληφθεί στο συγκεκριμένο στάδιο. Οι πιθανές καταστάσεις σε κάθε στάδιο ορίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε για κάθε μία κατάσταση να υπάρχουν όλες εκείνες οι πληροφορίες που είναι απαραίτητε για τη λήψη μιας απόφασης στο συγκεκριμένο στάδιο.

Ας θεωρήσουμε το προηγούμενο παράδειγμα του προγραμματισμού παραγωγής και ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στο στάδιο 3, δηλαδή τη λήψη απόφασης για το ύψος παραγωγής του μηνός Ιουλίου. Οι πιθανές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρίσκεται το σύστημα ορίζονται ως το απόθεμα που θα μπορούσε να υπάρχει σε στοκ στην αρχή του μήνα Ιουλίου.

Το ύψος του διαθέσιμου αποθέματος το μήνα Ιούλιο, προφανώς θα επηρεάσει και την απόφαση για την παραγωγή του μηνός Ιουλίου. Εάν για παράδειγμα το αρχικό απόθεμα του Ιουλίου ήταν μόνο 2000 τεμάχια τότε υπάρχει μόνο μία εναλλακτική λύση, η παραγωγή 4000 τεμαχίων ώστε να ικανοποιηθεί η ζήτηση του μηνός Ιουλίου. Αντίθετα, εάν στην αρχή του Ιουλίου υπάρχει μεγάλη ποσότητα αποθέματος, το ύψος της παραγωγής του Ιουλίου θα μπορούσε να είναι είτε χαμηλότερο χωρίς να υπάρχουν αποθέματα για τον Αύγουστο ή υψηλότερο με ταυτόχρονη δημιουργία αποθεμάτων για τον επόμενο μήνα.

Για τις διαφορετικές καταστάσεις που μπορεί να υπάρχουν στο στάδιο Ν χρησιμοποιούμε το συμβολισμό S_N.

Αποφάσεις

Σε κάθε στάδιο λαμβάνεται κάποια απόφαση η οποία εξαρτάται από την κατάσταση που υπάρχει στο συγκεκριμένο στάδιο.

Συνεχίζοντας με το προηγούμενο παράδειγμα ας θεωρήσουμε το στάδιο 3 (Ιούλιος). Υποθέτουμε ότι οι πιθανές καταστάσεις στο στάδιο 3 είναι S_3=2000 ή S_3=3000 ή S_3=4000, δηλαδή το αρχικό απόθεμα του Ιουλίου μπορεί να είναι 2000 ή 3000 ή 4000 τεμάχια. Ας θεωρήσουμε την περίπτωση που το αρχικό απόθεμα είναι 4000 μονάδες. Η παραγωγή του Ιουλίου μπορεί να είναι 2000 μονάδες για να καλυφθεί η ζήτηση του μηνός 3000 μονάδες ώστε να μείνει απόθεμα 1000 μονάδων για τον Αύγουστο ή 4000 μονάδες κ.ο.κ. Για κάθε κατάσταση υπάρχουν περισσότερες από μία εναλλακτικές αποφάσεις από τις οποίες πρέπει να επιλεγεί μία με στόχο τη βελτιστοποίηση του κόστους.

Οι διαφορετικές αποφάσεις που μπορεί να ληφθούν στο στάδιο N συμβολίζονται με τη μεταβλητή D_{N}.

<u>Καταστάσεις Εισόδου-Εξόδου στο κάθε Στάδιο</u>

Όπως αναφέραμε και στην αρχή του κεφαλαίου ο Δυναμικός Προγραμματισμός είναι μια μεθοδολογία βελτιστοποίησης προβλημάτων που περιλαμβάνουν τη λήψη διαδοχικών αλληλένδετων αποφάσεων. Έτσι οι καταστάσεις των διαδοχικών σταδίων είναι αλληλοσυνδεόμενες. Η αλληλοσύνδεση αυτή γίνεται καλύτερα κατανοητή μέσω του παραδείγματος που εξετάζουμε.

Ας θεωρήσουμε τα στάδια 2 και3, δηλαδή τους μήνες Ιούνιο και Ιούλιο. Έστω ότι με S_2 συμβολίζουμε την κατάσταση του μηνός Ιουνίου (αρχικό απόθεμα Ιουνίου) και με S_3 την κατάσταση του μηνός Ιουλίου (αρχικό απόθεμα Ιουλίου). Έστω επίσης ότι η απόφαση που λαμβάνεται το μήνα Ιούνιο συμβολίζεται με D_2. Η μεταβλητή D_2 δηλαδή συμβολίζει την ποσότητα που θα παραχθεί το μήνα Ιούνιο.

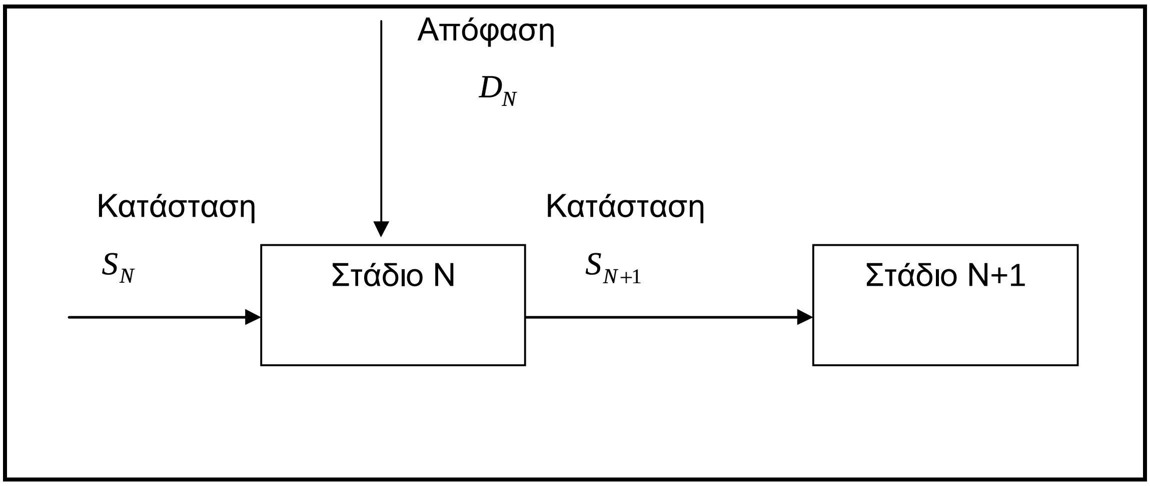
Είναι προφανές ότι μεταξύ των παραπάνω μεγεθών ισχύει η σχέση:

Αρχικό Απόθεμα Ιουλίου	= Αρχικό Απόθεμα Ιουνίου	+	Παραγωγή Ιουνίου	-	Ζήτηση Ιουνίου

ή

$$S_3 = S_2 + D_2 - Z_2$$

Γενικώς μπορούμε να πούμε ότι σε ένα δεδομένο στάδιο N, αν θεωρήσουμε μία δεδομένη κατάσταση S_{N}, τότε για κάθε απόφαση D_N που θα ληφθεί, ορίζεται μία κατάσταση S_{N+1} για το στάδιο N+1(σχήμα 1.7.1)



Σχήμα 1. 7.1

Συνάρτηση Αποτελεσμάτων

Όπως είδαμε σε κάθε στάδιο Ν μπορούμε να έχουμε διαφορετικές καταστάσεις, και για κάθε συγκεκριμένη κατάσταση S_N μπορούμε να επιλέξουμε μία από τις εφικτές αποφάσεις D_N**.** Κάθε δυνατός συνδυασμός κατάστασης S_N και απόφασης $D_{N,}$ στο στάδιο Ν δημιουργεί ένα οικονομικό αποτέλεσμα για το στάδιο Ν και για τα επόμενα στάδια Ν+1, κ.λ.π. που ακολουθούν. Ανάλογα με τη μορφή του προβλήματος το αποτέλεσμα αυτό ,μπορεί να μετράται με κέρδος, κόστος, απόσταση, χρόνο κ.λ.π.

Το μερικό αποτέλεσμα που προκύπτει στο στάδιο Ν, Ν+1, Ν+2 κ.ο.κ. έως το τελευταίο στάδιο από το συνδυασμό της κατάστασης S_N και της απόφασης D_N συμβολίζεται με $F_N(S_N, D_N)$

Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στο στάδιο Ν και εξετάζουμε μία δεδομένη κατάσταση S_N. Για τη δεδομένη κατάσταση μπορούμε να προσδιορίσουμε εκείνη την απόφαση D_N η οποία βελτιστοποιεί το αποτέλεσμα που αντιστοιχεί στην κατάσταση $S_{N.}$

Για κάθε στάδιο Ν, ορίζουμε το βέλτιστο αποτέλεσμα που αντιστοιχεί στην κατάσταση S_N ως εξής:

$$f^*_N(S_N)= \text{ΜΕΓΙΣΤΟ } F_N\ (S_N\ ,\ D_N\ )$$

Εάν βέβαια το αποτέλεσμα αντιστοιχεί σε κόστος τότε λαμβάνεται το ελάχιστο αντί του μέγιστου.

Επομένως η συνολική βελτιστοποίηση του προβλήματος αντιστοιχεί στην εύρεση του αποτελέσματος για το πρώτο στάδιο $f^*_1(S_1)$.

Συνεχίζοντας την αναφορά μας στο προηγούμενο παράδειγμα, η απόφαση για το ύψος της παραγωγής του Ιουλίου εξαρτάται από το αρχικό απόθεμα που υπάρχει τον Ιούλιο και όχι από τις όποιες αποφάσεις έχουν ληφθεί τους προηγούμενους μήνες. Έστω ότι υπάρχει απόθεμα στην αρχή του Ιουλίου 2.000 τεμάχια. Το απόθεμα αυτό είναι συνέπεια αποφάσεων που έχουν ληφθεί τους προηγούμενους μήνες. Πιθανόν διαφορετικοί συνδυασμοί επιλογών τους προηγούμενους μήνες να είχαν το ίδιο αποτέλεσμα σε ότι αφορά το απόθεμα που είναι διαθέσιμο τον Ιούλιο. Η απόφαση για την ποσότητα παραγωγής τον Ιούλιο δεν εξαρτάται από τις συγκεκριμένες επιλογές των προηγουμένων μηνών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $2^{Ο}$

2.1 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

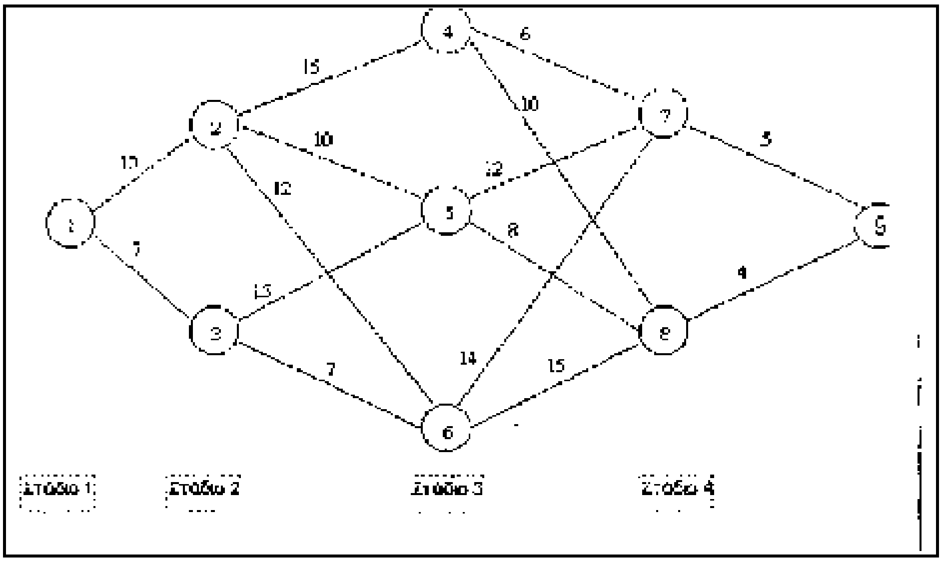
Ας εξετάσουμε τώρα τη μεθοδολογία επίλυσης των προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού χρησιμοποιώντας την ορολογία που αναπτύξαμε στις παραπάνω παραγράφους. Για την καλύτερη κατανόηση της μεθοδολογίας θα χρησιμοποιήσουμε αρχικά ένα απλούστερο παράδειγμα, έτσι ώστε ο τρόπος ανάπτυξης της μεθοδολογίας να είναι πιο διάφανος.

Το παράδειγμα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ένα από τα κλασικά παραδείγματα του δυναμικού προγραμματισμού, το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή.

Ας υποθέσουμε ότι ένας πωλητής θέλει να μεταβεί από το σημείο 1 στο σημείο 9 όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1.1



Σχήμα 2.1.1.

Στη διάρκεια της διαδρομής ο πωλητής πρέπει να κάνει τρεις διανυκτερεύσεις . Η πρώτη θα γίνει σε μια από τις πόλεις που αντιστοιχούν στον κόμβο 2 ή 3. Η δεύτερη σε έναν από τους κόμβους 4, 5 ή 6 και η τρίτη σε έναν από τους κόμβους 7 ή 8.

Οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων φαίνονται στο σχήμα (2.1.1). Το ζητούμενο είναι η ελαχιστοποίηση της συνολικής απόστασης που θα διανύσει ο πωλητής για να μεταβεί από τον κόμβο 1 στον κόμβο 9 κάνοντας 3 διανυκτερεύσεις.

Ας εξετάσουμε το παραπάνω πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή σύμφωνα με την ορολογία που αναπτύξαμε σε προηγούμενη παράγραφο.

Στάδια

Το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή αναλύεται στη λήψη διαδοχικών αποφάσεων σε τέσσερα στάδια. Σε κάθε στάδιο ο πωλητής πρέπει να αποφασίσει ποιος θα είναι ο επόμενος κόμβος του ταξιδιού του.

Στάδιο 1: στο πρώτο στάδιο ο πωλητής πρέπει να επιλέξει αν από τον κόμβο 1 θα μεταβεί στον κόμβο 2 ή στον κόμβο 3.

Στάδιο 2: ο πωλητής πρέπει να επιλέξει αν ο επόμενος κόμβος που θα επισκεφθεί θα είναι ο κόμβος 4, 5 ή 6.

Στάδιο 3: ομοίως η απόφαση περιλαμβάνει επιλογή μεταξύ των κόμβων 7 και 8.

Στάδιο 4: υπάρχει μόνον μία απόφαση. Η μετάβαση στον κόμβο 9.

Καταστάσεις

Σε κάθε ένα από τα τέσσερα στάδια ο πωλητής μπορεί να βρίσκεται σε διαφορετικό κόμβο. Ο κόμβος στον οποίο μπορεί να βρίσκεται ο πωλητής δηλώνει την κατάστασή του στο συγκεκριμένο στάδιο. Έτσι, αν θεωρήσουμε το στάδιο 4, οι πιθανές καταστάσεις είναι οι κόμβοι 7 και 8. Ομοίως στο στάδιο 3 οι πιθανές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρίσκεται ο πωλητής είναι οι κόμβοι 4, 5 και 6. Στο στάδιο 2 οι πιθανές καταστάσεις είναι οι κόμβοι 2 και 3, ενώ για το πρώτο στάδιο υπάρχει μόνο μία πιθανή κατάσταση, ο κόμβος 1.

Στάδιο	Καταστάσεις
1	1
2	2, 3
3	4, 5, 6
4	7, 8

Αποφάσεις

Σε κάθε ένα από τα τέσσερα στάδια ο πωλητής θα πρέπει να πάρει μια απόφαση. Συγκεκριμένα η απόφασή του αφορά την επιλογή του επόμενου κόμβου που θα επισκεφθεί. Έτσι σε κάθε ένα από τα τέσσερα στάδια, οι εφικτές αποφάσεις που θα θεωρήσει ο πωλητής είναι οι εξής:

Στάδιο	Αποφάσεις
1	2,3
2	4,5,6
3	7,8
4	9

Συνάρτηση αποτελεσμάτων

Ο ορισμός της συνάρτησης αποτελεσμάτων είναι από τα σημαντικότερα στοιχεία στη διατύπωση ενός προβλήματος δυναμικού προγραμματισμού. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, σε κάθε στάδιο ν, ανάλογα με την κατάσταση s_n στην οποία βρίσκεται το σύστημα, και την συγκεκριμένη απόφαση d_n , αντιστοιχεί ένα αποτέλεσμα το οποίο μπορούμε να συμβολίσουμε με $f_n(s_n, d_n)$ ορίζεται ως εξής:

$f_N(S_N, D_N)$ = απόσταση από τον κόμβο S_N έως το τέλος της διαδρομής δεδομένου ότι ο επόμενος κόμβος (απόφαση) θα είναι ο D_N

Ας υποθέσουμε ότι στο στάδιο ν ο πωλητής βρίσκεται στον κόμβο s_n. Επομένως έχει να επιλέξει μεταξύ των εναλλακτικών αποφάσεων που οδηγούν από τον κόμβο s_n , σε έναν από τους κόμβους του επόμενου σταδίου. Κάθε εναλλακτική απόφαση έχει σαν αποτέλεσμα μια διαφορετική απόσταση $f_n (s_n , d_n)$ της διαδρομής από τον κόμβο s_n έως το τέλος του δρόμου.

Ορίζουμε ως:

$f * N (S_N) = \text{Min} \{ f_N (S_N , D_N) \}$
τη μικρότερη απόσταση από τον κόμβο S_N έως το τέλος της διαδρομής.

Επομένως εάν με α (s_n , d_n) συμβολίσουμε την απόσταση μεταξύ των κόμβων s_n και d_n θα ισχύει η επαναληπτική σχέση

$$f_N (S_N , D_N) = A (S_N , D_N) + f * N + 1 (S_{N+1})$$

Ο προηγούμενος επαναληπτικός τύπος δηλώνει ότι το αποτέλεσμα σε κάθε στάδιο εξαρτάται από το αποτέλεσμα του επόμενου σταδίου, και οδηγεί στην εφαρμογή του αλγορίθμου που ακολουθεί:

2.1.1 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Εφ' όσον το αποτέλεσμα στο στάδιο ν εξαρτάται από τα αποτέλεσμα του επόμενου σταδίου ν + 1, είναι λογικό να ξεκινήσουμε από το τελευταίο στάδιο, θεωρώντας όλες τις πιθανές καταστάσεις του συστήματος στο τελευταίο στάδιο καθώς επίσης και όλες τις εναλλακτικές αποφάσεις που είναι δυνατόν να ληφθούν.

Στάδιο 4

Στο στάδιο 4 οι πιθανές καταστάσεις είναι 2:Ο πωλητής θα βρίσκεται στον κόμβο 7 ή στον κόμβο 8.Στο στάδιο αυτό ο πωλητής έχει μόνον μία δυνατή επιλογή, να ακολουθήσει τη διαδρομή προς τον κόμβο 9. Ο πίνακας 2Α περιλαμβάνει τους υπολογισμούς της μικρότερης απόστασης από κάθε κατάσταση (κόμβο) του σταδίου 4 έως το τέλος του δικτύου.

Κατάσταση (κόμβος) S_4	Απόφαση D_4	Επόμενος κόμβος S_5	Απόσταση από επόμενο κόμβο $A(s_4, d_4)$	Ελάχιστη απόσταση από επόμενο κόμβο έως το τέλος $f^*(s_5)$	Συνολική απόσταση $F_4(s_4, d_4) = A(s_4, d_4) + f_5^*(s_5)$
7	[7,9]	9	5	0	$5 \leftarrow f^*_4(7)$
8	[8,9]	9	4	0	$4 \leftarrow f^*_4(8)$

Πίνακας 2Α: στάδιο 4

Με $f^*_4(7)$ και $f^*_4(8)$ αντίστοιχα συμβολίζεται η ελάχιστη απόσταση στον κάθε έναν από τους κόμβους του τέταρτου σταδίου έως το τέλος του δικτύου.

<u>Στάδιο 3</u>

Ας εξετάσουμε τώρα το στάδιο 3. Στο στάδιο 3 οι πιθανές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρίσκεται ο πωλητής είναι τρεις: ο πωλητής θα βρίσκεται στον κόμβο 1 ή στον κόμβο 5 ή στον κόμβο 6. Σε κάθε κόμβο του τρίτου σταδίου ο πωλητής έχει δύο δυνατές επιλογές:

Ο επόμενος κόμβος να είναι ο κόμβος 7 ή ο κόμβος 8. Ας υποθέσουμε ότι ο πωλητής βρίσκεται στον κόμβο 4. Από τον κόμβο 4 οι επιλογές είναι δύο: να ακολουθήσει τη διαδρομή [4, 7] ή τη διαδρομή [4, 8].

Υποθέστε ότι ακολουθεί τη διαδρομή [4, 7]. Σε αυτή την περίπτωση η απόσταση από τον κόμβο 4 έως το τέλος του δικτύου είναι η απόσταση από τον κόμβο 4 στον κόμβο 7 συν η μικρότερη δυνατή απόσταση από τον κόμβο 7 έως το τέλος του δικτύου η οποία έχει ευρεθεί στον πίνακα χ. Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται η απόσταση έως το τέλος του δικτύου στην περίπτωση που η επιλογή του πωλητή είναι η διαδρομή [4, 8]. Ο πίνακας 2Β περιέχει τους αντίστοιχους υπολογισμούς:

Κατάσταση (κόμβος) S_3	Απόφαση D_3	Επόμενος κόμβος S_4	Απόσταση από επόμενο κόμβο $A(s_3, d_3)$	Ελάχιστη απόσταση από επόμενο κόμβο έως το τέλος $f_4^*(s_4)$	Συνολική απόσταση $F_3(s_3, d_3) = A(s_3, d_4) + f_4^*(s_4)$
4	[4,7]	7	6	5	$11 \leftarrow f^*_3(4)$
4	[4,8]	8	10	4	14

Πίνακας 2Β: Στάδιο 3 (κόμβος 4)

Παρατηρούμε ότι εφόσον στο στάδιο 3, ο πωλητής βρεθεί στον κόμβο 4 η επιλογή διαδρομής [4, 7] οδηγεί σε συνολική απόσταση έως τον τελικό κόμβο ίση με 11 (6 η απόσταση [4, 7] συν 5 η απόσταση του επόμενου κόμβου 7 από το τέλος).

Επομένως η βέλτιστη επιλογή στον κόμβο 4 είναι η διαδρομή [4, 7] με συνολική απόσταση έως το τέλος της διαδρομής ίση με 11 η οποία σύμφωνα με τους συμβολισμούς που υιοθετήσαμε συμβολίζεται με f_3^* (4).

Τους ίδιους υπολογισμούς μπορούμε να επαναλαμβάνουμε για τις άλλες δύο καταστάσεις του τρίτου σταδίου, τους κόμβους 5 και 6. Οι υπολογισμοί φαίνονται στον πίνακα 2Γ.

Κατάσταση (κόμβος) S_3	Απόφαση D_3	Επόμενος κόμβος S_4	Απόσταση από επόμενο κόμβο $A(s_3, d_3)$	Ελάχιστη απόσταση από επόμενο κόμβο έως το τέλος $f_4^*(s_4)$	Συνολική απόσταση $F_3(s_3, d_3) = A(s_3, d_4) + f_4^*(s_4)$
4	[4,7]	7	6	5	$11 \leftarrow f^*_3(4)$
4	[4,8]	8	10	4	14
5	[5,7]	7	12	5	17
5	[5,8]	8	8	4	$12 \leftarrow f^*_3(5)$
6	[6,7]	7	14	5	$19 \leftarrow f^*_3(6)$
6	[6,8]	8	15	4	$19 \leftarrow f^*_3(6)$

Πίνακας 2Γ: Στάδιο 3

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα οι συντομότερες διαδρομές από τους κόμβους του σταδίου 3 έως τον τελικό προορισμό είναι:

Από τον κόμβο 4: ο επόμενος κόμβος θα είναι ο 7, με συνολική απόσταση έως το τέλος 11.

Από τον κόμβο 5: ο επόμενος κόμβος θα είναι ο 8, με συνολική απόσταση έως το τέλος 12.

Από τον κόμβο 6: ο επόμενος κόμβος θα είναι ο 7 ή ο 8, με συνολική απόσταση έως το τέλος 19.

<u>Στάδιο 2</u>

Ας εξετάσουμε τώρα το στάδιο 2. Στο στάδιο 2 οι πιθανές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρίσκεται ο πωλητής είναι δύο:

Ο πωλητής μπορεί να βρίσκεται στον κόμβο 2 ή στον κόμβο 3. Για κάθε έναν από τους κόμβους του δεύτερου σταδίου ο πωλητής έχει τις εξής επιλογές:

Από τον κόμβο 2, ο επόμενος κόμβος μπορεί να είναι ο κόμβος 4 ή ο κόμβος 5, ή ο κόμβος 6.

Από τον κόμβο 3 όμως οι επιλογές είναι μόνον δύο, οι κόμβοι 5 ή 6 διότι η διαδρομή [3, 4] δεν υφίσταται (σχήμα 2.1.1).

Ας υποθέσουμε ότι ο πωλητής βρίσκεται στον κόμβο 2. Από τον κόμβο 2 οι επιλογές του είναι οι τρεις που προαναφέραμε: να ακολουθήσει τη διαδρομή [2, 4] ή τη διαδρομή [2, 5] ή τη διαδρομή [2, 6]. Υποθέστε ότι ακολουθεί τη διαδρομή [2, 4]. Σε αυτή την περίπτωση η απόσταση από τον κόμβο 2 έως το τέλος του δικτύου είναι η απόσταση από τον κόμβο 4 έως το τέλος του δικτύου η οποία έχει βρεθεί στον πίνακα 2Γ. Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται η απόσταση έως το τέλος του δικτύου στην περίπτωση που η επιλογή του πωλητή είναι η διαδρομή [2, 5] ή η διαδρομή [2, 6]. Ο πίνακας 2Δ περιέχει τους αντίστοιχους υπολογισμούς:

Κατάσταση (κόμβος) S_2	Απόφαση D_2	Επόμενος κόμβος S_3	Απόσταση από επόμενο κόμβο $A(s_2, d_2)$	Ελάχιστη απόσταση από επόμενο κόμβο έως το τέλος $f_3^*(s_3)$	Συνολική απόσταση $F_2(s_2, d_2) = A(s_2, d_2) + f_3^*(s_3)$
2	[2,4]	4	15	11	26
2	[2,5]	5	10	12	22← $f^*_2(2)$
2	[2,6]	6	12	19	31

Πίνακας 2Δ: Στάδιο 2 (κόμβος 2)

Παρατηρούμε ότι εφόσον στο στάδιο 2, ο πωλητής βρεθεί στον κόμβο 2 η βέλτιστη επιλογή είναι η διαδρομή [2, 5] η οποία οδηγεί σε συνολική απόσταση έως τον τελικό κόμβο ίση με 22 (10 η απόσταση [2, 5] συν 12 η απόσταση του επόμενου κόμβου 5 από το τέλος) και η οποία σύμφωνα με το συμβολισμό που υιοθετήθηκε συμβολίζεται με $f^*_2(2)$.

Τους ίδιους υπολογισμούς μπορούμε να επαναλάβουμε και για την άλλη κατάσταση του 2ου σταδίου, τον κόμβο 3. Οι υπολογισμοί φαίνονται στον πίνακα 2Ε.

Κατάσταση (κόμβος) S_2	Απόφαση D_2	Επόμενος κόμβος S_3	Απόσταση από επόμενο κόμβο $A(s_2, d_2)$	Ελάχιστη απόσταση από επόμενο κόμβο έως το τέλος $f_3^*(s_3)$	Συνολική απόσταση $F_2(s_2, d_2) = A(s_2, d_2) + f_3^*(s_3)$
2	[2,4]	4	15	11	26
2	[2,5]	5	10	12	22← $f^*_2(2)$
2	[2,6]	6	12	19	31
3	[3,5]	5	15	12	27
3	[3,5]	6	7	19	26← $f^*_2(3)$

Πίνακας 2Ε: Στάδιο 1

Επομένως σύμφωνα με τα αποτελέσματα που έχουμε βρει έως τώρα η μικρότερη απόσταση από τον κόμβο 2 έως τον τελικό κόμβο είναι 22 (με επιλογή της διαδρομής [2, 5], ενώ αντίστοιχα η μικρότερη απόσταση από τον κόμβο 3 έως τον τελικό κόμβο είναι 26 (με επιλογή της διαδρομής [3, 6]. Ας εξετάσουμε τώρα τι συμβαίνει στο πρώτο στάδιο.

Εδώ ακριβώς ας ξαναθυμηθούμε την αρχή της βελτιστοποίησης στο δυναμικό προγραμματισμό. Η πρακτική σημασία αυτής, είναι ότι δεν έχει σημασία με ποιον τρόπο θα φτάσουμε στον κόμβο 2. Από τη στιγμή όμως που βρισκόμαστε στον κόμβο 2 η ελάχιστη απόσταση έως το τέλος της διαδρομής είναι 22 και η βέλτιστη απόφαση είναι η επιλογή του κόμβου 5 για το επόμενο στάδιο. Κοιτώντας κατόπιν το επόμενο στάδιο (πίνακας 2Γ), βλέπουμε ότι η βέλτιστη επιλογή στον κόμβο 5 είναι η μετάβαση στον κόμβο 8 κ.ο.κ.

Στάδιο 1

Στο στάδιο 1 υπάρχει μόνο μία κατάσταση στην οποία μπορεί να βρίσκεται ο πωλητής, ο κόμβος 1:

Από τον κόμβο 1, ο επόμενος κόμβος μπορεί να είναι ο κόμβος 2 ή ο κόμβος 3. Αν ο πωλητής ακολουθήσει τη διαδρομή [1, 2], σ' αυτήν την περίπτωση η απόσταση από τον κόμβο 1 έως το τέλος του δικτύου είναι η απόσταση από τον κόμβο 1 στον κόμβο 2 συν η μικρότερη δυνατή απόσταση από τον κόμβο 2 έως το τέλος του δικτύου η οποία έχει βρεθεί στον πίνακα α. Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται η απόσταση έως το τέλος του δικτύου στην περίπτωση που η επιλογή του πωλητή είναι η διαδρομή [1, 3].

Ο πίνακας 2ΣΤ περιέχει τους αντίστοιχους υπολογισμούς:

Κατάσταση (κόμβος) S_1	**Απόφαση D_1**	**Επόμενος κόμβος S_4**	**Απόσταση από επόμενο κόμβο A (s_3, $d_{3)}$**	**Ελάχιστη απόσταση από επόμενο κόμβο έως το τέλος f_4*(s_4)**	**Συνολική απόσταση F_3 (s_3, d_3) = A (s_3, d_4)+ f_4^* (s_4)**
1	[1,2]	2	10	22	32← f^*_2(3)
1	[1,3]	3	7	26	33

Πίνακας 2ΣΤ: Στάδιο 1

2.1.2 Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης του σταδίου 1, οδηγούν στη λύση του προβλήματος.

Από τον πίνακα β που αντιστοιχεί στο πρώτο στάδιο, εξάγεται το συμπέρασμα ότι η βέλτιστη απόφαση για τον πωλητή είναι να ακολουθήσει τη διαδρομή [1, 2]. Επομένως στο δεύτερο στάδιο του προβλήματος ο πωλητής θα βρίσκεται στον κόμβο 2.

Ο πίνακας α περιλαμβάνει την ανάλυση του δεύτερου σταδίου. Με το δεδομένο ότι ο πωλητής βρίσκεται στον κόμβο 2, εξάγεται το συμπέρασμα ότι η βέλτιστη απόφαση για τον πωλητή είναι να ακολουθήσει τη διαδρομή [2, 5]. Επομένως στο τρίτο στάδιο ο πωλητής βρίσκεται στον κόμβο 5.

Περνώντας στο τρίτο στάδιο, από την ανάλυση του πίνακα 2Β προκύπτει ότι από τον κόμβο 5 του τρίτου σταδίου η βέλτιστη απόφαση είναι η επιλογή της διαδρομής [5, 8]. Επομένως στο τέταρτο στάδιο ο πωλητής βρίσκεται στον κόμβο 8.

Τέλος στο τέταρτο στάδιο δεδομένου ότι ο πωλητής θα βρίσκεται στο στάδιο 8, η μόνη επιλογή που έχει είναι να επιλέξει τη διαδρομή [8, 9].

Συνοψίζοντας βλέπουμε ότι η βέλτιστη διαδρομή είναι η διαδρομή 1-2-5-8-9 με συνολική απόσταση 32.

2.2 ΠΡΟΔΡΟΜΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΠΙΣΘΟΔΡΟΜΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ

Κατά την επίλυση της συναρτησιακής σχέσεως πού διέπει τα προβλήματα δυναμικού προγραμματισμού στις προηγούμενες παραγράφους ο υπολογισμός της συναρτήσεως μέγιστου κέρδους f_k ακολούθησε τη σειρά

$F_1 \rightarrow \ldots \rightarrow F_k \rightarrow \ldots \rightarrow F_n$

Ο τρόπος αυτός επιλύσεως της αναδρομικής σχέσεως αναφέρεται σαν αναδρομικός (forward) και απαιτεί τον προσδιορισμό της καταστάσεως του συστήματος κατά το k – 1 βήμα της διαδικασίας δοθείσης της καταστάσεως κατά το k βήμα και της ληφθείσης κατά το βήμα αυτό αποφάσεως. Σαν παράδειγμα, για το πρόβλημα της φορτώσεως σαν κατάσταση b_k του συστήματος κατά το k βήμα της διαδικασίας ορίζεται ωφέλιμο φορτίο πού διατίθεται για τα προϊόντα από 1 έως και k. Αν x_k είναι ο αριθμός των μεταφερομένων τεμαχίων εκ του προϊόντος k, δηλαδή η απόφαση που λαμβάνεται κατά το βήμα αυτό, τότε η κατάσταση $β_{k-1}$ του συστήματος κατά το k-1 βήμα της διαδικασίας προσδιορίζεται από την πολύ απλή σχέση $b_{k-1} = b_k - w_k x_k$.

Υπάρχουν όμως προβλήματα δυναμικού προγραμματισμού, για τα οποία ο μετασχηματισμός καταστάσεως $b_k \xrightarrow{x_k} b_{k-1}$ δεν είναι μιας τόσο απλής μορφής. Στην περίπτωση αυτή, ενδείκνυται η διαμόρφωση και η επίλυση της αναδρομικής σχέσεως να γίνουν κατά οπισθοδρομικό (backward) τρόπο, δηλαδή κατά την σειρά

$$F_n \rightarrow \ldots F_k \rightarrow \ldots F_1$$

Βέβαια ο μετασχηματισμός των καταστάσεων κατά τον προδρομικό τρόπο διαμορφώσεως και επιλύσεως της αναδρομικής σχέσεως, ενδέχεται να παρουσιάσει κάποιες δυσκολίες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}

3.1 ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Για τη μαθηματική παρουσίαση της μεθόδου του δυναμικού προγραμματισμού θα χρησιμοποιήσουμε σαν παράδειγμα μία μονοδιάστατη διαδικασία βέλτιστης κατανομής. Τέτοιες διαδικασίες συναντάμε κατά κανόνα σε προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού, η διαδικασία όμως που θα εξετάσουμε έχει χαρακτηριστικά που δεν επιτρέπουν την αντιμετώπιση της με τις μεθόδους του γραμμικού προγραμματισμού. Βέβαια, η διαδικασία αυτή είναι πολύ απλή για να δώσει το μέτρο της χρησιμότητας του δυναμικού προγραμματισμού για την επίλυση δύσκολων προβλημάτων της πράξεως. Χρησιμοποιείται όμως εδώ για λόγους ευχερέστερης παρουσιάσεως της μεθόδου.

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος είναι η ακόλουθη: Να καθοριστεί το μέγιστο της συναρτήσεως των Ν μεταβλητών $x_1, x_2, \ldots, x_N$

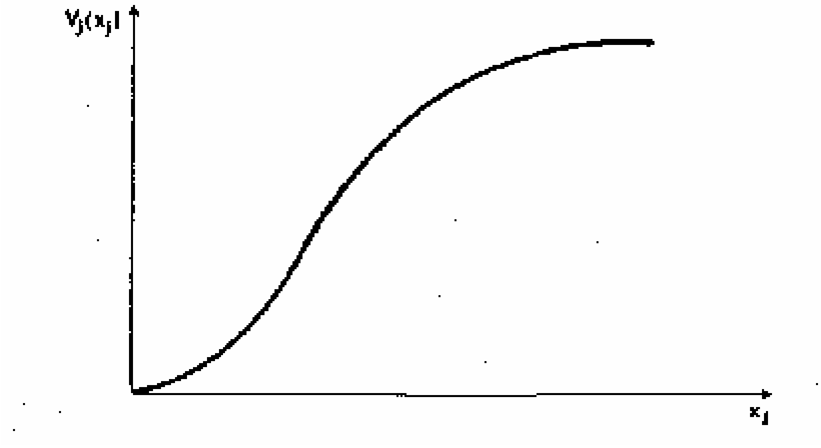
$$F(x_1, x_2, \ldots, x_N) = V_1(x_1) + V_2(x_2) + \cdots + V_N(x_N) \tag{3.1}$$

με τον περιορισμό

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_N = b \tag{3.2}$$

και $\quad x_j \geq 0 , \quad j = 1, \ldots , N \qquad (3.3)$

Το πρόβλημα αυτό διαφέρει από ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού κατά το ότι η αντικειμενική συνάρτηση (3.1) είναι γενικά μη γραμμική, δεδομένου ότι οι συναρτήσεις $V_J(x_j)$ είναι γενικά μη γραμμικές (Σχ.3.3.1). Κατά τα λοιπά είναι πολύ πιο απλό από τα συνηθισμένα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού.



Σχ. 3.3.1

Η διαδικασία κατανομής θεωρείται μονοδιάστατη με την έννοια ότι όλες οι μεταβλητές x_j μπορούν να θεωρηθούν ως οι διακεκριμένες τιμές, μιας συναρτήσεως χρόνου $x(t)$ σε ορισμένες χρονικές στιγμές t_1 , t_2, …., t_N. Έτσι εισάγεται και η έννοια του χρόνου στην παραπάνω διαδικασία, η οποία θα μπορούσε επίσης να θεωρηθεί και σαν στατική διαδικασία, όπως αυτές που εμφανίζονται στα προβλήματα γραμμικού και μη γραμμικού προγραμματισμού, όπου οι μεταβλητές x_j παριστάνουν τις στάθμες των δραστηριοτήτων σε μια ορισμένη χρονική στιγμή.

Ο μαθηματικός λογισμός μπορεί γενικά να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποιήσεως της παραπάνω μορφής με τη βοήθεια των συντελεστών "Lagrange". Έτσι χρησιμοποιώντας ένα τέτοιο συντελεστή λ, σχηματίζουμε τη βοηθητική συνάρτηση

$$L = V_l (x_1) + V_2 (x_2) + \cdots + V_N (x_N) - \lambda (x_1, x_2, \ldots , x_{N-b}) \qquad (3.4)$$

και εξισώνουμε με το μηδέν όλες τις μερικές παραγώγους ως προς x_1, x_2 , ... , x_N . Παίρνουμε τότε τις σχέσεις

$$\frac{dV_j\left(x_j\right)}{dx_j} - l = 0 \qquad j=1,2,\ldots,N \qquad (3.5)$$

Η παραπάνω απαίτηση μηδενισμού όλων των μερικών παραγώγων είναι η αναγκαία συνθήκη (όχι όμως και ικανή) που πρέπει να πληρούν οι μεταβλητές στη θέση του βέλτιστου.

Το σύστημα των εξισώσεων (3.5) και (3.2) επιλυμένο ως προς x_j (j =1,…, N) και λ θα μπορούσε να μας δώσει τη βέλτιστη λύση του προβλήματος. Τούτο όμως ούτε εύκολο είναι, ούτε και πάντοτε δυνατό, επειδή οι εξισώσεις (3.5) είναι γενικά μη γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις και παρουσιάζουν όπως ξέρουμε πολλές λύσεις από τις οποίες είναι συχνά δύσκολο ή και αδύνατο να επιλέξουμε την επιθυμητή, δηλαδή εκείνη που αντιστοιχεί στο απόλυτο μέγιστο ή ελάχιστο.

Αλλά δεν έχουμε μόνο αυτό το πρόβλημα. Παρατηρούμε ότι στη λύση αυτή, αν μπορέσουμε να τη βρούμε, δεν έχουν ληφθεί υπόψη οι ανισοτικοί περιορισμοί (3.3) και επομένως δεν είναι εξασφαλισμένο ότι θα είναι και εφικτή. Την αδυναμία αυτή που έχουν οι κλασσικές μέθοδοι βελτιστοποιήσεως μπορεί, βέβαια να την αντιμετωπίσει ο μη γραμμικός προγραμματισμός, όχι όμως και την προηγούμενη.

Άλλη δυσκολία που εμφανίζεται στις κλασσικές μεθόδους βελτιστοποιήσεως και στο μη γραμμικό προγραμματισμό είναι ότι με τις μεθόδους αυτές δεν μπορούμε να επιλύσουμε προβλήματα με μεταβλητές που παίρνουν ακέραιες τιμές ούτε και να χειρισθούμε συναρτήσεις μη παραγωγίσιμες για ορισμένες τιμές του πεδίου μεταβολής των μεταβλητών τους.

Εκτός από τις παραπάνω βασικές δυσκολίες, σε πραγματικά προβλήματα παρουσιάζονται, και άλλες, συνήθως υπολογιστικές.

Ο Δυναμικός Προγραμματισμός υπερνικά όλες τις παραπάνω δυσκολίες, τουλάχιστο για διαδικασίες μίας, δύο ή το πολύ τριών διαστάσεων. Για διαδικασίες περισσοτέρων διαστάσεων υπάρχουν υπολογιστικές δυσχέρειες, που υπερκαλύπτουν τα πλεονεκτήματα του Δυναμικού Προγραμματισμού.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

3.2 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Ας θεωρήσουμε ένα πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού ,του οποίου η αντικειμενική συνάρτηση f(x) είναι του διαχωριστού (separable) τύπου

$$f(\underset{\sim}{x}) = \sum_{k=1}^{n} f_k\left(x_k\right) \tag{3.6}$$

Όπου χ είναι το n-διάστατο διάνυσμα – στήλη

$$\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_k \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση q(x) , q : $R^n \rightarrow R^1$, καλείται διαχωριστή ως προς τις μεταβλητές της , αν μπορεί να τεθεί υπό την μορφή

$$q(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} q_i(x_i) \tag{3.8}$$

Στην οποία ένα από τα α, (χ,) είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής x_i , i = 1, … , n.

Το σύνολο των x_k ικανοποιεί μια συνθήκη της επίσης διαχωριστής μορφής

$$\sum_{k=1}^{n} q_k(x_k) \leq b \tag{3.9}$$

Όπου b πραγματική σταθερά. Οι συναρτήσεις f_k (x_k) και g_k (x_k) . K=1, ... ,n είναι πραγματικές και μπορεί να δίδονται αναλυτικά ή γραφικά. Καμιά υπόθεση δεν είναι απαραίτητο να γίνει ως προς την συνέχεια των ανωτέρω συναρτήσεων, αν και στην περίπτωση που οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς, είναι δυνατόν να προκύψουν σημαντικές απλουστεύσεις. Από πλευράς δυναμικού προγραμματισμού οι ισολογισμοί απλουστεύονται, όταν τόσον τα x_k , όσον και τα g_k (x_k) , k=1,..,n, περιορίζονται στο σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων. Αυτό βέβαια έρχεται σε αντίθεση με ότι θα περίμενε κανείς από την κλασσική θεωρία μεγίστων-ελαχίστων, η όποια δεν είναι σε θέση να παράσχει μια αποτελεσματική μέθοδο για την επίλυση προβλημάτων ακέραιου προγραμματισμού.

Το προς επίλυση πρόβλημα συνίσταται στην μεγιστοποίηση της συναρτήσεως (3.6) υπό την συνθήκη (3.9). Τα προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού της μορφής αυτής αναφέρονται συνήθως, σαν προβλήματα κατανομής. Την αιτιολογία για την χρησιμοποίηση του όρου «κατανομή» μπορεί κανείς να βρει στις επόμενες εφαρμογές.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Ένα ποσόν b (δραχμών) πρόκειται να διατεθεί για επενδύσεις. Το κέρδος που προκύπτει από την "κατανομή" x_k, δραχμών στην k επένδυση είναι $f_k(x_k)$ δραχμές. Στην περίπτωση αυτή η συνθήκη (3.9) παίρνει την απλή μορφή

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \leq b \tag{3.10}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Για την μεταφορά η προϊόντων διατίθεται ένα φορτηγό πλοίο χωρητικότητας b (κυβικών μέτρων). Το κέρδος από την μεταφορά x_k τεμαχίων εκ του προϊόντος k είναι $f_k(x_k)$, K= 1 , . . .,η. Αν ο όγκος ανά τεμάχιο του προϊόντος k είναι $α_k$, η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συναρτήσεως (3.6) πρέπει να λάβει χώρα υπό την συνθήκη

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k \leq b \tag{3.11}$$

Τώρα a_k x_k είναι η χωρητικότητα που κατανέμεται στο k προϊόν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Η ισχύς που καταναλίσκει ένα βιομηχανικό συγκρότημα ανέρχεται σε b (kilowatts). Υπάρχουν οι σταθμοί παραγωγής ενεργείας. Το κόστος για την τροφοδοσία του συγκροτήματος με x_k kilowatts από τον k σταθμό είναι $f_k(x_k)$, k=1,…,n. Στην περίπτωση αυτή ζητείται το ελάχιστο της συναρτήσεως f(x) κατανέμοντας, κατάλληλα την απαιτούμενη ισχύ μεταξύ των σταθμών παραγωγής έτσι| ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = b \qquad (3.12)$$

3.3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑ ΤΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα που διατυπώθηκε στα προηγούμενα και ας υποθέσουμε, ότι η συνθήκη του προβλήματος έχει την επόμενη πιο γενική μορφή.

$$\sum_{k=1}^{n} g_k\left(x_k\right) \le b_n \le b, \quad x_k \ge 0, \quad \text{k=1, … ,n} \qquad (3.13)$$

όπου β_n είναι η προς κατανομή μεταβλητή, αναφερόμενη και σαν μεταβλητή καταστάσεως. Ας υποθέσουμε ακόμα, ότι τα x_k περιορίζονται στο σύνολο των μη αρνητικών αριθμών και ότι τα g_k (x_k) δεν μπορούν να λάβουν αρνητικές τιμές.

Έστω f_n (β_n) το μέγιστο της αντικειμενικής συναρτήσεως (3.6) υπό την γενικότερη συνθήκη (3.13), δηλαδή

$$F_n\left(b_n\right) = \max_{x_1,\ldots,x_n} imum \left\{ f_n\left(x_n\right) + \sum_{k=1}^{n-1} f_k\left(x_k\right) \right\} \qquad (3.14)$$

Ας σημειωθεί, ότι το $f_n(\beta_n)$ είναι μια συνάρτηση του β_n $f_n(\beta_n)$ αναφέρεται, συνήθως, σαν συνάρτηση μέγιστου κέρδους. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα που ορίζουν οι σχέσεις (3.6) και (3.9), πρόκειται να προσδιορισθεί η τιμή $F_n(b)$.

Η τεχνική του δυναμικού προγραμματισμού προσεγγίζει την ζητούμενη βέλτιστη λύση συσχετίζοντας την συνάρτηση μέγιστου κέρδους $f_n(\beta_n)$ με την λύση ενός ευκολότερου προβλήματος. Έστω $\hat{x}_n\left(b_n\right)$ η συνάρτηση πολιτικής που συσχετίζεται με την μεταβλητή x_n . Δοθέντος του b_n , $\hat{x}_n(b_n)$ είναι η βέλτιστη τιμή του x_n . Η συγκεκριμένη πολιτική $\hat{x}_n(b)$ παριστάνεται στην συνέχεια με x^*_n. Χρησιμοποιώντας τους προηγούμενους συμβολισμούς μπορούμε τώρα να θέσουμε την σχέση (3.14) υπό την μορφή

$$\hat{x}_n(b_n) = g_n\left\{\hat{x}_n(b_n)\right\} + \underset{x_1,..,x_{n-1}}{\max imum}\left\{\sum_{k=1}^{n-1} f_k(x_k)\right\} \qquad (3.15)$$

την οποία η μεγιστοποίηση λαμβάνει χώρα υπό την συνθήκη

$$\sum_{k=1}^{n-1} g_k(x_k) \le b_n - g_n\left\{\hat{x}_n(b_n)\right\} \qquad (3.16)$$

Προφανώς η μεγιστοποίηση στην σχέση (3.15) είναι απλούστερη από εκείνη στη σχέση (3.14), αφού γίνεται ως προς n-1 και όχι ως προς n μεταβλητές. Επί πλέον, η συνθήκη (3.16) είναι της αυτής μορφής, όπως και η αρχική συνθήκη (3.13). 'Αλλά, η λύση του προβλήματος που ζώνοντας κατά ένα τον αριθμό των προσδιοριστέων μεταβλητών μπορεί να συμβολιστεί με μια έκφραση εντελώς ανάλογη με εκείνη που χρησιμοποιήθηκε για το αρχικό πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα θέτουμε

$$F_{n-1}\left(b_n - g_n\left\{\hat{x}_n(b_n)\right\}\right) = \underset{x_1,..,x_{n-1}}{\max imum}\left\{\sum_{k=1}^{n-1} f_k(x_k)\right\} \qquad (3.17)$$

Στην προηγούμενη σχέση η μεγιστοποίηση λαμβάνει χώρα για τις τιμές των x_k που ικανοποιούν την συνθήκη (3.16).

Χρησιμοποιώντας τώρα τις (3.15) και (3.17), λαμβάνουμε

$$F_n(b_n) = f_n\left\{\hat{x}_n(b_n)\right\} + F_{n-1}\left(b_n - g_n\left\{\hat{x}_n(b_n)\right\}\right) \qquad (3.18)$$

Ή ισοδύναμα ,

$$F_n(b_n) = \underset{x_n}{\max imum}\left\{f_n(x_n) + F_{n-1}\left\{b_n - g_n(x_n)\right\}\right\} \qquad (3.19)$$

Για τιμές του x_n πού ικανοποιούν την συνθήκη

$$g_n(x_n) \le b_n \qquad (3.20)$$

Για λόγους ομοιομορφίας, έστω

$$b_{n-1} = b_n - g_n(x_n) \qquad (3.21)$$

Τότε, χρησιμοποιώντας και την σχέση (3.17), προκύπτει

$$F_{n-1}(b_{n-1}) = \underset{x_1,..,x_{n-1}}{\max imum}\left\{\sum_{k=1}^{n-1} f_k(x_k)\right\} \qquad (3.22)$$

Όπου οι τιμές των x_k περιορίζονται από την συνθήκη

$$\sum_{k=1}^{n-1} g_k(x_k) \le b_{n-1} \qquad (3.23)$$

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, η λύση του αρχικού προβλήματος, πού είναι ένα πρόβλημα n αποφάσεων ή βημάτων, αφού n είναι το πλήθος των προσδιοριστέων μεταβλητών, έχει συσχετισθεί με την λύση ενός προβλήματος n-1 αποφάσεων. Ας σημειωθεί, ότι η λύση του αρχικού προβλήματος είναι σχετικά εύκολο να προσδιορισθεί υπό την προϋπόθεση ότι είναι γνωστή η λύση του προβλήματος των n-1 αποφάσεων. 'Αλλά το τελευταίο αυτό πρόβλημα μπορεί να συσχετισθεί με ένα πρόβλημα N-2 αποφάσεων, όπως υποδεικνύουν οι σχέσεις (3.17) και (3.18). Έτσι, το προηγούμενο σκεπτικό οδηγεί, τελικά στην διατύπωση της επόμενης αναδρομικής συναρτησιακής σχέσεως:

$$F_k(b_k) = \underset{x_k}{\max imum}, \left\{ f_k(x_k) + F_{k-1}\{b_k - g_k(x_k)\}\right\}, g_k(x_k) \le b_k \qquad (3.24)$$

Για k = 1,2,..n και με την παραδοχή ότι $F_0(b_0) = 0$.

Κατά το πρώτο βήμα της διαδικασίας προσδιορίζεται το $F_1(b_1)$ από τη σχέση

$$F_1(b_1) = \max_{x_k} imum\{f_1(x_1)\}, g_1(x_1) \le b_1 \qquad (3.25)$$

Χρησιμοποιώντας την τιμή αυτή και την σχέση (3.24) προσδιορίζεται το $F_2(b_2)$,, κατόπιν το f_3 (β_3) και ούτω καθ' εξής. Το αρχικό πρόβλημα των n αποφάσεων αντικαθίσταται έτσι από μια ακολουθία n προβλημάτων μιας αποφάσεως.

Για την πληρέστερη κατανόηση της αναπτυχθείσης διαδικασίας, ας θεωρήσουμε την περίπτωση κατά την οποία

$$g_k(x_k) = a_k x_k \quad , \quad x_k \text{ ακέραιος } \ge 0 \qquad (3.26)$$

Και ας υποθέσουμε, ότι τα b και α_κ είναι γνωστοί θετικοί ακέραιοι.

Τότε,

$$F_1(b_1) = \max_{x_1} imum\{f_1(x_1)\} \quad 0 \le a_1 x_1 \le b_1 \le b, x_1 \text{ ακέραιος} \qquad (3.27)$$

Και ισοδύναμα,

$$F_1(b_1) = \max_{x_1} imum\{f_1(x_1)\},\ 0 \le \text{ ακέραιος } x_1 \le [b_1 / a_1] \qquad (3.28)$$

όπου με [x] παριστάνεται ο μεγαλύτερος ακέραιος, ο μικρότερος η ίσος του k και το β_1 παίρνει τιμές 0,1,2,..,b. Ο προσδιορισμός της συναρτήσεως $f_1(\beta_1)$ γίνεται κατά τον ακόλουθο τρόπο:

Βήμα 1 αρχικά θέτουμε $\beta_1=0$

Βήμα 2 για την τρέχουσα τιμή του β_1 προσδιορίζεται το μέγιστο στην σχέση (3.28).

Βήμα 3 η τιμή ή οι τιμές του x_1 για τις οποίες επιτυγχάνεται το μέγιστο παριστάνονται με $\hat{x}_1(b_1)$.

Βήμα 4 η τιμή του $β_1$ αυξάνεται κατά ένα ($b_1 = b_1 + 1$) .

Βήμα 5 η διαδικασία επαναλαμβάνεται από το δεύτερο βήμα, μέχρις ότου $β_1 = b$.

Για το πρώτο αυτό πρόβλημα της μιας αποφάσεως η συνάρτηση μέγιστου κέρδους $F_1(b_1)$ πινακοποιείται μαζί με τις τιμές $\hat{x}_1(b_1)$ των x_1 αντιστοιχούν στην $F_1(b_1)$ όπως στον πίνακα 3Α. Ας σημειωθεί ότι το $\hat{x}_1$ είναι μια συνάρτηση της προς κατανομή μεταβλητής b_1 .

Είναι, δηλαδή, η ακόλουθη πολιτική για το x_1 δοθέντος του b_1 και για τον λόγο αυτό καλείται συνάρτηση πολιτικής.

Το επόμενο πρόβλημα μιας αποφάσεως συνίσταται στον προσδιορισμό των $f_2(b_2)$ και $\hat{x}_2(b_2)$. Η λύση του προβλήματος προκύπτει χρησιμοποιώντας τις πινακοποιημένες τιμές του $F_1(b_1)$ και την αναδρομική σχέση (3.24), η οποία στην συγκεκριμένη περίπτωση λαμβάνει την μορφή

$$F_2(b_2) = \max_{x_2} imum\{f_2(x_2) + F_1(b_2 - a_2x_2)\},\ 0 \le ak\acute{\varepsilon}raioV\quad x_2 \le [b_2 / a_2]$$

(3.29)

Οι προκύπτουσες τιμές των $F_2(b_2)$ και $\hat{x}_2(b_2)$ πινακοποιούνται και η διαδικασία συνεχίζεται κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο, θέτοντας

$$F_k(b_k) = \max_{x_k} imum\{f_k(x_k) + F_{k-1}(b_k - a_kx_k)\},\ 0 \le ak\acute{\varepsilon}raioV$$

$x_k \le [b_k / a_k]$ (3.30)

μέχρις ότου για k=n, μόνον τα $F_n(b)$ και $\hat{x}_n(b)$ απαιτούνται πλέον για τον προσδιορισμό του μέγιστου του αρχικού προβλήματος.

Για τον προσδιορισμό της βέλτιστης πολιτικής, δηλαδή των τιμών των x_k πού παρέχουν το μέγιστο, χρησιμοποιούμε τις πινακοποιημένες τιμές των

$\hat{x}_k$ ακολουθώντας αντίστροφη πορεία. Ας υποθέσουμε, προς στιγμήν, ότι η βέλτιστη πολιτική είναι μοναδική, ότι δηλαδή ένα μόνον σύνολο τιμών των προσδιοριστέων μεταβλητών αντιστοιχεί στο μέγιστο. Στην περίπτωση αυτή το $\hat{x}_n(b)$ είναι μοναδικό και παρέχει την βέλτιστη τιμή x_n^* του x_n . Έχοντας προσδιορίσει το x^*_n, η βέλτιστη τιμή b_{n-1}^* του b_{n-1} ευρίσκεται με την βοήθεια της σχέσεως $b_{n-1}^* = b_n^* - a_n x_n^* = b - a_n x_n^*$. Η βέλτιστη τιμή x_{n-1}^* του x_{n-1} παρέχεται τότε από το $\hat{x}_{n-1}\left(b_n^*\right)$. γενικά είναι $b_{k-1}^* = b_k^* - a_k x_k^*$ και το x_{k-1}^* παρέχεται από το $\hat{x}_{k-1}\left(b_{k-1}^*\right)$.

Πίνακας 3Α Πινακοποιημένη μορφή της διαδικασίας επιλύσεως ενός προβλήματος κατανομής με μια μεταβλητή καταστάσεως δια της τεχνικής του δυναμικού προγραμματισμού

K→	1		2				K				N	
$B_k \downarrow$	$F_1 (\beta_1)$	$\hat{x}_1 (\beta_1)$	$F_2 (\beta_2)$	$\hat{x}_2 (\beta_2)$	…	…	$F_k (\beta_k)$	$\hat{x}_k (\beta_k)$	…	…	$F_n(\beta_n)$	$\hat{x}_n (\beta_n)$
0	$F_1 (0)$	$\hat{x}_1 (0)$	$F_2 (0)$	$\hat{x}_2 (0)$	…	…	$F_k (0)$	$\hat{x}_k (0)$	…	…	$F_n (0)$	$\hat{x}_n (0)$
1	$F_1 (1)$	$\hat{x}_1 (1)$	$F_2 (1)$	$\hat{x}_2 (1)$	…	…	$F_k (1)$	$\hat{x}_k (1)$	…	…	$F_n(1)$	$\hat{x}_n (1)$
2	$F_1 (2)$	$\hat{x}_1 (2)$	$F_2 (2)$	$\hat{x}_2 (2)$	…	…	$F_k (2)$	$\hat{x}_k (2)$	…	…	$F_n (2)$	$\hat{x}_n (2)$
.	..		.				.				.	
.	.		.				.				.	
.	.		.				.				.	
.	.		.				.				.	
.	.		.				.				.	
B	$F_1 (b_1)$	$\hat{x}_1 (b)$	$F_2 (b)$	$\hat{x}_2 (b)$	…	…	$F_k (b)$	$\hat{x}_k (b)$	…	…	$F_n (b)$	$\hat{x}_n (b)$

Αν δύο ή περισσότερα $\hat{x}_k$ αντιστοιχούν στο αυτό β^*_k, τότε η βέλτιστη λύση του προβλήματος δεν είναι μοναδική και οποιαδήποτε από τις τιμές $\hat{x}_k(b^*_k)$ μπορεί να τεθεί ίση με το x^*_k προκειμένου να λάβουμε κάποια από τις βέλτιστες λύσεις.

3.3.1 Η ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

Στην παράγραφο αυτή η τεχνική του δυναμικού προγραμματισμού για την επίλυση ενός προβλήματος n αποφάσεων συγκρίνεται με εκείνη πού συνίσταται στην εξέταση όλων των εφικτών συνδυασμών τιμών των προσδιοριστέων μεταβλητών. Για λόγους απλοποιήσεως της συγκρίσεως, θα υποθέσουμε, ότι η συνθήκη του προβλήματος είναι της μορφής

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = b \tag{3.31}$$

Όπου x_k, k=1, … ,n και b μη αρνητικοί ακέραιοι.

Έστω ν_1 ο αριθμός των διαφορετικών συνδυασμών ακέραιων τιμών των x_k πού ικανοποιούν την συνθήκη (3.31). Προφανώς, ν_1 είναι ο αριθμός των σημείων του n-διάστατου διανυσματικού χώρου με ακέραιες συντεταγμένες, τα οποία πρέπει να εξετασθούν προκειμένου να προσδιορισθεί η βέλτιστη λύση του προβλήματος. Όπως όμως υποδεικνύει η σχέση (3.32), το ν_1 ισούται με τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων κατανομής b μη διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες δραστηριότητες, δηλαδή

$$N_1 = \frac{(n+b-1)!}{b!(\nu-1)!} \tag{3.32}$$

Σαν παράδειγμα, για n = 10 και b = 20, ν_1=10015005

Ας υποθέσουμε τώρα, ότι για την επίλυση του ανωτέρω προβλήματος χρησιμοποιείται η τεχνική του δυναμικού προγραμματισμού, οπότε ο προσδιορισμός της βέλτιστης λύσεως απαιτεί κατά τα γνωστά, τον υπολογισμό των $f_k(\beta_k)$. Αλλά το $f_1(\beta_1)$ απαιτεί (b+1) υπολογισμούς της συναρτήσεως $f_1(x_1)$. Εξ άλλου, για μια συγκεκριμένη τιμή του β_k με $k \neq 1$ το $f_k(\beta_k)$ απαιτεί β_{k+1} υπολογισμούς. Συνεπώς, ο προσδιορισμός των στοιχείων της στήλης $f_k(\beta_k)$του πίνακα 3Α απαιτεί υπολογισμούς. Τέλος, από τα στοιχεία της τελευταίας στήλης του ανωτέρω πίνακα απαιτείται μόνον το $f_n(b)$,το οποίο και προσδιορίζεται μετά (b+1) υπολογισμούς. Έτσι, η επίλυση του προβλήματος με την τεχνική του δυναμικού προγραμματισμού απαιτεί

$$N_2 = (b+1) + (n-2)(b/2+1)(b+1) + (b+1) = (b+1)\{n(b/2+1) - b\} \tag{3.33}$$

συνολικά υπολογισμούς. Για τις συγκεκριμένες τιμές n=10 και b=20 προκύπτει v_2= 1890, δηλαδή ένας σημαντικά μικρότερος αριθμός υπολογισμών συγκριτικά με τον αντίστοιχο αριθμό v_1=10015005 της παραγοντικής αναζητήσεως.

3.4 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΔΕΝΤΡΑ

Ο δυναμικός προγραμματισμός αποτελεί μια αποτελεσματική τεχνική για την επίλυση μιας κατηγορίας προβλημάτων βελτιστοποιήσεως τα οποία μπορούν να διαμορφωθούν σαν προβλήματα συνδυαστικής και να περιγραφούν με την βοήθεια ενός γραφήματος. Ο τρόπος επιλύσεως τέτοιων προβλημάτων με την τεχνική του δυναμικού προγραμματισμού χρησιμοποιώντας την μαθηματική έννοια της αναδρομής, επιδεικνύεται με τα επόμενα δύο παραδείγματα.

3.4.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ

Ας θεωρήσουμε το εξής πρόβλημα: ένας επενδυτής έχει διαθέσιμο το ποσό των 4 εκατ. Δρχ. Για επένδυση μεταξύ τεσσάρων εναλλακτικών επενδυτικών προγραμμάτων. Σε κάθε πρόγραμμα μπορεί να επενδύσει ακέραια πολλαπλάσια των 1 εκατ. Δρχ., η δε απόδοση κάθε πιθανής επένδυσης φαίνεται στον πίνακα 3Β.

Πίνακας 3Β

Ύψος επένδυσης (σε εκατ. Δρχ.)	Απόδοση (σε εκατ. Δρχ.)			
	α	β	γ	δ
0	0	0	0	0
1	1,3	1,4	1,2	1,3
2	2,9	2,6	2,5	3,9
3	4,0	4,2	4,2	3,9
4	5,5	5,3	5,4	5,1

Ο επενδυτής ενδιαφέρεται να επενδύσει τα χρήματά του έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει τη συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου των επενδύσεων του.

Το πρόβλημα αυτό είναι πρόβλημα συνδυασμών, και επομένως μπορεί να λυθεί με απαρίθμηση διαφόρων συνδυασμών, η με ακέραιο προγραμματισμό. Σαν παράδειγμα, ένας πιθανός συνδυασμός είναι (1,1,1,1), δηλ. Από 1 εκατ. Δρχ. σε κάθε πρόγραμμα. Αυτός ο συνδυασμός έχει συνολική απόδοση 1,3+1,4+1,2+1,3=5,2 εκατ. Δρχ. Ένας άλλος συνδυασμός είναι (4,0,0,0), δηλ. επένδυση του συνολικού κεφαλαίου στο πρόγραμμα α. Αυτός ο συνδυασμός έχει συνολική απόδοση 5,5 εκατ. Δρχ. και επομένως υπερέχει του προηγούμενου. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να προσπαθήσουμε διάφορους συνδυασμούς και να συγκρίνουμε τη συνολική τους απόδοση.

Λύση με Δυναμικό Προγραμματισμό

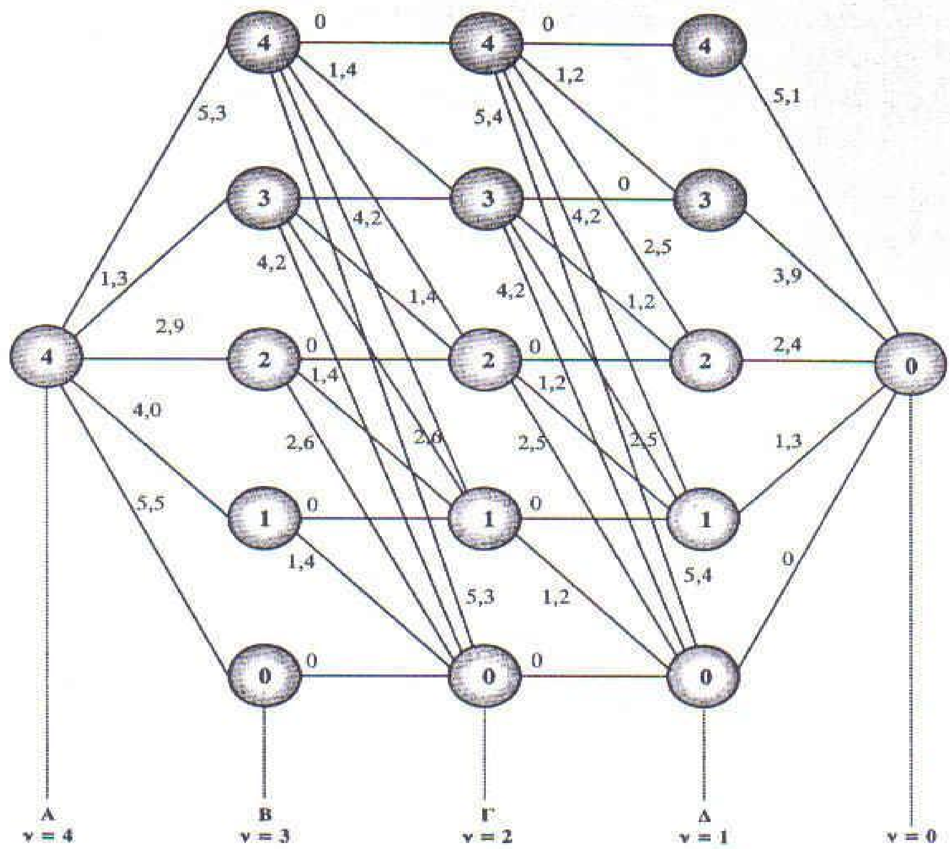
Για να λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία του δυναμικού προγραμματισμού, πρέπει να ορίσουμε τα στάδια αποφάσεων και τις πιθανές καταστάσεις του επενδυτή. Θα θεωρήσουμε ότι οι αποφάσεις για κάθε πρόγραμμα θα ληφθούν σε μία χρονική σειρά (στην πραγματικότητα βέβαια θα ληφθούν ταυτόχρονα, αλλά αυτή η διατύπωση διευκολύνει): πρώτα ο επενδυτής θα αποφασίσει για το πρόγραμμα α, στη συνέχεια για το β, μετά για το γ, και τέλος για το δ.

Επιπλέον, όταν πάρει απόφαση για μία επένδυση, δεν μπορεί να αναιρέσει αυτή την απόφαση. Στάδιο απόφασης, λοιπόν, είναι το κάθε συγκεκριμένο πρόγραμμα για το οποίο πρόκειται να αποφασίσει ο επενδυτής. Κατάσταση είναι το υπόλοιπο κεφάλαιο το οποίο είναι διαθέσιμο στον επενδυτή για επένδυση στο συγκεκριμένο στάδιο και όλα τα επόμενα.

Επομένως, στο πρόβλημα μας υπάρχουν 4 στάδια. Στο 1^{ο} στάδιο (α) υπάρχει μόνο μία πιθανή κατάσταση, αυτή των 4 εκατ. Δρχ. Στο 2^{ο} , 3^{ο} , και 4^{ο} στάδιο (β, γ, και δ), είναι πιθανές 5 καταστάσεις: 4 (εάν δεν έχει προηγηθεί καμία επένδυση), 3, 2, 1 και 0 εκατ. Δρχ., ανάλογα με το πόσα χρήματα έχει υπόλοιπα ο επενδυτής όταν "εισέρχεται" στο κάθε στάδιο (μετά την επένδυση στην α). Τέλος μετά το 4ο στάδιο υπάρχει μια μόνο πιθανή κατάσταση: 0 (εφόσον θέλουμε να επενδύσουμε ολόκληρο το ποσό των 4 εκατ. Δρχ.).

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να παραστήσουμε το πρόβλημα σαν ένα δίκτυο αποφάσεων, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.3.2

Ο κάθε κόμβος αναπαριστά μία πιθανή κατάσταση του επενδυτή στο συγκεκριμένο στάδιο. Μία σύνδεση μεταξύ ενός κόμβου i και ενός κόμβου j σημαίνει ότι ο επενδυτής έκανε μία επένδυση ύψους (i,,j) εκατ. Δρχ. Στο στάδιο από το οποίο αποχώρησε και επομένως έλαβε τη συγκεκριμένη απόδοση αυτής της επένδυσης. Γι 'αυτό, η απόδοση αυτή αναγράφεται κατά μήκος της κάθε σύνδεσης. Εάν υποθέσουμε ότι αυτή η απόδοση είναι το αντίστοιχο μιας χιλιομετρικής απόστασης, τότε το πρόβλημα μας είναι να βρεθεί η διαδρομή από την αφετηρία μέχρι τον προορισμό με τη μεγαλύτερη απόσταση. Σημειώνουμε ότι αυτό το πρόβλημα έχει ακριβώς την ίδια δομή με αυτό της προηγούμενης ενότητας της οποίας ο σκοπός ήταν να ευρεθεί η συντομότερη απόσταση.



3.3.2 Το πρόβλημα επενδύσεων (όλα τα ποσά σε εκατ. Δρχ.)

Η λύση του προβλήματος είναι παρόμοια με την προηγούμενη. Έστω $j_n(x)$ η μεγαλύτερη δυνατή συνολική απόδοση από το τωρινό και τα υπόλοιπα μελλοντικά στάδια εάν ο επενδυτής τώρα ευρίσκεται στο στάδιο ν και έχει υπόλοιπο κεφάλαιο x. Επίσης, έστω $a_{n,y}$ η άμεση απόδοση μιας επένδυσης ύψους ψ στο στάδιο ν, και $j_n(x)$ η καλύτερη επένδυση για το συγκεκριμένο στάδιο και κατάσταση. Τότε,

$$j_n(x) = \max\left[a_{n,y} + j_{n+1}(x-y)\right]$$

Για να λύσουμε αυτή την εξίσωση, αρχίζουμε από το τελευταίο στάδιο $(n=4)$, και χρησιμοποιούμε την ακραία συνθήκη ότι $j_5(x)=0$ (δηλ. Ότι δεν επενδυθεί δεν αποδίδει). Έτσι έχουμε:

Για ν=4:

$j_4(4) = a_{4,4} = 5{,}1$ $\quad j_4(2) = a_{4,2} = 2{,}4$

$j_4(3) = a_{4,3} = 3{,}9$ $\quad j_4(1) = a_{4,1} = 1{,}3$ $\quad \Rightarrow E_4(x) = x,$ για κάθε x

Για ν=3:

$j_3(4) = \max[5.4+0, 4.2+1.3, 2.5+2.4, 1.2+3.9, 0+5.1,] = 5{,}5 \Rightarrow E_3(4) = 3$

$j_3(3) = \max\left[4.2, 3.8, 3.6, 3.9\right] = 4.2$ $\quad \Rightarrow E_3(3) = 3$

$j_3(2) = \max\left[2.5, 2.5, 2.4\right] = 2.5$ $\quad \Rightarrow E_3(2) = 2 ή 1$

$j_3(1) = \max\left[1.2, 1.3\right] = 1.3$ $\quad \Rightarrow E_3(1) = 0$

Για ν=2:

$j_2(4) = \max[5.3, 4.2+1.3, 2.6+2.5, 1.4+4.2, 0+5.5] = 5{,}6 \Rightarrow E_2(4) = 1$

$j_2(3) = \max[4.2, 2.6+1.3, 1.4+2.5, 4.2] = 4.2$ $\quad \Rightarrow E_2(3) = 3 ή 0$

$j_2(2) = \max[2.6, 1.4+1.3, 2.5] = 2.7$ $\quad \Rightarrow E_2(2) = 1$

$j_2(1) = \max[1.4, 1.3] = 1.4$ $\quad \Rightarrow E_2(1) = 1$

$j_2(0) = 0$

Για ν=1:

$$j_1(4) = \max[5.5, 4.0+1.4, 2.9+2.7, 1.3+4.2, 5.6] = 5,6 \Rightarrow E_1(4) = 2 \text{ ή } 0$$

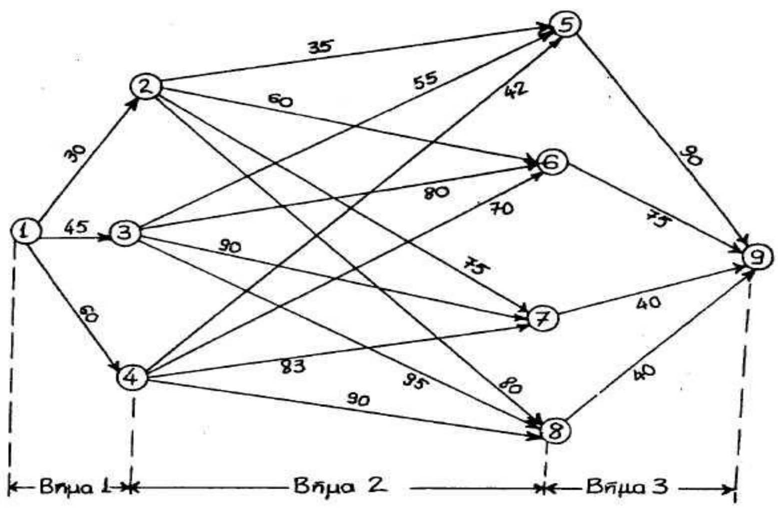
Επομένως, οι καλύτερες επενδύσεις είναι οι εξής δύο:

	Α	Β	Γ	Δ
Στρατηγική 1	2	1	0	1
Στρατηγική 2	0	1	3	0

Και οι δύο συνδυασμοί έχουν συνολική απόδοση $j_1(4) = 5.6$ εκατ.δρχ.

3.4.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΔΙΑΔΡΟΜΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ

Ας υποθέσουμε, ότι το τηλεπικοινωνιακό δίκτυο του σχήματος πρόκειται να χρησιμοποιηθεί για την μετάδοση ενός μηνύματος από το σημείο 1 στο σημείο 9. Οι αριθμοί παρά τους κλάδους του δικτύου παρέχουν το κόστος για την μετάδοση του μηνύματος μεταξύ των αντιστοίχων κόμβων. Ζητείται ο προσδιορισμός της διαδρομής που πρέπει να ακολουθήσει το μήνυμα, ώστε το κόστος της μεταδόσεως να είναι το ελάχιστο δυνατό.



Κατ' αρχήν παρατηρούμε, ότι μια διαδρομή από την αρχή 1 προς το πέρας 9 του δικτύου καθορίζεται από την ακολουθία των κόμβων $\{j_k\}$, k =

0,1,2,3, όπου j_0=1, j_1 = {2,3,4}, j_2 = {5,6,7,8} και j_3 =9. Έτσι, ο προσδιορισμός της διαδρομής ελάχιστου κόστους ανάγεται στην επιλογή του κατάλληλου j_k για κάθε k. Σαν κατάσταση, επομένως, του συστήματος κατά το k βήμα της διαδικασίας ενδείκνυται να ορίσουμε τον κόμβο j_k μετά k βήματα. Η αρχή της αριστότητας οδηγεί τώρα στην επόμενη αναδρομική σχέση για το $f_k(j_k)$:

$$F_k\left(j_k\right) = \min_{j_{k-1}}\left\{c_{j_{k-1},j_k} + F_{k-1}\left(j_{k-1}\right)\right\} \quad , \qquad k = 1,2,3, \qquad F_0\left(j_0\right) = 0$$

όπου το j_{k-1} περιορίζεται στους κόμβους από τους οποίους μπορεί να διέλθει το μήνυμα μετά k-1 βήματα και από τους οποίους είναι δυνατή η μετάδοσή του προς τον κόμβο j_k με κόστος c_{j_{k-1},j_k}. Συμβολίζοντας με $\hat{j}_{k-1}\left(j_k\right)$ τον τελευταίο κόμβο επί της βέλτιστης διαδρομής από την αρχή 1 στον κόμβο j_k, έχουμε:

<u>Βήμα 1</u>

$j_0 = 1, \qquad F_1\left(j_1\right) = c_{1,j_1}, \qquad j_1 = 2,3,4$

$j_1 = 2, \qquad F_1\left(2\right) = 30, \qquad \hat{j}_0\left(2\right) = 1$

$j_1 = 3, \qquad F_1\left(3\right) = 45, \qquad \hat{j}_0\left(3\right) = 1$

$j_1 = 4, \qquad F_1\left(4\right) = 60, \qquad \hat{j}_0\left(4\right) = 1$

<u>Βήμα 2</u>

$j_1 = 2,3,4, \quad F_2\left(j_2\right) = \min_{j_1}\left\{c_{j_1,j_2} + F_1\left(j_1\right)\right\}, \qquad j_2 = 5,6,7,8$

$j_2 = 5, \quad F_2\left(5\right) = \min_{j_1}\left\{c_{j_1,5} + F_1\left(j_1\right)\right\} = \min\left\{35+30=65, 55+45=100, 42+60=102\right\} = 65,$

$\hat{j}_1\left(5\right) = 2$

$j_2 = 6, \quad F_2\left(6\right) = \min_{j_1}\left\{c_{j_1,6} + F_1\left(j_1\right)\right\} = \min\left\{60+30=90, 80+45=125, 70+60=130\right\} = 90,$

$\hat{j}_1\left(6\right) = 2$

$$j_2 = 7,\ \ F_2(7) = \min_{j_1}\left\{c_{j_1,7} + F_1(j_1)\right\} = \min\{75+30=105, 90+45=135, 83+60=143\} = 105,$$

$$\hat{j}_1(7) = 2$$

$$j_2 = 8,\ \ F_2(8) = \min_{j_1}\left\{c_{j_1,8} + F_1(j_1)\right\} = \min\{80+30=110, 95+45=140, 90+60=150\} = 110,$$

$$\hat{j}_1(8) = 2$$

Βήμα 3

$$j_2 = 5,6,7,8,\ \ F_3(j_3) = \min_{j_2}\{c_{j_2,j_3} + F_2(j_2)\},\ j_3 = 9$$

$$j_3 = 9\ \ , F_3(9) = \min_{j_2}\{c_{j_2}, 9 + F_2(j_2)\} =$$

$$\min\{90+65=155\ \ , 75+90=165\ \ , 40+105=145\ \ 40+110=150\} = 145$$

$$\hat{j}_2(9) = 7$$

$k \rightarrow$	**1**		**2**		**3**	
$j_k \downarrow$	$F_1(j_1)$	$\hat{j}_0(j_1)$	$F_2(j_2)$	$\hat{j}_1(j_2)$	$F_3(j_3)$	$\hat{j}_2(j_3)$
1						
2	30	1				
3	45	1				
4	60	1				
5			65	2		
6			90	2		
7			105	2		
8			110	2		
9					145	7

Πίνακας 3Γ

Προφανώς, η βέλτιστη διαδρομή προσδιορίζεται από την ακολουθία των κόμβων $\left\{\hat{j}_{k-1}\left(j_k^*\right)\right\}$, k = 1,2,3 .Λαμβάνοντας υπ΄ όψη τα στοιχεία του πίνακα και το γεγονός ότι j_3^*=9 και $\overset{*}{j}_{k-1} = \hat{j}_{k-1}\left(j_k^*\right)$, η ζητούμενη βέλτιστη διαδρομή είναι η $1 \to 2 \to 7 \to 9$. Το ελάχιστο κόστος με το οποίο είναι δυνατόν να γίνει η μετάδοση του μηνύματος είναι 145 χρηματικές μονάδες.

3.5 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα της υποδιαιρέσεως μιας ποσότητας q>0 σε n μέρη, κατά τρόπον ώστε το γινόμενο των μερών αυτών να είναι μέγιστο. Η διαμόρφωση του ανωτέρω προβλήματος σαν ένα πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού, οδηγεί σε μια αναδρομική σχέση ανάλογη με εκείνη του προβλήματος της αξιοπιστίας.

Έστω x_i το i μέρος της υποδιαιρέσεως. Τότε, το πρόβλημα συνίσταται στην μεγιστοποίηση του γινομένου

$$P = \prod_{i=1}^{n} x_i \tag{3.34}$$

Υπό τις συνθήκες

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = q \tag{3.35}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

Ας συμβολίζουμε με $P_n\left(q_n\right)$ το μέγιστο της συναρτήσεως (3.34) υπό την γενικότερη συνθήκη

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = q_n \leq q \tag{3.36}$$

Τότε,

$$P_n\left(q_n\right) = \max_{x_1,\ldots,x_n} imum\left\{x_n \prod_{i=1}^{n-1} x_i\right\}$$

$$= \hat{x}_n\left(q_n\right) \max_{x_1,\ldots,x_{n-1}} imum\left\{\prod_{i=1}^{n-1} x_i\right\}$$

$$= \max_{x_1,\ldots,x_n} imum\left\{x_n P_{n-1}\left(q_{n-1}\right)\right\} \tag{3.37}$$

όπου $\hat{x}_n(q_n)$ η βέλτιστη τιμή του x_n δοθέντος του q_n,

$$q_{n-1} = q_n - x_n \tag{3.38}$$

και

$$P_{n-1}(q_{n-1}) = \max_{x_1,\ldots,x_{n-1}} imum \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} x_i \right\} \tag{3.39}$$

υπό την συνθήκη

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i = q_{n-1} \tag{3.40}$$

Συνεπώς, η απαιτούμενη αναδρομική σχέση για την επίλυση του προβλήματος με την τεχνική του δυναμικού προγραμματισμού παίρνει την μορφή

$$P_k(q_k) = \max_{x_k} imum \left\{ x_k P_{k-1}(q_k - x_k) \right\} \ , \quad 0 \le x_k \le q_k \le q \tag{3.41}$$

για k=1, … , n και με την παραδοχή ότι $P_0(q_0) = 1$. Στην περίπτωση αυτή, q_k είναι η κατάσταση του συστήματος κατά το k βήμα της διαδικασίας, δηλαδή το τμήμα της ποσότητας q που υποδιαιρείται στα μέρη από 1 έως και k. Τώρα όμως οι προσδιοριστέες μεταβλητές x_k δεν είναι διακριτές, αλλά συνεχείς, αφού μπορούν να λάβουν οποιαδήποτε τιμή μεταξύ 0 και q_k. Κατά συνέπεια, η επίλυση του προβλήματος πρέπει να γίνει υπό μία κλειστή και όχι πινακοειδή μορφή.

Έτσι, για k=1 είναι

$$P_1(q_1) = q_1$$

και, επομένως,

$$x_1^* = q_1$$

Για k=2 έχουμε

$$P_2(q_2) = \max_{x_2} imum \left\{ x_2 P_1(q_2 - x_2) \right\} = \max_{x_2} imum \left\{ x_2 (q_2 - x_2) \right\}$$

Αφού $0 \le x_2 \le q_2$, η βέλτιστη τιμή του x_2 προσδιορίζεται από την λύση της εξίσωσης

$$(\partial / \partial x_2) \ \left\{ x_2 (q_2 - x_2) \right\} = q_2 - 2x_2 = 0$$

εκ της οποίας προκύπτει

$$x_2^* = (q_2 / 2)$$

Συνεπώς,

$$P_2(q_2) = (q_2 / 2)^2$$

(Ας σημειωθεί ότι η δεύτερη μερική παράγωγος ως προς x_2 είναι αρνητική , πράγμα που σημαίνει ότι το προσδιορισθέντο ακρότατο είναι μέγιστο.)

Για k = 3 προκύπτει τώρα

$$P_2(q_2) = \underset{x_3}{\max imum}\{x_3 P_2(q_3 - x_3)$$

$$= \underset{x_3}{\max imum}\left\{x_3\left(\frac{q_3 - x_3}{2}\right)^2\right\}$$

και πάλι, το x_3 προσδιορίζεται από την εξίσωση

$$(\partial / \partial x_3)\left[x_3\left(\frac{q_3 - x_3}{2}\right)^2\right] = 3x_3^2 + q_3^2 - 4q_3x_3 = 0$$

εκ της οποίας προκύπτει $x_3^* = q_3$ ή $x_3^* = q_3 / 3$. Εκ των δυο αυτών τιμών επιλέγεται μόνον η $x_3^* = q_3 / 3$. Δεδομένου ότι η δεύτερη μερική παράγωγος ως προς x_3, ίση με 6x_3-4q_3, μόνο στην θέση $x_3^* = q_3 / 3$ είναι αρνητική. Συνεπώς,

$$x_1^* = x_2^* = \frac{2q_3/3}{2} = q_3/3$$
$$kai$$
$$P_3(q_3) = \frac{2q_3/3}{2} = q_3/3$$
$$= \frac{q_3}{3}\left(\frac{2q_3/3}{2}\right)^2 = \left(\frac{q_3}{3}\right)^3$$

Οι προηγούμενοι υπολογισμοί υποδεικνύουν ότι, δοθείσης της καταστάσεως q_k κατά το k βήμα της διαδικασίας, η βέλτιστη πολιτική είναι

$$x_1^* = x_2^* = ...x_k^* = q_k/k \tag{3.4.9}$$

με

$$P_k\left(q_k\right) = \left(q_k/k\right)^k \tag{3.4.10}$$

Για την απόδειξη των ανωτέρω σχέσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της επαγωγής. Πράγματι, είναι

$$P_{k+1}\left(q_{k+1}\right) = \max_{0 \le x_{k+1} \le q_{k+1}} imum\left\{x_{k+1}P_k\left(q_{k+1} - x_{k+1}\right)\right\}$$
$$= \max_{0 \le x_{k+1} \le q_{k+1}} imum\left\{x_{k+1}\left(\frac{q_{k+1} - x_{k+1}}{k}\right)\right\} \tag{3.4.11}$$

Χρησιμοποιώντας τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες μεγίστου προκύπτει $x_{k+1}^* = q_{k+1}/\left(k+1\right)$.

Έτσι , στην περίπτωση που $q_n = q$, η βέλτιστη υποδιαίρεση είναι

$$x_1^* = x_2^* = ...x_n^* = q/n \tag{3.4.12}$$

και η μέγιστη τιμή του γινομένου

$$p^* = (q/n)^n \tag{3.4.13}$$

Το επιλυθέν πρόβλημα αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο η θεωρία της βελτιστοποιήσεως και η έννοια της αναδρομικότητας μπορούν να συνδυαστούν για την επίλυση ενός προβλήματος με την μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού.

3.6 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΕΞΟΠΛΙΣΜΟΥ

Ένα από τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι επιχειρήσεις με τον μικρής διάρκειας (έως 10 έτη) εξοπλισμό τους είναι το πότε είναι οικονομικά ορθό να γίνεται η αντικατάστασή του. Η διατήρηση ενός μηχανήματος, αυτοκινήτου κ.ο.κ. για μεγάλη περίοδο συντελεί σε αυξημένο κόστος συντήρησης. Από την άλλη πλευρά η αντικατάσταση του εξοπλισμού μετά από μικρή χρήση μπορεί να μην είναι συμφέρουσα διότι η αξία του εξοπλισμού στην παραγωγική διαδικασία μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την τιμή πώλησης του ως μεταχειρισμένου.

Το παράδειγμα που ακολουθεί υποδεικνύει την εφαρμογή της μεθοδολογίας του δυναμικού προγραμματισμού σε προβλήματα αντικατάστασης εξοπλισμού.

Παράδειγμα

Αντικατάσταση εξοπλισμού

Μια βιομηχανία χρησιμοποιεί ένα συγκεκριμένο μηχάνημα συσκευασίας στην παραγωγική διαδικασία. Το κόστος αγοράς του μηχανήματος είναι 10 εκατομμύρια δραχμές. Καθώς το μηχάνημα παλαιώνει, το κόστος συντήρησής του αυξάνει εκθετικά, όπως φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί:

Ηλικία Μηχανήματος	Κόστος Συντήρησης	Αξία Μεταχειρισμένου

0	200.000	
1	1.000.000	7.500.000
2	1.800.000	6.000.000
3	3.000.000	4.000.000
4	5.000.000	2.500.000
5	7.000.000	1.500.000
6	8.000.000	1.000.000

Το κόστος συντήρησης τον πρώτο χρόνο της λειτουργίας (όταν η ηλικία του μηχανήματος είναι 0) ανέρχεται σε 200 χιλιάδες δραχμές, μετά από ένα χρόνο σε 1 εκατομμύριο δραχμές κ.ο.κ.. Η αξία του μηχανήματος ως μεταχειρισμένου μειώνεται δραστικά με την πάροδο του χρόνου. Έτσι η αξία του μετά από ένα χρόνο χρήσης είναι 7,5 εκατομμύρια δραχμές, μετά 2 χρόνια 6 εκατομμύρια κ.ο.κ..

Ο διευθυντής παραγωγής της συγκεκριμένης βιομηχανίας επιθυμεί να γνωρίζει ποιος είναι ο οικονομικά βέλτιστος τρόπος αντικατάστασης του μηχανήματος, αν δηλαδή πρέπει να αντικατασταθεί μέσα στο χρονικό ορίζοντα των έξι ετών και πότε θα γίνουν οι αντικαταστάσεις.

Σύμφωνα με τις γενικές αρχές της μεθοδολογίας του δυναμικού προγραμματισμού, το πρόβλημα της αντικατάστασης του εξοπλισμού μπορεί να χωρισθεί σε 6 στάδια που αντιστοιχούν στα 6 έτη του χρονικού ορίζοντα.

Στην αρχή κάθε έτους ο διευθυντής παραγωγής αντιμετωπίζει το δίλημμα της αντικατάστασης η όχι του μηχανήματος.

Οι καταστάσεις του συστήματος αντιστοιχούν στην ηλικία του μηχανήματος σε κάθε στάδιο.

Στο πρώτο στάδιο η απόφαση είναι δεδομένη: αγορά νέου μηχανήματος με συνολικό κόστος 10.200.000 δραχμών (10 εκατομμύρια κόστος αγοράς συν 200 χιλιάδες δραχμές κόστος συντήρησης)

Ας δούμε την εφαρμογή της μεθοδολογίας του δυναμικού προγραμματισμού ξεκινώντας από το τελευταίο στάδιο.

Στην τελευταία χρονιά είναι δυνατόν να έχουμε το μηχάνημα που είχε αγορασθεί στην αρχή του χρονικού ορίζοντα, ηλικίας 5 ετών τώρα, η αν το αρχικό μηχάνημα είχε αντικατασταθεί στο ενδιάμέσο να έχουμε τώρα κάποιο μηχάνημα η ηλικία του οποίου μπορεί να κυμαίνεται από 1 έως 4 έτη.

Πίνακας 3Δ (στάδιο 6)

Ηλικία Μηχ/το ς	Απόφα ση	Ηλικία Στο τέλος 6ετίας	Κόστος Αγοράς	Κόστος Συντήρη σης	Τιμή πώλη- Σης αντικατα- σταθέντος	Κόστος Έτους 6	Τιμή πώλη- σης τέλους 6ετίας	Συνολικό Κόστος Έτους 6
1	Αντικατ.	1	10000000	200.000	-7500000	2700000	-7500000	-4800000
1	Όχι	2	0	1000000		1000000	-6000000	-5000000
2	Αντικατ.	1	10000000	200.000	-6000000	4200000	-7500000	-3300000
2	Όχι	3	0	1800000		1800000	-4000000	-2200000
3	Αντικατ.	1	10000000	200.000	-4000000	6200000	-7500000	-1300000
3	Όχι	4	0	3000000		3000000	-2500000	500000
4	Αντικατ.	1	10000000	200.000	-2500000	7700000	-7500000	200000
4	Όχι	5	0	5000000		5000000	-1500000	3500000
5	Αντικατ.	1	10000000	200.000	-1500000	8700000	-7500000	1200000
5	Όχι	6	0	7000000		7000000	-1000000	6000000

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση κατά την οποία στην αρχή του έκτου έτους έχουμε ένα μηχάνημα ηλικίας 1 έτους.

Αν αποφασίσουμε να το αντικαταστήσουμε τότε θα έχουμε κόστος αγοράς του νέου μηχανήματος 10 εκατομμύρια δραχμές, και κόστος συντήρησης 200 χιλιάδες δραχμές (επειδή θα είναι ένα νέο μηχάνημα). Από το αντικατασταθέν μηχάνημα θα εισπράξουμε 7,5 εκατομμύρια δραχμές (οι εισπράξεις συμβολίζονται με αρνητικό πρόσημο). Επομένως για το έκτο έτος θα υπάρχει ένα συνολικό κόστος 2,7 εκατομμυρίων (10 + 0,2-7,5). Στο τέλος του έκτου έτους το νέο μηχάνημα που αγοράσθηκε θα έχει ηλικία 1 έτους και η αξία του θα είναι 7,5 εκατομμύρια δραχμές. Συνεπώς το συνολικό κόστος σε αυτή την περίπτωση θα είναι κέρδος 4,8 (7,5- 2,7) εκατομμυρίων δραχμών.

Στην αντίθετη περίπτωση της μη αντικατάστασης δεν υπάρχει κόστος αγοράς, ενώ το κόστος συντήρησης είναι 1 εκατομμύριο δραχμές. Στο τέλος του έτους το μηχάνημα είναι 2 ετών και έχει τιμή πώλησης 6 εκατομμύρια. Επομένως το αποτέλεσμα για την επιχείρηση είναι κέρδος 5 εκατομμυρίων.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τα αποτελέσματα για την αντικατάσταση η όχι του μηχανήματος όταν αυτό έχει στην αρχή του έκτου χρόνου ηλικία 2,3,4 η 5 ετών. Τα αποτελέσματα που περιλαμβάνονται στον πίνακα 3Δ δείχνουν ότι:

- αν έχουμε μηχάνημα ηλικίας 1 έτους δεν συμφέρει η αντικατάστασή του.
- αν το μηχάνημα είναι παλαιότερο τότε θα πρέπει να αντικατασταθεί.

Ας εξετάσουμε τώρα το στάδιο 5. Στην αρχή του πέμπτου χρόνου η ηλικία του μηχανήματος μπορεί να κυμαίνεται από 1 έως 4 έτη. Ο πίνακας 3Ε περιλαμβάνει τα αποτελέσματα της ανάλυσης για το πέμπτο στάδιο.

Πίνακας 3Ε (στάδιο 5)

Ηλικία Μηχ/τος	Απόφαση	Ηλικία Στο τέλος 6ετίας	Κόστος Αγοράς	Κόστος Συντήρη-σης	Τιμή πώλη-σης αντικ.	Κόστος Έτους 6	Τιμή πώλησης τέλους 6ετίας	Συνολικό Κόστος Έτους 6
1	Αντικατ.	1	10000000	200000	-7500000	2700000	-5000000	-2300000
1	Όχι	2	0	1000000		1000000	-3300000	-2300000
2	Αντικατ.	1	10000000	200000	-6000000	4200000	-5000000	-800000
2	Όχι	3	0	1800000		1800000	-1300000	500000
3	Αντικατ.	1	10000000	200000	-4000000	6200000	-5000000	1200000
3	Όχι	4	0	3000000		3000000	200000	3200000
4	Αντικατ.	1	10000000	200000		7700000	-5000000	2700000
4	Όχι	5	0	5000000	-2500000	5000000	1200000	6200000

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα την περίπτωση που στην αρχή του πέμπτου έτους υπάρχει ένα μηχάνημα ηλικίας 1 έτους.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Αν αποφασίσουμε την αντικατάστασή του, τότε στη διάρκεια του πέμπτου έτους θα έχουμε κόστος 10 εκατομμυρίων δραχμών για την αγορά νέου μηχανήματος, και κόστος συντήρησης 200 χιλιάδες δραχμές (επειδή θα είναι ένα νέο μηχάνημα). Η αξία του αντικατασταθέντος μηχανήματος είναι 7,5 εκατομμύρια δραχμές. Επομένως η απόφαση αντικατάστασης σε αυτή την περίπτωση θα έχει αποτέλεσμα συνολική δαπάνη 2,7 εκατομμυρίων.

Εφ' όσον το μηχάνημα αντικαταστάθηκε, την επόμενη περίοδο στο έκτο έτος θα υπάρχει ένα μηχάνημα που θα έχει ηλικία ενός έτους. Από τον πίνακα 3Δ προκύπτει ότι όταν στην αρχή του έκτου έτους υπάρχει μηχάνημα ηλικίας 1 έτους, τότε δεν συμφέρει η αντικατάστασή του και υπάρχει κέρδος για την επιχείρηση 5 εκατομμυρίων δραχμών.

Σε αυτή την περίπτωση το συνολικό αποτέλεσμα για την επιχείρηση για τα έτη 5-6 είναι κέρδος 2,3 εκατομμυρίων δραχμών (5-2,7).

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΜΗ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Αν αποφασίσουμε να μην αντικατασταθεί το μηχάνημα, τότε θα υπάρχει κόστος συντήρησης 1 εκατομμύριο δραχμές.

Την επόμενη περίοδο, στην αρχή του έκτου έτους το μηχάνημα θα είναι 2 ετών. Από τον πίνακα 3Δ προκύπτει ότι όταν στην αρχή του έκτου έτους υπάρχει μηχάνημα ηλικίας 2 ετών, τότε συμφέρει η αντικατάστασή του στο έκτο έτος και υπάρχει κέρδος για την επιχείρηση 3,3 εκατομμυρίων δραχμών. Έτσι στην περίπτωση μη αντικατάστασης του μηχανήματος το συνολικό αποτέλεσμα για την επιχείρηση για τα έτη 5-6 είναι κέρδος 2,3 εκατομμυρίων δραχμών (3,3-1).

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που στην αρχή του πέμπτου έτους έχουμε μηχάνημα 1 έτους, είτε προχωρήσουμε στην αντικατάστασή του ή όχι θα προκύψει το ίδιο αποτέλεσμα για τα επόμενα δύο χρόνια.

Ο πίνακας 3Ε περιλαμβάνει τα αποτελέσματα της ανάλυσης για όλες τις δυνατές καταστάσεις του πέμπτου σταδίου.

Ας προχωρήσουμε τώρα στο προηγούμενο στάδιο, το στάδιο 4.

Στην αρχή του τέταρτου χρόνου το μηχάνημα μπορεί να είναι ηλικίας 1 έως 3 ετών. Ο πίνακας 3ΣΤ περιλαμβάνει την ανάλυση για όλες τις καταστάσεις του τετάρτου σταδίου.

Πίνακας 3ΣΤ (στάδιο 4)

Ηλικία Μηχ/τος	Απόφαση	Ηλικία Στο τέλος 6ετίας	Κόστος Αγοράς	Κόστος Συντήρησης	Τιμή πώλησης αντικατ/ντος	Κόστος Έτους 6	Τιμή πώλησης Τέλους 6ετίας	Συνολικό Κόστος έτους 6
1	Αντικατ.	1	10000000	200000	-7500000	2700000	-2300000	400000
1	Όχι	2	0	1000000		1000000	-800000	200000
2	Αντικατ.	1	10000000	200000	-6000000	4200000	-2300000	1900000
2	Όχι	3	0	1800000		1800000	1200000	3000000
3	Αντικατ.	1	10000000	200000	-4000000	6200000	-2300000	3900000
3	Όχι	4	0	3000000		3000000	2700000	5700000

<u>Στάδια 3 και 2</u>

Παρόμοιοι υπολογισμοί ισχύουν και για τα στάδια 3 και 2 και περιέχονται στους πίνακες 3Ζ και 3Η που ακολουθούν.

Πίνακας 3Ζ (στάδιο 3)

Ηλικία Μηχ/τος	Απόφαση	Ηλικία Στο τέλος 6ετίας	Κόστος Αγοράς	Κόστος Συντήρησης	Τιμή πώλη-Σης Αντικ/ντος	Κόστος Έτους 6	Τιμή πώλη-σης τέλους 6ετίας	Συνολικό Κόστος έτους 6
1	Αντικατ.	1	10000000	200000	-7500000	2700000	200000	2900000
1	Όχι	2	0	1000000		1000000	1900000	2900000
2	Αντικατ.	1	10000000	200000	-6000000	4200000	200000	4400000
2	Όχι	3	0	1800000		1800000	3900000	5700000

Πίνακας 3Η (στάδιο 2)

Ηλικία Μηχ/τος	Απόφα-ση	Ηλικία Στο τέλος 6ετίας	Κόστος Αγοράς	Κόστος Συντήρησης	Τιμή Πώλησης αντικ/σθέ-Ντος	Κόστος έτους6	Τιμή πώλη-σης τέλους 6ετίας	Συνολικό Κόστος Έτους 6
1	Αντικατ.	1	10000000	200000	-7500000	2700000	2900000	5600000
1	Όχι	2	0	1000000		1000000	4400000	5400000

Στάδιο 1

Στην αρχή του πρώτου έτους τόσο η κατάσταση του συστήματος όσο και η απόφαση που θα ληφθεί είναι δεδομένες. Θα αγορασθεί νέο μηχάνημα με συνολικό κόστος 10 εκατομμυρίων δραχμών για την αγορά και 200 χιλιάδες δραχμές για τη συντήρηση του μηχανήματος.

Δεδομένου ότι στην αρχή του δεύτερου χρόνου το μηχάνημα θα είναι 1 έτους, από τα αποτελέσματα του πίνακα 3Η προκύπτει ότι θα προτιμηθεί η μη αντικατάστασή του με κόστος για τις περιόδους 2 έως 6 5,4 εκατομμύρια δραχμές.

Πίνακας 3Θ (στάδιο 1)

Ηλικία Μηχ/τος	Απόφα-ση	Ηλικία Στο τέλος 6ετίας	Κόστος Αγοράς	Κόστος Συντήρησης	Τιμή Πώλησης αντικ/σθέ-Ντος	Κόστος έτους6	Τιμή πώλη-σης τέλους 6ετίας	Συνολικό Κόστος Έτους 6
0	Αγορά	1	10000000	200000		10200000	5400000	15600000

Με βάση τα αποτελέσματα που περιέχονται στους πίνακες 3Δ – 3Θ μπορούμε να προσδιορίσουμε τη βέλτιστη πολιτική αντικατάσταση του εξοπλισμού.

	Έτος 1	Έτος 2	Έτος 3	Έτος 4	Έτος 5	Έτος 6	Τέλος Περιόδου
Ηλικία Μηχ/τος	0	1	2	1	2	1	2
Απόφαση	Αγορά	Διατήρηση	Αγορά	Διατήρηση	Αγορά	Διατήρηση	
Συνολικό Κόστος	10200000	1000000	4200000	1000000	4200000	1000000	-6000000

3.7 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

Μία βιομηχανική εταιρεία ετοιμάζεται να προγραμματίσει την παραγωγή (σε σχετικά μικρές ποσότητες) ενός ακριβού προϊόντος για τις επόμενες ν χρονικές περιόδους (μήνες). Λόγω διαφόρων περιορισμών (π.χ. Χρόνου, εργατικού δυναμικού κ.λ.π.) Η ποσότητα που μπορεί να παραχθεί σε μια περίοδο ν δεν μπορεί να υπερβαίνει μία δεδομένη δυναμικότητα γι 'αυτόν τον μήνα. Η ζήτηση κάθε περιόδου είναι εκ των προτέρων γνωστή, μπορεί δε να ικανοποιηθεί από την παραγωγή εκείνης της περιόδου, ή από αποθέματα προηγουμένων περιόδων. Το κόστος κάθε περιόδου έχει δυο συντελεστές: κόστος παραγωγής, το οποίο είναι συνάρτηση της ποσότητας παραγωγής, και κόστος αποθήκευσης της περιόδου (το οποίο είναι συνάρτηση του συνολικού αποθέματος το οποίο υπάρχει στο τέλος της περιόδου). Η εταιρεία θέλει να προγραμματίσει την παραγωγή ώστε να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος των ν περιόδων.

Για να λύσουμε το πρόβλημα με μια από τις τεχνικές του μαθηματικού προγραμματισμού, ορίζουμε για κάθε περίοδο ν (ν = 1, 2, ..., ν):

$X_ν$	=η ποσότητα της παραγωγής
$Z_ν$	= η ζήτηση
$Δ_ν$	= η δυναμικότητα της παραγωγής
$A_ν$	= το συνολικό απόθεμα στο τέλος της περιόδου
$C_ν(x_ν)$	= το κόστος παραγωγής
$H_ν(α_ν)$	= το κόστος αποθηκεύσεως

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: να ευρεθούν τιμές για την άριστη πολιτική παραγωγής και αποθεμάτων, δηλαδή τις μεταβλητές $\{χ_ν , α_ν, ν= 1, 2,....., ν\}$, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος.

$$Z = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(C_n\left(x_n\right) + H_n\left(a_n\right) \right) \qquad (1)$$

Με τους περιορισμούς:

$$a_n = a_{n-1} + x_n - z_n \qquad n = 1, 2, ..., \mathrm{N} \qquad (2)$$

$$x_n \le \Delta_n \qquad n = 1, 2, ..., \mathrm{N} \qquad (3)$$

$$a_n \le \mathrm{A} \qquad n = 1, 2, ..., \mathrm{N} \qquad (4)$$

$$a_0 = a_{\mathrm{N}} = 0 \qquad (5)$$

x_n = ακέραιοι μη αρνητικοί (6)

Ο περιορισμός (2) σημαίνει ότι τα αποθέματα στο τέλος της περιόδου ν ισούνται με τα αποθέματα του τέλους της περιόδου (ν-1), συν την παραγωγή της περιόδου ν, μείον τη ζήτηση αυτής της περιόδου. Οι περιορισμοί (3) και (4) δηλώνουν τους περιορισμούς λόγω δυναμικότητας παραγωγής και χωρητικότητας αποθήκης. Ο περιορισμός (5) εκφράζει δυο ακραίες συνθήκες: ότι τα αρχικά και τελικά αποθέματα ισούνται με μηδέν. Τέλος, ο περιορισμός (6) υπάρχει διότι οι ποσότητες παραγωγής είναι μικρές[1].

Εάν οι συναρτήσεις $C_v(x_v)$ και $H_v(x_v)$ είναι γραμμικές, τότε το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με ακέραιο προγραμματισμό. Εμείς θα υποθέσουμε όμως ότι:

$$C_n(x_n) = \left\{ \begin{array}{ll} (12+n) - 6x_n + x_n^2, & 0 < x_n \le \Delta,\ n = 1, 2, ..., \mathrm{N} \\ 0 & x_n = 0 \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{H}_n(a_n) = h_n \cdot a_n$$

Βλέπουμε ότι οι συναρτήσεις $C_v(x_v)$ είναι μη γραμμικές. Για παράδειγμα, τα δεδομένα του προβλήματος για ένα ορίζοντα τεσσάρων περιόδων (ν=4) δίδονται από τον πίνακα 3Ι.

Περίοδος (ν)	**Ζήτηση ($ζ_v$)**	**Δυναμικότητας Παραγωγής ($δ_v$)**	**Κόστος Αποθήκης (h_v)**	**Κόστος $c_v(x_v)$ Για x_v = 1 2 3 4 5**

[1] Κανονικά το κριτήριο κόστους πρέπει να αναχθεί σε σημερινές τιμές.

1	2	5	1	8 5 4 5 8
2	2	3	1	9 6 5 - -
3	3	3	2	10 7 6 - -
4	3	5	2	11 8 7 8 11

Πίνακας 3Ι

Ένας κλασσικός τρόπος λύσης αυτού του προβλήματος μη γραμμικού προγραμματισμού είναι ο δυναμικός προγραμματισμός. Στάδια του προβλήματος είναι οι χρονικές περίοδοι, σαν κατάσταση δε ορίζουμε το αποθεματικό επίπεδο το οποίο υπάρχει προτού να ληφθεί η απόφαση. Έστω $\mathrm{K}_n\left(x_{n,}a_{n-1}\right)$ το άμεσο κόστος της περιόδου ν εάν το απόθεμα στην αρχή της περιόδου ισούται με $\alpha_{\nu-1}$, και η ποσότητα παραγωγής αυτής της περιόδου είναι x_ν προφανώς

$$\mathrm{K}_n\left(x_n, a_n - 1\right) = \begin{cases} 12 + n - 6x_n + x_n^{\;2} + h_n \cdot a_n, & x_n > 0 \\ h_n \cdot a_n & x_n = 0 \end{cases}$$

$$a_n = a_{n-1} + x_n - z_n$$

Επίσης, έστω $\varphi_\nu(\alpha_{\nu-1})$ το ελάχιστο συνολικό κόστος από τις υπόλοιπες περιόδους εάν η τωρινή περίοδος είναι η ν-υοστή και το υπόλοιπο απόθεμα από την προηγούμενη περίοδο είναι $\alpha_{\nu-1}$. Έχουμε:

$$j_n\left(a_{n-1}\right) = \min_{x_n \geq 0}\left[\mathrm{K}_n\left(x_n, a_{n-1}\right) + j_n + 1(a_n)\right]$$

όπου

$$a_4 = a_0 = 0$$

Η λύση αυτού του προβλήματος είναι παρόμοια με αυτή του προβλήματος τη συντομότερης οδού. Η γραφική αναπαράσταση του προβλήματος σαν δίκτυο παρουσιάζεται στο σχήμα 3.3.3.

Οι κόμβοι στο δίκτυο αντιστοιχούν στις πιθανές καταστάσεις (αποθεματικά επίπεδα) για το κάθε στάδιο. Οι συνδέσεις μεταξύ δύο διαδοχικών κόμβων αντιστοιχούν σε αποφάσεις παραγωγής. Για παράδειγμα, η σύνδεση μεταξύ $α_1$=0 και $α_2$=1 σημαίνει ότι μεταξύ του τέλους της 1ης και του τέλους της 2ης περιόδου το απόθεμα μεγάλωσε κατά μία μονάδα. Εφόσον η ζήτηση της 2ης περιόδου ήταν δύο μονάδες, έπεται ότι η συνολική παραγωγή αυτής της περιόδου ήταν τρεις μονάδες. Επομένως το κόστος αυτής της σύνδεσης (απόφασης) είναι: (κόστος παραγωγής 3 μονάδων=7)+(κόστος αποθήκευσης μίας μονάδας =1) = 8. Αντίστοιχα, η σύνδεση μεταξύ $α_2$=4 και $α_3$=3 σημαίνει

$$x_3 = a_3 - a_2 + z_3 = 3 - 4 + 3 = 2$$

και

$$K_3(2,4) = 7 + 6 = 13$$

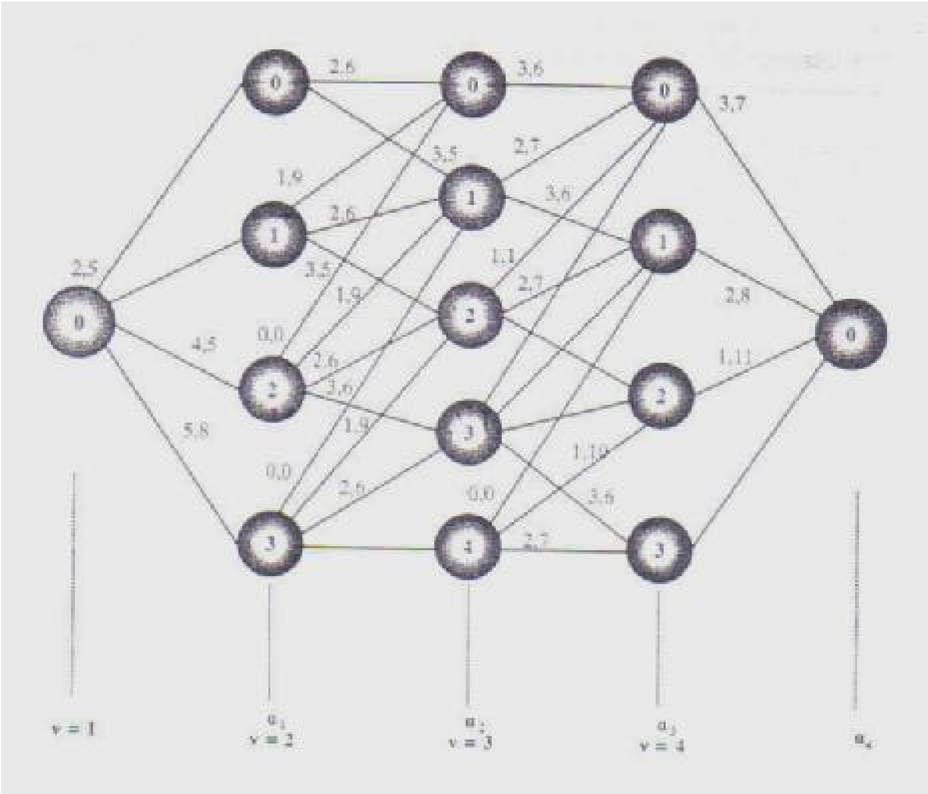
Γενικότερα, μια σύνδεση μεταξύ δύο διαδοχικών κόμβων $α_ν$ και $α_{ν+1}$ αντιστοιχεί σε απόφαση παραγωγής

$$x_{n+1} = a_{n+1} - a_n + z_{n+1}$$

και κόστος περιόδου

$$\mathrm{K}_{n+1}(x_{n+1}, a_n) = C_{n+1}(x_{n+1}) + h_{n+1} \cdot a_{n+1}$$

Οι ποσότητες ($x_ν$, $k_ν$) φαίνονται δίπλα σε κάθε σύνδεση στο δίκτυο, π.χ. Η ένδειξη (2, 5) μεταξύ $α_o$=0 και $α_1$ = 1 σημαίνει x_1=2 και K_1=5.



Σχήμα 3.3.3 Πρόβλημα παραγωγής αποθεμάτων

Το πρόβλημα λοιπόν είναι να ευρεθεί η συντομότερη οδός μεταξύ $a_0 = 0$ και $a_4 = 0$, όπου το μήκος διαδρομής μεταξύ δύο διαδοχικών κόμβων είναι το κόστος K_n. Η λύση είναι παρόμοια με τα προηγούμενα. Την παρουσιάζουμε με συντομία:

Για ν=4, η λύση είναι πολύ απλή. Εφόσον $a_1 = 0$, θα παράγουμε μόνο τόσο όσο χρειάζεται για να ικανοποιήσουμε τη ζήτηση της τετάρτης περιόδου, δηλ. $x_4 = z_4 - a_3 = 3 - a_3$ όπου $a_3 \le 3$, και επομένως

$$j_4(0) = 7, j_4(1) = 8, j_4(2) = 11, j_4(3) = 0$$

Για ν=3, οι πιθανές καταστάσεις είναι $a_2 = 0,1,2,3,4.$ Συμβολίζοντας με $x_n(a)$ την άριστη ποσότητα παραγωγής την περίοδο ν όταν το διαθέσιμο απόθεμα είναι α, έχουμε:

$$j_3(0) = 6 + j_4(0) = 13$$

$$j_3(1) = \min\left[7 + j_4(0), 8 + j_4(1)\right] = 14 \Rightarrow x_3(1) = 2$$

$$j_3(2) = \min[10+7, 8+8, 10+11] = 17 \Rightarrow x_3(2) = 1 ή 2$$

$$j_3(3) = \min[0+7, 12+8, 11+11, 12+0] = 7 \Rightarrow x_3(3) = 0$$

$$j_3(4) = \min[2+8, 12+11, 13+0] = 10 \Rightarrow x_3(4) = 0$$

Για ν=2, οι πιθανές καταστάσεις είναι $a_1 = 0,1,2,3.$

$$j_2(0) = \min[6+13, 6+14] = 19 \Rightarrow x_2(0) = 2$$

$$j_2(1) = \min[9+13, 7+14, 7+17] = 21 \Rightarrow x_2(2) = 0$$

$$j_2(2) = \min[0+13, 10+14, 8+17, 8+7] = 13 \Rightarrow x_2(2) = 0$$

$$j_2(3) = \min[1+14, 11+17, 9+7, 9+10] = 15 \Rightarrow x_2(3) = 0$$

Για ν=1, η μόνη πιθανή κατάσταση είναι $a_0 = 0$

$$j_1(0) = \min[5+19, 5+21, 7+13, 11+15] = 20 \Rightarrow x_1(0) = 4$$

Επομένως ,το άριστο πρόγραμμα παραγωγής είναι το εξής:

$$x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = 3$$

και το ελάχιστο συνολικό κόστος =20.

3.8 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ

Ας εξετάσουμε το εξής πρόβλημα: μία εταιρεία πρόκειται να αγοράσει ένα ακριβό μηχάνημα μέσα στους επόμενους 5 μήνες. Η τιμή αυτού του μηχανήματος στην αγορά παρουσιάζει μηνιαίες διακυμάνσεις λόγω αλλαγών στην ισοτιμία και δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή. Υπάρχει όμως αρκετή ένδειξη ότι οι τιμές του επόμενου πενταμήνου (Ιανουάριος – Μάιος), μέσα στο οποίο θα γίνει η αγορά του μηχανήματος, θα κινηθούν μέσα σε δεδομένα πλαίσια. Μετά από εκτεταμένη ανάλυση της αγοράς καταρτίσθηκε ο πίνακας 3.Κ που εκφράζει τις πιθανές τιμές με τις αντίστοιχες πιθανότητες.

Τιμή μηχανήματος (σε χιλ. Δρχ.)	*Πιθανότητες τιμών στους επόμενους 5 μήνες*				
	Ιανουάριος	*Φεβρουάριος*	*Μάρτιος*	*Απρίλιος*	*Μάιος*
250	0,10	0,05	0,05	0,10	0,05
260	0,20	0,15	0,10	0,20	0,15
270	0,30	0,35	0,50	0,40	0,50
280	0,25	0,25	0,20	0,20	0,20
290	0,15	0,20	0,15	0,10	0,10
Μέση τιμή	271,50	274	273	270	271,50

Πίνακας 3.Κ Διακυμάνσεις και πιθανότητες στις τιμές

Ο πίνακας δείχνει ότι η τιμή του μηχανήματος κυμαίνεται μεταξύ 250 και 290 (οι τιμές είναι σε χιλιάδες δραχμές). Τον Ιανουάριο η τιμή μπορεί να είναι 250 με πιθανότητα 0,10 η 260 με πιθανότητα 0,20 ή 270 με πιθανότητα 0,30, κ.λ.π. Έτσι, η μέση τιμή για τον Ιανουάριο είναι 271,50, για τον Φεβρουάριο 274, κ.λ.π.

Βλέπουμε ότι οι μέσες τιμές δεν διαφέρουν πολύ μεταξύ των μηνών. Εν τούτοις βλέπουμε ότι λόγω του φάσματος των τιμών υπάρχουν πιθανότητες για μια καλή ευκαιρία στην τιμή 250 καθώς και κίνδυνοι για την υψηλή τιμή των 290. Κατά συνέπεια, υπάρχει κίνδυνος περιμένοντας να εμφανισθεί μια "καλή" ευκαιρία να αφήσουμε να περάσουν ανεκμετάλλευτες άλλες, όχι "τόσο καλές" ευκαιρίες, και τελικά αναγκασθούμε να αγοράσουμε το μηχάνημα σε υψηλή τιμή. Γι 'αυτό το λόγο θέλουμε να καταρτίσουμε μια στρατηγική η οποία θα ελαχιστοποιηθεί το αναμενόμενο κόστος αγοράς του μηχανήματος.

Η λύση αυτού του προβλήματος, μολονότι θα γίνει και αυτή με δυναμικό προγραμματισμό, είναι αρκετά διαφορετική από τις λύσεις των προηγουμένων προβλημάτων. Η διαφορά οφείλεται κυρίως στο ότι υπάρχει αβεβαιότητα ως προς το πως θα εξελιχθεί το περιβάλλον (δηλ. Οι τιμές), και επομένως δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε από την αρχή το πότε θα γίνει η αγορά. Αντίθετα, κάθε μήνα μέχρι να γίνει η αγορά, ο υπεύθυνος θα παρατηρεί την τιμή της αγοράς και θα αποφασίζει κατά πόσον θα πρέπει να αγοράσει η όχι. Αυτή η σειρά αποφάσεων τις οποίες θα πάρει, η κάθε μία από τις οποίες εξαρτάται από την τρέχουσα τιμή και τον υπολειπόμενο χρόνο μέχρι τον ορίζοντα (Μάιο), αποκαλείται διαδικασία διαδοχικών αποφάσεων (sequential decision process).

Προφανώς, η κάθε απόφαση σε αυτή τη διαδικασία θα λαμβάνεται ως εξής: στην αρχή κάθε μήνα παρατηρούμε την τιμή αγοράς εκείνου του μήνα. Εάν η τιμή αυτή είναι χαμηλότερη από το "ελάχιστο αναμενόμενο κόστος σε περίπτωση αναμονής", τότε πραγματοποιούμε την αγορά. Διαφορετικά περιμένουμε μέχρι τον επόμενο μήνα. Τον τελευταίο μήνα, βέβαια, θα υποχρεωθούμε να αγοράσουμε στην τρέχουσα τιμή εκείνου του μήνα.

Για να χρησιμοποιήσουμε δυναμικό προγραμματισμό, πρέπει να ορίσουμε στάδια και καταστάσεις. Τα στάδια τον προβλήματος είναι οι 5 μήνες στους οποίους είναι δυνατόν να ληφθεί απόφαση αγοράς. (βέβαια, η απόφαση του Μαΐου είναι απλή εφόσον είμαστε υποχρεωμένοι να αγοράσουμε). Κατάσταση στο κάθε στάδιο είναι η τρέχουσα τιμή εκείνο το μήνα. Έστω φ_v (x) το ελάχιστο αναμενόμενο κόστος αγοράς εάν το τωρινό στάδιο είναι το νυοστό, και τρέχουσα τιμή είναι χ, και επίσης ρ_v (χ) η πιθανότητα η τιμή στο νυοστό στάδιο (μήνα) να είναι x (όπως δίδεται στον πίνακα 3.7.1).

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε την αναδρομική σχέση ως εξής:

$$j_n(x) = \min_y \left[x, \Sigma j_{n+1}(y) P_{n+1}(y) \right], n = 1,2,3,4,5$$

Η αναδρομική αυτή σχέση εκφράζει τον μηχανισμό απόφασης που εξηγήσαμε παραπάνω: το ελάχιστο αναμενόμενο κόστος αγοράς στο τωρινό στάδιο (v) και με την τωρινή τιμή (x) είναι το ελάχιστο μεταξύ δυο όρων: της τωρινής τιμής x (οπότε αποφασίζεται η αγορά), ή του αναμενόμενου ελάχιστου κόστους από τα επόμενα στάδια (οπότε αποφασίζεται να μη γίνει η αγορά αυτό το μήνα, και να επαναληφθεί η διαδικασία απόφασης τον επόμενο μήνα (v+1). Εφόσον η τιμή ψ του επόμενου μήνα είναι επί του παρόντος άγνωστη, υπολογίζουμε τη μέση τιμή του φ_{v+1} με το άθροισμα που φαίνεται στον δεύτερο όρο μέσα στις αγκύλες.

Για να λύσουμε την παραπάνω σχέση χρειαζόμαστε ακραίες συνθήκες οι οποίες είναι:

$$\varphi_5(x) = x$$

για κάθε τιμή χ, και σημαίνουν ότι ο υπεύθυνος θα πραγματοποιήσει την αγορά τον Μάιο σε οποιοδήποτε τρέχουσα τιμή. Επομένως,

Για ν=4:

$$j_4(x) = \min_y \left[x, \Sigma j_5(y) P_5(y) \right] = \min_y \left[x, \Sigma y \cdot P_5(y) \right] = \min\left[x, 271{,}50 \right]$$

Δηλαδή, εφόσον η μέση τιμή αγοράς τον Μάιο (εάν περιμένουμε μέχρι τότε) ισούται με 271.500 δρχ., έπεται ότι αυτή είναι και η "κρίσιμη" τιμή για τον Απρίλιο. Επομένως, εάν δεν έχει γίνει η αγορά μέχρι τέλη Μαρτίου, η αγορά θα πραγματοποιηθεί τον Απρίλιο εάν η τιμή του Απριλίου είναι ίση η μικρότερη από 270.000 δρχ.

Για ν=3:

$$\begin{aligned} j_3(x) &= \min\left[x, \Sigma j_4(y) P_4(y) \right] = \min[x, (250) \cdot P_4(250) + 260 \cdot P_4(260) + \\ &+ (270) \cdot P_4(270) + (271{,}50) \cdot P_4(y \geq 280)] = \min[x, 250 \cdot (0{,}10) + \\ &+ 260 \cdot (0{,}20) + 270 \cdot (0{,}40) + 271{,}50 \cdot (0{,}30)] = \min\left[x, 266{,}45 \right] \end{aligned}$$

Άρα η κρίσιμη τιμή τον Μάρτιο είναι 266.450 δρχ. και επομένως θα αγοράσουμε τον Μάρτιο εάν η τιμή του Μαρτίου είναι 260 χιλιάδες δρχ. ή λιγότερο. Σημειώστε ότι ο υπολογισμός του $\Sigma\varphi_4(\psi)P_4(\psi)$ έγινε ως εξής: από τα αποτελέσματα του ν=4 έχουμε ότι $\varphi_4(\chi)$ = min [χ, 271,50]. Επομένως, $\varphi_4(250)=250$, $\varphi_4(260)=260$, $\varphi_4(270)=270$, $\varphi_4(280)=271{,}50$ και $\varphi_4(290)=271{,}50$.

Για ν=2:

$$\begin{aligned} j_2(x) &= \min\left[x, \Sigma j_3(y) P_3(y) \right] = \min[x, (250) \cdot (0{,}05) + (260) \cdot (0{,}15) + \\ &+ (266{,}45) \cdot (0{,}80) = \min[x, 264{,}66] \end{aligned}$$

Άρα η κρίσιμη τιμή το Φεβρουάριο είναι 264.660 δρχ, και επομένως αγορά θα γίνει εάν η τιμή του Φεβρουαρίου είναι 260 χιλιάδες ή λιγότερο. Τέλος,

Για ν=1:

$$j_1(x) = \min\left[x, \Sigma j_2(y)P_2(y)\right] = \min[x, (250)\cdot(0{,}10) + (260)\cdot(0{,}20) +$$
$$+ (264{,}66)\cdot(0{,}70) = \min[x, 262{,}262]$$

Άρα η κρίσιμη τιμή τον Ιανουάριο είναι 262.262 δρχ. Και επομένως αγορά θα γίνει εάν η τιμή του Ιανουαρίου είναι 260 χιλιάδες δρχ. ή λιγότερο.

Επομένως, η άριστη στρατηγική αγοράς του μηχανήματος είναι ως εξής: το μηχάνημα να αγορασθεί τον Ιανουάριο, Φεβρουάριο η Μάρτιο εάν η τιμή σε οποιοδήποτε από αυτούς τους μήνες είναι 260 χιλιάδες δρχ. ή λιγότερο. Τον Απρίλιο, εάν η τιμή Απριλίου είναι 270 η λιγότερο, και τον Μάιο σε οποιαδήποτε τιμή. Εάν ακολουθηθεί αυτή η στρατηγική, η μέση τιμή αγοράς θα είναι 264,30 χιλιάδες δραχμές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{o}

4.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Εταιρεία θέλει να παράγει 9 μονάδες από ένα προϊόν τους μήνες Ιανουάριο, Φεβρουάριο και Μάρτιο. Η παραγωγή κάθε μήνα πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός μονάδων. Επί πλέον, πρέπει να ελαχιστοποιείται η συνάρτηση $w_1x_1^2 + w_2x_2^2 + w_3x_3^2$ όπου x_3, x_2, x_1 η παραγωγή τους μήνες Ιανουάριο, Φεβρουάριο και Μάρτιο αντίστοιχα. Οι παράμετροι w_3 , w_2 , w_1 είναι οι συντελεστές κόστους για τον αντίστοιχο μήνα. Δίνεται ότι w_1 =2, w_2 =3, w_3 =7.

Στάδια του προβλήματος ορίζονται οι τρεις μήνες.

Έτσι υπάρχουν τρία στάδια. Το πρώτο που αντιστοιχεί στο Μάρτιο, το δεύτερο που αντιστοιχεί στο Φεβρουάριο και το τρίτο που αντιστοιχεί στον Ιανουάριο.

Καταστάσεις (s) κάθε σταδίου είναι οι μονάδες του προϊόντος που πρέπει ακόμα να παραχθούν.

Έστω f_n (s) η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης στα επόμενα n στάδια, όταν η ποσότητα που πρέπει ακόμα να παραχθεί είναι s. Τότε:

$$f_n(s) = \min_{x_n=0,1,\ldots,s} \left\{ w_n x_n^2 + f_{n-1}(s - x_n) \right\} \qquad (4.4.1)$$

Η αναπαράσταση του προβλήματος σε στάδια, και οι πιθανές καταστάσεις σε κάθε στάδιο δίνονται στο διάγραμμα 4.1. Έστω ότι b_n (s) είναι η βέλτιστη απόφαση στο στάδιο n και κατάσταση s.

	0	0	
	1	1	
	2	2	
	3	3	
	4	4	
9	5	5	0
	6	6	
	7	7	
	8	8	
	9	9	
Στάδιο 3	Στάδιο 2	Στάδιο 1	

Διάγραμμα 4.1

Στη συνέχεια θα γίνει υπολογισμός της αναδρομικής συνάρτησης για τις διάφορες τιμές του η.

Για n= 1

$f_1(s) = w_1 s^2 = 2s^2$

$f_1(0) = 0,$ $b_1(0) = 0$

$f_1(1) = 2,$ $b_1(1) = 1$

$f_1(2) = 8,$ $b_1(2) = 2$

$f_1(3) = 18,$ $b_1(3) = 3$

$f_1(4) = 32,$ $b_1(4) = 4$

$f_1(5) = 50,$ $b_1(5) = 5$

$f_1(6) = 72,$ $b_1(6) = 6$

$f_1(7) = 98,$ $b_1(7) = 7$

$f_1(8) = 128,$ $b_1(8) = 8$

$f_1(9) = 162,$ $b_1(9) = 9$

Για n=2

$$f_2(s)=\min_{x_2=0,1,2,\dots,s}\left\{3x_2^2+f_1(s-x_2)\right\}$$

$$f_2(0)=(3)(0)+f_1(0)=0,\quad b_2(0)=0$$

$$f_2(1)=\min_{x_2=0,1}\left\{3x_2^2+f_1(1-x_2)\right\}=$$

$$=\min\left\{f_1(1),3+f_1(0)\right\}=\min\{2,3\}=2,\qquad b_2(1)=0$$

$$f_2(2)=\min_{x_2=0,1,2}\left\{3x_2^2+f_1(2-x_2)\right\}$$

$$=\min\left\{f_1(2),3+f_1(1),12+f_1(0)\right\}$$

$$=\min\{8,5,12\}=5,\quad b_2(2)=1$$

$$f_2(3)=\min_{x_2=0,1,2,3}\left\{3x_2^2+f_1(3-x_2)\right\}$$

$$=\min\left\{f_1(3),3+f_1(2),12+f_1(1),27+f_1(0)\right\}$$

$$=\min\{18,11,14,27\}=11,\quad b_2(3)=1$$

$$f_2(4)=\min_{x_2=0,1,2,3,4}\left\{3x_2^2+f_1(4-x_2)\right\}$$

$$=\min\left\{f_1(4),3+f_1(3),12+f_1(2),27+f_1(1),48+f_1(0)\right\}$$

$$=\min\{32,21,20,29,48\}=20,\quad b_2(4)=2$$

$$f_2(5)=\min_{x_2=0,1,2,3,4,5}\left\{3x_2^2+f_1(5-x_2)\right\}$$

$$=\min\left\{f_1(5),3+f_1(4),12+f_1(3),27+f_1(2),48+f_1(1)+75+f_1(0)\right\}$$

$$=\min\{50,35,30,35,50,75\}=30,\quad b_2(5)=2$$

$$f_2(6)=\min\{72,53,44,59,56,77,108\}=44,\quad b_2(6)=2$$

$$f_2(7)=\min\{98,75,62,59,66,83,110,147\}=59,\qquad b_2(7)=3$$

$$f_2(8)=\min\{128,101,84,77,80,93,116,149,192\}=77,\qquad b_2(8)=3$$

$$f_2(9)=\min\{162,131,110,99,98,107,126,155,194,243\}=98,\quad b_2(9)=4$$

Για n=3

$$f_3(s)=\min_{x_2=0,1,2,\ldots,s}\left\{7x_3^2+f_2(s-x_3)\right\}$$

Αλλά στο τρίτο στάδιο η μόνη πιθανή κατάσταση είναι s=9, έτσι:

$$f_3(9)=\min_{x_2=0,1,2,\ldots,9}\left\{7x_3^2+f_2(9-x_3)\right\}=$$

$$=\min\{f_2(9),7+f_2(8),28+f_2(7),63+f_2(6),$$

$$112+f_2(5),175+f_2(4),252+f_2(3),$$

$$343+f_2(2),448+f_2(1),567+f_2(0)\}$$

$$=\min\{98,7+77,28+59,63+44,112+30,175+20,$$

$$252+11,343+5,448+2,567+0\}=$$

$$=\min\{98,84,87,107,142,195,263,348,450,567\}=84,$$

$$b_3(9)=1$$

Συνεπώς η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι 84 και επιτυγχάνεται για $x_3=1,\quad x_2=3,\quad$ και $\quad x_1=5.$

4.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΙΑΦΗΜΙΣΤΙΚΩΝ ΔΑΠΑΝΩΝ

Το τμήμα μάρκετινγκ μιας επιχείρησης πρόκειται να διεξαγάγει μια διαφημιστική εκστρατεία για ένα νέο προϊόν της. Για τον σκοπό αυτό έχει αποφασίσει να δαπανήσει κατά την προσεχή περίοδο προγραμματισμού το ποσό των 6 εκατομμυρίων δραχμών. Η διαφήμιση θα γίνει σε τρία διαφημιστικά μέσα, σε καθένα από τα οποία αντιστοιχεί διαφορετική διείσδυση του προϊόντος στην αγορά για συγκεκριμένο ποσό διαφημιστικής δαπάνης.

Στον πίνακα 4Α δίνονται οι πιθανότητες της προσδοκώμενης διείσδυσης του προϊόντος στην αγορά για κάθε διαφημιστικό μέσο και για διάφορα χρηματικά ποσά, τα οποία θα πρέπει να δαπανώνται σε ακέραια πολλαπλάσια του ενός εκατομμυρίου δραχμών. Αντικειμενικός σκοπός του τμήματος μάρκετινγκ είναι να γίνει η κατανομή των 6 εκατομμυρίων δραχμών στα τρία διαφημιστικά μέσα κατά τρόπο ώστε να μεγιστοποιηθεί η προσδοκώμενη διείσδυση του προϊόντος στην αγορά για ολόκληρη τη διαφημιστική εκστρατεία.

Πίνακας 4Α

Προσδοκώμενη διείσδυση προϊόντος (πιθανότητα)

Διαφημιστικές Δαπάνες (σε εκατ. Δρχ.)	**Προσδοκώμενη διείσδυση**		
	Διαφημιστικό μέσο		
	1	2	3
0	0	0	0
1	0,1	0,3	0,4
2	0,2	0,4	0,5
3	0,3	0,5	0,6
4	0,4	0,6	0,7
5	0,5	0,7	0,8
6	0,6	0,8	0,9

Για να διαμορφωθεί το πρόβλημα αυτό ως πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού είναι ανάγκη να προσδιοριστούν πρώτα τα στάδια και οι καταστάσεις της πολυσταδιακής διαδικασίας. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, θα πρέπει να παρθούν τρεις αλληλοσυνδεόμενες αποφάσεις, οι οποίες αφορούν τα χρηματικά ποσά που θα δαπανηθούν στα τρία διαφημιστικά μέσα. Έτσι, μπορούν να θεωρηθούν τα τρία διαφημιστικά μέσα ως τα τρία στάδια του προβλήματος και να οριστούν ως μεταβλητές απόφασης x_n (n = 1, 2, 3) το χρηματικό ποσό που θα κατανεμηθεί στο μέσο n και ως καταστάσεις, s_n, το χρηματικό ποσό που είναι διαθέσιμο για κατανομή στο στάδιο n. Τέλος, ορίζεται ως $p_j\ (x_j\ )$ την προσδοκώμενη διείσδυση του προϊόντος στην αγορά λόγω κατανομής $x_{j;}$ χρηματικών μονάδων στο μέσο j.

Όπως προαναφέραμε, αντικειμενικός σκοπός είναι η επιλογή των χ_1 ,χ_2, χ_3 κατά τρόπο ώστε να μεγιστοποιηθεί η προσδοκώμενη διείσδυση του προϊόντος στην αγορά για ολόκληρη τη διαφημιστική εκστρατεία, λαμβάνοντας φυσικά υπόψη τους περιορισμούς του προβλήματος. Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος είναι το γινόμενο των προσδοκώμενων διεισδύσεων που αντιστοιχούν στα τρία μέσα, δηλαδή

$$\max \prod_{j=1}^{3} p_j x_j \cdot p_2 x_2 \cdot p_3 x_3$$

Με περιορισμούς

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 6$$

$x_j \geq 0$ και ακέραιοι.

Η $f_n(s_n, x_n) = p_n(x_n) \cdot \max \prod_{j=n+1}^{3} p_j x_j$

Με $\sum_{j=n}^{3} x_j = s_n$

Και $x_j \geq 0$ και ακέραιοι, για n=1,2,3.

Επειδή όμως είναι

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n \leq s_n} f_n(s_n, x_n)$$

Έχουμε

$$f_n(s_n, x_n) = p_n(x_n) \cdot f_{n+1}^*(s_n - x_n)$$

Με $f_4^* = 1$.άρα, η αναδρομική σχέση του προβλήματος μας που συνδέει τα f_1^*, f_2^* και f_3^* είναι

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n \leq s_n} \left\{ p_n(x_n) \cdot f_{n+1}^*(s_n - x_n) \right\},$$ για n=1, 2, 3

Για την επίλυση του προβλήματος αρχίστε με το πρόβλημα του ενός σταδίου $(n = 3)$ χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση

$$f_3^*(s_3) = \max_{x_3 \leq s_3} p_3(x_3)$$

Η οποία προκύπτει από την προηγουμένη για $f^*_4=1$. Στο πρόβλημα του ενός σταδίου, το χρηματικό ποσό που μπορεί να είναι διαθέσιμο για το μέσο 3 είναι $s_3= 0,1,2,..., 6$. Από τον πίνακα 4Β του ενός σταδίου (n=3) βλέπετε ότι το ποσό που είναι διαθέσιμο για το μέσο 3 χρησιμοποιείται για τη διαφήμιση σε αυτό. Έτσι, αν στο στάδιο αυτό δεν έχετε στη διάθεσή σας κανένα χρηματικό ποσό, $s_3 = 0$, που σημαίνει ότι τα 6 εκατομμύρια δραχμές τα εκχωρείτε στο μέσο 1 και 2, θα κατανείμετε στο μέσο 3 ποσό ίσο με $\chi_3 =0$. Αν έχετε στη διάθεσή σας 1 εκατομμύριο δραχμές, $s_3=1$, δηλαδή τα υπόλοιπα 5 εκατομμύρια δραχμές τα εκχωρείτε στα μέσα 1 και 2, τότε θα εκχωρήσετε το ποσό αυτό στο μέσο 3, οπότε θα είναι $\chi_3 = 1$ κ.ο.κ.

Πίνακας 4Β

Λύση προβλήματος ενός σταδίου (n = 3)

X_3 / S_3	$F_3(s_3,x_3)=p_3(x_3)$							$F_3(s_3)$	X_3
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**		
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0
1	-	0,4	-	-	-	-	-	0,4	1
2	-	-	0,5	-	-	-	-	0,5	2
3	-	-	-	0,6	-	-	-	0,6	3
4	-	-	-	-	0,7	-	-	0,7	4
5	-	-	-	-	-	0,8	-	0,8	5
6	-	-	-	-	-	-	0,9	0,9	6

Συνεχίστε τώρα τη διαδικασία επίλυσης πηγαίνοντας ένα στάδιο προς τα πίσω για να εξετάσετε το πρόβλημα των δυο σταδίων (n = 2), όταν δηλαδή η επιχείρηση χρησιμοποιεί το χρηματικό ποσό που έχει στο στάδιο αυτό για τα μέσα 2 και 3. Η αναδρομική σχέση του σταδίου είναι

$$f_2^*(s_2) = \max_{x_2 \le s_2}\left\{p_2(x_2)\cdot f_3^*(s_2 - x_2)\right\}$$

όπου (s_2 – x_2) το χρηματικό ποσό που στο στάδιο αυτό κατανέμεται στο διαφημιστικό μέσο 3. Τα αποτελέσματα δίνονται στο πίνακα 4Γ των δυο σταδίων (n=2). Από τον πίνακα αυτό είναι φανερό ότι εάν δεν έχετε στη διάθεσή σας κάποιο χρηματικό ποσό, $s_2 = 0$, που σημαίνει ότι εκχωρείτε τα 6 εκατομμύρια στο μέσο 1, η προσδοκώμενη διείσδυση για το στάδιο n=2 είναι f_2*(0)=0 και το ποσό που κατανέμετε στο μέσο 2 είναι χ_2= 0. Αν στο στάδιο αυτό έχετε στη διάθεση σας 1 εκατομμύριο δραχμές, $s_2 = 1$, το ποσό αυτό μπορείτε είτε να το εκχωρήσετε στο μέσο 3 και όχι στο μέσο 2, δηλαδή χ_2= 0 και χ_3= 1, είτε να το εκχωρήσετε στο μέσο 2 και όχι στο μέσο 3, δηλαδή χ_2= 1 και χ_3=0. Αν το εκχωρήσετε στο μέσο 3 (του σταδίου η=3), η προσδοκώμενη διείσδυση είναι $f_2(1, 0) = 0{\cdot}0{,}4 = 0$, ενώ αν το εκχωρήσετε στο μέσο 2, η προσδοκώμενη διείσδυση είναι $f_2(1,1) = 0{,}3 \cdot 0 = 0$. Άρα για s_2= 1 η μέγιστη προσδοκώμενη διείσδυση είναι $f_2(s_2) = 0$ και $x_2 = 0$ ή 1. Αν τώρα έχετε στη διάθεσή σας στο στάδιο αυτό 2 εκατομμύρια δραχμές, s_2= 2, οι εναλλακτικές σας λύσεις είναι οι ακόλουθες τρεις: να δώσετε το ποσό αυτό στο μέσο 3 και όχι στο μέσο 2, δηλαδή χ_2= 0 και χ_3= 2, με προσδοκώμενη διείσδυση $f_2(2,0) = 0{\cdot}0{,}5 = 0$ να δώσετε από ένα εκατομμύριο στα μέσα 2 και 3, δηλαδή χ_2= 1 και χ_3= 1, με προσδοκώμενη διείσδυση $/_2(2,1) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$· να δώσετε το ποσό αυτό στο μέσο 2 και καθόλου στο μέσο 3, δηλαδή $\chi_т$ 2 καιχ_3⁼ 0, με προσδοκώμενη διείσδυση $f_2(2, 1) = 0{,}3{\cdot}0{,}4 = 0{,}12$. Να δώσετε το ποσό αυτό στο μέσο 2 και καθόλου στο μέσο 3, δηλαδή $\chi_2 = 2$ και $\chi_3 = 0$ με προσδοκώμενη διείσδυση $f_2(2,2)=0{,}4{\cdot}0=0$. Επομένως για $s_2 = 2$ η μέγιστη προσδοκώμενη διείσδυση είναι f_2 (s_2) =0,12 και x_2= 1. Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να εργαστεί κάποιος και για τις υπόλοιπες τιμές του s_2 του πίνακα 4Γ.

Πίνακας 4Γ

Λύση προβλήματος δύο σταδίων (n = 2)

x_2 / s_2	$F_2(s_2,x_2) = p_2(x_2) \cdot f_3^*(s_2 - x_2)$							$F_2^*(s_2)$	x_2^*
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**		
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0
1	0·0,4=0	0,3·0=0	-	-	-	-	-	0	0ή1
2	0·0,5=0	0,3·0,4=0,12	0,4·0=0	-	-	-	-	0,12	1
3	0·0,6=0	0,3·0,5=0,15	0,4·0,4=0,16	0,5·0=0	-	-	-	0,16	2
4	0·0,7=0	0,3·0,6=0,18	0,4·0,5=0,20	0,5·0,4=0,20	0,6·0=0	-	-	0,20	2ή3
5	0·0,8=0	0,3·0,7=0,21	0,4·0,6=0,24	0,5·0,5=0,25	0,6·0,4=0,24	0,70=0	-	0,25	3
6	0·0,9=0	0,3·0,8=0,24	0,4·0,7=0,28	0,5·0,6=0,30	0,6·0,5=0,30	0,70,4=0,28	0,80=0	0,30	3

Για το πρόβλημα των τριών (σταδίων (n=1) η αναδρομική σχέση είναι,

$$f_1^*(s_1) = \max_{x_1 \le s_1} \left\{ p_1(x_1) \cdot f_2^*(s_1 - x_1) \right\}$$

Όπου (s_1-x_1) είναι το ποσό που στο στάδιο αυτό κατανέμεται στα διαφημιστικά μέσα 2 και 3.

Πίνακας 4Δ

Λύση προβλήματος τριών σταδίων (n = 1)

x_1 / s_1	$F_1(s_1,x_1) = p_1(x_1) \cdot f_2^*(s_1-x_1)$							$F_1^*(s_2)$	x_1^*
	0	1	2	3	4	5	6		
6	0	0,1·0,25 =0,025	0,2·0,20 =0,24	0,30·0,16 =0,048	0,4·0,12 =0,048	0,5·0 =0	0,60 =0	0,048	3ή4

Η λύση του προβλήματος των τριών σταδίων (n =1), που είναι και η λύση ολόκληρου του προβλήματος, δίνεται στον πίνακα 4Δ, από τον οποίο προκύπτει ότι έχουμε περισσότερες από μία άριστες λύσεις. Η μία άριστη λύση έχει $\chi^*_1 = 3$, που στο πρόβλημα των δύο σταδίων για s_2 = 6-3 = 3 δίνει

χ^*_2 και στο πρόβλημα του ενός σταδίου για s_3 = 3-2 = 1 δίνει χ^*_3 = 1 με μέγιστη προσδοκώμενη διείσδυση στην αγορά f^*_1=0,048. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι η άλλη εναλλακτική λύση είναι χ^*_1 =4χ^*_2 =1 και x^*_3 = 1

Το παράδειγμα αυτό είναι παρόμοιο με το παράδειγμα 1. Η κύρια διαφορά είναι ότι ο αντικειμενικός σκοπός του παρόντος παραδείγματος αναφέρεται στη μεγιστοποίηση του γινομένου των πιθανοτήτων των αντίστοιχων σταδίων. Επίσης, αν και χρησιμοποιούνται πιθανότητες, το παράδειγμα αυτό δεν θεωρείται στοχαστικό πρόβλημα του δυναμικού προγραμματισμού αλλά προσδιοριστικό, επειδή οι καταστάσεις του επόμενου σταδίου προσδιορίζονται πλήρως από τις καταστάσεις και τις αποφάσεις του τρέχοντος σταδίου.

4.3. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΦΟΡΤΩΣΕΩΣ

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα της φορτώσεως ενός φορτηγού πλοίου ωφέλιμου φορτίου w με n διαφορετικά προϊόντα, κατά τρόπο που να προκύπτει το μέγιστο δυνατό κέρδος από την μεταφορά των προϊόντων αυτών. Έστω w_i το βάρος και v_i η αξία του i προϊόντος, i = 1,…n. Αν x_i είναι ο αριθμός των μεταφερόμενων τεμαχίων εκ του προϊόντος i, το προς επίλυση πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως ακολούθως:

$$\max \quad \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$

Υπό τις συνθήκες $$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le w$$

x_i μη αρνητικός ακέραιος , i= 1, …, n

Ας παρατηρήσουμε κατ' αρχήν, ότι αν τα x_i δεν περιορίζονται στο σύνολο των φυσικών αριθμών, τότε η λύση του προβλήματος θα ήταν πολύ εύκολο να προσδιορισθεί χρησιμοποιώντας την μέθοδο simplex. Στην συγκεκριμένη μάλιστα περίπτωση πού υπάρχει μία μόνον συνθήκη, σύμφωνα με την θεωρία του γραμμικού προγραμματισμού, μία και μόνον μεταβλητή θα υπεισέλθει στην λύση και το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό του προϊόντος i για το όποιο η παράσταση $v_i w / w_i$ είναι μέγιστη. Ας σημειωθεί ακόμα, ότι το ανωτέρω πρόβλημα τυπικό του είδους των προβλημάτων πού μπορούν να επιλυθούν δια του ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού.

Ας εξετάσουμε όμως τώρα, πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε ζητούμενη βέλτιστη λύση χρησιμοποιώντας την τεχνική του δυναμικού προγραμματισμού. Η απαιτούμενη προς τούτο αναδρομική σχέση λαμβάνει τώρα την μορφή

$$Fk\left(b_k\right) = \underset{x_k}{\max imum} \left\{v_k x_k + F_{k-1}\left(b_k - w_k x_k\right)\right\}$$

Όπου x_k ακέραιος τέτοιος ώστε

$$0 \le x_k \le \left[b_k / w_k\right]$$

Και b_k η κατάσταση του συστήματος κατά το k βήμα της διαδικασίας, δηλαδή το διατιθέμενο ωφέλιμο φορτίο για τα βήματα (προϊόντα)από 1 και k. Χρησιμοποιώντας την αναδρομική αυτή σχέση και τα επόμενα δεδομένα:

K	W_k	V_k
1	5	4
2	8	10
3	3	6

w=10

καταρτίζουμε κατά τα γνωστά τον πίνακα.

<u>Βήμα1</u>

$$F1\left(b_1\right) = \underset{x_1}{\max imum}\left\{v_1 x_1\right\} = \underset{x_k}{\max imum}\left\{4x_1\right\}$$

$$x_1 = 0,1,\ldots,\left[\frac{b_1}{5}\right],\ b_1 = 0,1,\ldots,10$$

$b_1 = 0,\ \ x_1 = 0\ ,\ F_1(0) = 0,\ \ \hat{x}_1(0) = 0\ b_1 = 1,\ x_1 = 0\ ,\ F_1(1) = 0,\ \ \hat{x}_1(1) = 0$

$b_1 = 2,\ \ x_1 = 0\ ,\ F_1(2) = 0,\ \ \hat{x}_1(2) = 0\ b_1 = 3,\ x_1 = 0\ ,\ F_1(3) = 0,\ \ \hat{x}_1(3) = 0$

$b_1 = 4,\ \ x_1 = 0\ ,\ F_1(4) = 0,\ \ \hat{x}_1(2) = 0\ b_1 = 5,\ x_1 = 0\ ,\ F_1(5) = \max\{0,4\} = 4,\ \ \hat{x}_1\ (5) = 1$

$b_1 = 6,\ \ x_1 = 0\ ,1\ \ F_1(6) = \max\{0,4\} = 4,\ \ \hat{x}_1(6) = 1$

$b_1 = 7,\ \ x_1 = 0\ ,1\ \ F_1(7) = \max\{0,4\} = 4,\ \ \hat{x}_1(7) = 1$

$b_1 = 8,\ \ x_1 = 0\ ,1\ \ F_1(8) = \max\{0,4\} = 4,\ \ \hat{x}_1\ (8) = 1$

$b_1 = 9,\ \ x_1 = 0\ ,1\ \ F_1(9) = \max\{0,4\} = 4,\ \ \hat{x}_1(9) = 1$

$b_1 = 10\ \ x_1 = 0\ ,1,\ 2\ \ F_1(10) = \max\{0,4,8\} = 4,\ \ \hat{x}_1(10) = 2$

<u>Βήμα 2</u>

$$F_2\ (b_2) = \max_{x_2}\{v_2 x_2 + F_1(b_2 - w_2 x_2)\} = \max_{x_2}\{10x_2 + F_1\ (b_2 - 8x_2)\}$$

$$x_2 = 0,1...,\left[\frac{b_2}{8}\right], b_2 = 0,1,...,10$$

$b_2 = 0, c_2 = 0, F_2\ (0) = 0 + F_1\ (0) = 0, \hat{x}_2(0) = 0$

$b_2 = 1, c_2 = 0, F_2\ (1) = 0 + F_1\ (0) = 0, \hat{x}_2(1) = 0$

$b_2 = 2, c_2 = 0, F_2\ (2) = 0 + F_1\ (0) = 0, \hat{x}_2(2) = 0$

$b_2 = 3, c_2 = 0, F_2\ (3) = 0 + F_1\ (0) = 0, \hat{x}_2(3) = 0$

$b_2 = 4, c_2 = 0, F_2\ (4) = 0 + F_1\ (0) = 0, \hat{x}_2(4) = 0$

$b_2 = 5, c_2 = 0, F_2\ (5) = 0 + F_1\ (0) = 0, \hat{x}_2(5) = 0$

$b_2 = 6, c_2 = 0, F_2\ (6) = 0 + F_1\ (0) = 0, \hat{x}_2(6) = 0$

$b_2 = 7, c_2 = 0, F_2\ (7) = 0 + F_1\ (0) = 0, \hat{x}_2(7) = 0$

$b_2 = 8, c_2 = 0,1 F_2\ (8) = \max\left\{0 + F_1\ (8) = 4, 10 + F_1\left(0\right) = 10\right\} = 10, \hat{x}_2\ (8) = 1$

$b_2 = 9, c_2 = 0,1 F_2\ (9) = \max\left\{0 + F_1\left(9\right) = 4, 10 + F_1\left(1\right) = 10\right\} = 10, \hat{x}_2\left(9\right) = 1$

$b_2 = 10, c_2 = 0,1 F_2\ (10) = \max\left\{0 + F_1\ (10) = 8, 10 + F_1\left(2\right) = 10\right\} = 10, \hat{x}_2(10) = 1$

Βήμα 3

$$F_3\left(b_3\right)=\max_{x_3} imum\left\{v_3x_3+F_2\left(b_3-w_3x_3\right)\right\}=\max_{x_3} imum\left\{6x_3+F_2\left(b_3-3x_3\right)\right\}$$

$$x_3=0,1,\ldots,\left[\frac{b_3}{3}\right],b_3=0,1,\ldots,10$$

$$b_3=0,x_3=0,F_3\left(0\right)=0+F_2\left(0\right)=0,\hat{x}_3\left(0\right)=0$$

$$b_3=1,x_3=0,F_3\left(1\right)=0+F_2\left(1\right)=0,\hat{x}_3\left(1\right)=0$$

$$b_3=2,x_3=0,F_3\left(2\right)=0+F_2\left(2\right)=0,\hat{x}_3\left(2\right)=0$$

$$b_3=3,x_3=0,1,F_3\left(3\right)=\max\left\{0+F_2\left(3\right)=0,6+F_2\left(0\right)=6\right\}=6,\hat{x}_3\left(3\right)=1$$

$$b_3=4,x_3=0,1,F_3\left(4\right)=\max\left\{0+F_2\left(4\right)=0,6+F_2\left(1\right)=6\right\}=6,\hat{x}_3\left(4\right)=1$$

$$b_3=5,x_3=0,1,F_3\left(5\right)=\max\left\{0+F_2\left(5\right)=0,6+F_2\left(2\right)=6\right\}=6,\hat{x}_3\left(5\right)=1$$

$$b_3=6,x_3=0,1,2,F_3\left(6\right)=\max\left\{0+F_2\left(6\right)=4,6+F_2\left(3\right)=6,12F_2\left(0\right)=12\right\}=12,\hat{x}_3\left(6\right)=2$$

$$b_3=7,x_3=0,1,2,F_3\left(7\right)=\max\left\{0+F_2\left(7\right)=4,6+F_2\left(4\right)=6,12F_2\left(1\right)=12\right\}=12,\hat{x}_3\left(7\right)=2$$

$$b_3=8,x_3=0,1,2,F_3\left(8\right)=\max\left\{0+F_2\left(8\right)=10,6+F_2\left(5\right)=10,12F_2\left(2\right)=12\right\}=12,\hat{x}_3\left(8\right)=2$$

$$b_3=9,x_3=0,1,2,3,F_3\left(9\right)=\max\left\{0+F_2\left(9\right)=10,6+F_2\left(6\right)=10,12F_2\left(3\right)=12,18+F_2\left(0\right)=18\right\}$$

$$=18,\hat{x}_3\left(9\right)=3$$

$$b_3=10,x_3=0,1,2,3,F_3\left(10\right)=\max\left\{0+F_2\left(10\right)=10,6+F_2\left(7\right)=10,12F_2\left(4\right)=12,18+F_2\left(1\right)=18\right\}$$

$$=18,\hat{x}_3\left(10\right)=3$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τα στοιχεία του πίνακα 4.Ε βρίσκουμε

$$x_3^*=\hat{x}_3\left(b\right)=\hat{x}_3\left(10\right)=3$$

Συνεπώς,

$$b_2^*=b_3^*-w_3x_3^*=10-\left(3\right)\left(3\right)=1$$

Και

$$x_2^*=\hat{x}_2\left(b\right)=\hat{x}_2\left(1\right)=0$$

Άρα,

$$b_1^* = b_2^* - w_2 x_2^* = 1 - (8)(0) = 1$$

Και

$$x_1^* = \hat{x}_1(1) = 0$$

Πίνακας 4.Ε

K ®	1		2		3	
B_k	**$F_1(\beta_1)$**	**$\hat{x}_1(\beta_1)$**	**$F_2(\beta_2)$**	**$\hat{x}_2(\beta_2)$**	**$F_3(\beta_3)$**	**$\hat{x}_3(\beta_3)$**
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	6	1
4	0	0	0	0	6	1
5	4	1	4	0	6	1
6	4	1	4	0	12	2
7	4	1	4	0	12	2
8	4	1	10	1	12	2
9	4	1	10	1	18	3
10	8	2	10	1	18	3

Έτσι η βέλτιστη λύση του δοθέντος προβλήματος είναι η
$X^*_1 = 0$, $x^*_2 = 0$, $x^*_3 = 3$,

Το δε μέγιστο κέρδος είναι ίσο με

$F^* = f_3(10) = 18$

Η αναδρομική σχέση (3.24) υποδεικνύει στην πραγματικότητα τον τρόπο με τον οποίο το αρχικό πρόβλημα των n αποφάσεων μπορεί να αντικατασταθεί από μια ακολουθία n προβλημάτων μιας αποφάσεως. Ας σημειωθεί όμως, ότι η αντικατάσταση αυτή δεν είναι απαραίτητο να γίνεται πάντα κατά τρόπο προσθετικό. Αυτό συμβαίνει μόνο στην περίπτωση που η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος είναι της προσθετικής μορφής

(3.6). Υπάρχουν όμως και προβλήματα, των οποίων η αντικειμενική συνάρτηση είναι παραγοντικής και όχι προσθετικής μορφής.

Σαν παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ένα σύστημα αποτελούμενο από n κρίσιμα στοιχεία. Σε περίπτωση αστοχίας οποιουδήποτε εξ αυτών το όλο σύστημα αστοχεί. Τα στοιχεία υποτίθεται στοχαστικά ανεξάρτητα, έστω δε p_j η πιθανότητα αστοχίας του j στοιχείου κατά την διάρκεια ζωής τ του συστήματος, j=1,...,n. Προκειμένου να εξασφαλίσουμε την ομαλή λειτουργία του συστήματος, διατηρούμε ένα απόθεμα x_j, μονάδων εκ του στοιχείου j, j=1,...,n, πράγμα πού αυξάνει το κόστος του συστήματος κατά ένα ποσόν g_j,($x_{j,}$) όπου g_j (0) =0. Υποθέτουμε ακόμα, ότι η πιθανότητα αστοχίας του j στοιχείου είναι σταθερή και ίση με p_j., ανεξάρτητα από το αν το στοιχείο αυτό ήταν αρχικά στο σύστημα ή προέρχεται εκ των αποθεμάτων.

Προφανώς, η πιθανότητα να αστοχήσουν και τα χ_j+1 στοιχεία τύπου j είναι

$$\bar{f}_j\left(x_j\right)=P_j^{x_{j+1}} \tag{4.1}$$

Κατά συνέπεια, η πιθανότητα να υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο τύπου j σε λειτουργία καθ' όλη την διάρκεια ζωής τ του συστήματος παρέχεται από την διαφορά:

$$f_j\left(x_j\right)=1-P_j^{x_{j+1}} \tag{4.2}$$

Έτσι η πιθανότητα συνεχούς λειτουργίας του συστήματος είναι το γινόμενο:

$$f_j\left(x_j\right)=\prod_{j=1}^{n}\left(1-P_j^{x_j+1}\right) \tag{4.3}$$

Παρατηρούμε ότι, αν από κάθε στοιχείο διατίθεται ένας απεριόριστος αριθμός μονάδων, τότε η πιθανότητα f λειτουργίας του συστήματος θα μπορούσε να πλησιάσει οσονδήποτε κοντά στην μονάδα, αφού $0\le P_j<1$ και, συνεπώς,

$$\lim_{x_j \to \infty} P_j^{x_j+1} = 0 \tag{4.4}$$

Προκειμένου όμως η λειτουργία του συστήματος να είναι οικονομικά εφικτή η πρόσθετη δαπάνη εκ της διατηρήσεως των αποθεμάτων ευρέθη ότι δεν πρέπει να υπερβαίνει το ποσόν των b (δραχμών), δηλαδή πρέπει να είναι

$$\sum_{j=1}^{n} g_j\left(x_j\right) \leq b \tag{4.5}$$

Ζητείται ο προσδιορισμός των αποθεμάτων πού μεγιστοποιούν την πιθανότητα λειτουργίας(αξιοπιστία) (4.3) του συστήματος υπό την συνθήκη οικονομικής εφικτότητας (4.5).

Η τεχνική του δυναμικού προγραμματισμού για την επίλυση του ανωτέρω προβλήματος οδηγεί στην ανάπτυξη μιας αναδρομικής σχέσεως, η οποία τώρα έχει μορφή γινομένου και όχι αθροίσματος. Έστω, λοιπόν f_n (β_n) το μέγιστο της αντικειμενικής συναρτήσεως (4.3) υπό την γενικότερη συνθήκη

$$\sum_{j=1}^{n} g_j(x_j) \leq b_n \leq b \tag{4.6}$$

Τότε ,

$$F_n(b_n) = \max_{x_1,\ldots,x_n} \{ f_n(x_n) \underset{j=1}{\overset{n-1}{p}} f_j(x_j) \}$$

$$= f_n \left\{ \hat{x}_n(b_n) \right\} \max_{x_1,\ldots x_{n-1}} \left\{ \underset{j=1}{\overset{n-1}{p}} f_j(x_j) \right\}$$

$$= \max_{x_n} \left\{ f_n(x_n) F_{n-1}(b_{n-1}) \right\} \tag{4.7}$$

Όπου $\hat{x}_n(b_n)$ η βέλτιστη τιμή του x_n δοθέντος του b_n,

$$b_{n-1} = b_n - g_n(x_n) \tag{4.8}$$

Και

$$F_{n-1}(b_{n-1}) = \max_{x_1,..,x_{n-1}} \left\{ \mathop{p}_{j=1}^{n-1} f_j\,(x_j) \right\} \quad (4.9)$$

Υπό την συνθήκη

$$\sum_{j=1}^{n-1} g_j(x_j) \le b_{n-1} \quad (4.10)$$

Ακολουθώντας τώρα , το ίδιο σκεπτικό όπως και προηγουμένως, προκύπτει η επόμενη αναδρομική σχέση :

$$F_k\,(b_k) = \max_{x_k}\{ f_k\,(x_k) F_{k-1}\{b_k - g_k(x_k)\}\}, 0 \le g_k(x_k) \le b_k \le b \quad (4.11)$$

Για k= 1, 2,… ,n και με την παραδοχή ότι $F_0\left(b_0\right)=1$. Ο μηχανισμός επιλύσεως είναι ο ίδιος με εκείνον της προσθετικής αναδρομικής σχέσεως (3.24) .

4.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Περισσότερο φιλοσοφία παρά μεθοδολογία, ο δυναμικός προγραμματισμός είναι μια μαθηματική τεχνική αντιμετώπισης προβλημάτων που χαρακτηρίζονται από διαδοχικές και αλληλοεξαρτώμενες αποφάσεις. Στόχος του δυναμικού προγραμματισμού είναι ο προσδιορισμός του συνδυασμού των αποφάσεων που μεγιστοποιεί το συνολικό αποτέλεσμα.

Στο δυναμικό προγραμματισμό δεν υπάρχει κάποιο συγκεκριμένο υπόδειγμα βάσει του οποίου λύνουμε οποιοδήποτε πρόβλημα. Είναι ένα γενικό πρότυπο προσέγγισης επίλυσης προβλημάτων και ανάλογα κάθε φορά προσαρμόζονται οι συγκεκριμένες εξισώσεις που χρησιμοποιούνται. Αυτό όπως εύκολα καταλαβαίνει κανείς είναι μεγάλο μειονέκτημα του δυναμικού προγραμματισμού. Λόγω της ειδικής σχεδίασης που απαιτεί κάθε φορά στην αντιμετώπιση κάθε προβλήματος απαιτεί υψηλό επίπεδο γνώσεων και εμπειρίας από τον χειριστή. Αυτό όμως είναι ταυτόχρονα το μεγάλο πλεονέκτημά του, η ικανότητά του δηλαδή να προσομοιώνει προβλήματα με πολύπλοκη διάταξη. Και το κυριότερο χρειάζεται προσοχή και διορατικότητα στην επιλογή των προβλημάτων, ώστε να έχουν τη δομή που απαιτείται προκειμένου να λυθούν μέσω δυναμικού προγραμματισμού.

Ο δυναμικός προγραμματισμός εφαρμόζεται στην επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων, τα οποία μπορούν να διασπασθούν σε μικρότερα πιο απλά προβλήματα. Όταν ένα πολύπλοκο πρόβλημα μπορεί διασπώμενο να λυθεί με κάποια άλλη μεθοδολογία τότε προτιμάται από το δυναμικό προγραμματισμό, λόγω της πολυπλοκότητας κατασκευής δυναμικών μοντέλων. Τα προβλήματα δυναμικού προγραμματισμού μπορούν να διαιρεθούν σε στάδια και σε κάθε στάδιο λαμβάνεται μια απόφαση για την ακολουθία κάποιας πολιτικής (δίκτυα). Σε κάθε στάδιο αντιστοιχεί και ένας αριθμός καταστάσεων. Εδώ βρίσκεται επίσης και άλλο ένα από τα βασικά του πλεονεκτήματα, που είναι η μεγάλη οικονομία στους υπολογισμούς σε σχέση με την ολική απαρίθμηση, κάτι που είναι ιδιαίτερα σημαντικό στα μεγάλου μεγέθους προβλήματα. Για παράδειγμα, αν ένα πρόβλημα έχει 10 στάδια με 10 καταστάσεις και 10 δυνατές αποφάσεις σε κάθε στάδιο, η ολική απαρίθμηση πρέπει να εξετάσει μέχρι 10^{10} συνδυασμούς, ενώ ο δυναμικό προγραμματισμός όχι περισσότερους από 10^3 (10 για κάθε κατάσταση σε κάθε στάδιο). Συμπερασματικά καταλήγουμε στο ότι κερδίζουμε σε πράξεις.

Τέλος ο δυναμικός προγραμματισμός όπως είδαμε έχει εφαρμογή σε πολλά πρακτικά προβλήματα όπως σε δραστηριότητες ασχολούμενες με την πυρηνική ενέργεια, σε περιπτώσεις οικονομίας χώρου και στη βιομηχανία όταν το προϊόν από φύση του δημιουργεί μεγάλες ποσότητες άχρηστου υλικού (scrap). Η ικανότητα του δυναμικού προγραμματισμού να δίνει ακριβείς λύσεις σε πολύπλοκα προβλήματα τον έχουν καταστήσει χρήσιμο εργαλείο στην καθημερινή οικονομική πρακτική. Στον έλεγχο αποθεμάτων ο δυναμικός προγραμματισμός συνεισφέρει σημαντικά στην κατασκευή λειτουργικών υποδειγμάτων ελέγχου αποθεμάτων όπως και εξετάσαμε.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

Αλεξόπουλος, Σ., "Μια κλάση αλγορίθμων με την ιδιότητα της συζυγίας για τη βελτιστοποίηση μη γραμμικών συναρτήσεων χωρίς περιορισμούς.", Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Πατρών τμήμα Μαθηματικών, 1999

Μπότσαρης, Χ., ''Επιχειρησιακά Έρευνα – Μέθοδοι και Προβλήματα'', Έλλην, Πάτρα, 1991

Ξηροκώστας, Δ., ''Επιχειρησιακή Έρευνα – Μη Γραμμικός και Δυναμικός Προγραμματισμός'', Αθήνα 1984

Πραστάκος, Γ., '' Μαθηματικός Προγραμματισμός για τη λήψη Επιχειρηματικών Αποφάσεων '', Σταμούλης, 1992

Υψηλάντη Γ. Παντελή, '' Επιχειρησιακή Έρευνα – Λήψη Επιχειρηματικών Αποφάσεων '', Έλλην, Αθήνα 1998

Ψωϊνός, Δ., '' Διοικητική: Ποσοτική Ανάλυση '', Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1993

''Μαθηματικός Προγραμματισμός βιβλίο για τις ανάγκες διδασκαλίας του ομώνυμου μαθήματος'', του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Θεσσαλίας, 2002

ΔΙΕΘΝΗΣ

Bellman, E. R., and E. S., ''Dreyfus Applied Dynamic Programming'', Princeton University Press, Princeton, N. J., 1962

Dreyfus, Stuart E. and Averill M. Law: ''The Art and Theory of Dynamic Programming'', Academic Press, New York, 1977

Howard, R. A., ''Dynamic Programming and Marcov Processes'', The M. I. T. Press, Cambridge, Mass., 1960