Α.Τ.Ε.Ι. ΠΑΤΡΑΣ

ΣΧΟΛΗ: Διοίκησης και Οικονομίας

ΤΜΗΜΑ: Επιχειρηματικού Σχεδιασμού & Πληροφοριακών Συστημάτων

Πτυχιακή Εργασία

ΘΕΜΑ: « Μελέτη Προβλημάτων Βελτιστοποίησης στην Οικονομία »

Σπουδάστρια: Μιχαηλίδου Πασχαλίνα

Εισηγητής: Σταμπόλας Ιωάννης

ΠΑΤΡΑ, 10/07/2004

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα μελέτη έχει συγγραφεί στο πλαίσιο της τετραετούς φοίτησής μου στο τμήμα Επιχειρηματικού Σχεδιασμού και Πληροφοριακών Συστημάτων των ΑΤΕΙ Πατρών και αποτελεί το αντικείμενο της πτυχιακής μου εργασίας.

Η εργασία χωρίζεται σε τρία κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο δίδεται η έννοια των οικονομικών μοντέλων και η χρησιμότητα τους. Το δεύτερο κεφάλαιο ασχολείται με την έννοια της αριστοποίησης και την εφαρμογή της για την επιλογή της βέλτιστης λύσης, καθώς και με την έννοια και τη χρησιμότητα των ακρότατων σημείων μιας συνάρτησης, των ολοκληρωμάτων και των διαφορικών εξισώσεων. Τέλος, το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται στο Μαθηματικό Προγραμματισμό, συγκεκριμένα στο γραμμικό και δυναμικό προγραμματισμό, και στους τρόπους επίλυσης οικονομικών προβλημάτων μέσω αυτού.

Επιθυμώ να ευχαριστήσω θερμά τον Ιωάννη Σταμπόλα, Καθηγητή του τμήματος Επιχειρηματικού Σχεδιασμού και Πληροφοριακών Συστημάτων των ΑΤΕΙ Πατρών για την σημαντική συμβολή τους στη συγγραφή της συγκεκριμένης μελέτης.

Πάτρα, Ιούνιος 2004

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΩΝ

C	Κόστος
D	Ορίζουσα
$\mathbf{d}_i$	Παράγωγος
K	Κεφάλαιο
L	Εργασία
MC	Οριακό κόστος
MR	Οριακά έσοδα
P	Τιμή
Q	Ποσότητα / παραγωγή
R	Έσοδο
TC	Συνολικό κόστος
TR	Συνολικά έσοδα
U	Χρησιμότητα
$\partial \mathbf{d}_i$	Μερική παράγωγος
Γ.Π.	Γραμμικός Προγραμματισμός
Δ.Π.	Δυναμικός Προγραμματισμός
π	Κέρδος

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Εισαγωγή

Σε διάφορους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας, ιδιαίτερα στον τομέα της οικονομίας και της τεχνολογίας, γίνεται εκτενής αναφορά σε αλληλοεξαρτώμενες ποσότητες. Οι ποσότητες αυτές μεταβάλλονται παίρνοντας τιμές που συνδέονται άμεσα με την εκάστοτε εφαρμογή.

Βασική αρχή είναι ότι καθετί που συμβαίνει στην οικονομία μπορεί να «μετουσιωθεί» σε οικονομικό μέγεθος. Επομένως, είναι εφικτή, αλλά και αναγκαία, η ποσοτική έκφραση των διαφόρων γεγονότων για την επιλογή ανάμεσα στις προσφερόμενες εναλλακτικές λύσεις.

Τα οικονομικά μαθηματικά είναι μία προσέγγιση της οικονομικής ανάλυσης. Οι μαθηματικοί-οικονομολόγοι χρησιμοποιούν στα οικονομικά προβλήματα μαθηματικά σύμβολα, ενώ έχουν ως εργαλεία γνωστά μαθηματικά θεωρήματα ώστε να μπορούν να αποδεικνύουν τα αποτελέσματα.

Τα πλεονεκτήματα των οικονομικών μαθηματικών έναντι των μη οικονομικών (μαθηματικών) είναι τα εξής:

i. Στα οικονομικά μαθηματικά χρησιμοποιείται η μαθηματική γλώσσα, η οποία είναι πιο συνοπτική και ακριβής.

ii. Ο αναλυτής ενός οικονομικού μοντέλου πρέπει να είναι σαφής ως προς τις παραδοχές και τα συμπεράσματα του σε κάθε στάδιο ενός οικονομικού προβλήματος.

iii. Με τα οικονομικά μαθηματικά δίδεται η δυνατότητα ανάπτυξης της γενικευμένης υπόθεσης n-μεταβλητών.

iv. Υπάρχει πληθώρα μαθηματικών θεωρημάτων που μπορεί να χρησιμοποιηθεί και

v. Απαιτούν ως προϋπόθεση για τη χρήση των μαθηματικών θεωρημάτων, την αναλυτική διατύπωση των υποθέσεων που γίνονται.

Σε σχέση με την οικονομετρία η διαφορά των οικονομικών μαθηματικών έγκειται στο γεγονός ότι κύρια ενασχόληση της οικονομετρίας είναι η μέτρηση των οικονομικών δεδομένων. Η οικονομετρία ασχολείται με την εμπειρική παρακολούθηση χρησιμοποιώντας στατιστικές μεθόδους εκτίμησης και ελέγχους υποθέσεων.

Αντίθετα, τα οικονομικά μαθηματικά ασχολούνται με την εφαρμογή των μαθηματικών στην οικονομική μόνο από την άποψη της οικονομικής ανάλυσης, χωρίς δίνουν έμφαση σε στατιστικά προβλήματα, όπως λ.χ. τα λάθη μετρήσεων των μεταβλητών που μελετώνται.

Βασική υπόθεση της οικονομικής ανάλυσης είναι η αρχή της ορθολογικότητας. Σύμφωνα με αυτή πρωτεύον στόχος κάθε απόφασης είναι η προσπάθεια επίτευξης του βέλτιστου αποτελέσματος.

Κυριαρχούσα αρχή είναι η οικονομική αρχή, η οποία προκύπτει από το γεγονός ότι οι ανθρώπινες ανάγκες είναι απεριόριστες ενώ οι πόροι περιορισμένοι. Αυτή η αρχή διακρίνεται σε δύο αξιώματα: (α) στην προσπάθεια επίτευξης του μέγιστου δυνατού αποτελέσματος με δεδομένα οικονομικά μέσα και (β) στην προσπάθεια επίτευξης του ελάχιστου κόστους με δεδομένο το αποτέλεσμα[1]. Η πρώτη περίπτωση αναφέρεται ως πρόβλημα μεγιστοποίησης ενώ η δεύτερη ως πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Δεδομένου ότι τα μεγέθη που πρόκειται να μεγιστοποιηθούν ή να ελαχιστοποιηθούν μπορούν να εκφραστούν με τη μορφή συναρτήσεων, το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του μέγιστου ή ελάχιστου σημείου των συναρτήσεων αυτών. Δηλαδή, αναζητείται η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής στην οποία μεγιστοποιείται ή ελαχιστοποιείται η οικονομική συνάρτηση. Γεωμετρικά αυτό σημαίνει την εύρεση του μέγιστου ή ελάχιστου σημείου επί της καμπύλης (αν πρόκειται για συνάρτηση μιας μεταβλητής) ή επί της επιφάνειας (αν πρόκειται για συνάρτηση περισσότερων μεταβλητών). Όταν οι μεταβλητές είναι περισσότερες των τριών είναι δύσκολο να υπάρξει γεωμετρική απεικόνιση.

Σκοπός της παρούσης εργασίας είναι η μελέτη των οικονομικών προβλημάτων, ούτως ώστε αυτά αρχικά να κατανοηθούν και έπειτα να αναλυθούν. Με τον τρόπο αυτό, καθίσταται δυνατό να ληφθούν ορθολογικές αποφάσεις, οι οποίες θα

[1] Ο Σ. Σαραντίδης στο βιβλίο «Εισαγωγή εις την οικονομικήν ανάλυσιν», αναφέρει σχετικά: «Η αρχή αυτή, ήτις αποτελεί το πρόβλημα της οικονομικής αριστοποιήσεως, δύναται να διακριθεί εις δύο επιμέρους προβλήματα: α) Το πρόβλημα της δια δεδομένων μέσων ικανοποιήσεως όσο το δυνατόν περισσοτέρων αναγκών ή ικανοποιήσεως τούτων κατά τον καλλίτερον τρόπον. β) Το πρόβλημα της ικανοποιήσεως δεδομένων αναγκών ή επιτεύξεως δεδομένων οικονομικών στόχων δι' όσον το δυνατόν μικροτέρας σπατάλης μέσων».

συμβάλουν στην ανάπτυξη της επιχείρησης και στην βελτιστοποίηση της οικονομίας, γενικότερα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

1.1.0.0 Μαθηματικά - οικονομικά μοντέλα

Ένας τρόπος προσέγγισης στην επίλυση επιχειρηματικών προβλημάτων είναι η χρήση **μαθηματικών προτύπων ή μοντέλων.** Ένα μαθηματικό μοντέλο είναι ένα σύστημα μαθηματικών εξισώσεων ή σχέσεων που περιγράφουν μία δεδομένη οικονομική δραστηριότητα. Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν αλληλεξαρτήσεις μεταξύ διαφόρων τομέων της οικονομίας. Ο αριθμός των αλληλεξαρτήσεων, που καθορίζονται στο μοντέλο, είναι υποκειμενικός, εξαρτάται από πολλούς παράγοντες και προσδιορίζει τη λεπτομέρεια με την οποία το μοντέλο αντιπροσωπεύει την οικονομία.

Οι πραγματικές καταστάσεις που αντιμετωπίζονται στον κόσμο των επιχειρήσεων είναι πολύπλοκες και για το λόγο αυτό χρειάζεται να γίνουν κάποιες απλουστεύσεις καταστάσεων και να γίνουν δεκτές ορισμένες παραδοχές. Οι παραδοχές αυτές είναι δεκτές στο βαθμό που δεν επηρεάζουν την ακρίβεια της απεικόνισης της πραγματικής κατάστασης η οποία θα περιγραφεί.

Μια παραστατική εικόνα της διαδικασίας επίλυσης ενός πραγματικού επιχειρησιακού προβλήματος με τη βοήθεια ενός μαθηματικού μοντέλου παρουσιάζεται στο Παράρτημα 1 (σχήμα 1).

Το βασικό πρόβλημα που καλείται να αντιμετωπίσει κάποιος όταν προσπαθεί να εφαρμόσει ένα οικονομικό μοντέλο σε ένα επιχειρησιακό πρόβλημα, είναι η έλλειψη δεδομένων. Στις περισσότερες περιπτώσεις η εύρεση και ο καθορισμός των τιμών των δεδομένων απαιτεί συλλογή και επεξεργασία στοιχείων από διάφορα τμήματα της επιχείρησης όπως λ.χ. το λογιστήριο, η παραγωγή κ.ά. (Όταν χρησιμοποιούνται μη ακριβή δεδομένα, τότε για να περιγραφεί η ποιότητα των αποτελεσμάτων χρησιμοποιείται η έκφραση «garbage in garbage out.)

Ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιείται ένα μαθηματικό μοντέλο για την απεικόνιση πραγματικών επιχειρησιακών καταστάσεων είναι ότι μπορεί, τις περισσότερες φορές, να επιλυθεί με ένα συγκεκριμένο και συστηματικό τρόπο.

Ο τρόπος επίλυσης ενός μοντέλου μπορεί να είναι τελείως απλός, όπως η επίλυση μιας μαθηματικής εξίσωσης, ή πιο σύνθετος χρησιμοποιώντας μεθόδους όπως α) τη μέθοδο των δοκιμών και λαθών (**trial and error**) ή β) την εφαρμογή συγκεκριμένου μαθηματικού αλγορίθμου. Ο αλγόριθμος που εφαρμόζεται εντοπίζει τη βέλτιστη λύση του προβλήματος με συστηματικό τρόπο[1].

Αξίζει να σημειωθεί ότι η λύση ενός οικονομικού μοντέλου εξαρτάται τόσο από τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται, όσο και από το ίδιο το μοντέλο.

[1] Σύμφωνα με τον Ψαράκη Ε., «Αλγόριθμος είναι η ακριβής περιγραφή μιας αυστηρά καθορισμένης σειράς ενεργειών για τη λύση ενός προβλήματος». Κάθε αλγόριθμος μπορεί να έχει κανένα, ένα ή περισσότερα δεδομένα εισόδου και τουλάχιστον ένα αποτέλεσμα στην έξοδο.

1.2.0.0 Βασικά χαρακτηριστικά των οικονομικών μοντέλων

Τα βασικά χαρακτηριστικά ενός μαθηματικού μοντέλου είναι οι **μεταβλητές**, οι **παράμετροι** και οι **σταθερές**.

Οι **μεταβλητές** συμβολίζουν εκείνους τους παράγοντες του προβλήματος οι οποίοι ελέγχονται από τη διοίκηση της επιχείρησης και για τους οποίους καλείται να αποφασίσει πώς θα χρησιμοποιήσει. Ως μεταβλητές χρησιμοποιούνται συνήθως η τιμή (P), το κέρδος (π), τα έσοδα (R), το κόστος (C) κ.ά.

Οι **παράμετροι** είναι τα δεδομένα που υπάρχουν στο πρόβλημα, τα οποία επηρεάζουν τη λύση του. Όταν τα δεδομένα είναι σταθερά τα οικονομικά μοντέλα καλούνται **ντετερμινιστικά (deterministic)**, ενώ όταν τα δεδομένα υπόκεινται σε συνεχείς τυχαίες μεταβολές καλούνται **στοχαστικά (stochastic) οικονομικά μοντέλα**.

Οι **σταθερές** είναι εκείνες οι παράμετροι των οποίων η ποσότητα δεν μεταβάλλεται (σε αντίθεση με τις μεταβλητές). Μία σταθερά συνήθως αναπαριστάται με κάποιο γράμμα. Όταν μια σταθερά συνδέεται με μία μεταβλητή τότε αυτή η σταθερά καλείται **συντελεστής (coefficient)** αυτής της μεταβλητής.

Κατά τον Υψηλάντη[1] υπάρχει άλλο ένα χαρακτηριστικό των μαθηματικών μοντέλων το οποίο είναι ο **αντικειμενικός στόχος**. Οι περισσότεροι όμως συγγραφείς θεωρούν ότι ο αντικειμενικός στόχος είναι χαρακτηριστικό του προβλήματος που ζητείται να επιλυθεί και όχι του μοντέλου.

---

[1] Βλ. «Επιχειρησιακή Έρευνα», εκδόσεις Έλλην, Β' έκδοση, Αθήνα 1998, σελ.22

1.3.0.0 Έλεγχος της λύσης του οικονομικού μοντέλου

Πριν την υλοποίηση της λύσης ενός μαθηματικού μοντέλου πρέπει να ελεγχθεί η καταλληλότητά της. Ο έλεγχος της λύσης περιλαμβάνει διερεύνηση ως προς δύο κατευθύνσεις: ως προς την πληρότητα και την ακρίβεια των δεδομένων και ως προς τις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν για την εκτίμησή τους. Τούτο σημαίνει ότι εάν η λύση που θα προκύψει δεν είναι αποδεκτή στο οικονομικό περιβάλλον της επιχείρησης, τότε θα πρέπει να ελεγχθεί τόσο η ορθότητα των δεδομένων όσο και η πιστότητα του μοντέλου. Αξίζει να σημειωθεί ότι η λύση που προκύπτει βασίζεται σε εκτιμήσεις και όχι σε πραγματικές τιμές.

Μία λύση δεν είναι αποδεκτή όταν:

i. Οι μεταβλητές εμφανίζονται να έχουν αρνητικές τιμές. Εάν π.χ. ζητείται η ποσότητα ενός προϊόντος στην οποία μεγιστοποιείται το κέρδος, και το μοντέλο δίνει ως λύση την ποσότητα -120. Η λύση αυτή δεν είναι αποδεκτή, αφού δεν νοείται αρνητική τιμή παραγωγής. (Υπόθεση μη αρνητικότητας)

ii. Το αποτέλεσμα που εξάγεται δεν ικανοποιεί τους περιορισμούς του προβλήματος. Π.χ. μία επιχείρηση μπορεί να παράγει μέχρι 1000 προϊόντα και θέλει να βρει σε ποια ποσότητα θα έχει μέγιστο κέρδος. Έστω ότι το μέγιστο κέρδος που έχει προκύψει από το οικονομικό μοντέλο αντιστοιχεί σε ποσότητα 1500 προϊόντων. Τούτο σημαίνει ότι η λύση αυτή δε γίνεται αποδεκτή, αφού δεν ικανοποιεί τον περιορισμό της παραγωγής.

1.3.1.0 Ανάλυση της λύσης

Το πρώτο στάδιο της ανάλυσης των αποτελεσμάτων είναι ο καθορισμός των επιπτώσεων που θα έχει η υιοθέτηση της λύσης. Αυτό γίνεται διότι πρέπει να μελετηθούν όλες οι επιπτώσεις που θα έχει η επιλογή της λύσης, ώστε η υλοποίησή της να γίνει με όσο το δυνατόν πιο ομαλό τρόπο (για να μην επηρεάσει αρνητικά τα διάφορα τμήματα της επιχείρησης στα οποία θα εφαρμοστεί).

Εάν το μαθηματικό μοντέλο είναι μόνο μια μαθηματική απεικόνιση της πραγματικότητας, το σημαντικότερο στάδιο της ανάλυσης της λύσης είναι η **ανάλυση ευαισθησίας** των αποτελεσμάτων σε σχέση με αλλαγές στα δεδομένα ή στο μοντέλο.

Η ανάλυση ευαισθησίας καθορίζει τη μεταβολή της προτεινόμενης λύσης σε περίπτωση αλλαγών είτε στα δεδομένα ή στο μοντέλο. Εάν η λύση δεν παρουσιάζει ευαισθησία τότε υιοθετείται, διότι αυτό σημαίνει ότι παρουσιάζει ευελιξία στις μεταβολές του περιβάλλοντος. Αν, όμως, παρατηρηθεί το φαινόμενο κατά το οποίο μικρές αλλαγές στην τιμή των δεδομένων μεταβάλλουν σε μεγάλο βαθμό την προτεινόμενη λύση, θα χρειαστεί επανεξέταση του μοντέλου για να υπάρξουν πιο αξιόπιστα δεδομένα, έτσι ώστε να μην υιοθετηθεί και υλοποιηθεί μια λανθασμένη επιλογή.

1.4.0.0 Διακρίσεις οικονομικών μοντέλων

Τα μαθηματικά οικονομικά μοντέλα διακρίνονται σε **καθαρά οικονομικά**, σε **συμπεριφορικά** (behavioral) και σε **διευθυντικά** (managerial).

1.4.1.0 Καθαρά οικονομικά υποδείγματα

Το κύριο χαρακτηριστικό των υποδειγμάτων αυτών, εκτός της αφαιρετικής απλούστευσης της πραγματικής οικονομικής δραστηριότητας, είναι ότι βασίζονται στην οριακή ανάλυση. Χρησιμοποιούν δηλαδή έννοιες, όπως το οριακό κόστος (M.C.)[1], το οριακό έσοδο (M.R.)[2] κλπ., ο πραγματικός υπολογισμός των οποίων είναι δύσκολος για τα δεδομένα τα οποία είναι διαθέσιμα στους επιχειρηματίες ή τους διευθυντές των επιχειρήσεων. Το σημαντικότερο από τα καθαρά οικονομικά υποδείγματα είναι αυτό της μεγιστοποίησης του κέρδους σε συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού.

1.4.2.0 Συμπεριφορικά υποδείγματα

Τα υποδείγματα αυτά βασίζονται στη μελέτη της συμπεριφοράς των επιχειρηματιών ή των διευθυντών της επιχείρησης. Τα πλέον σημαντικά εξ΄ αυτών είναι το υπόδειγμα του H. Simon (1955) και των Cyert-March (1963).

Το υπόδειγμα του Simon βασίζεται στην αδυναμία των υποθέσεων σύμφωνα με τις οποίες για τη μεγιστοποίηση του κέρδους, οι διευθυντές των επιχειρήσεων πρέπει να έχουν άριστη γνώση των οικονομικών συνθηκών, να μπορούν να κάνουν πολύπλοκους υπολογισμούς και να είναι βέβαιοι για το αποτέλεσμα των ενεργειών τους.

Το υπόδειγμα των Cyert και March στηρίζεται στην παρατήρηση ότι οι επιχειρήσεις αποτελούνται από ομάδες ατόμων που συνιστούν οργανωτικούς συνασπισμούς. Οι

---

[1] Το οριακό κόστος είναι το κόστος το οποίο απαιτείται για την παραγωγή μίας επιπλέον μονάδας προϊόντος. (Κιόχος Π., «Οικονομική της Διοίκησης»)

[2] Ως οριακό έσοδο ορίζεται η μεταβολή που επέρχεται στο συνολικό έξοδο της επιχείρησης από μία μεταβολή της πωλούμενης ποσότητας του προϊόντος. (Τραχανάς Κ., «Οικονομική της Διοίκησης»)

συνασπισμοί αυτοί θέτουν και διαφορετικό σκοπό προς εκπλήρωση των συμφερόντων τους. Όμως, οι επιδιώξεις αυτές σπάνια συμπίπτουν μεταξύ τους συνήθως είναι αλληλοσυγκρουόμενες. Για το λόγο αυτό παρατηρείται το φαινόμενο οι επιχειρήσεις να λειτουργούν με ένα επίπεδο χαμηλότερο από το άριστο και με δαπάνες μεγαλύτερες από αυτές που πραγματικά απαιτούνται.

1.4.3.0 Διευθυντικά υποδείγματα

Τα διευθυντικά υποδείγματα αναδείχθηκαν ύστερα από μελέτες, σύμφωνα με τις οποίες:

i. Υπάρχει διάκριση ρόλων και επιδιώξεων μεταξύ των διευθυντών και των ιδιοκτητών των επιχειρήσεων, όπως εμφανίζεται και στο υπόδειγμα των Cyert-March.

ii. Πολλές επιχειρήσεις επιδιώκουν μεγιστοποίηση του μεγέθους και όχι του κέρδους τους.

iii. Οι περισσότερες επιχειρήσεις που λειτουργούν σε ατελώς ανταγωνιστικές αγορές δεν επιδιώκουν τη μεγιστοποίηση του κέρδους τους, αλλά την επίτευξη ενός κέρδους το οποίο θα αποθαρρύνει τους ανταγωνιστές να εισέλθουν στον κλάδο τους.

Τα περισσότερο γνωστά από τα υποδείγματα αυτά είναι: το υπόδειγμα μεγιστοποίησης των πωλήσεων, του W. Baumol (1961), το υπόδειγμα διακεκριμένης συμπεριφοράς των διευθυντών της επιχείρησης, των R. Marris-O. Williamson (1967) και το υπόδειγμα ανάπτυξης της επιχείρησης, του J. Williamson (1966).

Και τα τρία αυτά υποδείγματα αποσκοπούν να δείξουν διαφορετικό τελικό επιδιωκόμενο σκοπό από την επιχείρηση. Επίσης, λαμβάνουν ως βασικό περιορισμό των επιδιώξεών τους ένα ύψος κέρδους που πρέπει να επιτευχθεί και να αποδοθεί στους μετόχους, τέτοιο ώστε να μη μειωθεί η αξία των μετοχών της επιχείρησης στο χρηματιστήριο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}

2.1.0.0 Αριστοποίηση

Αριστοποίηση είναι η μέθοδος με την οποία προσδιορίζεται η βέλτιστη λύση σε ένα δεδομένο πρόβλημα. Στην περίπτωση που υπάρχει μία μόνο λύση ή δραστηριότητα για την εκπλήρωση ενός συγκεκριμένου σκοπού, τότε δεν τίθεται θέμα λήψης αποφάσεων και, συνεπώς, ούτε θέμα αριστοποίησης. Η διαδικασία της λήψης αποφάσεων εκ μέρους του επιχειρηματία ή του διευθυντή της επιχείρησης έχει οικονομική σημασία μόνο όταν υπάρχουν περισσότερες από μία διαφορετικές και αμοιβαία αποκλειόμενες εναλλακτικές λύσεις για την επίτευξη ενός συγκεκριμένου σκοπού.

«Το άριστο είναι μια σχετική έννοια και σε κάθε συγκεκριμένη περίπτωση είναι αναγκαίο να συμφωνήσουμε πιο πρόγραμμα θεωρείται σαν άριστο. Αν το πρόγραμμα είναι διατυπωμένο από κάποια κεφαλαιοκρατική εταιρία, τότε η περίπτωση είναι προφανής, επειδή, σαν θέμα αρχής, το άριστο πρόγραμμα είναι αυτό που θα εξασφαλίσει το μέγιστο κέρδος. Σε συνθήκες στις οποίες μια ευρύτερη οικονομική πολιτική είναι αποφασιστική στην επιλογή του προγράμματος, το κριτήριο για το άριστο πρόγραμμα μπορεί να ποικίλει». (Oscar Lange,1979)

Η διαδικασία της λήψης αποφάσεων περιλαμβάνει στοιχεία όπως ο τελικός στόχος της επιχείρησης, οι γνώσεις του ατόμου το οποίο καλείται να λάβει τις αποφάσεις, η γνώση του περιβάλλοντος (τόσο του εξωτερικού όσο και του εσωτερικού) κ.ά.

Όταν υπάρχουν πολλές εναλλακτικές λύσεις για την επίτευξη ενός σκοπού, τότε πρέπει να επιλεγεί εκείνη που αποδίδει το μεγαλύτερο όφελος, με βάση πάντα κάποιο συγκεκριμένο κριτήριο. Το συνηθέστερο κριτήριο είναι η μεγιστοποίηση κάποιου οικονομικού μεγέθους (του κέρδους, της χρησιμότητας κλπ) ή η ελαχιστοποίηση ενός άλλου μεγέθους (του κόστους, του κινδύνου κλπ).

Τη λύση που αποδίδει το μέγιστο όφελος καλείται να βρει το άτομο που λαμβάνει τις αποφάσεις με χρήση των μεθόδων αριστοποίησης. Η λύση αυτή καλείται **άριστη**, ή αλλιώς **βέλτιστη**, **λύση**. Με βάση αυτή το άτομο που λαμβάνει τις αποφάσεις θα οδηγηθεί σε μια απόφαση η οποία σχετίζεται στενά με τον επιδιωκόμενο σκοπό της επιχείρησης.

Τα προβλήματα αριστοποίησης (optimization problems) λοιπόν, αναφέρονται στην μεγιστοποίηση (maximization) ή την ελαχιστοποίηση (minimization) μίας ή περισσότερων αριθμητικών συναρτήσεων ενός αριθμού μεταβλητών, οι τιμές των οποίων ικανοποιούν ένα σύνολο περιορισμών.

Υπάρχουν δύο είδη αριστοποίησης: η αδέσμευτη αριστοποίηση (στην οποία δεν υπάρχει καμία δέσμευση / περιορισμός) και η δεσμευμένη αριστοποίηση (στην οποία υπάρχουν περιορισμοί όσον αφορά την τιμή των μεταβλητών).

Τα προβλήματα αριστοποίησης διακρίνονται σε **προβλήματα κλασσικής αριστοποίησης** και σε **προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού**.

Στα προβλήματα κλασσικής αριστοποίησης το σύνολο των περιορισμών αποτελείται μόνο από εξισώσεις και οι μέθοδοι επίλυσής τους χρησιμοποιούν τα εργαλεία της κλασσικής μαθηματικής ανάλυσης, δηλαδή του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού. Τα προβλήματα της κλασσικής αριστοποίησης διακρίνονται σε προβλήματα **στατικής** και προβλήματα **δυναμικής ανάλυσης.**

Στα προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού το σύνολο των περιορισμών περιλαμβάνει, εκτός των εξισώσεων, και ανισότητες. Τα προβλήματα του μαθηματικού προγραμματισμού διακρίνονται σε προβλήματα **Γραμμικού, μη Γραμμικού, Χρονικού** και **Δυναμικού Προγραμματισμού**. Στην παρούσα μελέτη θα γίνει αναφορά μόνο στο γραμμικό και το δυναμικό προγραμματισμό.

2.2.0.0 Προβλήματα Κλασσικής Αριστοποίησης

2.2.1.0 Στατική ανάλυση ή ανάλυση ισορροπίας (Equilibrium analysis)

Στη στατική ανάλυση το κύριο πρόβλημα είναι η εύρεση εκείνου του συνόλου των τιμών των ενδογενών μεταβλητών, το οποίο ικανοποιεί την υπόθεση ισορροπίας του μοντέλου.

Σύμφωνα με τον Machlup[1] «ισορροπία είναι ένα σύνολο αλληλοσχετιζόμενων μεταβλητών προσαρμοσμένων έτσι ώστε να μην υπάρχει καμία ενδογενής τάση μεταβολής του μοντέλου στο οποίο ανήκουν»

2.2.1.1 Προβλήματα βελτιστοποίησης με μία μεταβλητή.

Η βελτιστοποίηση είναι μία ειδική περίπτωση της ανάλυσης ισορροπίας. Ουσιαστικά αναζητείται η κατάσταση ισορροπίας στην οποία βελτιστοποιείται ένα μέγεθος. Ο όρος *βελτιστοποίηση* αναφέρεται στην εύρεση των ακρότατων σημείων (μέγιστο, ελάχιστο) της συνάρτησης η οποία εξετάζεται. Γεωμετρικά αναζητούνται τα μέγιστα ή ελάχιστα σημεία επί της καμπύλης, ή επί της επιφάνειας.

2.2.1.1.1 Ακρότατα

Ο όρος ακρότατα, ο οποίος προέρχεται από τον Λογισμό των Μεταβολών, αναφέρεται στις τιμές «μέγιστη» και «ελάχιστη», που ενδεχομένως παίρνει μια πραγματική συνάρτηση μίας ή περισσοτέρων μεταβλητών.

Σε προβλήματα βελτιστοποίησης μίας μεταβλητής υπάρχουν δύο ειδών ακρότατα:

i. Τοπικά ακρότατα και

ii. Ολικά ακρότατα

[1] Machlup F., "Essays on Economic Semantics", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1963

Η μαθηματική μέθοδος που ακολουθείται για τη βελτιστοποίηση οικονομικών προβλημάτων μίας μεταβλητής είναι η ακόλουθη.

Αρχικά πρέπει να βρεθεί η πρώτη παράγωγος[1] της υπό εξέταση συνάρτησης (έστω $f(x)$) και να εξισωθεί με το μηδέν, δηλ. $f'(x)=0$ (Αναγκαία συνθήκη βελτιστοποίησης). Ακολουθεί η εύρεση της δεύτερης παραγώγου $f''(x)$. Τότε:

i. Εάν $f''(x)<0$, τότε έχουμε τοπικό μέγιστο
ii. Εάν $f''(x)>0$, τότε έχουμε τοπικό ελάχιστο } Ικανή συνθήκη βελτιστοποίησης
iii. Εάν $f''(x)=0$, τότε έχουμε σημείο καμπής.

Παράδειγμα

Κλασσικό παράδειγμα βελτιστοποίησης είναι αυτό της μεγιστοποίησης του κέρδους. Για το πρόβλημα αυτό χρησιμοποιούνται οι καμπύλες συνολικού κόστους (T.C.)[2] και συνολικών εσόδων (T.R.)[3] της επιχείρησης (σχ.1). Η συνάρτηση του κέρδους είναι η $\pi(Q)=R(Q)-C(Q)$, όπου π(Q): το κέρδος, R(Q):τα συνολικά έσοδα και C(Q): τα συνολικά έξοδα.

Η επιχείρηση για να επιτύχει τον απώτερο σκοπό της, τη μεγιστοποίηση του κέρδους, πρέπει να γνωρίζει την πορεία των καμπυλών του συνολικού κόστους και του συνολικού εσόδου. Υποθέτοντας ότι γνωρίζει τον τρόπο που εξελίσσονται οι καμπύλες αυτές, πρέπει να βρει τον όγκο εκείνο των πωλήσεων ο οποίος θα έχει ως αποτέλεσμα τη μέγιστη διαφορά (απόκλιση) μεταξύ των καμπυλών T.C. και T.R. Η διαφορά αυτή πρέπει να είναι θετική, δηλαδή T.R.>T.C.

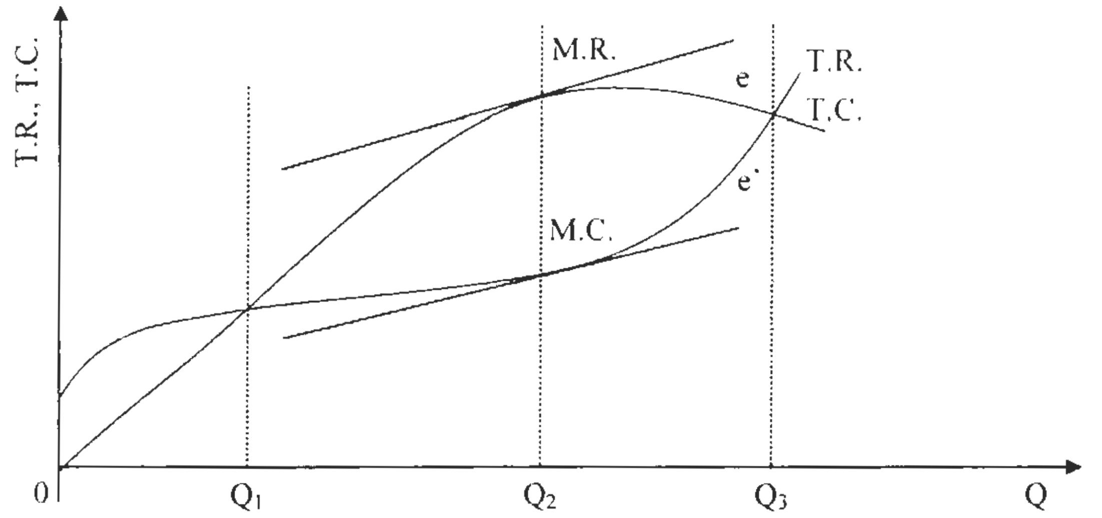
---

[1] Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. **Παράγωγος** καλείται η τιμή του ορίου $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, όπου h: ένας πραγματικός αριθμός.

[2] Το συνολικό κόστος είναι το σύνολο των δαπανών στις οποίες προβαίνει η επιχείρηση για την παραγωγή του προϊόντος. (Κιόχος Π., «Οικονομική της Διοίκησης»)

[3] Ως συνολικά έσοδα, ή αλλιώς συνολική πρόσοδος, ορίζεται το γινόμενο της τιμής του προϊόντος επί την ποσότητα που πουλάει η επιχείρηση στην αγορά. (Τραχανάς Κ., «Οικονομική της Διοίκησης»)

Σχήμα 1. Καμπύλες συνολικού κόστους και συνολικών εσόδων



ΠΗΓΗ: Κιόχος Π., «Οικονομική της διοίκησης», εκδόσεις Interbooks, Αθήνα 1999, σελ.34

Η επιχείρηση επιτυγχάνει το μέγιστο κέρδος της σε ύψος πωλήσεων τέτοιο, όπου το οριακό κόστος ισούται με το οριακό έσοδο των πωλήσεων αυτών, δηλαδή $MC = MR$. Από μαθηματικής πλευράς το οριακό κόστος ισούται με την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης του συνολικού κόστους. Επίσης το οριακό έσοδο ισούται με την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης των συνολικών εσόδων.

Θέτοντας την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης κέρδους ίση με το μηδέν. Ισχύει δηλαδή ότι

$$\pi'(Q) = \frac{d\pi}{dQ} = R'(Q) - C'(Q) = 0 \Rightarrow R'(Q) = C'(Q)$$

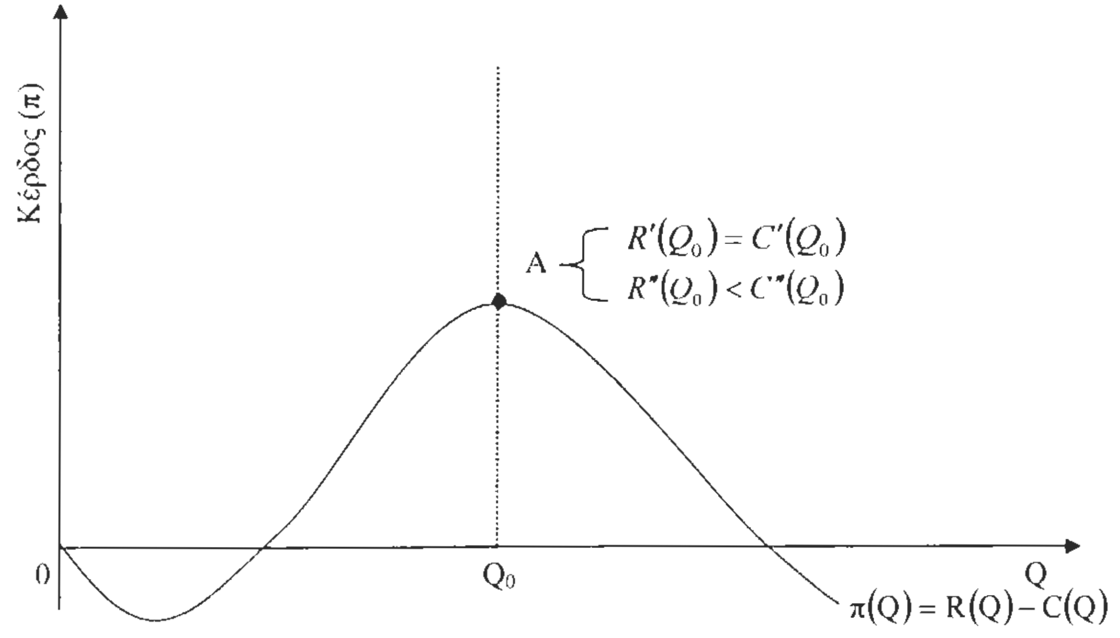
Επομένως, το βέλτιστο σημείο παραγωγής Q_0 πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη $R'(Q_0) = C'(Q_0)$. Κι επειδή $R'(Q) = MR$ και $C'(Q) = MC$ είναι $MR = MC$.

Έπειτα πρέπει να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης κέρδους, η οποία πρέπει να είναι μικρότερη του μηδενός ούτως ώστε να έχουμε μέγιστο. Άρα:

$$\pi''(Q) = \frac{d^2\pi}{dQ^2} = R''(Q) - C''(Q) < 0 \Rightarrow R''(Q) < C''(Q)$$

Για ένα επίπεδο Q_0 τέτοιο ώστε $R'(Q_0)=C'(Q_0)$, η ικανοποίηση της συνθήκης $R''(Q_0)<C''(Q_0)$ σημαίνει την επίτευξη του σημείου στο οποίο μεγιστοποιείται το κέρδος (σχ.2).

Σχήμα 2. Καμπύλη μεγιστοποίησης κέρδους



ΠΗΓΗ: Chiang A., "Fundamental Methods of Mathematical Economics", 3rd Edition, McGraw-HILL, Inc., 1984, p. 249

2.2.1.2 Προβλήματα βελτιστοποίησης με πολλές μεταβλητές.

Στην προηγούμενη ενότητα αναλύθηκε η μέθοδος βελτιστοποίησης οικονομικών προβλημάτων με μία μόνο μεταβλητή. Όμως, τα προβλήματα των επιχειρήσεων περιλαμβάνουν περισσότερες από μία μεταβλητές. Επομένως, πρέπει να αναλυθεί η μέθοδος βελτιστοποίησης προβλημάτων με πολλές μεταβλητές.

Στη μέθοδο βελτιστοποίησης προβλημάτων με μία μεταβλητή έγινε λόγος για τις παραγώγους. Στη βελτιστοποίηση προβλημάτων με πολλές μεταβλητές ο όρος *παράγωγος* αντιστοιχεί στον όρο *διαφορικό*[1].

---

[1] Έστω $f:\Delta\rightarrow\Re$ μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0\in\Delta$ και $\Delta x\neq 0$ μία μεταβολή του x ή οποία δεν εξαρτάται από το x_0. **Διαφορικό** της συνάρτησης f στο σημείο x_0 καλείται το γινόμενο $f'(x_0)\cdot\Delta x$.

Αρχικά πρέπει να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της υπό εξέταση συνάρτησης (έστω $z = f(x)$) και να εξισωθεί με το μηδέν, δηλ. $dz = 0 \Rightarrow f'(x)dx = 0$. Ακολουθεί η εύρεση της δεύτερης παραγώγου $d^2 z \equiv d(dz) = d[f'(x)dx] = f''(x)dx^2$. Στην περίπτωση αυτή για κάθε μη μηδενική τιμή της dx:

i.Εάν $d^2 z < 0$, τότε η z μεγιστοποιείται.

ii.Εάν $d^2 z > 0$, τότε η z ελαχιστοποιείται.

Αναλυτικότερα. Έστω η συνάρτηση $z = f(x, y)$. Η πρώτη συνθήκη βελτιστοποίησης ορίζει όπως η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης ισούται με το μηδέν, δηλ. $dz = 0$. Αλλά $dz = f_x dx + f_y dy = 0$, που σημαίνει ότι πρέπει $f_x = f_y = 0 \equiv \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, όπου $\partial z, \partial x, \partial y$: οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων z,x,y αντίστοιχα.

Για τη δεύτερη συνθήκη βελτιστοποίησης πρέπει $d^2 z < 0$ για μεγιστοποίηση ή $d^2 z > 0$ για ελαχιστοποίηση (για κάθε μη μηδενική τιμή της dx).Ισχύει ότι:

- $f_x \equiv \frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow f_{xx} \equiv \frac{\partial}{\partial x}(fx) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$
- $f_y \equiv \frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow f_{yy} \equiv \frac{\partial}{\partial y}(fy) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

$$\left.\begin{aligned} &- \quad f_{xy} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \\ &- \quad f_{yx} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \quad f_{xy} = f_{yx}$$

Επομένως είναι:

$$d^2 z \equiv d(dz) = \frac{\partial(dz)}{\partial x}dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y}dy = \frac{\partial}{\partial x}(f_x dx + f_y dy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(f_x dx + f_y dy)dy$$
$$= (f_{xx}dx + f_{xy}dy)dx + (f_{yx}dx + f_{yy}dy)dy = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2$$

Συνοπτικά, για τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης $z = f(x, y)$ πρέπει:

i. $f_x = f_y = 0$,

ii. $f_{xx}, f_{yy} < 0$ και

iii. $f_{xx}, f_{yy} > f^2 xy$

Αντίστοιχα, για την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης $z = f(x, y)$ πρέπει:

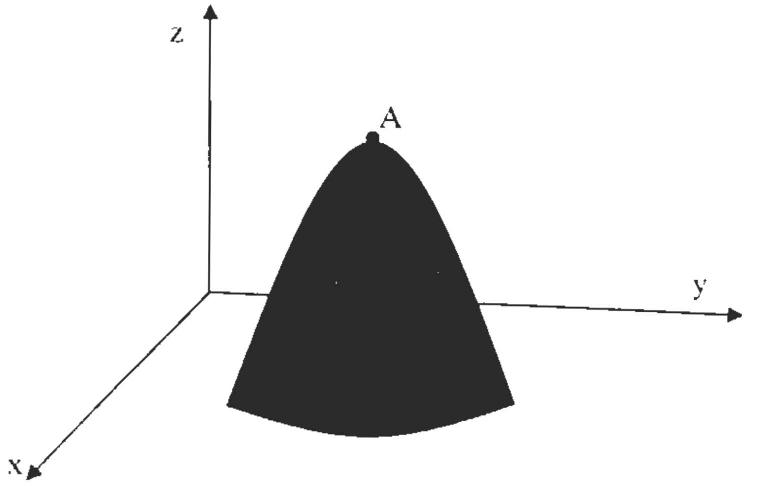
i. $f_x = f_y = 0$,

ii. $f_{xx}, f_{yy} > 0$ και

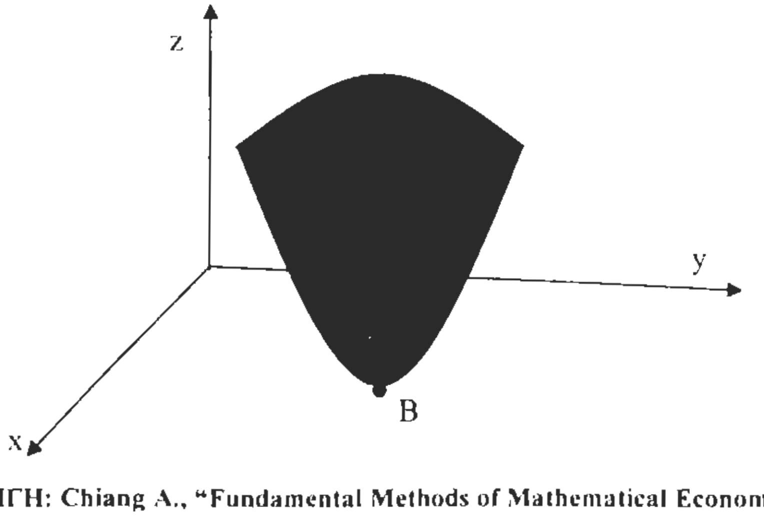
iii. $f_{xx}, f_{yy} > f^2 xy$

Διαγραμματικά οι ακρότατες τιμές σε προβλήματα με πολλές μεταβλητές απεικονίζονται στα παρακάτω σχήματα (σχ.3-4).

Σχήμα 3. Μέγιστο σημείο συναρτήσεων με τρεις μεταβλητές



Σχήμα 4. Ελάχιστο σημείο συναρτήσεων με τρεις μεταβλητές



ΠΗΓΗ: Chiang A., "Fundamental Methods of Mathematical Economics", 3rd Edition, McGraw-HILL, Inc., 1984, p. 311

Παράδειγμα

Έστω ότι ένας παραγωγός πουλάει δύο προϊόντα Q_1, Q_2 και οι συναρτήσεις ζήτησης δίνονται από τις σχέσεις $Q_1 = 14 - 0,25P_1$ και $Q_2 = 24 - 0,5P_2$. Το συνολικό κόστος είναι $TC = Q_1^2 + 5Q_1Q_2 + Q_2^2$. Ζητείται να μεγιστοποιηθεί το κέρδος.

Εφόσον ζητείται μεγιστοποίηση του κέρδους και τα δεδομένα περιλαμβάνουν συνολικό κόστος, τούτο σημαίνει ότι πρέπει να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση του κόστους. Ακολουθώντας τα στάδια της μεθόδου επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης με πολλές μεταβλητές, είναι:

i. $dTC = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial TC}{\partial Q_1} = \dfrac{\partial TC}{\partial Q_2} = 0$

Ισχύει ότι:

$$\frac{\partial TC}{\partial Q_1} = 2Q_1 + 5Q_2 = 0 \Rightarrow 2(14 - 0,25P_1) + 5(24 - 0,5P_2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 28 - 0,5P_1 + 120 - 2,5P_2 = O \Rightarrow 148 - 0,5P_1 - 2,5P_2 = 0 \Rightarrow -0,5P_1 = -148 + 2,5P_2$$

$$\frac{\partial TC}{\partial Q_2} = 5Q_1 + 2Q_2 = 0 \Rightarrow 5(14 - 0,25P_1) + 2(24 - 0,5P_2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 70 - 1,25P_1 + 48 - P_2 = 0 \Rightarrow 118 - 1,25P_1 = P_2$$

Λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις με σύστημα ισχύει ότι:

$$\left.\begin{matrix} -0,5P_1 = -148 + 2,5(118 - 1,25P_1) \\ 118 - 1,25P_1 = P_2 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -0,5P_1 = -148 + 295 - 3,125P_1 \\ 118 - 1,25P_1 = P_2 \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} -0,5P_1 = -148 + 295 - 3,125P_1 \\ 118 - 1,25P_1 = P_2 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2,625P_1 = 147 \\ 118 - 1,25P_1 = P_2 \end{matrix}\right\} P_1 = 56, P_2 = 48$$

$$\text{ii. } TC_{Q_1} \equiv f_{Q_1} \equiv \frac{\partial TC}{\partial Q_1} \Rightarrow f_{Q_1Q_1} \equiv \frac{\partial}{\partial Q_1}(f_{Q_1}) \Rightarrow \frac{\partial^2 TC}{\partial Q_1^2} \equiv \frac{\partial}{\partial Q_1}\left(\frac{\partial TC}{\partial Q_1}\right) \Rightarrow f_{Q_1Q_1} = 2Q_1 = 112$$

$$TC_{Q_2} \equiv f_{Q_2} \equiv \frac{\partial TC}{\partial Q_2} \Rightarrow f_{Q_2Q_2} \equiv \frac{\partial}{\partial Q_2}(fQ_2) \Rightarrow \frac{\partial^2 TC}{\partial Q_2^2} \equiv \frac{\partial}{\partial Q_2}\left(\frac{\partial TC}{\partial Q_2}\right) \Rightarrow f_{Q_2Q_2} = 2Q_2 = 96$$

$$TC_{Q_1Q_2} \equiv f_{Q_1Q_2} \equiv \frac{\partial^2 TC}{\partial Q_1 \partial Q_2} \equiv \frac{\partial}{\partial Q_1}\left(\frac{\partial TC}{\partial Q_2}\right) = \frac{\partial}{\partial Q_1}(5Q_1 + 2Q_2) = 5$$

$$TC_{Q_2Q_1} \equiv f_{Q_2Q_1} \equiv \frac{\partial^2 TC}{\partial Q_2 \partial Q_1} \equiv \frac{\partial}{\partial Q_2}\left(\frac{\partial TC}{\partial Q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial Q_2}(2Q_1 + 5Q_2) = 5$$

Άρα, $f_{Q_1Q_1} = 112$, $f_{Q_2Q_2} = 96$, $f_{Q_1Q_2} = 5$ και $f_{Q_2Q_1} = 5$. Για να υπάρχει ελάχιστο σημείο πρέπει

$TC_{Q_1Q_1} TC_{Q_2Q_2} > (TC_{Q_1Q_2})^2 \Rightarrow 112 \cdot 96 > 5^2 \Rightarrow 10752 > 25$ και

$TC_{Q_1Q_1}, TC_{Q_2Q_2} > 0 \Rightarrow TC_{Q_1Q_1} = 112 > 0, TC_{Q_2Q_2} = 96 > 0$

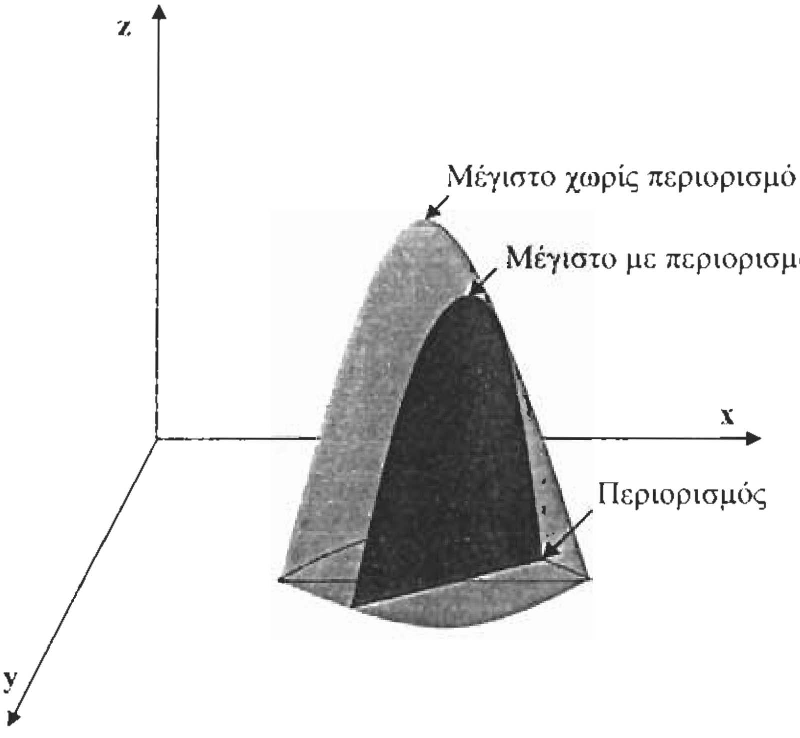
Επομένως η συνάρτηση $TC = Q_1^2 + 5Q_1Q_2 + Q_2^2$ ελαχιστοποιείται για $Q_1 = 112$ και $Q_2 = 96$, που σημαίνει ότι ο παραγωγός μεγιστοποιεί το κέρδος του στην παραγωγή 112 προϊόντων Q_1 και 96 προϊόντων Q_2.

2.2.1.3 Προβλήματα βελτιστοποίησης με περιορισμούς.

Στην ενότητα 2.2.1.2 αναλύθηκε η μέθοδος ελεύθερης βελτιστοποίησης (ή βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς) προβλημάτων με πολλές μεταβλητές. Τούτο σημαίνει ότι η επιλογή οποιασδήποτε ποσότητας της μεταβλητής x ή της μεταβλητής y δεν περιόριζε η μία την άλλη (ουσιαστικά υπάρχει ανεξαρτησία των x και y). Όταν όμως υπάρχουν περιορισμοί, τότε χάνεται η ανεξαρτησία των μεταβλητών με αποτέλεσμα να υπάρχει ταυτόχρονη και εξαρτημένη μεταβολή των ποσοτήτων των μεταβλητών, ούτως ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί.

Για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης με περιορισμούς χρησιμοποιείται η μέθοδος του Lagrange, η οποία βασίζεται σε δεσμευμένα ακρότατα. **Δεσμευμένα ακρότατα** καλούνται τα ακρότατα σημεία μίας συνάρτησης $z = f(x, y)$, όπου τα x,y υπόκεινται σε κάποιον περιορισμό, έστω $g(x, y) = c$ (σχ.5).

Σχήμα 5. Μέγιστο σημείο υπό περιορισμό



ΠΗΓΗ: Chiang A., "Fundamental Methods of Mathematical Economics", 3rd Edition, McGraw-HILL, Inc., 1984, p. 371

2.2.1.3.1 Μέθοδος Lagrange για δύο μεταβλητές και έναν περιορισμό

Έστω η συνάρτηση $z = f(x,y)$ υπό τον περιορισμό $g(x,y) = c$.

Το **πρώτο βήμα** της μεθόδου είναι ο επανασχηματισμός του περιορισμού έτσι ώστε να ισούται με το μηδέν, δηλ. $g(x,y) = c \Leftrightarrow c - g(x,y) = o$.

Έπειτα, τροποποιείται η συνάρτηση με τέτοιο τρόπο ώστε να εμπεριέχει και τον περιορισμό. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση του πολλαπλασιαστή λ του Lagrange. Η νέα συνάρτηση έχει τη μορφή $Z = z + \lambda(g) \Rightarrow Z = f(x,y) - \lambda[c - g(x,y)]$.

Το **επόμενο βήμα** της μεθόδου είναι να βρεθούν τα ακρότατα της Ζ. Τούτο πρακτικά σημαίνει ότι πρέπει να βρεθούν οι πρώτες μερικές παράγωγοι των μεταβλητών συνάρτησης και του πολλαπλασιαστή του Lagrange (λ) και να εξισωθούν με το μηδέν (Απαραίτητη συνθήκη βελτιστοποίησης).

$Z_x = f_x - \lambda g_x = 0$

$Z_y = f_y - \lambda g_y = 0$

$Z_\lambda = c - g(x, y) = 0$

Το **τελευταίο βήμα** είναι η εύρεση των δεύτερων παραγώγων των μεταβλητών και του πολλαπλασιαστή του Lagrange (Ικανή συνθήκη βελτιστοποίησης).

$d^2 z = Z_{xx}dx^2 + Z_{xy}dxdy + Z_{yx}dydx + Z_{yy}dy^2$ όπου, $Z_{xx} = f_{xx} - \lambda g_{xx}$, $Z_{yy} = f_{yy} - \lambda g_{yy}$ και $Z_{xy} = f_{xy} - \lambda g_{xy} = Z_{yx}$.

Δεδομένου ότι η ορίζουσα του Hesse είναι $D = \begin{vmatrix} Z_{yy} & Z_{yx} & g_y \\ Z_{xy} & Z_{xx} & g_x \\ g_y & g_x & 0 \end{vmatrix}$, ισχύει ότι:

i. $F_{xx} < 0$ και $D > 0$ υπάρχει ολικό μέγιστο

ii. $F_{xx} > 0$ και $D < 0$ υπάρχει ολικό ελάχιστο

Ο τρόπος εύρεσης της ορίζουσας δίνεται από το ανάπτυγμα κατά γραμμή ή κατά στήλη. Παραδείγματος χάριν, έστω η **ορίζουσα τρίτης** τάξης $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Για να βρεθεί η ορίζουσα πρέπει να ξαναγραφτούν οι δύο πρώτες στήλες και να προστεθούν τα γινόμενα ως εξής: $\begin{matrix} + & + & + & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & 0 & 0 \end{matrix}$. Έτσι είναι

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Η εύρεση των τοπικών ακρότατων με τους πολλαπλασιαστές του Lagrange είναι αρκετά χρονοβόρα και επίπονη.

Παράδειγμα 1. Η μέθοδος Lagrange σε προβλήματα μεγιστοποίησης.

Έστω η συνάρτηση παραγωγής $Q = F(L,K) = -2L^2 - 2K^2 + 2L + 6K + 20$, όπου L, K: η εργασία και το κεφάλαιο αντίστοιχα. Δεδομένου ότι $C = g(L,K) = 4L + 6K$, να βρεθούν οι τιμές των συντελεστών εργασία και κεφάλαιο στις οποίες μεγιστοποιείται η παραγωγή όταν η επιχείρηση διατίθεται να δαπανήσει € 24.

Ο περιορισμός είναι $4L + 6K = 24 \Rightarrow 24 - 4L - 6K = 0$. Επομένως η συνάρτηση του Lagrange γράφεται $Z = -2L^2 - 2K^2 + 2L + 6K + 20 + \lambda(24 - 4L - 6K)$.

Θέτοντας τις πρώτες παραγώγους ίσες με το μηδέν είναι:

$Z_L = f_L - \lambda g_L = 0 \Rightarrow -4L + 2 - 4\lambda = 0$

$Z_K = f_K - \lambda g_K = 0 \Rightarrow -4K + 6 - 6\lambda = 0$

$Z_\lambda = 24 - 4L - 6K = 0$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε $\lambda = -1$, $L = 1{,}5$ και $K = 3$.

Έπειτα πρέπει να βρεθούν οι δεύτερες παράγωγοι. Έτσι, είναι:

$Z_{LL} = Z(Z_L) = -4$

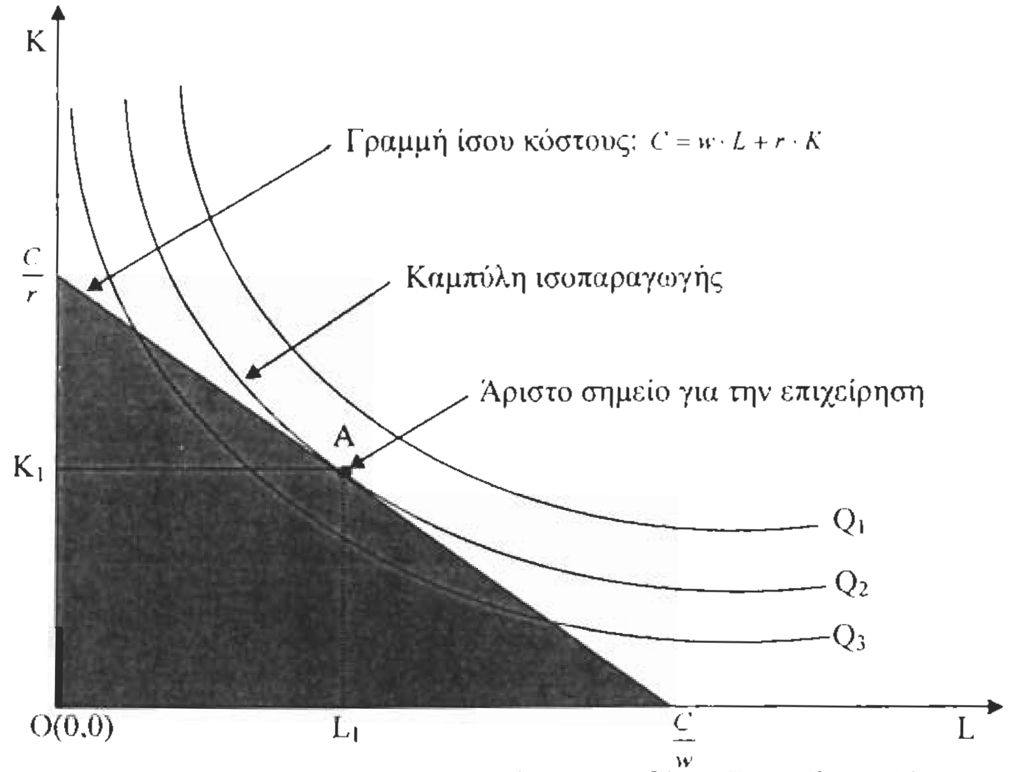
$Z_{KK} = Z(Z_K) = -4$

$Z_{KL} = Z_K(Z_L) = 0$

Επομένως η ορίζουσα του Hesse είναι: $\begin{vmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & -6 \\ -4 & -6 & 0 \end{vmatrix} > 0$

Διαγραμματικά η παρουσίαση της μεγιστοποίησης της συνάρτησης παραγωγής υπό τον περιορισμό του κόστους, δίδεται στο σχ.6.

Σχήμα 6. Συνάρτηση μεγιστοποίησης της παραγωγής υπό τον περιορισμό του κόστους



ΠΗΓΗ: Τραχανάς Δ., «Οικονομική της Διοίκησης», εκδόσεις Σταμούλης, Αθήνα 1994, σελ.269

Καμπύλη ισοπαραγωγής είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που απεικονίζουν ίση ποσότητα προϊόντος.

__**Παράδειγμα 2.**__ Η μέθοδος Lagrange σε προβλήματα ελαχιστοποίησης.

Έστω η προηγούμενη συνάρτηση παραγωγής $Q = -2L^2 - 2K^2 + 2L + 6K + 20$, και η επιθυμητή ποσότητα παραγωγής είναι $Q_0 = 18{,}5$ μονάδες. Ζητείται να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση κόστους $C = 4L + 6K$.

Ο περιορισμός είναι:

$-2L^2 - 2K^2 + 2L + 6K + 20 = 18{,}5 \Rightarrow 18{,}5 - \left(-2L^2 - 2K^2 + 2L + 6K + 20\right) = 0$ και η συνάρτηση του Lagrange $Z = 4L + 6K - \lambda\left(18{,}5 + 2L^2 + 2K^2 - 2L - 6K - 20\right)$

Οι πρώτες παράγωγοι είναι

$Z_L = 0 \Rightarrow 4 - 4L\lambda + 2 = 0$

$Z_K = 0 \Rightarrow 6 - 4K\lambda + 6 = 0$

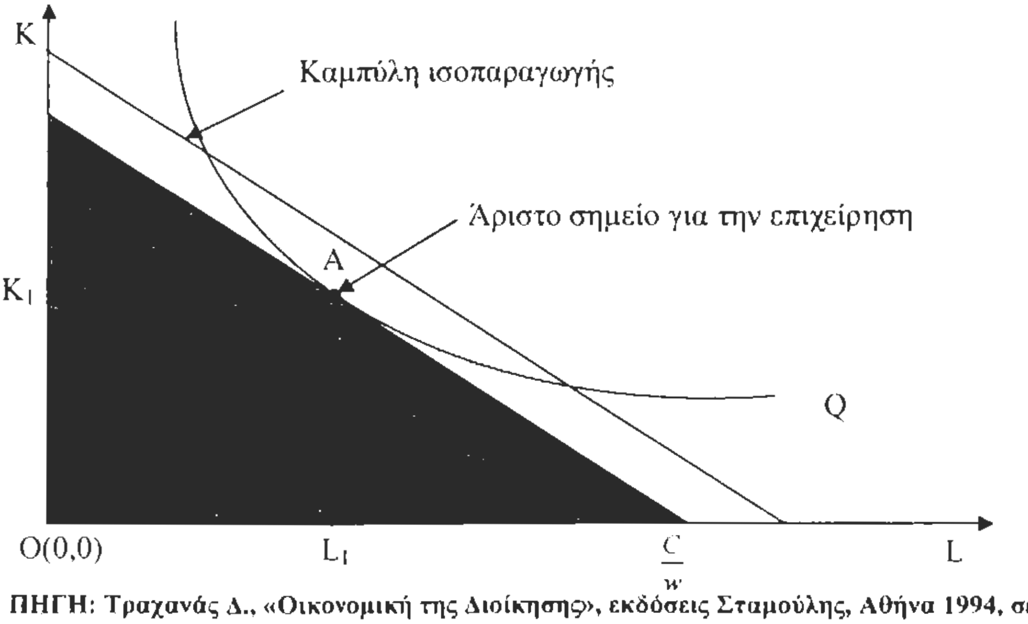
$Z_{\lambda} = 18,5 + 2L^2 + 2K^2 - 2L - 6K - 20 = 0$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε ότι: $L = 1,5$, $K = 3$ και $\lambda = 1$

Η ορίζουσα του Hesse είναι αρνητική κι επομένως υπάρχει ελάχιστο σημείο.

Διαγραμματικά το σημείο στο οποίο ελαχιστοποιείται το κόστος υπό τον περιορισμό της παραγωγής φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (σχ.7).

Σχήμα 7. Συνάρτηση ελαχιστοποίησης κόστους υπό τον περιορισμό παραγωγής



ΠΗΓΗ: Τραχανάς Δ., «Οικονομική της Διοίκησης», εκδόσεις Σταμούλης, Αθήνα 1994, σελ.273

2.2.2.0 Δυναμική ανάλυση

Η δυναμική ανάλυση, σε αντίθεση με τη στατική ανάλυση, αναφέρεται στον προσδιορισμό του τρόπου με τον οποίο μεταβάλλονται οι μεταβλητές ενός προβλήματος σε σχέση με το χρόνο και στο κατά πόσο μετά από επαρκή χρόνο οι μεταβλητές αυτές θα συγκλίνουν σε κάποιες σταθερές τιμές (ισορροπίας).

Βασικό χαρακτηριστικό της δυναμικής ανάλυσης είναι η χρονολόγηση των μεταβλητών, η οποία εισάγει την ακριβή θεώρηση του χρόνου στο πρόβλημα. Τούτο μπορεί να επιτευχθεί με δύο τρόπους, θεωρώντας το χρόνο ως *συνεχή* μεταβλητή ή ως *μη συνεχή* μεταβλητή. Όταν αναφερόμαστε σε συνεχείς μεταβλητές εννοούμε ότι υπόκεινται σε μεταβολές σε κάθε σημείο του χρόνου, ενώ όταν αναφερόμαστε σε μη συνεχείς τότε οι μεταβολές συμβαίνουν μία μόνο φορά.

Στα προβλήματα στατικής βελτιστοποίησης σκοπός είναι να βρεθούν συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών που μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν μία αντικειμενική συνάρτηση, ενώ στα προβλήματα δυναμικής βελτιστοποίησης αναζητείται μια καμπύλη $x(t)$, η οποία μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί ένα ολοκλήρωμα. Επίσης στη δυναμική ανάλυση βρίσκουν εφαρμογή και οι διαφορικές εξισώσεις.

2.2.2.0.1 Ολοκληρώματα

2.2.2.0.1.1 Ορισμένο ολοκλήρωμα

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι *συνεχής* στο [a, b]. Με τα σημεία $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα [a, b] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta - a}{\nu}$ (βλ. παράρτημα 2, σχ.1)

Έστω ένα αυθαίρετο διάστημα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1,2,...,\nu\}$. Το άθροισμα είναι: $S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + ... + f(\xi_\kappa)\Delta x + ... + f(\xi_\nu)\Delta x$ το οποίο, εν συντομία, γράφεται ως εξής: $S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$

Αποδεικνύεται ότι «το όριο του αθροίσματος S_ν», δηλαδή το $\lim\limits_{\nu \to \infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ υπάρχει στο R και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ. Το όριο αυτό καλείται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β και συμβολίζεται με $\int_\beta^a f(x)dx$. Δηλαδή:

$$\int_\beta^a f(x)dx = \lim_{\nu \to \infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$$

<u>**Παρατήρηση:**</u> Το ολοκλήρωμα από το α έως το β είναι ίσο με το εμβαδόν που περικλείεται ανάμεσα στην f(x) και στον άξονα του x. Το ολοκλήρωμα είναι στην ουσία επέκταση των αθροισμάτων σε συνεχή διαστήματα.

2.2.2.0.1.2 Αόριστο ολοκλήρωμα

Το σύνολο όλων των παραγουσών[1] μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ** και συμβολίζεται με $\int f(x)dx$. Δηλαδή:

$\int f(x)dx = F(x) + c$, $c \in R$, όπου F μια παράγουσα της f στο Δ.

2.2.2.0.1.3 Σχέση ορισμένου και αόριστου ολοκληρώματος

Η σχέση του ορισμένου με το αόριστο ολοκλήρωμα δίνεται από το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού σύμφωνα με το οποίο «εάν η συνάρτηση *f* είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και *F(x)* είναι αόριστο ολοκλήρωμα της *f*, δηλαδή εάν $F'(x) = f(x)$ ή $F(x) = \int f(x)dx$, τότε $\int_a^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(a)$.

2.2.2.0.1.4 Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Επειδή σε πολλές περιπτώσεις είναι δύσκολο να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα μια συνάρτησης, ο υπολογισμός του γίνεται απλούστερος με τη βοήθεια των μεθόδων ολοκλήρωσης. Οι **μέθοδοι ολοκλήρωσης** είναι οι εξής:

[1] Παράγουσα ή αντιπαράγωγος μίας συνάρτησης f(x) ορισμένη στο D(f) καλείται η συνάρτηση F(x) για την οποία ισχύει F΄(x) =f(x).

i.**Ολοκλήρωση κατά παράγοντες.** Η μέθοδος αυτή εκφράζεται με τον τύπο:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx,$$

που είναι συνέπεια του κανόνα παραγώγισης του γινομένου δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f,g σε ένα διάστημα Δ. Για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow f(x)g'(x) = \left(f(x)g(x)\right)' - f'(x)g(x)$$

Επομένως: $\int f(x)g'(x)dx = \int \left(f(x)g(x)\right)' dx - \int f'(x)g(x)dx$ το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + c - \int f'(x)g(x)dx$$

Επειδή το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους της ανωτέρω συνάρτησης περιέχει μια σταθερά ολοκλήρωσης το c μπορεί να παραλειφθεί.

i.**Ολοκλήρωση με αντικατάσταση (ή με αλλαγή μεταβλητής).** Με τη μέθοδο αυτή υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής $\int f(g(x))g'(x)dx$. Η μέθοδος ολοκλήρωσης με αντικατάσταση εκφράζεται με τον τύπο:

$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$, όπου $u=g(x)$ και $du=g'(x)dx$.

Ο παραπάνω τύπος χρησιμοποιείται με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα $\int f(u)du$ του δεύτερου μέλους υπολογίζεται πιο εύκολα.

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος γίνεται ως εξής. Αν η F είναι μια παράγουσα της f, τότε $F(x) = f(g(x))g'(x)$.

Έπειτα θέτουμε $u = g(x)$ και, τέλος, υπολογίζουμε $\int G(x)dx = \int f(u)du$

Το παραπάνω θεώρημα βοηθάει στην απλοποίηση των ολοκληρωμάτων, χρησιμοποιώντας τις παραγώγους σύνθετων συναρτήσεων.

2.2.2.0.2 Διαφορικές εξισώσεις

Διαφορική εξίσωση (δ. ε.) καλείται κάθε εξίσωση που συνδέει μια ανεξάρτητη μεταβλητή x και μια εξαρτημένη, άγνωστη συνάρτηση, $y = f(x)$ και τις παραγώγους της εξαρτημένης ως προς την ανεξάρτητη, δηλαδή

$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$, όπου n=1,2,... , $y = y(x)$ και $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ η n-οστή παράγωγος της συνάρτησης y.

Όταν η άγνωστη συνάρτηση είναι μίας μεταβλητής, τότε η εξίσωση ονομάζεται **συνήθης διαφορική εξίσωση**, ενώ όταν είναι συνάρτηση πολλών μεταβλητών και στην εξίσωση περιέχονται μερικές παράγωγοι ως προς περισσότερες από μία μεταβλητές ονομάζεται **μερική διαφορική εξίσωση**.

Τάξη της διαφορικής εξίσωσης καλείται η τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση.
Βαθμός της διαφορικής εξίσωσης καλείται η δύναμη με την οποία εμφανίζεται η μεγαλύτερης τάξης παράγωγος της διαφορικής εξίσωσης.

Λύση της διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται κάθε συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in (a, \beta) \subset R$, η οποία επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση.

Στη συνέχεια θα παρουσιασθούν οι μέθοδοι επίλυσης των ακόλουθων μορφών διαφορικών εξισώσεων:

i. Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών.
ii. Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις.
iii. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.
iv. Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις.
v. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές.
vi. Μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις.

2.2.2.0.2.1 Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών

Διαφορική εξίσωση με χωριζόμενες μεταβλητές καλείται κάθε εξίσωση της μορφής $a(y) \cdot y' = \beta(x)$, όπου $y = f(x)$ η άγνωστη συνάρτηση, $a(y)$ η συνάρτηση του y και $\beta(x)$ συνάρτηση του x.

Για την επίλυση της συγκεκριμένης εξίσωσης ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της ως προς x.

$\int a(y)y'dx = \int \beta(x)dx$. (1)

Επειδή $y = f(x)$, είναι $dy = f'(x)dx = y'dx$. Επομένως ισχύει ότι:

$\int a(y)dy = \int \beta(x)dx$. (2)

Αν A(y) μία παράγουσα της α(y)και B(x) μία παράγουσα της β(x), τότε η ανωτέρω εξίσωση γράφεται ως: $A(y) = B(x) + c$, $c \in R$.

Η ισότητα (2) δίνει τη δυνατότητα να γράφεται η διαφορική εξίσωση (1) στην «άτυπη» μορφή της: $a(y)dy = \beta(x)dx$.

__Παράδειγμα__

Έστω η διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών $x^2(y^2-1) - y(x^3-1)y' = 0$.

Για την επίλυσή της εργαζόμαστε ως εξής:

Αντικαθιστώντας $y' = \frac{dy}{dx}$ έχουμε $x^2(y^2-1) - y(x^3-1)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$

$$x^2(y^2-1)dx = y(x^3-1)dy \Rightarrow \frac{x^2}{x^3-1}dx = \frac{y}{y^2-1}dy.$$

Ολοκληρώνοντας ισχύει ότι

$$\int \frac{x^2}{x^3-1}dx + c = \int \frac{y}{y^2-1}dy \Rightarrow \frac{1}{3}\log|x^3+1| + c = \frac{1}{2}\log|y^2-1|$$

Αντικαθιστώντας με $c = \frac{1}{6}\log c$ έχουμε $|y^2-1|^3 = c(x^2-1)^2$, που είναι το γενικό ολοκλήρωμα της αρχικής συνάρτησης.

2.2.2.0.2.2 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Ομογενής διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης καλείται κάθε εξίσωση της μορφής

$f(x,y)=\frac{dy}{dx}$, όπου η συνάρτηση *f(x,y)* εξαρτάται μόνο από το πηλίκο $\frac{y}{x}$. Για την επίλυσή της γίνεται η αντικατάσταση $u=\frac{y}{x}$, η οποία συνεπάγεται ότι $x\frac{du}{dx}+u=F(u)\Rightarrow\frac{dx}{x}=\frac{du}{F(u)-u}$.

Μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι έχει δημιουργηθεί μια διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών.

Μια διαφορική εξίσωση της μορφής $f(x,y)dx+g(x,y)dy=0$ καλείται επίσης **ομογενής** εάν οι συναρτήσεις f(x,y) και g(x,y) είναι ομογενείς του ίδιου βαθμού (m), δηλ. ισχύει

$$f(x,y)=x^m A\left(\frac{y}{x}\right) \text{ και } g(x,y)=x^m B\left(\frac{y}{x}\right)$$

Οπότε έχουμε $f(x,y)dx+g(x,y)dy=0\Rightarrow y'=-\frac{A\left(\frac{y}{x}\right)}{B\left(\frac{y}{x}\right)}$

Από την παραπάνω συνάρτηση μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι η ομογενής διαφορική εξίσωση έχει μετατραπεί σε διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και μπορεί να επιλυθεί όπως προαναφέρθηκε.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω ότι ζητείται να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση $(x^2+y^2)dx+3xydy=0$. Με βάση τα ως άνω αναφερθέντα ισχύει ότι:

$$f(x,y)=(x^2+y^2)=x^2\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) \text{ και } g(x,y)=3xy=x^2\left(3\frac{y}{x}\right).$$

Επομένως καταλήξαμε σε μια διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών. Αντικαθιστούμε με $u=\frac{y}{x}$ και έχουμε

$$\left(x^2+y^2\right)dx+3xydy=0\Rightarrow\left(x^2+x^2u^2\right)dx+3xux\left(xdu+udx\right)=0\Rightarrow$$
$$x^2\left(1+u^2\right)dx+3x^2u\left(xdu+udx\right)=0\Rightarrow$$
$$\left(1+u^2\right)dx+3u\left(xdu+udx\right)=0\Rightarrow dx+u^2dx+3uxdu+3u^2dx=0\Rightarrow$$
$$\left(1+u^2+3u^2\right)dx+3uxdx=0\Rightarrow\left(1+4u^2\right)dx+3uxdu=0\Rightarrow\frac{3u}{4u^2+1}du=-\frac{dx}{x}\Rightarrow$$
$$\int\frac{3u}{4u^2+1}=-\int\frac{dx}{x}+c\Rightarrow\frac{3}{8}\log\left(4u^2+1\right)=-\log|x|+c\Rightarrow3\log\left(4u^2+1\right)+8\log|x|=8c\Rightarrow$$
$$\log\left[\left(4u^2+1\right)^3|x|^8\right]=8c.$$

Θέτοντας $u=\frac{y}{x}$ και 8c=logc ισχύει $x^2\left(4y^2+X^2\right)^3=c$, που είναι το γενικό ολοκλήρωμα της διαφορικής εξίσωσης.

2.2.2.0.2.3 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης καλείται κάθε εξίσωση της μορφής $y'+a(x)y=\beta(x)$, όπου $y=f(x)$η άγνωστη συνάρτηση και $a(x),\beta(x)$ συναρτήσεις του x.

Για την επίλυση της εξίσωσης αυτής πρέπει, αρχικά, να βρεθεί μια παράγουσα A(x) της συνάρτησης α(x) και έπειτα να πολλαπλασιαστούν τα μέλη της εξίσωσης με $e^{A(x)}$.

Έτσι, ισχύει διαδοχικά ότι:

$$y'e^{A(x)}+a(x)e^{A(x)}\cdot y=\beta(x)e^{A(x)}\Rightarrow y'e^{A(x)}+A'(x)e^{A(x)}\cdot y=\beta(x)e^{A(x)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y'e^{A(x)}+\left(e^{A(x)}\right)'\cdot y=\beta(x)e^{A(x)}\Rightarrow\left(ye^{A(x)}\right)'=\beta(x)e^{A(x)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\int\left(ye^{A(x)}\right)'dx=\int\beta(x)e^{A(x)}dx\Rightarrow ye^{A(x)}=B(x)+c,$$

όπου B(x) μία παράγωγος της $\beta(x)e^{A(x)}$.

<u>Παράδειγμα</u>

Ζητείται η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης $y'+\frac{2}{\tan x}y=\frac{1}{\sin x}$.

Η γενική λύση δίνεται από τη σχέση

$$y(x)=e^{\int \frac{2}{\tan x}dx}\left[c+\int \frac{1}{\sin x}e^{\int -\frac{2}{\tan x}dx}\right]=e^{-2\log|\sin x|}\left[c+\int \frac{1}{\sin x}e^{2\log|\sin x|}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sin^2 x}\left[c+\int \sin x dx\right]=\frac{1}{\sin^2 x}(c-\cos x)$$

2.2.2.0.2.4 Ακριβείς ή πλήρεις διαφορικές εξισώσεις

Μια διαφορική εξίσωση που έχει τη μορφή: $\mathrm{M}(x,y)dx+\mathrm{N}(x,y)dy=0$, και ισχύει $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}=\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$, καλείται πλήρης διαφορική εξίσωση.

Η γενική λύση δίνεται από τη σχέση

$\int_{x_0}^{x} \mathrm{M}(t,y)dt+\int_{y_0}^{y} \mathrm{N}(x_0,x)dx=c$, όπου τα x_0, y_0 ανήκουν στο πεδίο ορισμού.

<u>**Παράδειγμα**</u>

Έστω η εξίσωση $(e^x+y+\sin y)dx+(e^y+x+x\cos y)dy=0$. Παρατηρούμε ότι πρόκειται για μία ακριβή διαφορική εξίσωση, για την επίλυση της οποίας εργαζόμαστε ως εξής:

$M(x,y)=(e^x+y+\sin y)$ και $N(x,y)=(e^y+x+x\cos y)dy$

Επειδή $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=1+\cos y$ και $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=1+\cos y$, η γενική λύση της εξίσωσης δίνεται από τη σχέση:

$$\int_0^x (e^t+y+\sin y)dt+\int_0^y (e^z+0+0\cos z)dz=c \Leftrightarrow e^x+(y+\sin y)x+e^y=c$$

2.2.2.0.2.5 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Έστω η γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές $Ly(x)=ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0$, όπου a, b, c πραγματικοί αριθμοί με $a\neq 0$.

Ζητείται να βρεθεί η λύση της μορφής $y(x)=e^{rx}$. Τότε ισχύει $y'(x)=re^{rx}$ και $y''(x)=r^2e^{rx}$.

Αντικαθιστώντας στην αρχική διαφορική εξίσωση είναι:

$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \Rightarrow ar^2 + br + c = 0$, το οποίο είναι πολυώνυμο και καλείται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** της αρχικής διαφορικής εξίσωσης, ενώ η εξίσωση καλείται **χαρακτηριστική αλγεβρική εξίσωση** της αρχικής διαφορικής.

Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις:

i. Αν $b^2 - 4ac > 0$, η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, έστω r_1, r_2. Τότε υπάρχουν δύο ανεξάρτητες λύσεις e^{r_1x}, e^{r_2x} και η γενική λύση είναι η $y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$, όπου c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

ii. Αν $b^2 - 4ac = 0$, η χαρακτηριστική εξίσωση έχει μία πραγματική διπλή ρίζα, έστω $r_1 = r_2 = r$. Τότε υπάρχουν δύο ανεξάρτητες λύσεις e^{rx}, xe^{rx} και η γενική λύση είναι η $y(x) = (c_1 + c_2x)e^{rx}$, όπου c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

iii. Αν $b^2 - 4ac < 0$, η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες, έστω $r_1 = \lambda + i\mu, r_2 = \lambda - i\mu$. Τότε υπάρχουν δύο ανεξάρτητες λύσεις e^{r_1x}, e^{r_2x} και η γενική λύση είναι η $y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} = e^{\lambda x}(A\cos\mu x + B\sin\mu x)$, όπου A, B αυθαίρετες σταθερές.

<u>Παράδειγμα</u>

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Αντικαθιστώντας $y(x) = e^{rx}$, $y'(x) = re^{rx}$ και $y''(x) = r^2e^{rx}$ έχουμε:

$r^2e^{rx} - 3re^{rx} + 2e^{rx} = 0$. Το πολυώνυμο αυτό ανήκει στην πρώτη κατηγορία, δηλαδή ισχύει ότι $b^2 - 4ac > 0$. Τούτο σημαίνει ότι η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες $r_1 = 1, r_2 = 2$.

Επομένως δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι οι e^x, e^{2x} και η γενική λύση είναι $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$.

2.2.2.0.2.6 Μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Έστω η μη ομογενής διαφορική εξίσωση n τάξης με σταθερούς συντελεστές $Ly(x) = a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}y'(x) + a_n y(x) = g(x)$, όπου a_i, $i=0,1,2,\ldots,n$ πραγματικοί αριθμοί με $a_0 \neq 0$.

Αν $y_\mu(x)$ είναι μία λύση της $Ly(x) = g(x)$ και $y_{o\mu}(x)$είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης, τότε η γενική λύση της $Ly(x) = g(x)$ δίνεται από τη σχέση $y(x) = y_\mu(x) + y_{o\mu}(x)$.

Σύμφωνα με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων (καλείται και μέθοδος Lagrange) ισχύει ότι $y_{o\mu}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$, και

$y_\mu(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \ldots + u_n(x)y_n(x)$

όπου $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ οι ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης. Αντικαθιστώντας την $y_\mu(x)$ στην αρχική εξίσωση καταλήγουμε σε ένα σύστημα του οποίου οι λύση δίνεται από τη σχέση $u'_m(x) = \dfrac{W_m(x)}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x)} g(x)$,

όπου m=1,2,...,n και W η ορίζουσα Wronski των $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$.

Η γενική λύση της αρχικής μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης σταθερών συντελεστών δίνεται από τη σχέση:

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) + u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \ldots + u_n(x)y_n(x)$.

<u>Παράδειγμα</u>

Ζητείται η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης $y'''(x) + y'(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

Η αντίστοιχη ομογενείς είναι η $y'''(x) + y'(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $r^3 + r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = i, r_3 = -i$ και η γενική λύση είναι η $y_{o\mu}(x) = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$.

Από την αντικατάσταση και την επίλυση του συστήματος που προκύπτει ισχύει $u_1'(x) = \frac{1}{\sin x}, u_2'x = -\frac{\cos x}{\sin x}, u_3'x = -1$. Επομένως, με απλή ολοκλήρωση προκύπτει η $y_\mu(x) = \ln\tan\frac{x}{2} - \cos x \ln\sin x - x\sin x$.

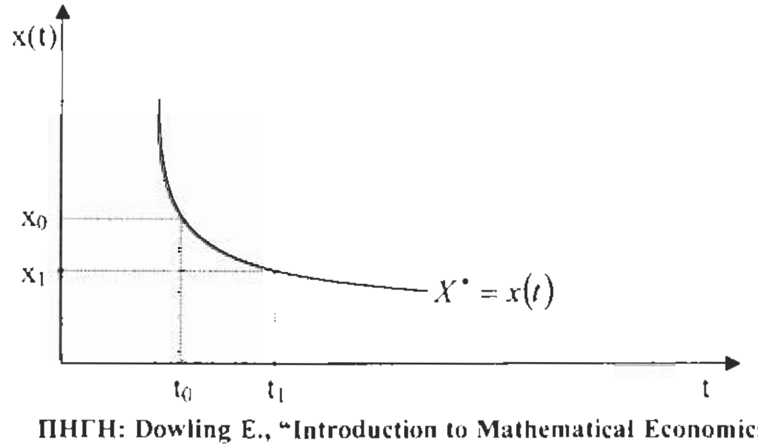
Τελικά η γενική λύση της $y'''(x) + y'(x) = \frac{1}{\sin x}$ είναι η

$$y(x) = y_\mu(x) + y_{o\mu}(x) \Rightarrow y(x) = \ln\tan\frac{x}{2} - \cos x \ln\sin x - x\sin x + c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x$$

2.2.2.1 Προβλήματα βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς

Έστω το συναρτησιακό $\int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t), \dot{x}(t)]dt$, όπου $t_0 = 0$, $t_1 = T$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ και $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$. Ζητείται να βρεθεί η καμπύλη $X^* = x(t)$, η οποία βελτιστοποιεί το ανωτέρω ολοκλήρωμα.

Σχήμα 8. Απόσταση μεταξύ δύο σημείων σε ένα επίπεδο



ΠΗΓΗ: Dowling E., "Introduction to Mathematical Economics", 3rd edition, McGraw-Hill, 2001, p.461

Απαραίτητη συνθήκη βελτιστοποίησης είναι η εξίσωση του Euler, η οποία είναι η:
$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)$, η οποία μπορεί να γραφεί και ως: $F_x = F_{\dot{x}t} + F_{\dot{x}x}(\dot{x}) + F_{\dot{x}\dot{x}}(\ddot{x})$

Αναγκαία συνθήκη βελτιστοποίησης δεδομένης της ορίζουσας $D = \begin{vmatrix} Fxx & Fx\dot{x} \\ F\dot{x}x & F\dot{x}\dot{x} \end{vmatrix}$, είναι:

1. α. $F_{xx} < 0$ και $D > 0$ υπάρχει ολικό μέγιστο

   β. $F_{xx} \leq 0$ και $D \geq 0$, για όλες τις διατάξεις των μεταβλητών, υπάρχει τοπικό μέγιστο

2. α. $F_{xx} > 0$ και $D > 0$ υπάρχει ολικό ελάχιστο

   β. $F_{xx} \geq 0$ και $D \geq 0$, για όλες τις διατάξεις των μεταβλητών, υπάρχει τοπικό ελάχιστο.

Παράδειγμα

Έστω ότι ζητείται να βελτιστοποιηθεί το $\int_0^T \left(6x^2e^{3t} + 4t\dot{x}\right)dt$.

Χρησιμοποιώντας την ανωτέρω περιγραφόμενη διαδικασία είναι:

$F = 6x^2e^{3t} + 4t\dot{x}$. Με βάση τη συνθήκη του Euler $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)$ είναι $\frac{\partial F}{\partial x} = 12xe^{3t}$

και $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 4t$. Άρα ισχύει ότι $12xe^{3t} = \frac{d}{dt}(4t)$.

Όμως $\frac{d}{dt}(4t) = 4$, άρα $12xe^{3t} = 4$.

Δεδομένου ότι δεν υπάρχουν οι όροι $\dot{x}, \ddot{x}$ λύνουμε ως προς x: $x(t) = \frac{1}{3}e^{-3t} \geq 0$.

Από την ορίζουσα $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12e^{3t} \end{vmatrix}$ παρατηρούμε ότι $D \geq 0$, άρα υπάρχει τοπικό ελάχιστο.

2.2.2.2 Προβλήματα βελτιστοποίησης με περιορισμούς

Στα προβλήματα δυναμικής βελτιστοποίησης με περιορισμούς υπάρχει μόνο μία συνθήκη βελτιστοποίησης, η οποία είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή.

Για να βρεθεί η συνάρτηση $x(t)$ που βελτιστοποιεί ένα ολοκλήρωμα $\int_0^T F[t, x(t), \dot{x}(t)]dt$, υπό τον περιορισμό $\int_0^T G[t, x(t), \dot{x}(t)]dt = k$, όπου k είναι μία σταθερά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του Lagrange.

Επομένως, η συνάρτηση του Lagrange είναι $\int_0^T (F + \lambda G)dt$.

Η αναγκαία, αλλά όχι ικανή συνθήκη ύπαρξης ακρότατων, είναι η εξίσωση του Euler $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\right)$, όπου $H = F = \lambda G$.

<u>Παράδειγμα</u>

Η ζήτηση ενός μονοπωλιακού προϊόντος $x(t)$ εξαρτάται από την τιμή $P(t)$ του προϊόντος και από τον ρυθμό μεταβολής της $\dot{P}(t) = \frac{dPt}{dt}$ με τη σχέση: $x(t) = 2P(t) + 4\dot{P}(t) + 8$.

Το κόστος παραγωγής $C(x)$ δίνεται από τη συνάρτηση: $C(x) = 5x^2 + 10x + 2$

Έστω ότι η αρχική τιμή είναι $P(0) = P_0$ και η επιθυμητή τιμή τη χρονική στιγμή Τ είναι $P(T) = P_1$, να βρεθεί η τιμολογιακή πολιτική για το χρονικό διάστημα $0 \le t \le T$, η οποία βελτιστοποιεί το κέρδος, δηλ. να μεγιστοποιηθεί το $\int_0^T [P(t)x(t) - C(x)]dt$.

Το ολοκλήρωμα που πρέπει να μεγιστοποιηθεί είναι το

$$\int_0^T [P(t)x(t) - C(x)]dt = \int_0^T \left\{P(2P + 4\dot{P} + 8) - 5(2P + 4\dot{P} + 8)^2 - 10(2P + 4\dot{P} + 8) - 2\right\}dt =$$

$$\int_0^T \begin{pmatrix} 2P^2 + 4P\dot{P} + 8P - 20P^2 - 40P\dot{P} - 80P - 40P\dot{P} - 80\dot{P}^2 - 160\dot{P} - 80P - 160\dot{P} - 320 \\ - 20P - 40\dot{P} - 80 - 2 \end{pmatrix} dt =$$

$$\int_0^T (-18P^2 - 76P\dot{P} - 172P - 80\dot{P}^2 - 360\dot{P} - 402)dt$$

Θέτω ως $F = \int_0^T (-18P^2 - 76P\dot{P} - 172P - 80\dot{P}^2 - 360\dot{P} - 402)dt$. Είναι

$F_P = -36P - 76\dot{P} - 172$ και $F_{\dot{P}} = -160\dot{P} - 76P - 360$

Σύμφωνα με την εξίσωση του Euler ισχύει:

$$-36P-76\dot{P}-172=\frac{d}{dt}\left(-160\dot{P}-76P-360\right)\Rightarrow$$

$$-36P-76\dot{P}-172=-76\dot{P}-160\ddot{P}\Rightarrow 160\ddot{P}-36P=172\Rightarrow \ddot{P}-0{,}225P=1{,}075$$

$$\Rightarrow \ddot{P}=1{,}075+0{,}225P$$

Παρατηρούμε ότι καταλήξαμε σε μία γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η λύση της γίνεται όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 2.2.2.0.2.5.

Έτσι ισχύει ότι $Pp=\dfrac{\frac{76}{160}}{-1440}t=\dfrac{76}{-230400}t\approx 3{,}299t$

Άρα $r_1, r_2=\dfrac{0\pm\sqrt{0-4\left(\frac{-18}{80}\right)}}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{18}{80}}=\pm\sqrt{0{,}225}=\pm 0{,}474$

Επομένως η λύση είναι η $P(t)=A_1\exp 0{,}474t-A_2\exp 0{,}474t+3{,}299$, όπου A_1 και A_2: αυθαίρετες μεταβλητές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}

3.1.0.0 Προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού

Τα προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού διαφέρουν από τα προβλήματα κλασσικής αριστοποίησης στο ότι οι περιορισμοί των προβλημάτων είναι **ανισότητες** και όχι ισότητες.

Ο μαθηματικός προγραμματισμός χρησιμοποιείται όταν αναζητείται η βέλτιστη τιμή μίας συνάρτησης άγνωστων μεταβλητών, οι οποίες υπόκεινται σε κάποιους περιορισμούς. Ανάλογα με τις μεθόδους και τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται για της βελτιστοποίηση, ο μαθηματικός προγραμματισμός διακρίνεται σε:

i. Γραμμικό Προγραμματισμό
ii. Μη Γραμμικό Προγραμματισμό
iii. Χρονικό Προγραμματισμό και
iv. Δυναμικό Προγραμματισμό.

Στις επόμενες ενότητες αναλύεται ο Γραμμικός και ο Δυναμικός Προγραμματισμός.

3.2.0.0 Γραμμικός Προγραμματισμός (Γ.Π.)

Η πιο απλή μέθοδος του μαθηματικού προγραμματισμού θεωρείται ο Γραμμικός Προγραμματισμός (Γ.Π.). Το όνομα του οφείλεται στο γεγονός ότι τόσο η συνάρτηση που πρόκειται να βελτιστοποιηθεί, όσο και οι περιορισμοί είναι γραμμικής μορφής.

Ο γραμμικός προγραμματισμός αναπτύχθηκε κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου στην Αμερική, η οποία προσπαθούσε να επιλύσει προβλήματα αριστοποίησης που αφορούσαν το στρατό της κάτω από ορισμένους περιορισμούς. Με την πάροδο του χρόνου, όμως, η εφαρμογή του επεκτάθηκε και σε βιομηχανικές και επιχειρηματικές δραστηριότητες.

Μεγάλη συμβολή στη διάδοση του γραμμικού προγραμματισμού παρείχε η γραμμική δομή που παρουσίαζαν τα περισσότερα οικονομικά και στρατηγικά προβλήματα. Στην ανάπτυξη του γραμμικού προγραμματισμού συνέβαλλαν πολλοί επιστήμονες, κυρίως μαθηματικοί και οικονομολόγοι.

Ο πρώτος που ασχολήθηκε με τον Γ.Π. ήταν ο μαθηματικός Leonid Kantorovitc το 1939. Το ίδιο έτος ο Tolstoï με αφορμή το άρθρο του Méthodes d'éliminations des transports non rationnels hors de la planification, συμβάλλει στη διαμόρφωση της μεθόδου του Γ.Π. Το 1941, ο μαθηματικός Hitchcook διατυπώνει σε εμβρυακή μορφή το πρόβλημα των μεταφορών, το οποίο ολοκληρώθηκε το 1947 από τον Koopmans και επιλύθηκε από τον Dantzig, το 1949.

Ο γραμμικός προγραμματισμός χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων που αφορούν τη βέλτιστη αξιοποίηση των διαθέσιμων πόρων μιας επιχείρησης. Ως πόροι θεωρούνται το ανθρώπινο δυναμικό, ο μηχανικός εξοπλισμός, οι πρώτες ύλες, το κεφάλαιο κ.ά.

3.2.1.0 Βασικά χαρακτηριστικά προβλημάτων Γ.Π.

Τα βασικά χαρακτηριστικά των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού είναι:

i. Οι **μεταβλητές**, οι οποίες αντιπροσωπεύουν τις ποσότητες που πρέπει να προσδιοριστούν μέσω της επίλυσης του προβλήματος. Οι μεταβλητές αυτές καλούνται **μεταβλητές της απόφασης** ή **μεταβλητές επιλογής**. Οι μεταβλητές είναι αλληλένδετες και αλληλοεξαρτώμενες.

ii. Η **αντικειμενική συνάρτηση**, η οποία είναι γραμμικής μορφής και αποτελεί το αντικείμενο της βελτιστοποίησης.

iii. Οι **περιορισμοί**, οι οποίοι είναι ανισότητες γραμμικής μορφής.

Για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού ακολουθούνται δύο στάδια:

i. Κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου του γραμμικού προγραμματισμού για το συγκεκριμένο πρόβλημα

ii. Επίλυση του προβλήματος.

3.2.2.0 Προϋποθέσεις εφαρμογής του Γ.Π.

Για να διαμορφωθεί ένα πρόβλημα με μαθηματικό μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού πρέπει να πληροί κάποιες προϋποθέσεις, οι οποίες καλούνται και **αρχές εφαρμογής**. Αυτέ είναι οι παρακάτω:

i.**Αρχή της αναλογίας (Γραμμικότητα).** Οι ποσότητες των διαθέσιμων πόρων πρέπει να είναι ανάλογες του επιπέδου των δραστηριοτήτων αυτών. Το ίδιο ισχύει και για την αντικειμενική συνάρτηση.

ii.**Αρχή της προσθετικότητας.** Οι ποσότητες εκείνες ενός μέσου παραγωγής, οι οποίες καταναλώνονται στις επιμέρους δραστηριότητες, πρέπει να μπορούν να προστεθούν ανεξάρτητα από την κατανομή τους.

iii.**Αρχή της διαιρετότητας.** Οι μεταβλητές του προβλήματος μπορούν να πάρουν όλες τις τιμές του συνόλου $\Re_0^+$.

iv.**Αρχή των σταθερών συντελεστών.** Όλοι οι συντελεστές θεωρούνται ως γνωστές σταθερές.

3.2.3.0 Γενική μορφή προβλημάτων Γ.Π.

Το γενικό πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού διατυπώνεται μαθηματικά ως εξής:

Ζητούνται οι τιμές των άγνωστων μεταβλητών $x_1, x_2, \ldots, x_n$ οι οποίες βελτιστοποιούν της συνάρτηση $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n (\leq, \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n (\leq, \geq) b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n (\leq, \geq) b_m \end{array} \quad (1)$$

και $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ (2).

Συνοπτικά ζητείται να $\max/\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

με τους περιορισμούς $\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j (\leq, \geq) b_i$, όπου $i = 1, 2, \ldots, m$

και $x_j > 0$, όπου $j = 1, 2, \ldots, n$

Όπως φαίνεται η γενική μορφή ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι ίδια με τη γενική δομή ενός μαθηματικού προβλήματος, αλλά αυτό που χαρακτηρίζει το γραμμικό πρόβλημα είναι ότι όλοι συντελεστές που εμπεριέχονται σε αυτό είναι γραμμικοί. Οι εκφράσεις των σχέσεων (1) καλούνται **περιορισμοί του προβλήματος** ενώ η έκφραση (2) καλείται **περιορισμός μη αρνητικότητας**.

Το σύνολο των τιμών των μεταβλητών που ικανοποιούν τους περιορισμούς του προβλήματος αποτελεί **λύση του προβλήματος**. Κάθε λύση που ικανοποιεί και τους περιορισμούς μη αρνητικότητας καλείται **δυνατή λύση**. Κάθε δυνατή λύση που αριστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση καλείται **άριστη δυνατή λύση**.

3.2.4.0 Τρόποι επίλυσης προβλημάτων Γ.Π.

Υπάρχουν δύο βασικές μέθοδοι / τεχνικές επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού που χρησιμοποιούνται ευρέως σήμερα. Η πρώτη είναι η γραφική ή διαγραμματική μέθοδος και η δεύτερη είναι η μέθοδος simplex που εφαρμόστηκε από τον Dantzig, περίπου 50 χρόνια πριν.

3.2.4.1 Γραφική ή διαγραμματική μέθοδος

Η χρήση της γραφικής μεθόδου ενδείκνυται για προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού, τα οποία περιλαμβάνουν μέχρι τρεις μεταβλητές. Σε αυτή την περίπτωση, το πρόβλημα επιλύεται με διαγραμματικό τρόπο σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων

Η επίλυση προβλημάτων αριστοποίησης με τη μέθοδο αυτή γίνεται ως εξής. Αρχικά, πρέπει να βρεθούν η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί του προβλήματος. Έπειτα μετατρέπουμε τους περιορισμούς σε ισότητες και βρίσκουμε σε ποια σημεία τέμνουν τους ορθογώνιους άξονες. Αυτό επιτυγχάνεται θέτοντας την πρώτη μεταβλητή ίση με το μηδέν και λύνοντας την εξίσωση. Έπειτα επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για τη δεύτερη μεταβλητή. Αν οι ευθείες των περιορισμών τέμνονται μεταξύ τους τότε για να βρεθούν τα σημεία τομής λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων. Όταν έχουν βρεθεί όλα τα σημεία τομής (και με τους άξονες και μεταξύ των περιορισμών) αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες των κορυφών[1] στην αντικειμενική συνάρτηση. Το σημείο-κορυφή που δίνει τη μέγιστη τιμή (εάν πρόκειται για μεγιστοποίηση) ή την ελάχιστη τιμή (εάν πρόκειται για ελαχιστοποίηση) είναι η άριστη λύση του προβλήματος.

__Παρατήρηση__: Επειδή οι μεταβλητές των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού παίρνουν μόνο θετικές τιμές, το σύνολο των εφικτών λύσεων βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο. Το σύνολο των σημείων που επαληθεύουν όλους

---

[1] Συντεταγμένες κορυφών καλούνται οι συντεταγμένες των σημείων τομής της εξίσωσης περιορισμού με τους ορθογώνιους άξονες ή με τις εξισώσεις των άλλων περιορισμών. Βλ. σχετικά: Κούνια Σ., Φακίνου Δ., *Γραμμικός προγραμματισμός*, Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη, 1985, σ.30

τους περιορισμούς είναι κυρτό και τα πιθανά σημεία που βελτιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση είναι οι κορυφές αυτού του συνόλου.

<u>Παράδειγμα 1.</u>

Έστω ότι ζητείται να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση $\pi = 7000A + 5000B$, υπό τους περιορισμούς:

$$4A + 4B \leq 480$$
$$2A + B \leq 200$$
$$A, B \geq 0$$

Λύση

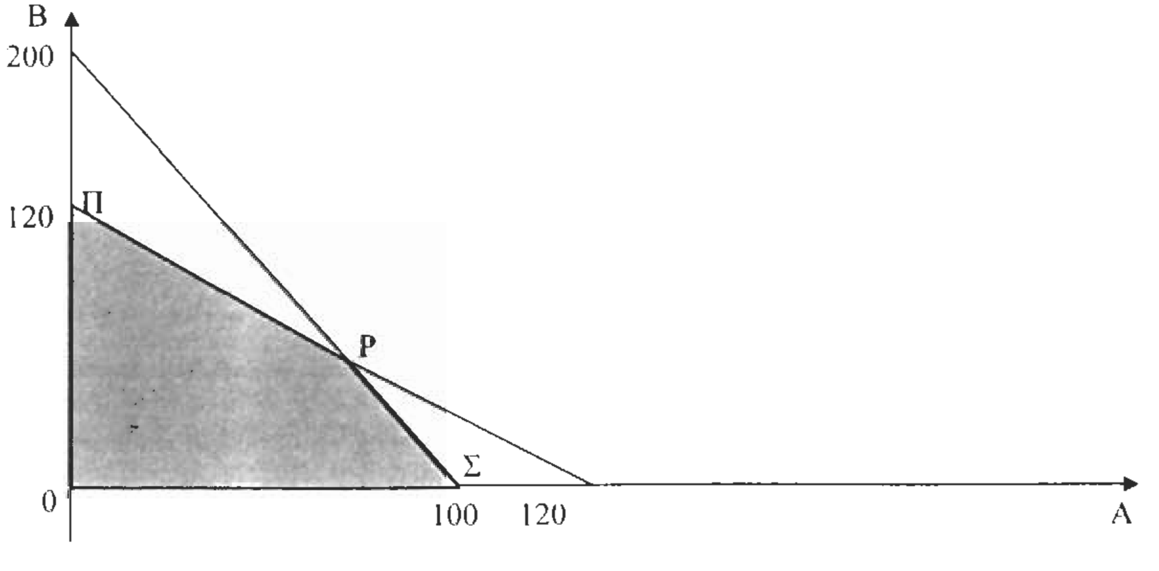
Για να παρασταθεί γραφικά ο πρώτος περιορισμός πρέπει να τεθεί

$4A + 4B \leq 480 \Rightarrow 4A + 4B = 480$. Για $A = 0 \Rightarrow B = 120$ ενώ για $B = 0 \Rightarrow A = 120$.

Το ίδιο ισχύει και για το δεύτερο περιορισμό, δηλ. $2A + B \leq 200 \Rightarrow 2A + B = 200$. Για $A = 0 \Rightarrow B = 200$ και για $B = 0 \Rightarrow A = 100$.

Γραφικά οι πάρα πάνω περιορισμοί απεικονίζονται στο κάτωθι σχήμα (σχ.1)

Σχήμα 1. Γραφική απεικόνιση των περιορισμών



Η περιοχή 0ΠΡΣ περιλαμβάνει όλες τις δυνατές λύσεις του προβλήματος. Για να βρεθεί η άριστη λύση πρέπει να γίνει επιλογή ανάμεσα στα σημεία 0,Π , Ρ και Σ.

Έστω ότι $\pi = 350000 \Rightarrow 350000 = 7000A + 5000B$. Για $A = 0 \Rightarrow B = 70$ και για $B = 0 \Rightarrow A = 50$. Η ευθεία που περνάει από τα δύο αυτά σημεία καλείται **ισοκερδής ευθεία**. Για να επιτευχθεί η μεγιστοποίηση του κέρδους θα πρέπει να μετακινηθεί η ευθεία αυτή όσο περισσότερο ψηλά και δεξιά, χωρίς να υπερβεί την περιοχή των εφικτών λύσεων. Είναι εμφανές ότι η βέλτιστη λύση βρίσκεται στο σημείο Ρ.

Μαθηματικά αυτό βρίσκεται αν λυθεί η αντικειμενική συνάρτηση με τις τιμές των Α και Β που υπάρχουν στα σημεία Π, Ρ και Σ. Έτσι, είναι:

Για το σημείο Π: $\pi = 7000A + 5000B \Rightarrow \pi = 5000 \cdot 120 = 600000$

Για να βρεθούν οι συντεταγμένες αυτού του σημείου Ρ αρκεί να λυθεί το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} 4A + 4B = 480 \\ 2A + B = 200 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4A + 4B = 480 \\ B = 200 - 2A \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4A + 4(200 - 2A) = 480 \\ B = 200 - 2A \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4A + 800 - 8A = 480 \\ B = 200 - 2A \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} -4A = -320 \\ B = 200 - 2A \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 80 \\ B = 40 \end{array}$$

Για το σημείο Ρ: $\pi = 7000A + 5000B \Rightarrow \pi = 7000 \cdot 80 + 5000 \cdot 40 = 760000$

Για το σημείο Σ: $\pi = 7000A + 5000B \Rightarrow \pi = 7000 \cdot 100 = 700000$

Αν συγκρίνουμε τις τιμές της π στα σημεία Π, Ρ και Σ βλέπουμε ότι είναι μεγαλύτερη στο σημείο Ρ (Π=600.000, Ρ=**760.000** και Σ=700.000). Επομένως και μαθηματικά αποδεικνύεται ότι το σημείο Ρ αποτελεί τη βέλτιστη λύση της αντικειμενικής συνάρτησης.

Παράδειγμα 2.

Μια βιομηχανία εξετάζει τον ανασχεδιασμό της παραγωγικής της διαδικασίας έτσι ώστε αυτή να ανταποκρίνεται στις νέες περιβαλλοντικές διατάξεις. Στην παρούσα φάση, η εταιρία χρησιμοποιεί δύο πρώτες ύλες Χ και Υ, οι οποίες όμως επιβαρύνουν το περιβάλλον. Οι περιβαλλοντικές διατάξεις που σύντομα πρόκειται να ισχύσουν αναφέρουν ότι η μηναία εκπομπή διοξειδίου του άνθρακα (CO_2) δεν θα πρέπει να υπερβαίνει τις 12 μονάδες, οι εκπομπές μεθανίου (CH_4) δεν θα πρέπει να υπερβαίνουν τις 10 μονάδες, ενώ οι εκπομπές διοξειδίου του αζώτου (NO_2) θα πρέπει να περιοριστούν στις 6 μονάδες.

Η χρήση κάθε μονάδας της πρώτης ύλης Χ συνεπάγεται την εκπομπή 1 μονάδας CO_2, 2 μονάδων CH_4 και 1 μονάδας NO_2. Αντίστοιχα, κάθε μονάδα της πρώτης ύλης Υ συνεπάγεται την εκπομπή 3 μονάδων CO_2, 1 μονάδας CH_4 και 1 μονάδας NO_2. Κατά μέσο όρο κάθε μονάδα της πρώτης ύλης Χ αποφέρει κέρδος 20 €, ενώ κάθε μονάδα της πρώτης ύλης Υ αποφέρει κέρδος 50 €. Ζητείται να μεγιστοποιηθεί το κέρδος.

Όπως είναι εμφανές, η συνάρτηση που ζητείται να μεγιστοποιηθεί είναι η $max\,Z = 20X + 50Y$. Οι περιορισμοί που προκύπτουν από το πρόβλημα είναι οι

$X + 3Y \le 12$

$2X + Y \le 10$

$X + Y \le 6$

$X, Y \ge 0$

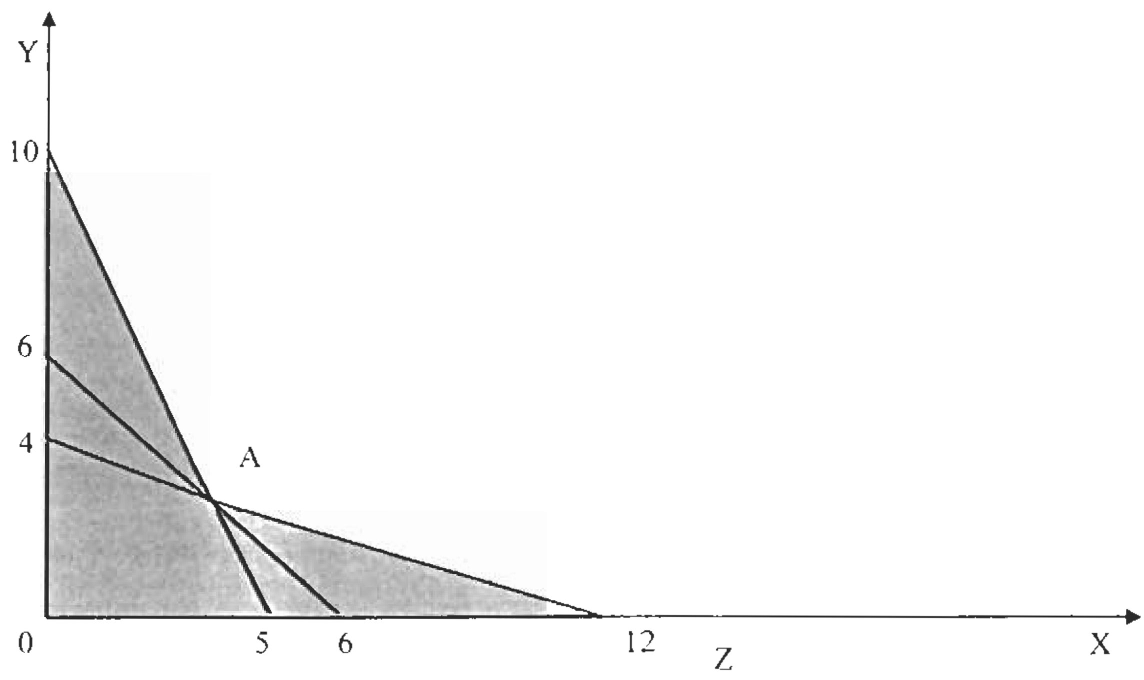
Ισχύει ότι $X + 3Y \le 12 \Rightarrow X + 3Y = 12$. Για $X = 0 \Rightarrow Y = 4$ και $Y = 0 \Rightarrow X = 12$

Επίσης $2X + Y \le 10 \Rightarrow 2X + Y = 10$. Για $X = 0 \Rightarrow Y = 10$ και $Y = 0 \Rightarrow X = 5$,

$X + Y \le 6 \Rightarrow X + Y = 6$. Για $X = 0 \Rightarrow Y = 6$ και $Y = 0 \Rightarrow X = 6$.

Η γραφική απεικόνιση των περιορισμών παρουσιάζεται στο κάτωθι σχήμα

Σχήμα 2. Γραφική απεικόνιση των περιορισμών



Έστω ότι $Z = 24 \Rightarrow 20X + 50Y = 24$.

Για του δύο πρώτους περιορισμούς ισχύει ότι

$$\left.\begin{array}{l} X + 3Y = 12 \\ 2X + Y = 10 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} X = 12 - 3Y \\ 2(12 - 3Y) + Y = 10 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} X = 12 - 3Y \\ 24 - 6Y + Y = 10 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} X = 12 - 3Y \\ 14 = 5Y \end{array}\right\} \begin{array}{l} X = 3{,}6 \\ Y = 2{,}8 \end{array}$$

Για τον πρώτο και τον τρίτο περιορισμό είναι

$$\left.\begin{array}{l} X + 3Y = 12 \\ X + Y = 6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 6 - Y + 3Y = 12 \\ X = 6 - Y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2Y = 6 \\ X = 6 - Y \end{array}\right\} \begin{array}{l} Y = 3 \\ X = 3 \end{array}$$

Τέλος, για τον δεύτερο και τον τρίτο περιορισμό είναι

$$\left.\begin{array}{l} X + Y = 10 \\ X + Y = 6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} X = 10 - Y \\ 10 - Y + Y = 6 \end{array}\right\} 10 = 6 \ \textbf{ΑΔΥΝΑΤΟ}$$

Επομένως η βέλτιστη λύση είναι μία από τις $X = 3{,}6$, $Y = 2{,}8$ ή $X = 3$, $Y = 3$. Αντικαθιστώντας στην συνάρτηση μεγιστοποίησης για την πρώτη επιλογή είναι $Z = 20X + 50Y = 20 \cdot 3{,}6 + 50 \cdot 2{,}8 = 72 + 140 = 212$.

Για τη δεύτερη επιλογή είναι

$Z = 20X + 50Y = 20 \cdot 3 + 50 \cdot 3 = 60 + 150 = 210$

Συγκρίνοντας τα δύο παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε ότι η βέλτιστη λύση είναι η πρώτη. Τούτο σημαίνει ότι το κέρδος της βιομηχανίας μεγιστοποιείται όταν παράγει 3,6 μονάδες του προϊόντος Χ και 2,8 μονάδες του προϊόντος Υ.

3.2.4.2 Μέθοδος SIMPLEX

Η μέθοδος Simplex χρησιμοποιείται σε προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού σε περιπτώσεις που υπάρχουν περισσότερες από δύο μεταβλητές. Πρόκειται για έναν αλγεβρικό αλγόριθμο, με τον οποίο μπορεί να υπολογίσει κανείς τα ακρότατα μια συνάρτησης.

Για την επίλυση προβλημάτων αριστοποίησης με αυτή τη μέθοδο, αρχικά μετατρέπουμε όλες τις ανισότητες του προβλήματος σε εξισώσεις, με τη χρήση των **μεταβλητών περιθωρίου**[1]. Η μετατροπή αυτή δημιουργεί μια μορφή γραμμικού προγραμματισμού του τύπου

$$\max/\min z = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + 0S_1 + 0S_2 + \dots + 0S_m$$

υπό τους περιορισμούς

i.α)
$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + S_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + S_2 = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + S_m = b_m \end{array} \quad \text{για max}$$

β)
$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - S_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - S_2 = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n - S_m = b_m \end{array} \quad \text{για min}$$

όπου $S_1, S_2, \dots, S_m$: οι μεταβλητές περιθωρίου.

ii.και $x_j > 0$, όπου $j = 1,2,\dots,n$

Αυτή η μορφή καλείται τυπική ή κανονική μορφή προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

---

[1] Οι μεταβλητές περιθωρίου αντιπροσωπεύουν αχρησιμοποίητους πόρους στη διαδικασία μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης.(Υψηλάντης Π., «Εισαγωγή στην επιχειρησιακή έρευνα»)

3.2.4.2.1 Προβλήματα μεγιστοποίησης

Σε προβλήματα μεγιστοποίησης δεχόμαστε ως αρχική λύση την $x_1=0$, $x_2=0$, $S_1=\beta_1$ και $S_2=\beta_2$. Η λύση αυτή δίνει στην αντικειμενική συνάρτηση μηδενική τιμή.

Ο αρχικός πίνακας της μεθόδου έχει ως εξής:

Συντ. Κέρδους	C_i ⟶	α_1	α_2	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	B_i
0	S_1	α_{11}	α_{12}	1	0	β_1
0	S_2	α_{21}	α_{22}	0	1	β_2
	Z_j	0	0	0	0	0
	C_j-Z_j	α_1	α_2	0	0	

Σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού οι μεταβλητές που έχουν μη μηδενικές τιμές ονομάζονται **βασικές μεταβλητές** ενώ οι υπόλοιπες **μη βασικές**.

Η πρώτη στήλη του πίνακα περιλαμβάνει τους συντελεστές κέρδους που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές (S_1 και S_2). Η δεύτερη στήλη περιλαμβάνει τις βασικές μεταβλητές. Οι επόμενες στήλες (πλην της τελευταίας) αντιστοιχούν στους συντελεστές των μεταβλητών του προβλήματος, ενώ στην τελευταία στήλη δίνονται οι τιμές των περιορισμών.

Η πρώτη σειρά (C_j) περιέχει τους συντελεστές κέρδους της αντικειμενικής συνάρτησης. Η σειρά Z_j δηλώνει τη μείωση του κέρδους που θα προκληθεί από την μοναδιαία αύξηση κάθε μεταβλητής. Ισχύει ότι $Z_j = C_j \cdot X_i$, όπου C_j: ο συντελεστής συνεισφοράς κέρδους των μεταβλητών περιθωρίου και X_i: οι τιμές των μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots X_n$. Τέλος, η σειρά C_j-Z_j δίνει το καθαρό κέρδος που προκύπτει από τη μοναδιαία μεταβολή κάθε βασικής μεταβλητής. Οι τιμές των στοιχείων της προκύπτουν από την αφαίρεση των στοιχείων της σειράς Z_j από τα στοιχεία της σειράς C_j.

Επειδή, όπως προαναφέρθηκε, η μέθοδος Simplex είναι ένας επαναληπτικός αλγόριθμος, αυτό σημαίνει ότι η διαδικασία δημιουργίας πινάκων επαναλαμβάνεται έως ότου προσδιοριστεί η βέλτιστη λύση.

Για να δημιουργήσουμε τον δεύτερο πίνακα Simplex, πρέπει να επιλέξουμε τη μεταβλητή που θα συμπεριλάβουμε στις βασικές μεταβλητές. Κριτήριο επιλογής είναι η συνεισφορά στο συνολικό κέρδος. Έτσι η μη βασική μεταβλητή που έχει μεγαλύτερη θετική τιμή C_j-Z_j εισάγεται στη βάση. Έστω ότι η μεταβλητή αυτή είναι η X_1.

<u>Παρατήρηση:</u> Εάν δεν υπάρχει θετική τιμή στη στήλη C_j-Z_j, η λύση που εξάγεται είναι η βέλτιστη.

Η στήλη που αντιστοιχεί στη μεταβλητή που θα εισαχθεί στη βάση καλείται **οδηγός στήλη**. Για να εισάγουμε όμως την καινούρια μη βασική μεταβλητή στη βάση πρέπει να εξάγουμε μία από τις βασικές μεταβλητές. Για την επιλογή της εξαγόμενης μεταβλητής διαιρούμε τις τιμές τις τελευταίας στήλης του πίνακα με τις αντίστοιχες τιμές της οδηγού στήλης, δηλ. $\frac{\beta_1}{a_{11}}$ και $\frac{\beta_2}{a_{12}}$, εφόσον η στήλη της X_1 είναι η οδηγός στήλη. Η βασική μεταβλητή, η οποία έχει το μικρότερο πηλίκο θα αντικατασταθεί από την νέα μεταβλητή. Έστω ότι είναι η S_2.

Η σειρά της μεταβλητής που θα αντικατασταθεί καλείται **οδηγός σειρά**, ενώ το σημείο τομής της οδηγού στήλης με την οδηγό σειρά καλείται **οδηγό στοιχείο**. Το οδηγό στοιχείο με βάση τις ανωτέρω υποθέσεις είναι το α_{21}. Για να βρούμε τις καινούριες τιμές για την οδηγό σειρά διαιρούμε όλες τις τιμές της με την τιμή του οδηγού στοιχείου, δηλ. $\frac{a_{21}}{a_{21}} = 1, \frac{a_{22}}{a_{21}}, \frac{S_1}{a_{21}} = 0, \frac{S_2}{a_{21}} = \frac{1}{a_{21}}$ και $\frac{\beta_2}{a_{21}}$.

Επομένως είναι:

Συντ. Κέρδους	C_j ⟶	α_1	α_2	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	B_i
0	S_1					
α_1	X_1	1	α_{22}/α_{21}	0	$1/\alpha_{21}$	β_2/α_{21}
	Z_j					
	C_j-Z_j					

Έπειτα, για την εύρεση των τιμών των υπολοίπων σειρών αφαιρούμε από τις τιμές της προηγούμενης σειράς το γινόμενο της τιμής του στοιχείου της οδηγού στήλης στη σειρά S_1 επί τα στοιχεία της νέας οδηγού σειράς, δηλ. $a_{11} - a_{11} \cdot 1 = 0$, $a_{12} - a_{11} \cdot \frac{a_{22}}{a_{21}}$,

$1 - a_{11} \cdot 0 = 1$, $0 - a_{11} \frac{1}{a_{21}} = -\frac{a_{11}}{a_{21}}$ και $\beta_1 - a_{11} \frac{\beta_2}{a_{21}}$.

Έτσι ισχύει ότι:

Συντ. Κέρδους ↓	C_j ⟶ Βασικές μεταβλητές	α_1 X_1	α_2 X_2	0 S_1	0 S_2	Ποσότητα B_i
0	S_1	0	$\alpha_{12}-\alpha_{11}(\alpha_{22}/\alpha_{21})$	1	$-\alpha_{11}/\alpha_{21}$	$\beta_1-\alpha_{11}(\beta_2/\alpha_{21})$
α_1	X_1	1	α_{22}/α_{21}	0	$1/\alpha_{21}$	β_2/α_{21}
	Z_j					
	C_j-Z_j					

Τα στοιχεία των σειρών Z_j και C_j-Z_j βρίσκονται με το τρόπο που έχει προαναφερθεί.

Η διαδικασία δημιουργίας πινάκων Simplex συνεχίζεται έως ότου οι τιμές στη σειρά C_j-Z_j είναι όλες αρνητικές, γεγονός το οποίο σημαίνει ότι δεν δύναται να υπάρξει άλλη αύξηση κέρδους.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω ότι ζητείται να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση $z = 14000x + 10000y$, υπό τους

περιορισμούς $\begin{array}{l} 8x + 8y \leq 960 \\ 4x + 2y \leq 400 \\ x, y \geq 0 \end{array}$.

Ακολουθώντας την ανωτέρω διαδικασία οι περιορισμοί του προβλήματος είναι:

$8x + 8y + S_1 = 960$

$4x + 2y + S_2 = 400$

και η συνάρτηση μεγιστοποίησης $z = 14000x + 10000y + 0S_1 + OS_2$

Ως αρχική λύση της μεθόδου χρησιμοποιούμε την x=0, y=0, S_1=960 και S_2=400. η λύση αυτή είναι η λύση που παράγεται πιο εύκολα για οποιοδήποτε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχεί σε αυτή τη λύση είναι μηδέν.

Ο πρώτος πίνακας Simplex είναι ο κάτωθι

Συντ. Κέρδους ↓	C_j ⟶ Βασικές μεταβλητές	14000 x	10000 y	0 S_1	0 S_2	Ποσότητα B_i
0	S_1	8	8	1	0	960
0	S_2	4	2	0	1	400
	Z_j	0	0	0	0	0
	C_j-Z_j	14000	10000	0	0	

Όπως είναι εμφανές η τιμή της x είναι μεγαλύτερη από αυτή της y στη στήλη C_j-Z_j. Επομένως στο δεύτερο πίνακα στη βάση θα συμπεριληφθεί η μεταβλητή x. **Η στήλη της x είναι η οδηγός στήλη.**

Για να βρούμε ποια μεταβλητή θα αντικατασταθεί από τη x διαιρούμε $\frac{960}{8}=120$ και $\frac{400}{4}=100$. Επειδή 100<120 η μεταβλητή η οποία θα αντικατασταθεί είναι η S_2.

Αυτό αυτόματα σημαίνει ότι **οδηγός σειρά είναι η S_2** και **οδηγό στοιχείο είναι το 4**.

Διαιρώντας όλα τα στοιχεία της οδηγού σειράς με το 4 έχουμε τα στοιχεία της νέας οδηγού σειράς που είναι τα: 4/4=1, 2/4=1/2, 0/4=0, 1/4=1/4 και 400/4= 100.

Τα νέα στοιχεία της σειράς S_1 είναι: $8-8\cdot1=0$, $8-8\cdot1/2=4$, $1-8\cdot0=1$, $0-8\cdot1/4=-2$ και $960-8\cdot100=160$.

Επομένως ο δεύτερος πίνακας Simplex είναι:

Συντ. Κέρδους ↓	C_j ⟶ Βασικές μεταβλητές	14000 x	10000 y	0 S_1	0 S_2	Ποσότητα B_i
0	S_1	0	4	1	-2	160
14000	X	4	1/2	0	1/4	100
	Z_j	14000	7000	0	3500	1400000
	C_j-Z_j	0	3000	0	-3500	

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία παρατηρούμε ότι **οδηγός στήλη είναι η** y, **οδηγός σειρά η** S_1 και **οδηγό στοιχείο το 4**.

Επομένως, ο νέος πίνακας Simplex είναι ο κάτωθι.

Συντ. Κέρδους ↓	C_j ⟶ Βασικές μεταβλητές	14000 x	10000 y	0 S_1	0 S_2	Ποσότητα B_i
0	Y	0	1	1/4	-1/2	40
14000	X	1	0	-1/8	1/2	80
	Z_j	14000	10000	750	2000	1520000
	C_j-Z_j	0	0	-750	-2000	

Όπως είναι εμφανές, στη σειρά C_j-Z_j δεν υπάρχουν θετικές τιμές. Τούτο σημαίνει ότι δεν είναι δυνατό να υπάρξει περαιτέρω αύξηση του κέρδους. Άρα ο συνδυασμός x=80 και y = 40 δίνει το βέλτιστο αποτέλεσμα, το οποίο είναι z = 1.520.000.

3.2.4.2.2 Προβλήματα ελαχιστοποίησης

Στα προβλήματα ελαχιστοποίησης που επιλύονται μέσω της Simplex ακολουθείται λίγο διαφορετική διαδικασία από την προαναφερόμενη. Έστω ότι θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $z = 1000x + 700y + 800w$,

υπό τους περιορισμούς
$$\begin{aligned} &x + y + w = 100 \\ &40x + 25y + 20w \geq 30000 \\ &40x + 20y + 40w \geq 40000 \\ &x, y, w \geq 0 \end{aligned}$$

Αρχικά μετατρέπουμε όλες τις ανισότητες του προβλήματος σε ισότητες, με τη χρήση των **μεταβλητών πλεονάσματος**[1].

$$x + y + w = 100$$
$$40x + 25y + 20 - S_1 = 30000$$
$$40x + 20y + 40w - S_2 = 40000$$
$$x, y, w, S_1, S_2 \geq 0$$

Αν δεχτούμε ως αρχική λύση τη x=0, y=0 και w=0, παρατηρούμε ότι ο πρώτος περιορισμός δεν ικανοποιείται. Επίσης οι λύσεις που προκύπτουν από τους δύο επόμενους περιορισμούς δίνουν αρνητικές τιμές, γεγονός το οποίο δεν είναι αποδεκτό.

Για το λόγο αυτό στα προβλήματα ελαχιστοποίησης για κάθε περιορισμό τύπου =, ≥ ορίζουμε μία **τεχνητή μεταβλητή (Ai)**. Η μεταβλητή αυτή δεν έχει φυσική ερμηνεία και το κόστος κάθε μονάδας είναι πάρα πολύ μεγάλο και συμβολίζεται με Μ.

Έτσι, το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\min z = 1000x + 700y + 800w + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2 + MA_3 ,$$

υπό τους περιορισμούς

$$x + y + w + A_1 = 100$$
$$40x + 25y + 20 - S_1 + A_2 = 30000$$
$$40x + 20y + 40w - S_2 + A_3 = 40000$$
$$x, y, w, S_1, S_2, A_1, A_2, A_3 \geq 0$$

Ο πίνακας Simplex συμπληρώνεται όπως έχει προαναφερθεί. Έτσι, είναι

Συντ. Κέρδους ⟶		1000	700	800	0	0	M	M	M	Ποσότητα
↓		x	Y	w	S_1	S_2	A_1	A_2	A_3	B_i
A1	M	1	1	1	0	0	1	0	0	1000
A2	M	40	25	20	-1	0	0	1	0	30000
A3	M	40	20	40	0	-1	0	0	1	40000
	Z_j	81M	46M	61M	-M	-M	M	M	M	
	C_j-Z_j	1000-81M	700-46M	900-61M	M	M	0	0	0	

[1] Οι μεταβλητές πλεονάσματος συμβολίζουν την ποσότητα υπέρβασης των ελάχιστων ορίων που υπάρχουν στη δεξιά πλευρά της ανισότητας.

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα, οι βασικές μεταβλητές είναι οι τεχνικές μεταβλητές.

Η επιλογή της μεταβλητής που θα συμπεριληφθεί στη βάση γίνεται με παρόμοιο τρόπο με τα προβλήματα μεγιστοποίησης. Η μεταβλητή που θα τοποθετηθεί στη βάση είναι εκείνη που έχει τη μικρότερη αρνητική τιμή. Εν προκειμένω, η μεταβλητή αυτή είναι η x, διότι έχει το μικρότερο συντελεστή του Μ. Άρα **οδηγός στήλη είναι η x**.

Η μεταβλητή που θα αντικατασταθεί από τη x είναι εκείνη που δίνει το μικρότερο λόγο τιμών της στήλης των ποσοτήτων προς την οδηγό στήλη. Η μεταβλητή αυτή είναι η A_2. Επομένως **οδηγός σειρά είναι η A_2** και **οδηγό στοιχείο το 40**.

Η μεταβλητή Α2 δεν υπάρχει περίπτωση να επανέλθει στη βάση. Επομένως δεν είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των νέων τιμών της.

<u>Παρατήρηση.</u> Στα προβλήματα ελαχιστοποίησης η βέλτιστη τιμή επιτυγχάνεται όταν όλες οι τιμές της C_j-Z_j είναι μεγαλύτερες ή ίσες με το μηδέν.

Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο κάτωθι:

Συντ. Κέρδους ↓	→	1000	700	800	0	0	M	M	M	Ποσότητα
		x	y	w	S_1	S_2	A_1	A_2	A_3	B_i
A1	M	0	0,375	0,5	0,025	0	1		0	250
X	1000	1	0,625	0,5	-0,025	0	0		0	750
A3	M	0	-5	20	1	-1	0		1	10000
	Z_j	1000	625-4,63M	500+20,5M	-25+1,03M	-M	M		M	
	C_j-Z_j	0	75+4,63M	300-41/2M	25-1,03M	-M	0		0	

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία οδηγός στήλη είναι η w, οδηγός σειρά είναι η A_3 και οδηγό στοιχείο το 20.

Έτσι σχηματίζεται ο τρίτος πίνακας Simplex.

Συντ. Κέρδους →		1000	700	800	0	0	M	M	M	Ποσότητα
↓		x	y	w	S_1	S_2	A_1	A_2	A_3	B_i
A_1	M	0	0,5	0	0	0,025	1	[redacted]	[redacted]	0
x	1000	1	0,75	0	-0,05	0,025	0	[redacted]	[redacted]	500
w	800	0	-0,25	1	0,05	-0,05	0	[redacted]	[redacted]	500
	Z_j	1000	550+0,5M	800	-10	-14+0,03M	M	[redacted]	[redacted]	
	C_j-Z_j	0	150-0,5M	0	10	15-0,03M	0	[redacted]	[redacted]	

Οδηγός στήλη είναι η y, οδηγός σειρά η A_1 και οδηγό στοιχείο το 1/2. Ο τέταρτος πίνακας Simplex είναι ο κάτωθι.

Συντ. Κέρδους →		1000	700	800	0	0	M	M	M	Ποσότητα
↓		x	y	W	S_1	S_2	A_1	A_2	A_3	B_i
y	700	0	1	0	0	0,05	[redacted]	[redacted]	[redacted]	0
x	1000	1	0	0	-0,05	-0,0125	[redacted]	[redacted]	[redacted]	500
w	800	0	0	1	0,05	-0,0375	[redacted]	[redacted]	[redacted]	500
	Z_j	1000	700	800	-10	-7,5	[redacted]	[redacted]	[redacted]	
	C_j-Z_j	0	0	0	10	7,5	[redacted]	[redacted]	[redacted]	

Παρατηρούμε ότι όλες οι τιμές της σειράς C_j-Z_j είναι μεγαλύτερες ή ίσες με το μηδέν. Τούτο σημαίνει ότι δεν υπάρχει περαιτέρω βελτιστοποίηση του προβλήματος που μελετάμε. Άρα, ο τέταρτος πίνακας Simplex δίνει τη βέλτιστη λύση.

3.2.5.0 Το δυϊκό πρόβλημα

Κάθε γραμμικό πρόβλημα το οποίο καλείται **πρωταρχικό ή αρχικό** συνδέεται στενά με ένα άλλο γραμμικό πρόβλημα το οποίο καλείται **δυϊκό πρόβλημα**. Η βέλτιστη λύση του δυϊκού προβλήματος βρίσκεται από τον πίνακα της βέλτιστης λύσης του πρωταρχικού συστήματος.

3.2.5.0.1 Μεγιστοποίηση

Έστω ότι το πρωταρχικό πρόβλημα είναι: $\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$,

υπό τους περιορισμούς
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &\le b_m \end{aligned}$$

και $x_1, x_2, ..., x_n > 0$.

Το δυϊκό πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$\min Z^* = b_1y_1 + b_2y_2 + ...b_my_m$

υπό τους περιορισμούς
$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_n &\ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_n &\ge c_2 \\ &\cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_n &\ge c_m \end{aligned}$$

και $y_1, y_2, ..., y_n > 0$.

<u>**Παράδειγμα**</u>

Το πρωταρχικό πρόβλημα είναι: $max\, Z = 3x_1 + 6x_2 + 2x_3$

Περιορισμοί:
$$\begin{aligned} &3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 2 \\ &x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 1 \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, το δυϊκό του είναι: $min\, Z^* = 2y_1 + y_2$

υπό τους περιορισμούς: $\begin{aligned} &3y_1 + y_2 \geq 3 \\ &4y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ &y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ &y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$.

3.2.5.0.2 Ελαχιστοποίηση

Έστω ότι το πρωταρχικό πρόβλημα είναι: $\min Z = b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... b_m x_m$

υπό τους περιορισμούς $\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m \end{aligned}$

και $x_1, x_2, ..., x_n > 0$.

Σε αυτή την περίπτωση μετατρέπουμε το πρωταρχικό πρόβλημα σε πρόβλημα μεγιστοποίησης. Τούτο γίνεται μεταβάλλοντας τα πρόσημα στην αντικειμενική συνάρτηση. Αν υπάρχουν περιορισμοί ισοτήτων τότε τους ανάγουμε σε περιορισμούς ανισοτήτων. Έτσι, έχει διαμορφωθεί ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης. Το δυϊκό του βρίσκεται όπως έχει ήδη προαναφερθεί.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω ότι το πρωταρχικό πρόβλημα είναι: $\min Z = 3x_1 + 6x_2 + 2x_3$

υπό τους περιορισμούς: $\begin{aligned} &3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ &x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$.

Αρχικά μετατρέπουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης σε πρόβλημα μεγιστοποίησης. Έτσι το αρχικό πρόβλημα είναι: $\max Z = -3x_1 - 6x_2 - 2x_3$

υπό τους περιορισμούς: $\begin{aligned} &3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 2 \\ &-3x_1 - 4x_2 - x_3 \leq -2 \\ &x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$

Το δυϊκό πρόβλημα είναι: $min Z^{*} = 2y_1 - 2y_2 + y_3$

υπό τους περιορισμούς:
$$\begin{aligned} &3y_1 - 3y_2 + y_3 \geq -3 \\ &4y_1 - 4y_2 + 3y_3 \geq -6 \\ &y_1 - y_2 + 2y_3 \geq -2 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

3.2.5.1 Βασικά θεωρήματα των δυϊκών προβλημάτων

Από τις παραπάνω μεταβολές των πρωταρχικών προβλημάτων σε δυϊκά εξάγονται τα εξής συμπεράσματα-θεωρήματα:

i.Όταν υπάρχει μέγιστο στο αρχικό πρόβλημα, τότε υπάρχει ελάχιστο στο δυϊκό ώστε να ισχύει $\max Z = \min Z^{*}$. Επίσης, όταν υπάρχει ελάχιστο στο αρχικό πρόβλημα, τότε υπάρχει μέγιστο στο δυϊκό πρόβλημα. Ισχύει δηλαδή ότι $\min Z = \max Z^{*}$.

ii.Οι σταθεροί συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του αρχικού προβλήματος αποτελούν τις σταθερές των περιορισμών του δυϊκού προβλήματος, ενώ οι σταθερές των περιορισμών του αρχικού προβλήματος αποτελούν τις σταθερές της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού προβλήματος.

iii.Οι σταθεροί συντελεστές των περιορισμών του αρχικού προβλήματος εναλλάσσονται στους περιορισμούς του δυϊκού προβλήματος.

iv.Τα σημεία των ανισοτήτων του δυϊκού προβλήματος είναι αντίστροφα αυτών του πρωταρχικού προβλήματος.

v.Ο αριθμός των μεταβλητών του δυϊκού προβλήματος είναι ο ίδιος με τον αριθμό των περιορισμών του αρχικού προβλήματος.

3.3.0.0 Δυναμικός Προγραμματισμός (Δ.Π.)

Ο Δυναμικός προγραμματισμός χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων στα οποία απαιτείται λήψη διαδοχικών αποφάσεων (οι οποίες σχετίζονται μεταξύ τους) σε δεδομένη διάρκεια χρόνου, και τα αποτελέσματα που εξάγονται είναι αλληλοεξαρτώμενα.

Εν αντιθέσει με τον Γραμμικό προγραμματισμό δεν έχει συγκεκριμένο τρόπο διατύπωσης ούτε συγκεκριμένο αλγόριθμο επίλυσης των προβλημάτων.

3.3.1.0 Βασικά χαρακτηριστικά προβλημάτων Δ.Π.

Όπως προαναφέρθηκε, στα προβλήματα δυναμικού προγραμματισμού δεν υπάρχει συγκεκριμένη μεθοδολογία. Παρόλα αυτά όλα τα προβλήματα αυτής της μορφής έχουν ορισμένα κοινά χαρακτηριστικά:

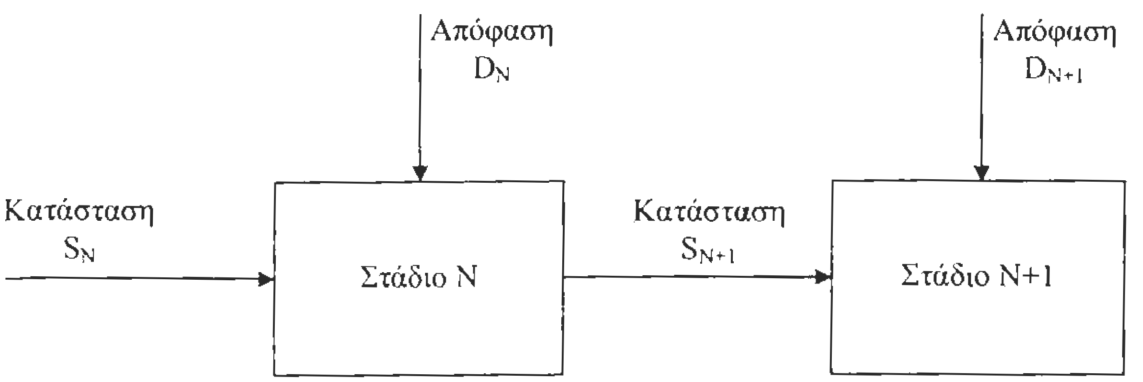
i.**Στάδια αποφάσεων**. Βασικό χαρακτηριστικό των προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού είναι ο διαχωρισμός του προβλήματος σε διαδοχικά στάδια.

ii.**Καταστάσεις**. Σε κάθε στάδιο περιλαμβάνεται ένα σύνολο πιθανών καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρίσκεται το εξεταζόμενο σύστημα. Σε αυτή την κατάσταση είναι απαραίτητο να υπάρχουν όλες οι πληροφορίες που χρειάζονται για τη λήψη της απόφασης στο συγκεκριμένο στάδιο.

iii.**Αποφάσεις**. Σε κάθε στάδιο λαμβάνεται μία απόφαση η οποία εξαρτάται από την κατάσταση στην οποία βρίσκεται το εν λόγω στάδιο. Η απόφαση που λαμβάνεται επηρεάζει το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα στο συγκεκριμένο στάδιο αλλά και σε όλα τα υπόλοιπα που έπονται.

iv.**Συνάρτηση αποτελεσμάτων**. Η συνάρτηση των αποτελεσμάτων προκύπτει από τους δυνατούς συνδυασμούς κατάστασης και απόφασης σε κάποιο στάδιο. Κάθε συνδυασμός δημιουργεί ένα οικονομικό αποτέλεσμα στο συγκεκριμένο στάδιο και στα υπόλοιπα που ακολουθούν.

Σχήμα 2. Συσχετισμός βασικών χαρακτηριστικών Δ.Π.



ΠΗΓΗ: Υψηλάντης Π., «Επιχειρησιακή Έρευνα», εκδόσεις Έλλην, Β' έκδοση, Αθήνα 1998, σελ. 424

3.3.2.0 Γενική μορφή προβλημάτων Δ.Π.

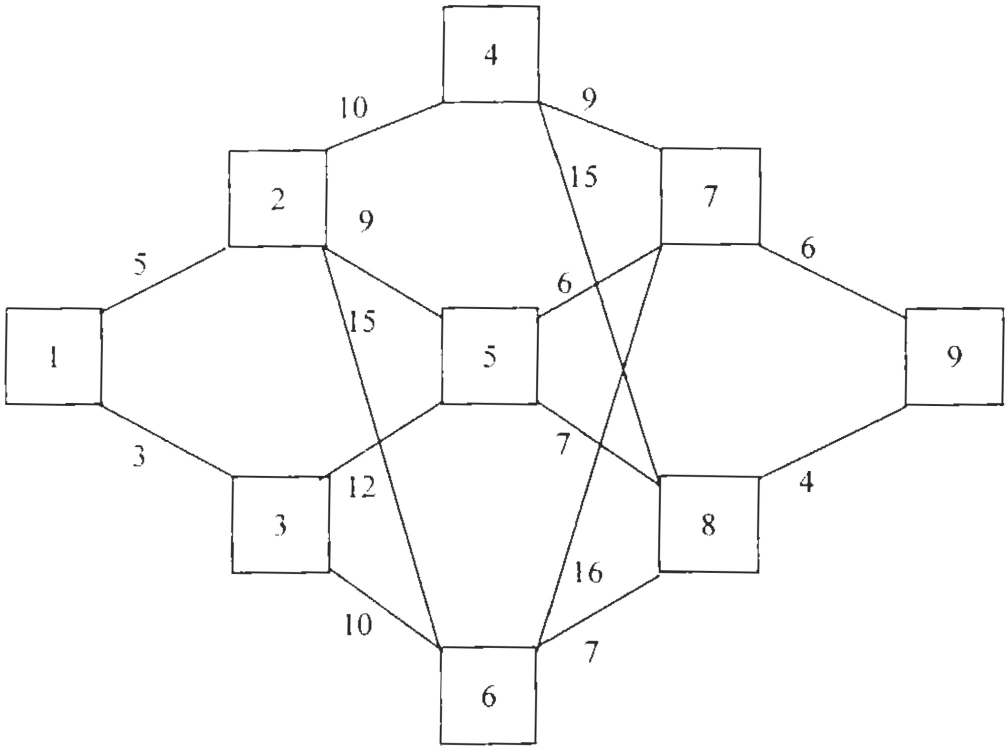
Η γενική μορφή προβλημάτων Δυναμικού προγραμματισμού είναι η εξής:
$f^{*}{}_{N}(S_N)$ = μέγιστο / ελάχιστο $f_N(S_N, D_N)$, όπου S_N: η κατάσταση σε κάποιο στάδιο N, D_N: η απόφαση στο στάδιο N και $f^{*}{}_{N}(S_N)$: το βέλτιστο αποτέλεσμα που αντιστοιχεί στην κατάσταση S_N.

Βασική αρχή είναι η **αρχή της μερικής βελτιστοποίησης**. Σύμφωνα με αυτή την αρχή η απόφαση που αποδίδει το βέλτιστο αποτέλεσμα σε κάποιο στάδιο N είναι ανεξάρτητη από αυτές των προηγούμενων σταδίων και εξαρτάται μόνο από την κατάσταση στην οποία βρίσκεται.

3.3.3.0 Εφαρμογή του Δυναμικού Προγραμματισμού

Πολλά προβλήματα των επιχειρήσεων μπορούν να επιλυθούν με το Γραμμικό Προγραμματισμό. Υπάρχουν όμως και κάποια άλλα, των οποίων η επίλυση είναι αδύνατη με τον Γ.Π. Σε αυτά τα προβλήματα καλείται να δώσει λύση ο Δυναμικός Προγραμματισμός.

Ένα κλασσικό παράδειγμα του Δυναμικού Προγραμματισμού είναι το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή. Έστω ότι ένας πωλητής ξεκινώντας από το σημείο 1 θέλει να καταλήξει στο σημείο 9 διανύοντας την μικρότερη συνολική απόσταση. Στο παρακάτω σχήμα δίδονται οι αποστάσεις των κόμβων.



Στάδιο 1 Στάδιο 2 Στάδιο 3 Στάδιο 4

Αρχικά πρέπει να αναγνωριστούν τα στάδια, οι καταστάσεις και οι αποφάσεις. Έτσι είναι:

ΣΤΑΔΙΟ	ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ	ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ
1	1	2,3
2	2,3	4,5,6
3	4,5,6	7,8
3	7,8	9

Με βάση όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα ισχύει ότι $f^*_N(S_N) = min f_N(S_N, D_N)$, όπου $f_N(S_N, D_N)$ η απόσταση από τον κόμβο S_N έως το τέλος της διαδρομής δεδομένου ότι ο επόμενος κόμβος είναι ο D_N.

Έστω ότι $A(S_N, D_N)$ η απόσταση μεταξύ των κόμβων S_N και D_N. Τότε ισχύει ο αλγόριθμος $f_N(S_N, D_N) = A(S_N, D_N) + f^*_{N+1}(S_{N+1})$

Για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων ακολουθείται αντίστροφη πορεία, δηλαδή από τον τελευταίο κόμβο προς τον πρώτο, διότι το αποτέλεσμα ενός σταδίου εξαρτάται από το αποτέλεσμα του ακριβώς επόμενου του.

Στο στάδιο 4 ο πωλητής μπορεί να βρίσκεται στον κόμβο 7 ή στον κόμβο 8 και έχει μία μόνο δυνατή επιλογή.

Κόμβος S_4	Απόφαση D_4	Επόμενος κόμβος S_5	Απόσταση από επόμενο κόμβο	Ελάχιστη απόσταση από επόμενο κόμβο έως το τέλος	Συνολική απόσταση
7	7,9	9	6	0	**6**
8	8,9	9	4	0	**4**

Πίνακας 1. Στάδιο 4

Στο στάδιο 3 ο πωλητής μπορεί να βρίσκεται σε τρεις κόμβους, στον 4, στον 5 ή στον 6. Σε αυτό το στάδιο έχει δύο δυνατές επιλογές. Μπορεί να μεταβεί στον κόμβο 7 ή στον κόμβο 8.

Έτσι διαμορφώνεται ο δεύτερος πίνακας.

Κόμβος S_4	Απόφαση D_4	Επόμενος κόμβος S_5	Απόσταση από επόμενο κόμβο	Ελάχιστη απόσταση από επόμενο κόμβο έως το τέλος	Συνολική απόσταση
4	4,7	7	9	6	15
4	4,8	8	15	4	19
5	5,7	7	6	6	12
5	5,8	8	7	4	11
6	6,7	7	16	6	22
6	6,8	8	7	4	11

Πίνακας 2. Στάδιο 3

Σύμφωνα με τον πίνακα 2, οι συντομότερες διαδρομές από τους κόμβους αυτού του σταδίου έως το τέλος είναι:

Από τον κόμβο 4: ο επόμενος κόμβος θα είναι ο 7 με απόσταση από το τέλος 15.

Από τον κόμβο 5: ο επόμενος κόμβος θα είναι ο 8 με απόσταση από το τέλος 11.

Από τον κόμβο 6: ο επόμενος κόμβος θα είναι ο 8 με απόσταση από το τέλος 11.

Στο δεύτερο στάδιο ο πωλητής μπορεί να βρίσκεται είτε στον κόμβο 2 είτε στον κόμβο 3. Οι επιλογές που έχει είναι τρεις. Θα μεταβεί είτε στον κόμβο 4, είτε στον 5 ή στον 6.

Ο επόμενος πίνακας περιλαμβάνει τους υπολογισμούς από τους κόμβους του σταδίου 2 έως το τέλος της διαδρομής.

Κόμβος S_4	Απόφαση D_4	Επόμενος κόμβος S_5	Απόσταση από επόμενο κόμβο	Ελάχιστη απόσταση από επόμενο κόμβο έως το τέλος	Συνολική απόσταση
2	2,4	4	10	15	25
2	2,5	5	9	11	20
2	2,6	6	15	11	26
3	3,5	5	12	11	23
3	3,6	6	10	11	21

Πίνακας 3. Στάδιο 2

Στο σημείο αυτό μπορεί εύκολα να παρατηρήσει κανείς ότι στον παραπάνω πίνακα δεν συμπεριλαμβάνονται όλες οι διαδρομές από τους κόμβους του επόμενου σταδίου έως το τέλος, παρά μόνο οι πιο σύντομες.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα η συντομότερη απόσταση από τον κόμβο 2 έως το τέλος είναι 20. Αντίστοιχα, η συντομότερη απόσταση από τον κόμβο 3 είναι 21.

Μένει τώρα να υπολογισθεί η απόσταση από το στάδιο 1. Στο στάδιο 1 υπάρχει μόνο ένας κόμβος στον οποίο μπορεί να βρίσκεται ο πωλητής, ο κόμβος 1. Από τον κόμβο 1 μπορεί να μεταβεί στον κόμβο 2 ή στον κόμβο 3. Έτσι διαμορφώνεται ο τελευταίος πίνακας.

Κόμβος S_4	Απόφαση D_4	Επόμενος κόμβος S_5	Απόσταση από επόμενο κόμβο	Ελάχιστη απόσταση από επόμενο κόμβο έως το τέλος	Συνολική απόσταση
1	1,2	2	5	20	25
1	1,3	3	3	21	24

Πίνακας 4. Στάδιο 1

Επειδή ο πίνακας 4 είναι ο τελευταίος πίνακας του προβλήματος, τα αποτελέσματα που εξάγονται από αυτόν δίνουν τη λύση του προβλήματος.

Η καλύτερη επιλογή του πωλητή στο πρώτο στάδιο είναι να μεταβεί στον κόμβο 3.

Από τον κόμβο 3 (δεύτερο στάδιο) η καλύτερη επιλογή, σύμφωνα με τον πίνακα 3, είναι ο κόμβος 6. Ο δεύτερος πίνακας, ο οποίος αναλύει το στάδιο 3, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η βέλτιστη απόφαση του πωλητή είναι ο κόμβος 8, δεδομένου ότι βρίσκεται στον κόμβο 6. Τέλος, περνώντας στο τέταρτο στάδιο η μόνη επιλογή του πωλητή είναι ο κόμβος 9.

Με βάση τα παραπάνω η **βέλτιστη διαδρομή** που πρέπει να ακολουθήσει ο πωλητής **είναι η 1-3-6-8-9** και η **συνολική απόσταση** από τον τελικό κόμβο είναι **24**.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Μελετώντας την παρούσα εργασία, μπορεί εύκολα να κατανοήσει κανείς τη σημαντική συμβολή των οικονομικών μαθηματικών στην επίλυση των οικονομικών προβλημάτων μίας επιχείρησης. Ακόμα, είναι εμφανές πως το σημαντικότερο μέρος για την επίλυση ενός προβλήματος, είναι η εύρεση και επιλογή των σωστών δεδομένων. Έπειτα ακολουθεί ο έλεγχος των συνεπειών εφαρμογής της λύσης που διεξάγεται από το μοντέλο.

Οι μέθοδοι που αναλύθηκαν είναι αρκετά απλουστευμένες και αποτελούν τους βασικούς τρόπους επίλυσης οικονομικών προβλημάτων. Τούτο σημαίνει πως στην πραγματικότητα οι παράγοντες που επηρεάζουν την επίλυση ενός προβλήματος είναι αρκετά περισσότεροι και πιο πολύπλοκοι από όσους αναφέρονται σε ένα οικονομικό μοντέλο. Για το λόγο αυτό, κι επειδή οι διαδικασίες επίλυσης είναι χρονοβόρες, έχουν αναπτυχθεί προγράμματα για ηλεκτρονικούς υπολογιστές που επιταχύνουν τις διαδικασίες αυτές.

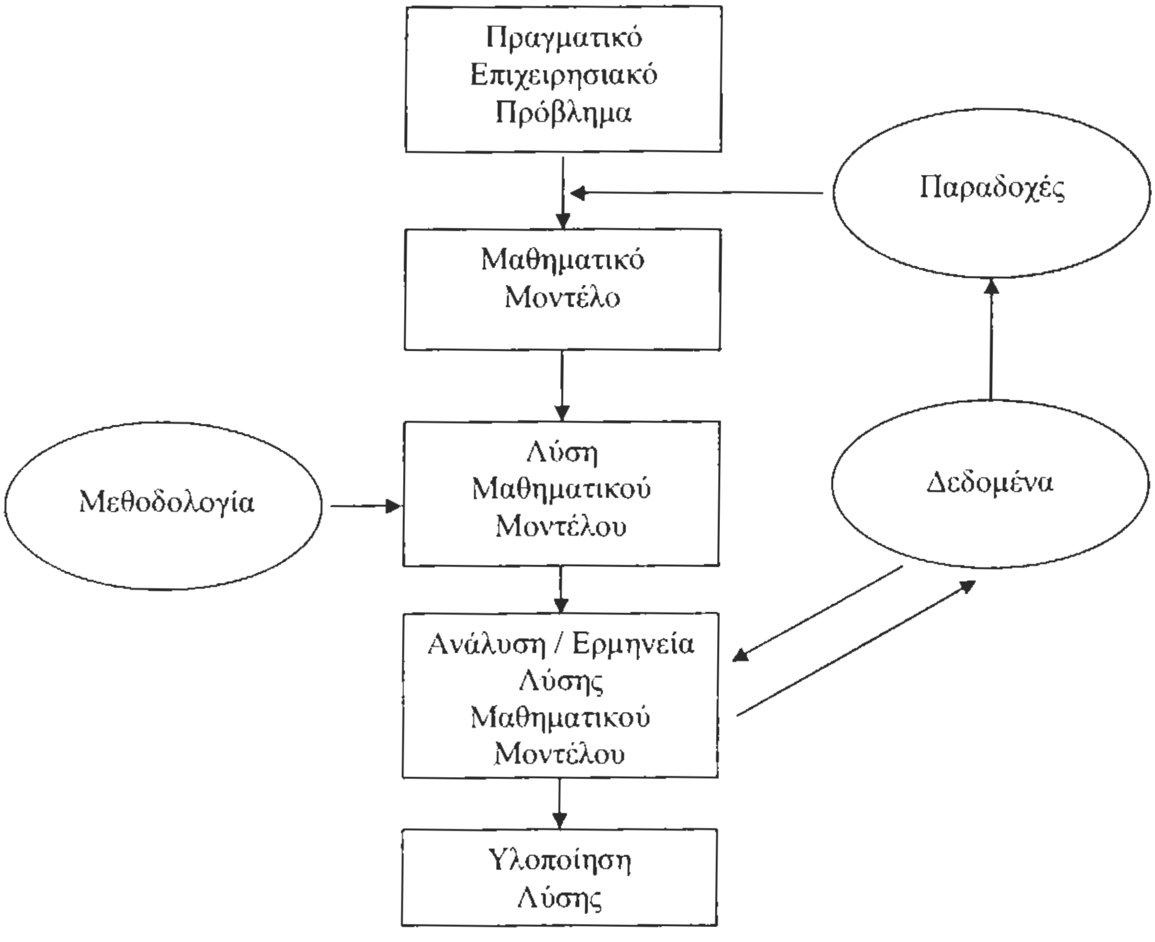
Εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κανείς, ότι η επιλογή ενός οικονομικού μοντέλου εξαρτάται αρχικά από το ισχύον πρόβλημα. Έτσι, ανάλογα με το πρόβλημα που παρουσιάζεται σε μία επιχείρηση μπορεί να επιλεγεί και μία διαδικασία βελτιστοποίησης. Βασική προϋπόθεση για τη διαδικασία βελτιστοποίησης είναι η ύπαρξη περισσοτέρων των δύο εναλλακτικών και αμοιβαία αποκλειόμενων λύσεων.

Κλείνοντας, αξίζει να αναφερθεί η σπουδαιότητα της εφαρμογής της μεθόδου Lagrange και του μαθηματικού προγραμματισμού στην επίλυση των οικονομικών προβλημάτων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Παράρτημα 1. Διαδικασία επίλυσης επιχειρησιακού προβλήματος

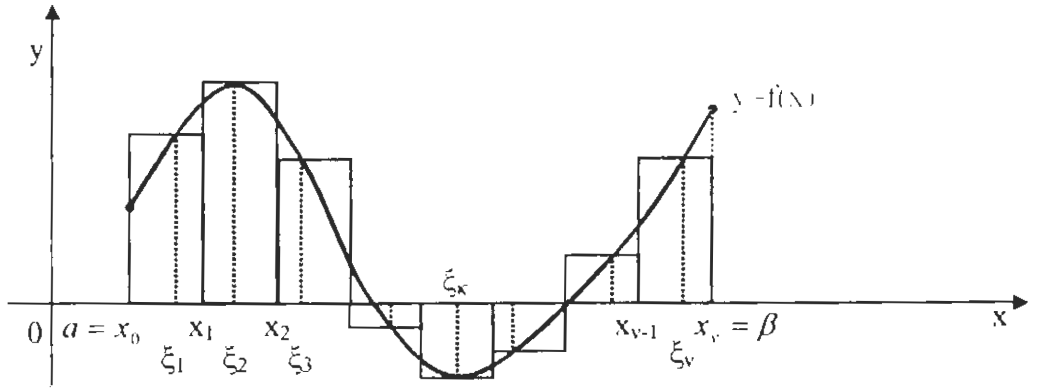
Σχήμα 1.



ΠΗΓΗ: Υψηλάντης Π., «Επιχειρησιακή Έρευνα», εκδόσεις Έλλην, Β' έκδοση, Αθήνα 1998, σελ.20

Παράρτημα 2. Ορισμένο ολοκλήρωμα

Σχήμα 1



ΠΗΓΗ: Άγνωστος, «Μαθηματικά Γ' Τάξης Ενιαίου Λυκείου», ΟΕΔΒ, Γ' έκδοση, Αθήνα 2003, σελ. 329

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

📖 Άγνωστος, «Μαθηματικά Γ' Τάξης Ενιαίου Λυκείου», ΟΕΔΒ, Γ'έκδοση, Αθήνα 2003

📖 Άγνωστος, «Μεγάλη Μαθηματική Εγκυκλοπαίδεια», τόμος 2ος , εκδόσεις Σύγχρονη Διδακτική, Αθήνα

📖 Γεωργίου Δ., «Μαθηματικά ΙΙ», Διδακτικές σημειώσεις, Πάτρα 2000

📖 Γεωργίου Δ., «Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών», Διδακτικές σημειώσεις, Πάτρα 2000

📖 Γκαρούτσος Ι., «Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις», SPIN, Αθήνα

📖 Ζαγούρας Χ., «Γενικά Μαθηματικά, πανεπιστημιακές παραδόσεις», τόμος 1ος, Πάτρα 1998

📖 Κακαρελίδης Γ., «Επιχειρησιακή Έρευνα», διδακτικές σημειώσεις, Πάτρα, 2002

📖 Καρατζάς Ι., «Optimization Problems in the Theory of Continuous Trading», SIAM Journal of Control and Optimization, 1989.

📖 Κιόχος Π., «Οικονομική της Διοίκησης», εκδόσεις Interbooks, Αθήνα 1999

📖 Κιόχος Π. - Παπανικολάου Γ., «Προγραμματισμός Δράσεως Επιχειρήσεων», εκδόσεις Σταμούλης, Αθήνα 2001

📖 Κούνια Σ.- Φακίνου Δ., «Γραμμικός Προγραμματισμός», εκδόσεις Ζήτη, Β' έκδοση, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη 1993

📖 Λουκάκης Μ., «Επιχειρησιακή Έρευνα», τόμος 1ος, εκδόσεις Εκδοτικό Κέντρο Βόρειας Ελλάδας, Γ' έκδοση, Θεσσαλονίκη 1990

📖 Παπαντωνίου Β., «Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών», Θεσσαλονίκη 1989

📖 Σαραντίδης Σ., «Οικονομική Ανάλυση», εκδόσεις Παπαζήση, Β' έκδοση, Πειραιάς 1976

📖 Σιαφαρίκας Π., «Εφαρμογές των συνήθων διαφορικών εξισώσεων», τόμος Ι, Πάτρα, 2002

📖 Τραχανάς Δ., «Οικονομική της Διοίκησης», εκδόσεις Σταμούλης, Αθήνα 1994

📖 Υψηλάντης Π., «Επιχειρησιακή Έρευνα», εκδόσεις Έλλην, Β' έκδοση, Αθήνα 1998

📖 Ψαράκης Ε., «Δομές δεδομένων και Οργάνωση δικτύων», Διδακτικές σημειώσεις, Πάτρα, 2002

ΞΕΝΗ

📖 Baumol W., "What Can Economy Theory Tribute to Managerial Economics", American Economic Review, Μάιος 1961

📖 Black, F.-Scholes M., "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy 81.

📖 Boyce W.- DiPrima R., «Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών», John Wiley & Sons, Inc.1999

📖 Chow G., "Duplicating contingent claims by the Lagrange method", Pacific Economic Review, Black well Publishers Ltd., 199, pp. 277-283

📖 Chow G., "Optimization by the Lagrange Method", New York, Oxford University Press, 1997.

📖 Cyert R - March J.., "A Behavioral Theory of the Firm", εκδόσεις Prentice Hall, 1963

📖 Dowling E., "Introduction to Mathematical Economics", 3rd edition, McGraw-Hill, 2001

📖 Harrison, J. M.-Pliska S. R., "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", 1981.

📖 Lange O., «Οικονομετρία», εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα 1979

📖 Machlup F., "Essays on Economic Semantics", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1963

📖 Merton, R., "The Theory of Rational Option Pricing", Bell Journal of Economics and Management Science, 1973.

📖 Parzynski W., "Introduction to Mathematical Analysis", McGraw-Hill PCI, London 1982

📖 Peng, S., "A Linear Approximation Algorithm using BSDE", Pacific Economic Review, 1999.

📖 Peng, S.-Yang F., "Duplicating and Pricing Contingent Claims in Incomplete Markets", Pacific Economic Review, 1999.

📖 Situ R., "Optimization for a Financial Market with Jumps by Lagrange's Method", Pacific Economic Review, 1999.

- Stephenson G., «Εισαγωγή στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις», εκδόσεις Longman Group LTD, 1970
- Tolstoi A, Méthodes d'éliminations des transports non rationnels hors de la planification, Le transport socialiste, 1939, No 9, p. 28-51
- Wessels W., «Οικονομική», εκδόσεις Κλειδάριθμος, Β' έκδοση, Αθήνα 1995

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ

- http://users.auth.gr/~karanika/math1/Diaf.exisos/diaforikes-Exis.pdf
- www.aueb.gr/lessons/d5/epl111/ask_pdf/ask7.pdf
- www.aueb.gr/users/mathpage/epeaek/Logismos/Kefal6/kefal6.html
- www.econ.ohio-state.edu/efisher/econ700/lagrange.pdf
- http://www.isye.gatech.edu/~spyros/LP
- www.math.aegean.gr/Courses/ODE/odek02/Linear/k02_linear.htm
- www.math.wisc.edu/~angenent/234/lagrange.pdf
- www.mathlab.gr/lhmmata/oloklhrvmata.doc
- http://www-unix.mcs.anl.gov/otc/Guide/faq/linear-programming-faq.html#Q1

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

Π

Σ

Τ

Χ

Α – Ζ