ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΑΣ

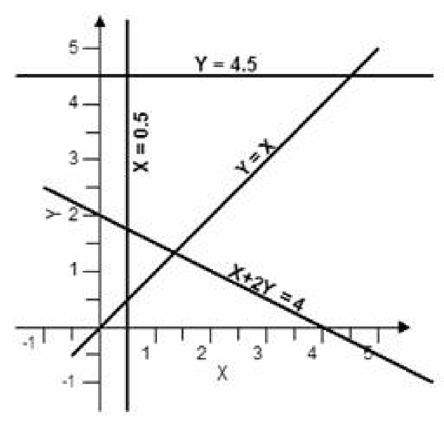
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΜΑΛΙΑΔΑΣ

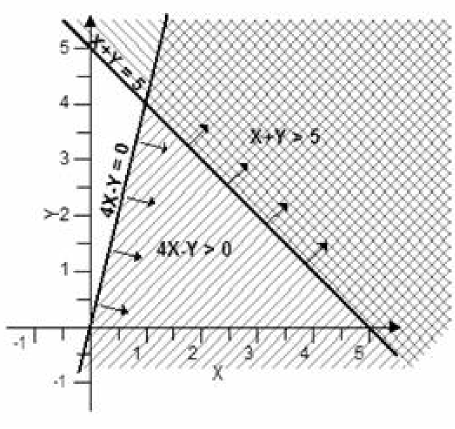
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΣΤΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ
ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

LINEAR PROGRAMMING
THEORY AND APPLICATIONS





ΖΩΗ ΖΥΓΟΥΡΑ

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΔΡ. ΗΛΙΑΣ Κ. ΣΤΑΥΡΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΜΑΛΙΑΔΑ, ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2011

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Επιθυμώ να εκφράσω το βαθύτερο συναίσθημα ευγνωμοσύνης και εκτίμησης στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Σταυρόπουλο Ηλία για την τιμή που μου έκανε να συνεργαστούμε, την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με το θέμα αυτό, την υποστήριξη που έδειξε στο πρόσωπό μου, καθώς και την ώθηση για συνεχή προσπάθεια, μάθηση και πρόοδο που μου ενέπνευσε. Επίσης για την πολύτιμη καθοδήγηση του, τη συνεχή υποστήριξη και τη βοήθεια του σε όλη τη διάρκεια διεκπεραίωσης αυτής της πτυχιακής εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τα πνευματικά και υλικά αγαθά που μου προσφέρουν καθώς και για την υποστήριξη και κατανόηση τους.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ – ΠΙΝΑΚΩΝ - ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ - ΕΙΚΟΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η επίλυση των επιχειρησιακών προβλημάτων δεν μπορεί να αντιμετωπισθεί αποτελεσματικά με βάση την διαίσθηση, την ατεκμηρίωτη γνώση και πρόβλεψη αλλά απαιτείται η υιοθέτηση μιας νέας αντίληψης και προσέγγισης που να οδηγεί στην επίλυση των προβλημάτων αυτών με ένα συνεπή, λογικό, συστηματικό και επιστημονικό τρόπο.

Η παρούσα πτυχιακή εργασία παρουσιάζει μια μελέτη η οποία αναφέρεται στην εφαρμογή των μεθόδων και τεχνικών της **Επιχειρησιακής Έρευνας** στην πράξη. Εστιάζει κυρίως στο επιχειρησιακό πρόβλημα και στα αναμενόμενα αποτελέσματα που χρειάζεται ένα στέλεχος για να λάβει τις σωστές αποφάσεις. Επικεντρώνεται στον πιο γνωστό κλάδο μαθηματικού προγραμματισμού και ίσως την πιο αναπτυγμένη και ευρύτερα χρησιμοποιούμενη τεχνική Επιχειρησιακής Έρευνας τον **Γραμμικό Προγραμματισμό**, αναλύοντας τόσο την μεθοδολογία όσο και τον τρόπο εφαρμογής και ανάλυσης των αποτελεσμάτων της.

Κάθε πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού μπορεί να αποτελείται από δύο ή περισσότερες μεταβλητές. Όταν ένα πρόβλημα έχει το πολύ τρεις μεταβλητές τότε μπορεί να λυθεί εύκολα με την βοήθεια της **Γραφικής Μεθόδου**. Στην αντίθετη περίπτωση όταν έχουμε περισσότερες άγνωστες μεταβλητές, για την επίλυση γραμμικών προβλημάτων εφαρμόζουμε συνήθως μεθόδους γραμμικής άλγεβρας. Η πιο γνωστή και χρησιμοποιούμενη μέθοδος γραμμικής άλγεβρας είναι η **Μέθοδος Simplex**. Επίσης σε κάθε πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού, αντιστοιχεί ένα δεύτερο πρόβλημα, το **δυϊκό** του, το οποίο κάνει ανασκόπηση του αρχικού προβλήματος και φανερώνει χαρακτηριστικά του τα οποία δεν είναι ορατά.

Η εργασία ολοκληρώνεται με την παρουσίαση ισχυρών υπολογιστικών εργαλείων επίλυσης γραμμικών προβλημάτων, όπως το **Lindo**, το **Microsoft Excel Solver,** το **Maple** και άλλων.

ABSTRACT

The solution of operational problems cannot be effectively dealt with, only on the basis of intuition, undocumented knowledge and prediction, but the adoption of a new concept and approach is required, that leads to solving these problems with a consistent, logical, systematic and scientific way.

This thesis presents a research that refers to the implementation of methods and techniques of **Operational Research** in practice. The main focus is on the operational problem and on the expected results that a business executive needs in order to make the right decisions. It focuses on the best known branch of mathematical programming, and maybe the most commonly used technique of operational research the **Linear Programming,** analyzing the methodology as well as the application method and the analysis of its results.

Every problem of Linear Programming might consist of two or more variables. When a problem has three or more variables, it can be easily be solved using the **Graphical method**. In the opposite case, when we have more unknown variables, for the solution of linear problems we mostly apply linear algebra methods. The most common and more used linear algebra method is the **Simplex Method**. Moreover, in every problem of Linear Programming, corresponds to a second problem, its **dual** one, that reviews the initial problem and brings up its characteristics that are not visible.

The thesis is completed with the presentation of powerful calculation software tools for solving linear problems, such as **Lindo**, **Microsoft Excel Solver, Maple** and others.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

1.1 Εισαγωγή

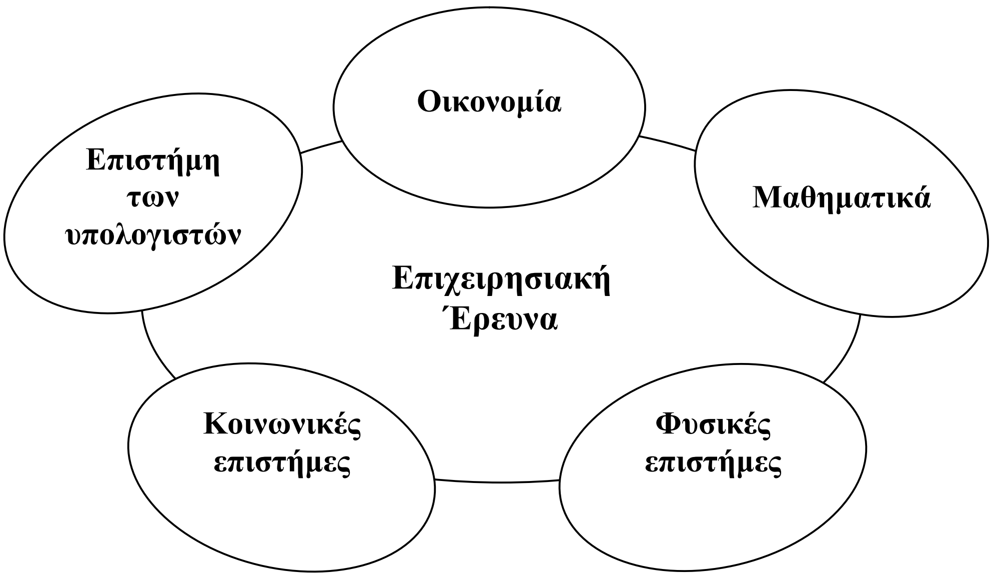
Τα προβλήματα λήψης απόφασης είναι από τα πιο συνηθισμένα που αντιμετωπίζει ο άνθρωπος. Ένα πρόβλημα απόφασης συνίσταται στην επιλογή από μια σειρά εναλλακτικών τρόπων δράσης, εκείνου του τρόπου δράσης που εξασφαλίζει την καλύτερη εξυπηρέτηση των στόχων που έχουν τεθεί. Μέχρι τα μέσα περίπου του αιώνα μας, η αντιμετώπιση των προβλημάτων απόφασης βασιζόταν στην εμπειρία, τη διαίσθηση και την «κοινή λογική» του αποφασίζοντα. Η αύξηση όμως, του μεγέθους και της πολυπλοκότητας των προβλημάτων όλων των επιστημών δημιούργησαν την ανάγκη για μια πιο επιστημονική αντιμετώπιση των προβλημάτων απόφασης. Έτσι μετά τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο, γεννήθηκε ένας νέος επιστημονικός κλάδος που χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στη Μεγάλη Βρετανία με την ονομασία **Επιχειρησιακή Έρευνα,** όπως είναι ευρύτερα γνωστός, για την κάλυψη του κενού που υπήρχε. Η ανάπτυξη της, όπως και πολλών άλλων επιστημών, έγινε για να εξυπηρετήσει αρχικά στρατιωτικούς σκοπούς. Μερικά από τα προβλήματα που αντιμετώπιζαν οι επιστήμονες της εποχής ήταν:

- η επιλογή βέλτιστων τοποθεσιών για την εγκατάσταση οπλικών συστημάτων,
- ο καθορισμός του άριστου μεγέθους των πολεμικών αποστολών και
- η επιλογή τρόπων προστασίας των άμαχων πληθυσμών.

Για την επίλυση των προβλημάτων αυτών αναπτύχθηκαν συγκεκριμένα μαθηματικά μοντέλα, με στόχο τον προσδιορισμό της βέλτιστης κατανομής πόρων, τον έλεγχο των στρατιωτικών αποθεμάτων, τον προσδιορισμό των πιο σύντομων διαδρομών μεταξύ των κόμβων ενός δικτύου. Τα μαθηματικά αυτά μοντέλα χρησιμοποιούνται για την επίλυση επιχειρησιακών προβλημάτων στην μετά τον πόλεμο εποχή ιδιαίτερα στη δεκαετία '50 και '60 με πρωτοπόρους τους Dantzig, Bellman και Ackoff. Η φιλοσοφία της επιστήμης της Επιχειρησιακής Έρευνας επιβάλει μια ποσοτική προσέγγιση στην ανάλυση και λύση των επιχειρησιακών προβλημάτων [55].

Αν και η Επιχειρησιακή Έρευνα αναπτύσσεται συνεχώς και μάλιστα με αλματώδη ρυθμό, δεν μπορούμε να πούμε, ότι έχει ήδη φτάσει στο επίπεδο πλήρους ωριμότητας. Για το λόγο αυτό λοιπόν δεν μπορούμε να χαρακτηρίσουμε την Επιχειρησιακή Έρευνα ούτε σαν επιστήμη ούτε σαν μεθοδολογία. Εκείνο όμως που μπορούμε να δεχτούμε ανεπιφύλακτα είναι το ότι, είτε σαν επιστήμη, είτε σαν μεθοδολογία, η Επιχειρησιακή Έρευνα απολαμβάνει ήδη πλήρη αυτονομία [42].

Έτσι σήμερα, οι εφαρμογές της Επιχειρησιακής Έρευνας καλύπτουν, πέρα από στρατιωτικούς οργανισμούς, βιομηχανίες, νοσοκομεία, οικονομικά ιδρύματα, βιβλιοθήκες, συστήματα μεταφοράς και πολλούς άλλους τομείς (Σχήμα 1.1) της σύγχρονης επιστημονικής, επιχειρησιακής και κοινωνικοπολιτικής δραστηριότητας [42].



Σχήμα 1.1: Διεπιστημονικό Πεδίο Επιχειρησιακής Έρευνας.

1.2 Το αντικείμενο της Επιχειρησιακής Έρευνας

Ο όρος Επιχειρησιακή Έρευνα, αναφέρεται στην επινόηση και στην εφαρμογή επιστημονικών μεθόδων από διεπιστημονικές ομάδες για την επίλυση προβλημάτων που αφορούν τον έλεγχο και το βέλτιστο τρόπο λειτουργίας οργανωμένων συστημάτων [42]. Συνήθως συναντάμε την Επιχειρησιακή Έρευνα και με τους όρους Διοικητική Επιστήμη

(Management Science), Λήψη Διοικητικών Αποφάσεων (Decision Making) ή Ποσοτική Ανάλυση (Quantitative Analysis). Τα βασικότερα χαρακτηριστικά της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι ότι [46]:

- Αποτελεί νέα μορφή έρευνας που πραγματοποιείται σε συνεργασία με διοικητικά στελέχη.
- Αναφέρεται σε προβλήματα λήψης αποφάσεων και ελέγχου ενεργών συστημάτων.
- Εφαρμόζει επιστημονική μεθοδολογία για την ποσοτική εκτίμηση της βέλτιστης λύσης προβλημάτων με βάση αντικειμενικά κριτήρια και χρησιμοποιεί μοντέλα.
- Διεξάγεται από μικτές ομάδες επιστημόνων.
- Έχει υιοθετήσει συστημική προσέγγιση (systems approach).

Η Επιχειρησιακή Έρευνα δεν είναι απλά μια συλλογή τεχνικών αλλά αποτελεί κυρίως την ενδεδειγμένη διαδικασία επιστημονικής προσέγγισης των προβλημάτων κατανομής των περιορισμένων πόρων που παρουσιάζονται σε συστήματα των φυσικών και κοινωνικών επιστημών. Γενικότερα η Επιχειρησιακή Έρευνα συνεισφέρει σημαντικά στους παρακάτω παράγοντες [55]:

- Στην υποστήριξη των αποφάσεων της διοίκησης ενός υπαρκτού συστήματος για κάποιο λειτουργικό πρόβλημα με τη δημιουργία ενός μαθηματικού μοντέλου (αν και κάτι τέτοιο είναι αδύνατο) ή με ένα μοντέλο προσομοίωσης το οποίο επιτρέπει στον ηλεκτρονικό υπολογιστή να προσεγγίσει τη συμπεριφορά του συστήματος.
- Στη μελέτη της δομής των ανωτέρω αποφάσεων ώστε να είναι εφικτή η ανάπτυξη μιας διαδικασίας εύρεσής τους (επίλυση του μοντέλου).
- Στη διατύπωση της μαθηματικής θεωρίας που οδηγεί στην απόφαση, η οποία βελτιστοποιεί τον προκριθέντα στόχο (κριτήριο επίδοσης του συστήματος) ή που συγκρίνει διαφορετικούς τρόπους ενεργειών αποτιμώντας ένα συγκεκριμένο κριτήριο επίδοσης.

Στις μέρες μας, είναι γενικά παραδεκτό ότι η Επιχειρησιακή Έρευνα έχει τις δυνατότητες επιτυχούς αντιμετώπισης περίπλοκων και πολύπλοκων προβλημάτων, πολλές φορές σε στοχαστικά περιβάλλοντα αβεβαιότητας [40]. Με βάση αναλυτικές τεχνικές αλλά και τεχνικές προσομοίωσης, διευκολύνει την εις βάθος κατανόησή τους προτείνοντας ταυτόχρονα πρακτικές επίλυσης.

1.3 Μεθοδολογία της Επιχειρησιακής Έρευνας

Η επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος της Επιχειρησιακής Έρευνας διέρχεται κατά κανόνα από τα παρακάτω έξι στάδια [42]:

1. Προσδιορισμός Προβλήματος

Τα πραγματικά προβλήματα είναι συνήθως ασαφή και ανακριβή. Χρειάζεται προσεκτική παρατήρηση του συστήματος και συνεργασία με τους αποφασίζοντες. Τα κριτήρια προσδιορίζονται με βάση:

- τη μεγιστοποίηση των κερδών,
- τη βελτίωση της φήμης της επιχείρησης,
- τα συνολικά κριτήρια,
- την αύξηση των πωλήσεων και
- την αύξηση του μεριδίου αγοράς.

2. Συλλογή Στοιχείων

Είναι μια διαδικασία απαραίτητα προφανής κατά την οποία η συλλογή πολλών στοιχείων προσδίδουν ποιότητα στην όλη διαδικασία.

3. Σχεδιασμός θεωρητικού μοντέλου

Το μοντέλο (υπόδειγμα) είναι η απλοποιημένη απεικόνιση της πραγματικότητας. Τα βασικότερα στοιχεία από τα οποία αποτελείται ένα μοντέλο είναι:

- οι μεταβλητές απόφασης,
- οι περιορισμοί,
- η αντικειμενική συνάρτηση και
- οι παράμετροι.

Τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα της διαδικασίας αυτής είναι ότι:

- η περιγραφή είναι πιο συνοπτική και
- ότι είναι πιο κατανοητή η δομή του προβλήματος έτσι ώστε να προλαμβάνει παρανοήσεις.

4. Επίλυση μοντέλου

Η επίλυση ενός μοντέλου χωρίζεται σε τέσσερα σημαντικά στάδια:

- την εύρεση και εφαρμογή της κατάλληλης μεθόδου επίλυσης,
- την εύρεση του αλγορίθμου που θα χρησιμοποιηθεί για την όλη διαδικασία (στην δική μας περίπτωση παρουσιάζουμε ως αλγόριθμο την μέθοδο Simplex που αναλύουμε στο τέταρτο κεφάλαιο της εργασίας),
- την εύρεση της βέλτιστης λύσης και
- την συσχέτιση της βέλτιστης λύσης με το θεωρητικό μοντέλο.

Το σημαντικότερο στην διαδικασία επίλυσης μοντέλου είναι η **ανάλυση ευαισθησίας** δηλαδή, το πώς μεταβάλλεται η λύση αν μεταβληθούν οι τιμές κάποιων παραμέτρων.

5. Έλεγχος Μοντέλου

Η διαδικασία αυτή εξαρτάται από τη φύση του προβλήματος αλλά και του μοντέλου. Απλοί τρόποι ελέγχου είναι:

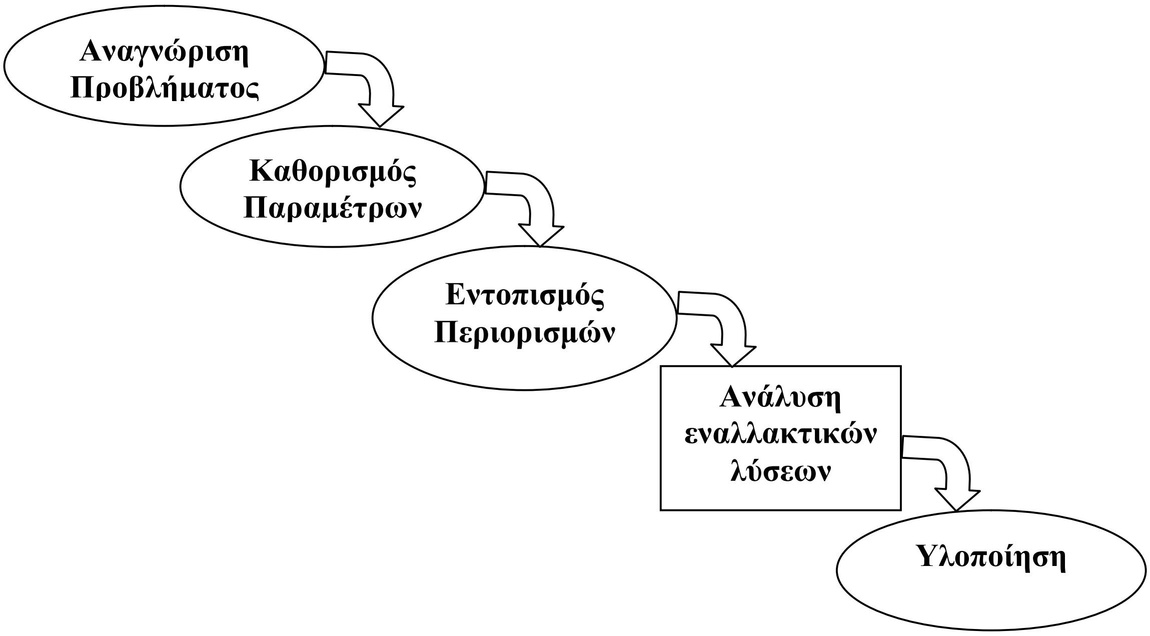
- ο έλεγχος από κάποιο τρίτο,
- ο έλεγχος συμβατότητας μαθηματικών παραστάσεων και
- ο έλεγχος με ιστορικά στοιχεία.

6. Εφαρμογή της λύσης

Η διαδικασία αυτή αποτελεί την πιο κρίσιμη φάση εφόσον φαίνονται τα αποτελέσματα της όλης προσπάθειας. Οι προϋποθέσεις που οδηγούν στην επιτυχία είναι η στενή συνεργασία με τους αποφασίζοντες και η ενημέρωση των στελεχών.

1.4 Λήψη Επιχειρηματικών Αποφάσεων και Μαθηματικά Μοντέλα

Η λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων είναι μία από τις πιο βασικές λειτουργίες της Διοίκησης Επιχειρήσεων [55]. Η αντιμετώπιση ενός προβλήματος από τους υπεύθυνους λήψης αποφάσεων περιλαμβάνει συνήθως τα εξής στάδια (Σχήμα 1.2):



Σχήμα 1.2: Στάδια αντιμετώπισης ενός Προβλήματος.

1ο Στάδιο: Αναγνώριση και περιγραφή του προβλήματος

Η αναγνώριση του προβλήματος είναι σε πολλές περιπτώσεις το πιο σημαντικό αλλά και το πιο δύσκολο βήμα. Πολλές φορές η παρατήρησή μας περιορίζεται στα συμπτώματα του προβλήματος. Είναι σημαντικό να δούμε πιο πέρα από τα συμπτώματα και να εντοπίσουμε τις αιτίες που προξενούν το πρόβλημα. Ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, πολλές φορές δεν μπορεί να απομονωθεί, αλλά συνδέεται και με άλλα προβλήματα. Επομένως η προσπάθεια να λύσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα χωρίς να συμπεριλάβουμε και τα υπόλοιπα που συνδέονται με αυτό μπορεί να οδηγήσει σε χειρότερα αποτελέσματα. Είναι πολύ σημαντικό να εξετάσουμε το κατά πόσο και με πιο τρόπο η λύση ενός προβλήματος θα επηρεάσει άλλα προβλήματα της επιχείρησης. Από την άλλη πλευρά, όλες οι επιχειρήσεις και οι οργανισμοί αντιμετωπίζουν σωρό προβλημάτων. Οπωσδήποτε δεν είναι εφικτό να προσπαθήσουμε να τα λύσουμε όλα μαζί. Η προσπάθεια μας πρέπει να επικεντρωθεί σε ένα πρόβλημα ή μία ομάδα προβλημάτων τα οποία μπορούμε να τα καθορίσουμε και να τα περιγράψουμε με σαφήνεια καθορίζοντας συγχρόνως και τους στόχους μας με αντικειμενικό τρόπο. Η πρώτη δουλειά που θα πρέπει να κάνει η επιχείρηση είναι να θέσει τους στόχους της. Χωρίς στόχους δεν μπορεί να ληφθεί καμία απόφαση σχετική με την διαχείριση της αλλά ούτε να μετρηθεί και να εκτιμηθεί το αποτέλεσμα. Ο πιο συνήθης στόχος είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους. Όμως αυτό δεν σημαίνει πως δεν υπάρχουν άλλοι στόχοι, ανάλογα με την περίπτωση της κάθε επιχείρησης. Ο καθορισμός των στόχων δεν θεωρείται εύκολη δουλειά δεδομένου ότι η επιχείρηση πρέπει να συνδυάσει πολλές και διαφορετικές παραμέτρους. Ας δούμε όμως τι εννοούμε χρησιμοποιώντας ένα απλό παράδειγμα.

Έστω ότι ένα πρόβλημα που μπορούμε να εντοπίσουμε σε μία νοσοκομειακή μονάδα είναι η ανεπαρκής παροχή ιατρικής περίθαλψης. Οι στόχοι του συγκεκριμένου προβλήματος είναι οι εξής [55]:

- η ανακατανομή του προσωπικού για ανταπόκριση εξυπηρέτησης του αριθμού κλινών,
- η μείωση του μέσου όρου των ημερών παραμονής των ασθενών στα νοσοκομεία,
- η σωστή ανακατανομή του ιατρικού εξοπλισμού για μείωση χρόνου διάγνωσης και
- η μείωση κόστους.

2^{ο} Στάδιο: Καθορισμός των παραμέτρων του προβλήματος

Αυτό το στάδιο αφορά στον καθορισμό των παραγόντων εκείνων που επηρεάζουν τη λύση του προβλήματος και τους οποίους παράγοντες μπορούμε να μεταβάλλουμε ώστε να έχουμε διαφορετικές εναλλακτικές λύσεις του προβλήματος. Ας αναφερθούμε στο προηγούμενο παράδειγμα όπου το πρόβλημα ήταν η παροχή ανεπαρκούς ιατρικής περίθαλψης. Οι παράμετροι του προβλήματος εξαρτώνται από το συγκεκριμένο επίπεδο της διοίκησης που καλείται να πάρει αποφάσεις. Ο διευθυντής ενός νοσοκομείου, μπορεί να ανακατανείμει το προσωπικό περίθαλψης έτσι ώστε όλες οι κλινικές να έχουν την ίδια απόκριση εξυπηρέτησης, μπορεί επίσης να αποφασίσει τι εξοπλισμό χρειάζεται το νοσοκομείο με αποτέλεσμα να συντομευτεί ο χρόνος διάγνωσης και θεραπείας. Η αύξηση των θέσεων του ιατρικού προσωπικού, η το χτίσιμο μιας νέας πτέρυγας, ή η αύξηση των αποδοχών των ιατρών με σκοπό να προσελκύσει περισσότερους ιατρούς δεν είναι παράγοντες που θα μπορούσε να αλλάξει η διεύθυνση του νοσοκομείου. Αντίθετα, μερικοί από τους τελευταίους παράγοντες θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως παράμετροι του ιδίου προβλήματος αν το πρόβλημα αντιμετωπίζονταν στο επίπεδο της Νομαρχιακής Αυτοδιοίκησης ή του Υπουργείου Υγείας.

3^{ο} Στάδιο: Εντοπισμός περιορισμών του προβλήματος

Είναι προφανές από την συζήτηση του παραδείγματος ότι οι υπεύθυνοι λήψης αποφάσεων πρέπει επίσης να αναγνωρίσουν και τους περιορισμούς μέσα στους οποίους οφείλουν να κινηθούν, όπως για παράδειγμα ο συνολικός προϋπολογισμός του νοσοκομείου είναι ένας περιορισμός στην διαδικασία λήψης αποφάσεων για αγορά νέου ιατρικού εξοπλισμού.

4^{o} Στάδιο: Αναζήτηση και Συστηματική Ανάλυση Εναλλακτικών Λύσεων

Η σωστή αναγνώριση και ο καθορισμός του προβλήματος θα δείξει ποια δεδομένα χρειάζεται το πρόβλημα για τη λύση του. Η επεξεργασία και η ανάλυση των δεδομένων εξαρτάται από τη φύση των στοιχείων. Από την ανάλυση της υπάρχουσας κατάστασης της επιχείρησης προκύπτουν τα δυνατά και τα αδύνατα σημεία της. Η τόνωση των πρώτων και η απάλειψη των δευτέρων οδηγεί σε εξεύρεση εναλλακτικών λύσεων που αποτελούν το επόμενο βήμα στη διαδικασία λήψης αποφάσεων.

Η σύγκριση των εναλλακτικών λύσεων που έχουν ανιχνευθεί γίνεται για να επιλεγεί η «καλύτερη» ή η «βέλτιστη» λύση όπως συνηθίζεται στην ορολογία της Επιχειρησιακής Έρευνας. Βέβαια ο όρος «βέλτιστη λύση» πρέπει να συνδέεται με ένα προκαθορισμένο αντικειμενικό στόχο. Μόνο με τον καθορισμό ενός αντικειμενικού στόχου και με την ύπαρξη ποσοτικών κριτηρίων μέτρησης της απόδοσης κάθε εναλλακτικής λύσης σε σχέση με τον στόχο, είναι δυνατή η σύγκριση των εναλλακτικών λύσεων κάθε προβλήματος, και ακολούθως ο εντοπισμός της βέλτιστης. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο παράδειγμα, αν ο αντικειμενικός στόχος είναι η μείωση του μέσου όρου των ημερών παραμονής των ασθενών στο νοσοκομείο, τότε για κάθε εναλλακτική λύση που προτείνεται (π.χ. κατανομή προσωπικού) θα πρέπει να υπολογίσουμε το αποτέλεσμα που θα προκύψει σε ότι αφορά τον χρόνο παραμονής των ασθενών στο νοσοκομείο [55].

Ας θεωρήσουμε ένα άλλο παράδειγμα, την επιλογή μεταξύ διαφόρων εναλλακτικών στρατηγικών μάρκετινγκ για κάποιο προϊόν. Κάποια στρατηγική μπορεί να είναι «καλύτερη» από μία άλλη διότι αποφέρει μεγαλύτερα κέρδη στη επιχείρηση, κάποια άλλη διότι αυξάνει το συνολικό μερίδιο της αγοράς του προϊόντος, μία τρίτη διότι η επιχείρηση θα διεισδύσει σε μια νέα αγορά. Είναι ευνόητο ότι το ποια από όλες είναι η «καλύτερη» εξαρτάται από τον στόχο της επιχείρησης. Είναι επομένως πολύ σημαντικό όπως αναφέρθηκε παραπάνω να τεθούν οι αντικειμενικοί στόχοι εκ' των προτέρων ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση των εναλλακτικών λύσεων και η επιλογή μεταξύ αυτών της «βέλτιστης».

5^{o} Στάδιο: Υλοποίηση της Επιλεγείσας Λύσης

Το τελευταίο βήμα της διαδικασίας είναι η υλοποίηση των λύσεων που προέκυψαν. Το στάδιο αυτό είναι τις περισσότερες φορές πιο δύσκολο από ότι περιμένουμε. Ακόμα και στην περίπτωση που η προτεινόμενη λύση είναι η καλύτερη δυνατή και θα είχε ως αποτέλεσμα την αύξηση των κερδών, αν οι υπεύθυνοι δεν πεισθούν για την αποτελεσματικότητά της λύσης, η όλη προσπάθεια μπορεί να αποτύχει. Η εμπειρία έχει δείξει ότι λάθος χειρισμοί, στην φάση της υλοποίησης σωστών προτάσεων και επιλογών έχουν οδηγήσει σε αποτυχία. Ακόμα και μετά την υλοποίηση της προτεινόμενης λύσης απαιτείται συνεχής παρακολούθηση και έλεγχος, ώστε να εντοπισθούν τυχόν αλλαγές και βελτιώσεις που μπορούν να γίνουν λόγω νέων δεδομένων, αλλαγών στις επιχειρηματικές παραμέτρους, νέων περιορισμών. Συνοψίζοντας λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι ο *στόχος της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι η ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων τα οποία επιτρέπουν την εφαρμογή συστηματικών μεθόδων αναζήτησης της βέλτιστης κάθε φορά λύσης*.

1.5 Η Χρήση Μαθηματικών Μοντέλων στην Επιχειρησιακή Έρευνα

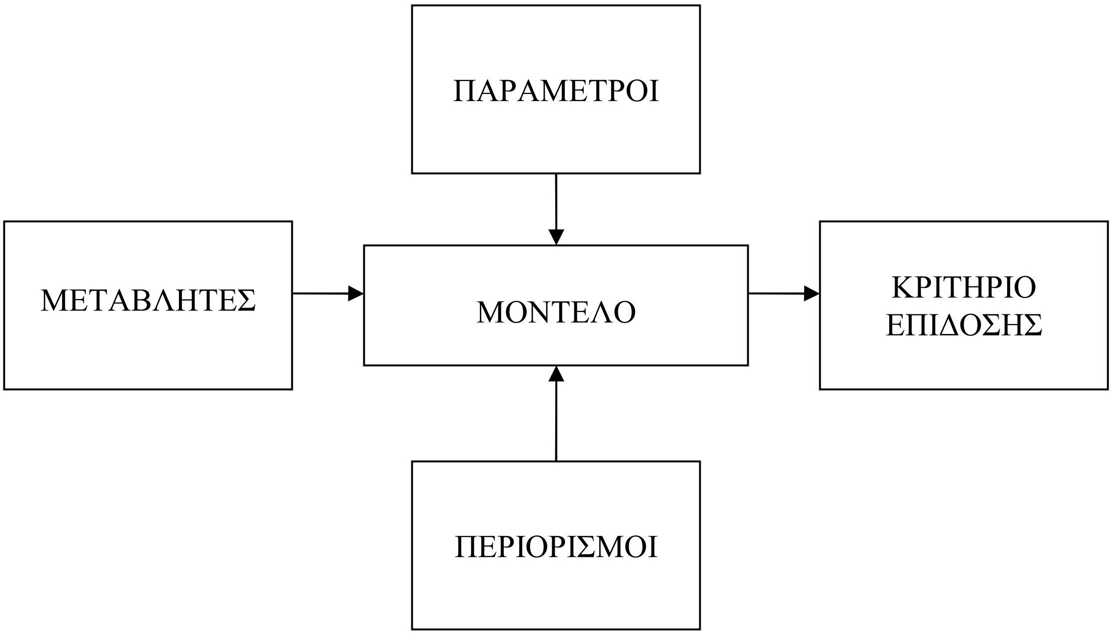
Ένας τρόπος προσέγγισης στην επίλυση επιχειρησιακών προβλημάτων είναι η χρήση μαθηματικών προτύπων ή μοντέλων όπως έχει επικρατήσει να αποκαλούνται. Η χρήση μοντέλων είναι διαδεδομένη σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους [55]. Ένα μαθηματικό μοντέλο είναι συνήθως ένα σύνολο μαθηματικών εξισώσεων ή σχέσεων που περιγράφουν μια δεδομένη κατάσταση.

Οι πραγματικές καταστάσεις που αντιμετωπίζουμε στον κόσμο των επιχειρήσεων είναι κατά κανόνα πιο πολύπλοκες από το μοντέλο το οποίο τις εκφράζει. Τις περισσότερες φορές είναι απαραίτητο να δεχθούμε ορισμένες παραδοχές και να κάνουμε ορισμένες απλουστεύσεις, έτσι ώστε να καταλήξουμε σε ένα μαθηματικό μοντέλο, το οποίο να είναι αρκετά απλό για να μπορεί να επιλυθεί [55]. Όμως, οι παραδοχές και οι απλουστεύσεις γίνονται δέκτες μόνο όταν δεν επηρεάζουν την ακρίβεια της απεικόνισης της πραγματικότητας.

1.5.1 Βασικά Χαρακτηριστικά Μαθηματικών Μοντέλων

Το μαθηματικό μοντέλο ενός συστήματος δεν είναι παρά μια εξιδανικευμένη περιγραφή του, εκφρασμένη με μαθηματικά σύμβολα και σχέσεις. Συνεπώς, για να προχωρήσουμε στη διατύπωση του, θα πρέπει να ορίσουμε τα συστατικά που πρέπει απαραιτήτως να συμπεριλαμβάνονται σ’ αυτή την εξιδανίκευση [40]. Σε γενικές γραμμές διακρίνουμε τα εξής συστατικά (Σχήμα 1.3):

- τις μεταβλητές (αγνώστους) του συστήματος οι οποίες εκπροσωπούν τις αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν,
- ένα (κατάλληλο) κριτήριο της επίδοσης του συστήματος εκφρασμένο ως μαθηματική συνάρτηση των ανωτέρω μεταβλητών,
- τους περιορισμούς, αποδιδόμενους μαθηματικά μέσω εξισώσεων ή ανισόσεων, που θα πρέπει να ικανοποιούν τις τιμές των μεταβλητών ώστε να ενσωματώνονται στο μοντέλο οι συνθήκες λειτουργίας του συστήματος και
- τις εξωγενείς ως προς τη μοντελοποίηση, γνωστές (ή εκτιμώμενες εκ των προτέρων), παραμέτρους του συστήματος.



Σχήμα 1.3: Είσοδοι και έξοδοι ενός μοντέλου βελτιστοποίησης.

Οι **μεταβλητές** είναι τα δομικά στοιχεία του προβλήματος τα οποία καθορίζονται από τον αναλυτή. Αυτός είναι και ο λόγος που συχνά αναφέρονται και ως μεταβλητές ελέγχου ή μεταβλητές απόφασης. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα μια βιομηχανία γάλακτος που προετοιμάζει την ημερήσια γραμμή παραγωγής της. Πολλές είναι οι μεταβλητές που υπάρχουν σ' ένα τέτοιο σύστημα. Μεταξύ αυτών, εύκολα μπορεί κάποιος να αναφέρει την ποσότητα των διαφόρων τύπου γάλακτος, τυριού και γιαουρτιού η οποία παράγεται. Οι μεταβλητές x_1, x_2, x_3 αναφέρονται στις ποσότητες πλήρους γάλακτος, άπαχου γάλακτος και τυριού φέτας αντίστοιχα που θα παραχθούν. Βέβαια, το πρόβλημα αφορά τον εντοπισμό τιμής για την κάθε μεταβλητή απόφασης. Απαιτείται δηλαδή η ύπαρξη κάποιου **στόχου προς**

επίτευξη [40]. Ο στόχος αυτός μπορεί να αφορά τη μεγιστοποίηση του κέρδους, την καλύτερη αξιοποίηση του εργατικού δυναμικού, την ελαχιστοποίηση του κόστους ή της υπερωριακής απασχόλησης. Αναζητούνται εκείνες οι τιμές των μεταβλητών ελέγχου οι οποίες θα βελτιστοποιήσουν το κριτήριο επίδοσης που ορίζεται σ' αυτό το στάδιο της μοντελοποίησης.

Στο παράδειγμα της γαλακτοβιομηχανίας που αναφέραμε πιο πάνω, ως στόχος θα μπορούσε να καθοριστεί η ημερήσια μεγιστοποίηση των κερδών. Στη συνέχεια, θα έπρεπε να προσδιοριστεί και καταγραφεί ένας τρόπος έκφρασης του συνολικού της κέρδους, ως συνάρτηση όλων των μεταβλητών απόφασης (προϊόντων που παρασκευάζονται), εκτιμώντας τη συνεισφορά του καθενός χωριστά [40]. Ο στόχος που ορίστηκε πρέπει να επιτευχθεί κάτω από τις συνθήκες λειτουργίας του συστήματος που μελετάται. Οι **περιορισμοί**, όπως η ανεπάρκεια των πόρων του συστήματος (π.χ. πρώτων υλών, εργατικού δυναμικού), η απορροφητικότητα της αγοράς, οι συμφωνίες με προμηθευτές και αγοραστές, οι χρόνοι παράδοσης των παραγόμενων προϊόντων, δημιουργούν αυτές τις συνθήκες. Αν η προαναφερόμενη βιομηχανία γάλακτος ήταν σε θέση να εξασφαλίσει απεριόριστη πρώτη ύλη και παραγωγική δυναμικότητα, καθώς επίσης και μονοπωλιακή παρουσία στην αγορά, θα εκτόξευσε τα κέρδη της στο άπειρο.

Τα πράγματα βέβαια είναι εντελώς διαφορετικά. Στο στάδιο αυτό της μοντελοποίησης, καλείστε να εντοπίσετε και να καταγράψετε ως συνάρτηση των μεταβλητών απόφασης τους παράγοντες οι οποίοι επιβάλουν όρια στις τιμές τους και συνεπώς, και στην τιμή του κριτηρίου επίδοσης του συστήματος. Οι μαθηματικές σχέσεις που αντιπροσωπεύουν τους περιορισμούς είναι συνήθως ανισότητες της μορφής $ax_i \ldots \geq b$, με a_i και b σταθερά [40].

Όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του μοντέλου που χρησιμοποιούνται για να ολοκληρωθούν οι σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών απόφασης ονομάζονται **παράμετροι**. Το ανά μονάδα προϊόντος κέρδος ή κόστος, η (προβλεπόμενη) ζήτηση της αγοράς, η διαθεσιμότητα των πρώτων υλών, η απαιτούμενη κατανάλωση εκάστης εξ' αυτών ανά μονάδα προϊόντος που παράγεται είναι μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα παραμέτρων ενός μοντέλου για συστήματα τα οποία μοντελοποιούνται από το γραμμικό μοντέλο. Οι τιμές των παραμέτρων θεωρούνται γνωστές και αμετάβλητες.

1.6 Επισκόπηση Μοντέλων Επιχειρησιακής Έρευνας

Όπως προαναφέρθηκε ο κλάδος της Επιχειρησιακής Έρευνας γνώρισε ραγδαία ανάπτυξη μετά το τέλος του Β' Παγκοσμίου Πολέμου. Έκτοτε μία πληθώρα μεθοδολογιών και αλγορίθμων Επιχειρησιακής Έρευνας έχει αναπτυχθεί για την επίλυση διαφόρων κατηγοριών επιχειρησιακών προβλημάτων. Ειδικότερα η Επιχειρησιακή Έρευνα εφαρμόζει επιστημονικές μεθόδους σε πολύπλοκα προβλήματα που προκύπτουν κατά την διοίκηση και διαχείριση μεγάλων συστημάτων ανθρώπων, μηχανών, υλικών ή χρημάτων στη γεωργία, βιομηχανία και τις επιχειρήσεις. Οι κυριότερες επιστημονικές μέθοδοι ή τεχνικές της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι [42]:

1. Μαθηματικός Προγραμματισμός
Με τον όρο μαθηματικό προγραμματισμό εννοούμε το σύνολο των υπολογιστικών τεχνικών που χρησιμοποιούνται για την επίλυση μιας κατηγορίας προβλημάτων βελτιστοποίησης τα οποία περιγράφονται με την βοήθεια ενός μαθηματικού προτύπου που αναλύουμε παρακάτω:

α) Γραμμικός Προγραμματισμός. Είναι μια τεχνική που επιτρέπει την κατανομή των περιορισμένων πόρων μιας επιχείρησης με τον πιο αποτελεσματικό τρόπο. Ο Γ.Π. είναι μία ευρέως γνωστή μέθοδος της Επιχειρησιακής Έρευνας και αυτήν θα εξετάσουμε αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.
β) Παραμετρικός Προγραμματισμός. Είναι μία τεχνική που προσδιορίζει το πόσο ευαίσθητη είναι η βέλτιστη λύση στα σφάλματα που επέρχονται από τον προσδιορισμό της μιας ή περισσοτέρων από τις παραμέτρους τους προβλήματος.
γ) Ακέραιος Προγραμματισμός. Είναι μία τεχνική όπου οι μεταβλητές δεσμεύονται να πάρουν όλες ακέραιες τιμές.
δ) Μικτός Ακέραιος Προγραμματισμός. Είναι μία τεχνική στην οποία δεν δεσμεύονται όλες οι μεταβλητές να πάρουν ακέραιες τιμές, αλλά μόνο μερικές από αυτές.
ε) Τετραγωνικός Προγραμματισμός. Είναι μια τεχνική για να λύνονται προβλήματα με γραμμικούς περιορισμούς αλλά με τετραγωνική αντικειμενική συνάρτηση.

Για περισσότερα στοιχεία αναφορικά με την τεχνική του μαθηματικού προγραμματισμού ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα βιβλία [42],[48],[38], [31] και [15].

2. Στοχαστικός Προγραμματισμός

Με τον όρο στοχαστικός προγραμματισμός αναφερόμαστε σε μια τεχνική κατά την οποία όταν ορισμένα αριθμητικά δεδομένα δεν είναι γνωστά με βεβαιότητα, ακολουθούν γνωστούς στατιστικούς νόμους. Για περισσότερα στοιχεία αναφορικά με την τεχνική του στοχαστικού προγραμματισμού ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο βιβλίο [9].

3. Δυναμικός Προγραμματισμός

Ο δυναμικός προγραμματισμός περιλαμβάνει μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό μιας στρατηγικής που αποτελείται από μια σειρά αλληλοδιαδοχικών αποφάσεων. Για περισσότερα στοιχεία αναφορικά με την τεχνική του δυναμικού προγραμματισμού ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο βιβλίο [44].

4. Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων

Η τεχνική ελέγχου αποθεμάτων υφίσταται στην περίπτωση όπου είναι απαραίτητη η διατήρηση αποθεμάτων σε πρώτες ύλες ή έτοιμα προϊόντα με σκοπό την ικανοποίηση της ζήτησης για ορισμένη χρονική περίοδο. Για περισσότερα στοιχεία αναφορικά με την τεχνική της θεωρίας ελέγχου αποθεμάτων ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα βιβλία [37] και [42].

5. Θεωρία Παιγνίων

Η θεωρία παιγνίων αποτελεί μια μαθηματική προσέγγιση στα προβλήματα απόφασης που διαφαίνονται κατά την σύγκρουση των συμφερόντων δύο ή περισσοτέρων ατόμων ή ομάδων. Συμμετέχουν τουλάχιστον δύο παίκτες με τουλάχιστον δύο στρατηγικές ο καθένας και αντίθετα συμφέροντα. Το αποτέλεσμα για κάθε παίκτη καθορίζεται από τις συνδυασμένες επιλογές όλων των παικτών και δίνεται από τον πίνακα αποτελεσμάτων του παιγνίου. Έτσι λοιπόν μπορούμε να πούμε με ακρίβεια ότι η θεωρία παιγνίων αποτελεί μια περιοχή με έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον η οποία εφαρμόζεται σε πολλούς τομείς της οικονομικής δραστηριότητας. Για περισσότερα στοιχεία αναφορικά με την τεχνική της θεωρίας παιγνίων ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα βιβλία [43], [13], [16] και [42].

6. Προγραμματισμός Ανθρώπινου Δυναμικού

Ο προγραμματισμός ανθρώπινου δυναμικού είναι η διαδικασία με την οποία η επιχείρηση εξασφαλίζει το σωστό αριθμό και το σωστό είδος ανθρώπων στις σωστές θέσεις και στο σωστό χρόνο με το μικρότερο δυνατό κόστος. Για περισσότερα στοιχεία αναφορικά με την τεχνική του προγραμματισμού ανθρώπινου δυναμικού ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο βιβλίο [53].

Κάθε μία χωριστά ή συνδυασμένες μεταξύ τους ανάλογα με τη φύση του προβλήματος, οι τεχνικές της Επιχειρησιακής Έρευνας χρησιμοποιούνται για τη λύση προβλημάτων της διοίκησης των επιχειρήσεων ή των οργανισμών [30]. Ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι μία ευρέως γνωστή μέθοδος της Επιχειρησιακής Έρευνας και αυτήν θα εξετάσουμε αναλυτικά στη συνέχεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

2.1 Εισαγωγή

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός (Linear Programming), αποτελεί αναμφίβολα το δημοφιλέστερο μοντέλο στο χώρο της Επιχειρησιακής Έρευνας αλλά και της διοικητικής επιστήμης (management science) γενικότερα. Η μεγάλη επιτυχία που είχε η εφαρμογή του σε προβλήματα λήψης αποφάσεων, ιδιωτικών και δημόσιων επιχειρήσεων και οργανισμών αποδίδεται, από τη μια πλευρά στα επιτεύγματα της έρευνας μαθηματικών και οικονομολόγων σε θεωρητικό επίπεδο και από την άλλη πλευρά στην επαναστατική ανέλιξη της πληροφορικής επιστήμης και τεχνολογίας. Κυριαρχεί σήμερα η αντίληψη ότι, τρεις στις τέσσερις εφαρμογές μοντέλων Επιχειρησιακής Έρευνας σε πραγματικά προβλήματα διοίκησης παραπέμπουν στο Γραμμικό Προγραμματισμό [34]. Ασχολείται με την επίλυση του γραμμικού προβλήματος. Για το σκοπό αυτό μελετάει τις ιδιότητες του γραμμικού προβλήματος, κατασκευάζει μεθόδους επίλυσης (αλγορίθμους) και εξετάζει τρόπους εφαρμογής των αποτελεσμάτων στη λήψη πολύπλοκων αποφάσεων σε διοικητικό ή οικονομικό επίπεδο, με επιστημονικό τρόπο.

Ως **Γραμμικός Προγραμματισμός** (Γ.Π.)**,** σύμφωνα με τον Μπότσαρη [41], χαρακτηρίζεται το σύνολο των υπολογιστικών τεχνικών που χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων. Είναι δηλαδή μια μέθοδος της Επιχειρησιακής Έρευνας η οποία χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων που αφορούν τη βελτίωση ή αξιοποίηση των διαθέσιμων πόρων, έτσι ώστε να υποβοηθηθεί το έργο των μάνατζερ στη λήψη των αντίστοιχων αποφάσεων. Στα κεφάλαια που ακολουθούν θα αναπτύξουμε τον τρόπο εφαρμογής της μεθοδολογίας του Γ.Π. και τις αντίστοιχες εφαρμογές του. Κατ' αρχήν, ο όρος προγραμματισμός όπως χρησιμοποιείται στην Επιχειρησιακή Έρευνα, δεν πρέπει να συγχέεται με τον προγραμματισμό ηλεκτρονικών υπολογιστών. Στην ποσοτική ανάλυση και στο επιστημονικό μάνατζμεντ ο όρος προγραμματισμός περιλαμβάνει την ανάπτυξη και επίλυση μέσω μαθηματικών μοντέλων, διάφορων επιχειρησιακών προβλημάτων. Ο ρόλος του ηλεκτρονικού υπολογιστή πάντως είναι πολύ σπουδαίος στην επίλυση προβλημάτων Γ.Π.

αλλά και γενικότερα στην επίλυση προβλημάτων με χρήση των μεθοδολογιών της Επιχειρησιακής Έρευνας. Πολλά από τα προβλήματα Γ.Π. που προκύπτουν στην πράξη είναι τόσο πολύπλοκα που η επίλυση τους είναι δυνατή μόνο μέσω ειδικών προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Πολλές αποφάσεις που λαμβάνονται σε έναν οργανισμό ή σε μία επιχείρηση αφορούν την αποτελεσματική αξιοποίηση και χρήση των πόρων της επιχείρησης. Ως πόροι μιας επιχείρησης εννοούνται, για να αναφέρουμε τους σημαντικότερους [2]:

- ο εξοπλισμός της επιχείρησης,
- οι εργαζόμενοι (εργατοώρες),
- τα επενδεδυμένα κεφάλαια,
- τα κεφάλαια κινήσεως,
- οι διαθέσιμοι χώροι της επιχείρησης και
- οι πρώτες ύλες.

Οι πόροι της επιχείρησης είναι δυνατόν να διατεθούν για την παραγωγή προϊόντων (όπως οι πρώτες ύλες, ο μηχανολογικός και άλλος εξοπλισμός) ή υπηρεσιών (όπως ο χρόνος των εργαζομένων), τη διάθεση και διανομή των προϊόντων (π.χ. κεφάλαια) της επιχείρησης, για να αναφέρουμε τις πιο βασικές περιπτώσεις.

Ο όρος προγραμματισμός, σε μια επιχείρηση ή έναν οργανισμό περιλαμβάνει τη διαδικασία λήψης και υλοποίησης αποφάσεων που θα οδηγούν στην επίτευξη ατομικών, ομαδικών και οργανωτικών στόχων. Οι λειτουργίες του προγραμματισμού στις επιχειρήσεις είναι πολυδιάστατες και έχουν δυναμικό χαρακτήρα. Είναι πολυδιάστατες διότι τα επιχειρησιακά προβλήματα και τις αντίστοιχες λύσεις τους μπορεί κανείς, να τις εξετάσει και αναλύσει από πολλές πλευρές όπως την πολιτική [2]. Ο προγραμματισμός είναι επίσης μια λειτουργία δυναμική διότι τόσο το περιβάλλον μέσα στο οποίο λαμβάνονται οι αποφάσεις όσο και οι παραδοχές οι οποίες διέπουν τη λήψη οποιασδήποτε απόφασης είναι διαρκώς μεταβαλλόμενες. Η πολυδιάστατη φύση των επιχειρησιακών προβλημάτων σε συνδυασμό με το διαρκώς μεταβαλλόμενο περιβάλλον καθιστούν το έργο της λήψης αποφάσεων ιδιαίτερα πολύπλοκο και δύσκολο.

Οι επιπτώσεις που προκύπτουν από τη λήψη κάποιας συγκεκριμένης απόφασης άλλοτε είναι εύκολο να εκτιμηθούν ενώ άλλοτε αυτό είναι πολύ δύσκολο έως αδύνατο να γίνει. Ο πιο συνηθισμένος τρόπος προσέγγισης πολύπλοκων επιχειρησιακών προβλημάτων είναι η ανάλυση του προβλήματος από την οικονομική τους πλευρά και η υλοποίηση της λύσεως που προκύπτει εφόσον αυτή δεν παραβιάζει κοινωνικούς, περιβαλλοντολογικούς, οργανωτικούς ή άλλους περιορισμούς [2]. Στην εργασία αυτή θα περιοριστούμε στην περιγραφή και ανάλυση εκείνων των προβλημάτων που είναι κατά βάση οικονομικά προβλήματα, και στα οποία η λήψη αποφάσεων και η επιλογή εναλλακτικών λύσεων γίνεται πρωταρχικώς με οικονομικά κριτήρια.

2.2 Ιστορία του Γραμμικού Προγραμματισμού

Πολλοί ερευνητές εκείνης της εποχής «διεκδικούν» τον τίτλο του θεμελιωτή της επιστήμης με τις ανακαλύψεις τους σε θεωρητικό κυρίως επίπεδο, αλλά με τεράστιες εφαρμογές σήμερα ειδικότερα με τη χρήση των υπολογιστών όπου κατέστη δυνατή η επίλυση επίπονων σε υπολογισμούς προβλημάτων σε σύντομο χρονικό διάστημα. Στην συνέχεια δίνονται μερικοί από τους σημαντικότερους σταθμούς της ιστορίας του Γ.Π. δανεισμένα από τον εξαίρετο Μαθηματικό Chvatal [2].

Ως ορόσημο της ραγδαίας εξέλιξης του Γ.Π. θεωρείται ο Β’ Παγκόσμιος Πόλεμος, όπου για πρώτη φορά εφαρμόστηκαν μέθοδοι ανεφοδιασμού των συμμαχικών δυνάμεων στην Ευρώπη. Κορυφαία στιγμή αναμφίβολα θεωρείται το 1947, όπου ο G. B. Dantzig [5] ανακάλυψε την γνωστή σήμερα ως **μέθοδο Simplex**[*] για την επίλυση σχηματισμών Γ.Π., για τα προγραμματιστικά προβλήματα της Αμερικανικής αεροπορίας. Αυτό που ακολούθησε ήταν μία εντυπωσιακή περίοδος γρήγορης ανάπτυξης σε αυτόν το νέο τομέα. Έγινε πολύ γρήγορα εμφανές πως μια εκπληκτικά ευρεία ακτίνα από ασυσχέτιστα φαινομενικά προβλήματα στη διεύθυνση παραγωγής, θα μπορούσαν να δηλωθούν με τους όρους του Γ.Π., και επιπλέον το πιο σημαντικό πως θα μπορούσαν να επιλυθούν από τη μέθοδο Simplex [57]. Η χρήση του Γ.Π. συχνά επέφερε σημαντική αύξηση στην αποδοτικότητα του όλου εγχειρήματος. Μέχρι τότε, επέκταση στα σύνορα της αποτελεσματικότητας προέκυπτε από τεχνολογικές καινοτομίες. Αυτή η νέα μέθοδος αύξησης της αποδοτικότητας, υπό τις ήδη υπάρχουσες τεχνολογικές συνθήκες, με βελτιώσεις στην οργάνωση και τον προγραμματισμό,

[*] Τη μέθοδο Simplex παρουσιάζουμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 4 της εργασίας.

έκανε πολλούς διευθυντές να εκτιμήσουν την πρακτική αξία των μαθηματικών. Τουλάχιστον, τους κατέστησε γνώστες των πλεονεκτημάτων του ορισμού των προβλημάτων απόφασης που είχαν, με σαφείς και καλά καθορισμένους όρους. Καθώς η δημοτικότητα της θεωρίας του Γ.Π. αύξανε, εφαρμογές σε νέες περιοχές λάμβαναν χώρα, πολλές από αυτές καθόλου προφανείς. Με τη σειρά τους, αυτές οι εφαρμογές έδωσαν το έναυσμα για περαιτέρω θεωρητική έρευνα, καταδεικνύοντας την ανάγκη για την επίλυση προβλημάτων που σε άλλη περίπτωση θα φαίνονταν μη ενδιαφέροντα. Σε αυτήν τη συναρπαστική αλληλεπίδραση ανάμεσα στη θεωρία και τις εφαρμογές, ένας καινούριος κλάδος εφαρμοσμένων μαθηματικών εδραιώθηκε.

Καθώς οι μαθηματικές αναλύσεις εξελίχθηκαν, λόγω των αναγκών του 17^{ου} αιώνα για την επίλυση μηχανικών προβλημάτων, ο Γ.Π. εξελίχθηκε λόγω της ανάγκης του 20^{ου} αιώνα για την επίλυση προβλημάτων διοίκησης. Εν τούτοις άλλες προφανείς επιρροές προώθησαν την εξέλιξη του νέου πεδίου από την αρχή. Σύντομα το 1947, οι T.C. Koopmans ξεκίνησαν να επισημαίνουν πως ο Γ.Π. παρείχε ένα εξαιρετικό πλαίσιο εργασίας για την ανάλυση κλασσικών οικονομικών θεωριών, όπως το σύστημα επανακατοχής που προτάθηκε το 1974 από τον L.Walras. Από την άλλη πλευρά, ο Γ.Π. συγκέντρωσε προηγούμενα γνωστά θεωρήματα αγνών μαθηματικών που αφορούσαν διττά θέματα, όπως τη γεωμετρία των κυρτών συνόλων, προχωρημένα προβλήματα συνδυαστικής φύσης και τη θεωρία των παιγνίων δυο ατόμων. Τελικά ήταν τυχερό και επιπλέον αναπόφευκτο πως ο Γ.Π. εξελίχθηκε ταυτόχρονα με τη σύγχρονη υπολογιστική τεχνολογία χωρίς όμως τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές μεγάλης κλίμακας που υπάρχει την παρούσα εποχή, ο Γ.Π. θα ήταν αδιανόητος.

Τα επιστημονικά πεδία σπάνια δημιουργούνται μέσα σε μία νύχτα. Με το πλεονέκτημα της γνώσης εκ των υστέρων, κάποιος μπορεί συχνά να ανιχνεύσει τις πηγές που ετοίμασαν το δρόμο για την αποφασιστική επανάσταση. Το πεδίο του Γ.Π. δεν αποτελεί εξαίρεση. Στον πυρήνα της μαθηματικής του θεωρίας είναι η μελέτη για τα συστήματα γραμμικών ανισοτήτων. Τέτοια συστήματα είχαν μελετηθεί από τον Fourier αρκετά παλαιότερα, το 1826. Έκτοτε, λίγοι σχετικά μαθηματικοί ασχολήθηκαν με το αντικείμενο, ωστόσο κανένας τους δεν επινόησε κάποιον αλγόριθμο, του οποίου η αποτελεσματικότητα να είναι κοντά σε αυτήν της μεθόδου Simplex. Παρόλα αυτά, κάποιοι από αυτούς απέδειξαν ποικίλες ειδικές περιπτώσεις από ένα θεμελιώδες θεώρημα που τώρα λέγεται το δυϊκό θεώρημα του Γ.Π. (το οποίο θα αναλύσουμε στο πέμπτο κεφάλαιο της εργασίας). Στην εφαρμοσμένη πλευρά ο L. V. Kantorovich κατέδειξε την πρακτική σημασία μιας περιορισμένης κλάσης από προβλήματα Γ.Π. και πρότεινε έναν στοιχειώδη αλγόριθμο για τη λύση τους γύρω στο 1939. Δυστυχώς, αυτή η προσπάθεια αγνοήθηκε στη Ρωσία και έμεινε άγνωστη οπουδήποτε αλλού μέχρι αρκετά αργότερα από όταν ο Γ.Π. έγινε μια εκλεκτή θεωρία μέσα από την ανεξάρτητη εργασία του Dantzig και άλλων.

Γύρω στο 1970, ο Γ.Π. ήρθε δύο φορές στην προσοχή του κοινού. Στις 14 Οκτωβρίου 1975, η Σουηδική Βασιλική Ακαδημία των Επιστημών απένειμε το βραβείο Νόμπελ των Οικονομικών Επιστημών στους L. V. Kantorovich και T. C. Koopmans για τη συνεισφορά τους στη θεωρία της «βέλτιστης κατανομής των πόρων». Το δεύτερο γεγονός ήταν ακόμα πιο δραματικό. Από την ανακάλυψη της μεθόδου Simplex, οι μαθηματικοί έψαχναν για ένα θεωρητικά ικανοποιητικό αλγόριθμο για την επίλυση των προβλημάτων του Γ.Π. Τα θεωρητικά κριτήρια για την κρίση της αποτελεσματικότητας ενός αλγορίθμου είναι αρκετά διαφορετικά από τα πρακτικά. Έτσι, ένας αλγόριθμος όπως αυτός της μεθόδου Simplex, ο οποίος είναι κατεξοχήν ικανοποιητικός στις πρακτικές εφαρμογές μπορεί να θεωρηθεί μη ικανοποιητικός σε θεωρητικό επίπεδο. Το αντίστροφο είναι επίσης αληθές δηλαδή οι θεωρητικά ικανοποιητικοί αλγόριθμοι μπορεί να μην είναι ιδιαίτερα πρακτικοί. Για μια εμπεριστατωμένη έκθεση της ιστορίας του Γ.Π., ο αναγνώστης μπορεί να αναφερθεί στο δεύτερο κεφάλαιο της μονογραφίας του Dantzig [4]. Επίσης αναφορές σε πολλές εφαρμογές του Γ.Π. μπορούν να βρεθούν στους Riley και Gass [8].

2.3 Ενδεικτικές Εφαρμογές Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

Ο Γ.Π. βρίσκει πολλές εφαρμογές στην παραγωγική διαδικασία, όπου αναζητούνται οι ποσότητες των παραγόμενων προϊόντων σε σχέση με τα αποθέματα, τις πρώτες ύλες, το προσωπικό και άλλους παράγοντες με στόχο τη μεγιστοποίηση του κέρδους. Υπάρχουν πολλά επιμέρους γραμμικά προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπίζει μια επιχείρηση ή ένας οργανισμός. Στη συνέχεια παρουσιάζονται κάποια από τα πιο γνωστά προβλήματα που χαρακτηρίζονται ως κλασικά προβλήματα Γ.Π. με τις αντίστοιχες εφαρμογές τους [57]:

- Το πρόβλημα κατανομής πόρων. Καθορισμός προγράμματος σε μια βιομηχανία ώστε να επιτευχθεί η πιο αποτελεσματική χρήση εξοπλισμού και προσωπικού για τη μεγιστοποίηση των κερδών της.

- Το πρόβλημα της δίαιτας. Αποδεικνύει το φθηνότερο τρόπο σύνθεσης ποικίλων ποσοτήτων από διαθέσιμα τρόφιμα σε μια δίαιτα η οποία μπορεί να ικανοποιεί τις θρεπτικές απαιτήσεις ενός ανθρώπινου οργανισμού.
- Το πρόβλημα μίξης της παραγωγής. Προσδιορισμός της ποσότητας που θα πρέπει να παραχθεί από το κάθε προϊόν έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το συνολικό της κέρδος με τους περιορισμένους πόρους που διαθέτει.
- Το πρόβλημα της παραγωγικής διαδικασίας. Καθορισμός χρονικού προγράμματος παραγωγής το οποίο θα ικανοποιήσει τη μελλοντική ζήτηση για συγκεκριμένο προϊόν ενώ συγχρόνως θα ελαχιστοποιήσει το κόστος παραγωγής και αποθήκευσης.
- Το πρόβλημα της διοίκησης προσωπικού. Ελαχιστοποίηση του αριθμού των υπαλλήλων που απαιτούνται.
- Το πρόβλημα του Μάρκετινγκ. Κατανομή δεδομένου προϋπολογισμού στα διάφορα μέσα διαφήμισης, όπως ράδιο, τηλεόραση, εφημερίδες, περιοδικά, ώστε να μεγιστοποιηθεί η αποδοτικότητα της καμπάνιας.
- Το πρόβλημα της μεταφοράς. Ανάπτυξη ενός συστήματος διανομής το οποίο θα ελαχιστοποιήσει το κόστος μεταφοράς, ενώ συγχρόνως θα ικανοποιήσει τη ζήτηση στα κέντρα διανομής και
- Το πρόβλημα ενέργειας και προστασίας περιβάλλοντος. Προσδιορισμός κατάλληλου προγράμματος παραγωγής ενέργειας που ελαχιστοποιεί το κόστος ενώ ταυτόχρονα ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς.

Μερικά από τα προβλήματα Γ.Π. που παρουσιάζονται παραπάνω αναλύονται στην επόμενη ενότητα.

2.4 Συνθήκες Εφαρμογής μοντέλων Γραμμικού Προγραμματισμού

Για την εφαρμογή της μεθόδου Γ.Π. απαιτείται κατ’ αρχήν η δημιουργία μιας μαθηματικής διατύπωσης του συγκεκριμένου επιχειρησιακού προβλήματος που προσπαθούμε να επιλύσουμε. Η διατύπωση αυτή μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκη ανάλογα με την φύση του προβλήματος [55]. Τα προβλήματα Γ.Π. ασχολούνται με καταστάσεις όπου ένας αριθμός πλουτοπαραγωγικών πηγών, όπως άνθρωποι, υλικά, μηχανές και ακίνητα τα οποία είναι διαθέσιμα πρέπει να συνδυαστούν για να παραχθούν ένα ή περισσότερα προϊόντα [35]. Στη διαδικασία παραγωγής οι πηγές αυτές υπόκεινται σε περιορισμούς όπως στη συνολική ποσότητα των διαθέσιμων πηγών, τον αριθμό κάθε προϊόντος που παράγεται, τον αριθμό κάθε προϊόντος που διατίθεται. Σκοπός λοιπόν του Γ.Π. είναι από όλες τις δυνατές κατανομές των πηγών να υπολογίσουμε εκείνη ή εκείνες οι οποίες μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν μια αριθμητική ποσότητα όπως το κέρδος ή το κόστος. Για την ευκολότερη κατανόηση της μεθόδου του Γ.Π. στην επόμενη ενότητα παρουσιάζονται μερικά από τα προβλήματα τα οποία έχουν σχετικά απλή μαθηματική διατύπωση. Ας δούμε πρώτα όμως τη γενική διατύπωση ενός προβλήματος Γ.Π.

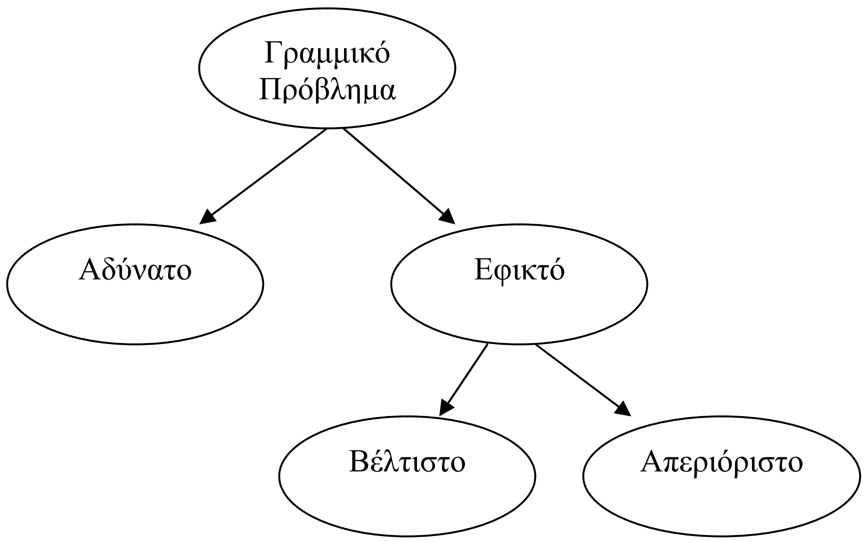
Το μαθηματικό μοντέλο του Γ.Π., αφορά στη βελτιστοποίηση (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση) μιας γραμμικής συνάρτησης. Η συνάρτηση αυτή καλείται **αντικειμενική συνάρτηση** και αναπαριστά το κριτήριο επίδοσης του συστήματος, κάτω από ένα σύνολο γραμμικών περιορισμών (ανισότητες ή και εξισώσεις) που αντιπροσωπεύουν τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται [35]. Η μορφή του γραμμικού προβλήματος μπορεί να διατυπωθεί με μαθηματικούς όρους και συμβολισμούς ως εξής:

Βελτιστοποίηση της $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n$

Υπό τους περιορισμούς:

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \ [\leq, \geq, =] \ b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \ [\leq, \geq, =] \ b_2 \\
\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \ [\leq, \geq, =] \ b_m \\
x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \geq 0.
\end{gathered}
$$

Δηλαδή, στο μοντέλο του Γ.Π. τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και οι περιορισμοί, εκφράζονται ως γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών απόφασης. Το θεμελιώδες θεώρημα του Γ.Π. διατυπώνεται ως εξής: *«Ένα γραμμικό πρόβλημα είναι αδύνατο ή εφικτό. Αν είναι εφικτό, τότε είναι βέλτιστο ή απεριόριστο»*. Λύση ενός γραμμικού προβλήματος είναι ο προσδιορισμός της κατηγορίας στην οποία ανήκει δηλαδή αδύνατο, βέλτιστο ή απεριόριστο. Οι κατηγορίες αναφορικά με τις λύσεις τους δίνονται στο Σχήμα 2.1:



Σχήμα 2.1: Οι κατηγορίες του γραμμικού προβλήματος.

Μάλιστα με τον όρο λύση εννοείται κάτι παραπάνω από αυτό. Δεν είναι αρκετό να προσδιοριστεί μόνο ότι ένα πρόβλημα είναι βέλτιστο. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να κατασκευαστεί τουλάχιστον ένα βέλτιστο σημείο. Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο ο Γ.Π. ασχολείται μόνο με κατασκευαστικές μεθόδους επίλυσης δηλαδή, αλγορίθμους.

2.5 Κλασικά Γραμμικά Προβλήματα

Όταν δοθεί η μαθηματική μορφή ενός προβλήματος είναι πολύ εύκολο να διαπιστωθεί αν είναι γραμμικό ή όχι. Όταν το πρόβλημα αντιμετωπίζεται στην πράξη, πριν τη μαθηματική του διατύπωση, η διατύπωση αυτή δεν είναι προφανής. Για τον λόγο αυτό ερευνούμε την ύπαρξη τεσσάρων χαρακτηριστικών ιδιοτήτων, της γραμμικότητας, της διαιρετότητας, της βεβαιότητας και της μονοδιάστατης [34].

I. **Γραμμικότητα:** Το αποτέλεσμα, είτε αυτό είναι όρος περιορισμού $a_{ij}x_j$ είτε όρος αντικειμενικής συνάρτησης c_jx_j, είναι γραμμική συνάρτηση του αιτίου x_j που το προκαλεί. Στην αντίθετη περίπτωση, για παράδειγμα όταν ισχύει $c_jx_j^2$, το μοντέλο εμπίπτει στο χώρο του **μη γραμμικού προγραμματισμού.**

II. **Διαιρετότητα:** Οι μεταβλητές απόφασης είναι άπειρα διαιρετές, εκφράζονται για παράδειγμα, σε μονάδες μήκους, βάρους, κ.τ.λ. Σε περίπτωση που οι μεταβλητές δεσμεύονται να πάρουν όλες ακέραιες τιμές, δηλώνουν δηλαδή αριθμό εργατών, αποδοχή ή μη αποδοχή μιας πρότασης, κ.τ.λ., το πρόβλημα εμπίπτει στην κατηγορία του **ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού**. Όταν δεν δεσμεύονται όλες οι μεταβλητές να πάρουν ακέραιες τιμές, αλλά μόνο μερικές από αυτές, το πρόβλημα ανήκει στην κατηγορία του **μικτού γραμμικού προγραμματισμού**.

III. **Βεβαιότητα:** Τα δεδομένα του προβλήματος, τα αριθμητικά στοιχεία δηλαδή είναι γνωστά με απόλυτη βεβαιότητα. Όταν ορισμένα από αυτά δεν είναι γνωστά με βεβαιότητα, αλλά ακολουθούν γνωστούς στατιστικούς νόμους, ο προγραμματισμός λέγεται **στοχαστικός** (stochastic programming). Τέλος, όταν η πληροφορία για κάποιους συντελεστές είναι προσεγγιστική, είναι δηλαδή διαστήματα στα οποία ανήκουν ασαφώς οι συντελεστές αυτοί, ο προγραμματισμός λέγεται **ασαφής** (fuzzy programming).

IV. **Μονοδιάστατη:** Η περίπτωση αυτή, για την οποία έγινε λόγος παραπάνω, αφορά το πλήθος των αντικειμενικών συναρτήσεων που μοντελοποιούν τους στόχους του προβλήματος απόφασης. Στον κλασικό γραμμικό προγραμματισμό η αντικειμενική συνάρτηση πρέπει να είναι μια και μοναδική δηλαδή **μονοδιάστατος ή μονοκριτήριος** Γ.Π. Στην αντίθετη περίπτωση, το πρόβλημα ανήκει στην κατηγορία του **πολυκριτήριου** Γ.Π.

Θα προχωρήσουμε τώρα στην ανάπτυξη των μαθηματικών διαφόρων αντιπροσωπευτικών προβλημάτων. Εκτός των γραμμικών θα παρουσιαστούν και προβλήματα ακέραιου και μικτού προγραμματισμού.

2.5.1 Το πρόβλημα της Μίξης της Παραγωγής

Μία από τις κλασικές εφαρμογές Γ.Π. είναι το πρόβλημα της μίξης της παραγωγής. Σε πολλές παραγωγικές επιχειρήσεις για την παραγωγή δύο ή περισσοτέρων προϊόντων χρησιμοποιούνται από κοινού οι περιορισμένοι διαθέσιμοι πόροι της επιχείρησης, όπως ώρες εργασίας του προσωπικού, ώρες εργασίας των μηχανημάτων, πρώτες ύλες κ.τ.λ. Η παραγωγή κάθε προϊόντος απαιτεί διαφορετική ποσότητα των διαθέσιμων πόρων και αποφέρει διαφορετικό κέρδος στην επιχείρηση. Η επιχείρηση θα επιθυμούσε να προσδιορίσει την ποσότητα που θα πρέπει να παραχθεί από το κάθε προϊόν έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το συνολικό της κέρδος με τους περιορισμένους πόρους που διαθέτει. Για την καλύτερη κατανόηση του προβλήματος της μίξης της παραγωγής δίνουμε ένα παράδειγμα δανεισμένο από το [55]:

Η βιομηχανία επίπλων **Επιπλοξύλ** παράγει δύο προϊόντα τραπέζια και καρέκλες κοινής χρήσης. Η διαδικασία παραγωγής και για τα δύο προϊόντα είναι παρόμοια και απαιτεί διαφορετικές ώρες εργασίας για το κάθε προϊόν στα δύο τμήματα της επιχείρησης, το ξυλουργείο και το βαφείο. Για την παραγωγή κάθε τραπεζιού απαιτούνται 8 στο ξυλουργείο και 4 ώρες στο βαφείο, ενώ για κάθε καρέκλα οι ώρες που απαιτούνται είναι 8 ώρες στο ξυλουργείο και 2 ώρες στο βαφείο. Για τον επόμενο μήνα η Επιπλοξύλ έχει προσδιορίσει ότι οι διαθέσιμες ώρες παραγωγής στο ξυλουργείο ανέχονται συνολικά σε 960 ενώ στο βαφείο είναι μόλις 400. Για κάθε τραπέζι το μικτό κέρδος της επιχείρησης είναι 4.000 € ενώ για κάθε καρέκλα είναι 3.000 €. Το πρόβλημα της Επιπλοξύλ είναι ο καθορισμός των ποσοτήτων παραγωγής σε τραπέζια και καρέκλες ώστε να πετύχει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος, αγνοούμε προς στιγμή το τυχόν στοκ που υπάρχει, υποθέτοντας ότι η ζήτηση είναι ικανή να απορροφήσει την οποιαδήποτε ποσότητα θα παραχθεί. Ας εξετάσουμε τα βήματα που θα ακολουθήσουμε ώστε να διατυπώσουμε το παραπάνω πρόβλημα ως πρόβλημα Γ.Π.

1^{ο} Βήμα: Οι Μεταβλητές

Κατ’ αρχή θα πρέπει να ορίσουμε τις μεταβλητές του προβλήματος. Οι μεταβλητές του προβλήματος αφορούν τους παράγοντες εκείνους τους οποίους μπορούμε να καθορίσουμε ή τις ποσότητες που προσπαθούμε να προσδιορίσουμε στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Στην προκειμένη περίπτωση στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε τις ποσότητες τραπεζιών και καρεκλών που πρέπει να παραχθούν ώστε να επιτύχουμε μεγιστοποίηση των κερδών. Επομένως ας χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό x_1 για την ποσότητα τραπεζιών και x_2 για την ποσότητα καρεκλών που θα παραχθούν [55]. Μπορούμε να συγκεντρώσουμε λοιπόν τα δεδομένα του προβλήματος στον Πίνακα 2.2.

2^{ο} Βήμα: Η Αντικειμενική συνάρτηση

Το επόμενο βήμα είναι να διατυπώσουμε μέσω μιας μαθηματικής σχέσης το στόχο του προβλήματος. Στη συγκεκριμένη περίπτωση σκοπός μας είναι η μεγιστοποίηση των κερδών της επιχείρησης.

Τμήμα Παραγωγής	Απαιτούμενες ώρες για την παραγωγή 1 μονάδας		Διαθέσιμες ώρες το μήνα
	x_1 (τραπέζια)	x_2 (καρέκλες)	
Ξυλουργείο	8 ώρες	8 ώρες	960 ώρες
Βαφείο	4 ώρες	2 ώρες	400 ώρες
Κέρδος ανά μονάδα προϊόντος	4.000 €	3.000 €	

Πίνακας 2.2: Κατασκευαστικές απαιτήσεις μιας βιομηχανίας επίπλων.

Κάθε μονάδα από την x_1 (τραπέζια) αποφέρει κέρδος 4.000€. Επομένως το κέρδος από την παραγωγή x_1 τραπεζών είναι 4.000 € x_1. Αντίστοιχα, το κέρδος από την x_2 καρεκλών είναι 3.000 € x_2.

Το συνολικό λοιπόν κέρδος της επιχείρησης από την παραγωγή x_1 τραπεζιών και x_2 καρεκλών είναι:

Συνολικό κέρδος : $4.000\ x_1 + 3.000\ x_2$

Οι περιορισμοί μπορούν να διατυπωθούν με μαθηματική μορφή ως εξής:

$$8\,x_1 + 8\,x_2 \leq 960$$
$$4\,x_1 + 2\,x_2 \leq 400$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Για κάθε συνδυασμό ορισμένης ποσότητας τραπεζών (x_1) και καρεκλών (x_2) η τιμή συνάρτησης $4.000\ x_1 + 3.000\ x_2$ αντιστοιχεί στο κέρδος που προκύπτει από το δεδομένο συνδυασμό παραγωγής. Η συνάρτηση αυτή που εκφράζει το συνολικό κέρδος της επιχείρησης, και την οποία θα προσπαθήσουμε να μεγιστοποιήσουμε καλείται όπως αναφέραμε και παραπάνω **αντικειμενική συνάρτηση.**

Συνεπώς το πρόβλημα της z έχει ως εξής:

Μεγιστοποίηση της

$$z = 4.000\, x_1 + 3.000\, x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$8\, x_1 + 8\, x_2 \leq 960$$

$$4\, x_1 + 2\, x_2 \leq 400$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

2.5.2 Το πρόβλημα της Δίαιτας

Ένα ακόμα προβλήματα εφαρμογής του Γ.Π. είναι το πρόβλημα της δίαιτας. Το πρόβλημα αυτό είναι από τα πρώτα, αν όχι το πρώτο που επιλύθηκε στα πρώτα βήματα της Επιχειρησιακής Έρευνας. Το πρόβλημα θεωρείται ότι παρέχει ένα ελάχιστο κόστος μιας επαρκούς δίαιτας για ένα άτομο να μπορεί να συντηρήσει τον εαυτό του. Δηλαδή αποδεικνύει το φθηνότερο τρόπο σύνθεσης ποικίλων ποσοτήτων από διαθέσιμα τρόφιμα σε μια δίαιτα η οποία μπορεί να ικανοποιεί τις θρεπτικές απαιτήσεις ενός ανθρώπινου οργανισμού. Για την καλύτερη κατανόηση του προβλήματος παρουσιάζουμε ένα απλό παράδειγμα [35]. Ας υποθέσουμε ότι οι διαθέσιμες τροφές είναι γάλα, κρέας και αυγά και ότι αυτές οι τροφές περιέχουν βιταμίνες A,C και D. Στον Πίνακα 2.3 δίνουμε την περιεκτικότητα σε mg κάθε βιταμίνης ανά μονάδα τροφής.

Βιταμίνη	Λίτρο γάλακτος	Κιλό κρέατος	Δωδεκάδα αυγών
A	0,2	2	10
C	20	20	10
D	2	200	10
Κόστος	1,5	10	0,5

Πίνακας 2.3: Περιεκτικότητες βιταμινών σε τρόφιμα.

Υποθέτουμε ότι η ελάχιστη απαιτούμενη ημερήσια κατανάλωση βιταμινών A,C και D είναι αντίστοιχα 1mg, 50mg και 10mg. Για να κατασκευάσουμε το μοντέλο Γ.Π. ονομάζουμε x_γ, x_κ, x_α τον αριθμό των λίτρων γάλακτος, κιλών κρεάτων και δωδεκάδων αυγών αντίστοιχα [35]. Ο σκοπός μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος αφού βέβαια λάβουμε υπόψη μας τους περιορισμούς του προβλήματος. Οι περιορισμοί εδώ έχουν την μορφή κατώτατων ορίων. Η αντικειμενική συνάρτηση για ελαχιστοποίηση είναι:

$$z = 1{,}5\ X_{\gamma} + 10\ X_{\kappa} + 0{,}5\ X_{\alpha}$$

Οι περιορισμοί μπορούν να διατυπωθούν με μαθηματική μορφή ως εξής:

$$\begin{array}{lll} 0{,}2\ x_{\gamma} + 2\ x_{\kappa} + 10x_{\alpha} & \geq 1 & \text{(βιταμίνη A)} \\ 20\ x_{\gamma} + 20\ x_{\kappa} + 10\ x_{\alpha} & \geq 50 & \text{(βιταμίνη C)} \\ 2\ x_{\gamma} + 200\ x_{\kappa} + 10x_{\alpha} & \geq 10 & \text{(βιταμίνη D)} \\ x_{\gamma} \geq 0,\ x_{\kappa} \geq 0,\ x_{\alpha} & \geq 0. & \end{array}$$

όπου οι τελευταίοι περιορισμοί αναφέρονται στην μη αρνητικότητα των μεταβλητών x_{γ}, x_{κ} και x_{α}. Συνεπώς το πρόβλημα της z έχει ως εξής:

Ελαχιστοποίηση της

$$z= 1{,}5\ X_{\gamma} + 10\ X_{\kappa} + 0{,}5\ X_{\alpha}$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{array}{ll} 0{,}2\ x_{\gamma} + 2\ x_{\kappa} + 10x_{\alpha} & \geq 1 \\ 20\ x_{\gamma} + 20\ x_{\kappa} + 10\ x_{\alpha} & \geq 50 \\ 2\ x_{\gamma} + 200\ x_{\kappa} + 10x_{\alpha} & \geq 10 \\ x_{\gamma},\ x_{\kappa},\ x_{\alpha} \geq 0 & \end{array}$$

2.5.3 Το πρόβλημα της Μεταφοράς

Το πρόβλημα της μεταφοράς είναι ένα από τα πρώτα είδη προβλημάτων που αναλύθηκαν με την χρήση του Γ.Π. Το γενικό πρόβλημα εμφανίστηκε όταν τα διαθέσιμα αγαθά αποθηκευμένα σε διάφορες αποθήκες έπρεπε να διανεμηθούν σε ποικίλους προορισμούς. Το πρόβλημα είναι να βρούμε τον βέλτιστο τρόπο μεταφοράς έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος μεταφοράς. Συγκεκριμένα, διαθέτουμε ποσότητες ενός ομοιόμορφου προϊόντος σε έναν αριθμό αποθηκών και θέλουμε να μεταφέρουμε καθορισμένες ποσότητες του προϊόντος σε έναν αριθμό από διαφορετικούς προορισμούς. Το κόστος για την μεταφορά μιας μονάδας ποσότητας από οποιαδήποτε αποθήκη σε κάθε κατάστημα είναι δυνατή. Θέλουμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο κόστος μεταφοράς από τις αποθήκες στα καταστήματα λιανικής πώλησης. Παρακάτω δίνεται ένα παράδειγμα προβλήματος μεταφοράς δανεισμένο από το [55].

Τρία παραρτήματα ενός εργοστασίου, τα Α, Β, Γ, που παράγουν το ίδιο προϊόν, βρίσκονται σε τρεις διαφορετικές περιοχές της χώρας, που απέχουν πολύ μεταξύ τους. Οι αγοραστές του προϊόντος βρίσκονται σε πέντε διαφορετικές πόλεις. Τα παραρτήματα παράγουν ποσότητες 150, 350 και 280 μονάδων του προϊόντος αντίστοιχα, ενώ οι αγοραστές έχουν παραγγείλει 100, 130, 160, 210 και 150 μονάδες αντίστοιχα. Το κόστος μεταφοράς του προϊόντος από τα παραρτήματα Α, Β, Γ δίνεται στον Πίνακα 2.4.

Παράρτημα	Αγοραστές				
	1	2	3	4	5
Α	10	22	8	14	9
Β	12	16	26	20	19
Γ	18	21	15	11	17

Πίνακας 2.4: Κόστος μεταφοράς προϊόντων.

Θέλουμε να υπολογίσουμε τις απαραίτητες ποσότητες (μεταβλητών αποφάσεως) x_{ij} που θα πρέπει να μεταφερθούν από το παράρτημα i στον αγοραστή j ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος μεταφοράς. Άγνωστες είναι οι ποσότητες x_{ij}, όπου i είναι τα παραρτήματα Α, Β, Γ και j είναι οι αγοραστές 1, 2, 3, 4, 5. Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος (κόστος μεταφοράς), της οποίας αναζητάμε το ελάχιστο, γράφεται ως εξής [55]:

$$\begin{gathered} z = 10\ x_{A1} + 22\ x_{A2} + 8\ x_{A3} + 14\ x_{A4} + 9\ x_{A5} + \\ 12\ x_{B1} + 16\ x_{B2} + 26\ x_{B3} + 20\ x_{B4} + 19\ x_{B5} + \\ 18\ x_{\Gamma1} + 21\ x_{\Gamma2} + 15\ x_{\Gamma3} + 11\ x_{\Gamma4} + 17\ x_{\Gamma5} \end{gathered}$$

Είναι φανερό ότι δεν μπορούμε να φορτώσουμε περισσότερα προϊόντα από ένα παράρτημα από όσα παράγονται στο παράρτημα αυτό. Συνεπώς έχουμε τους περιορισμούς:

$$x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} + x_{A5} \leq 150 \quad \text{(παραγωγή παραρτήματος A)}$$
$$x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4} + x_{B5} \leq 350 \quad \text{(παραγωγή παραρτήματος B)}$$
$$x_{\Gamma1} + x_{\Gamma2} + x_{\Gamma3} + x_{\Gamma4} + x_{\Gamma5} \leq 280 \quad \text{(παραγωγή παραρτήματος Γ)}$$

Επίσης κάθε αγοραστής πρέπει να εφοδιαστεί με τον επιθυμητό αριθμό μονάδων. Οπότε έχουμε τους περιορισμούς :

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{\Gamma1} = 100 \quad \text{(ζήτηση αγοραστή 1)}$$
$$x_{A2} + x_{B2} + x_{\Gamma2} = 130 \quad \text{(ζήτηση αγοραστή 2)}$$
$$x_{A3} + x_{B3} + x_{\Gamma3} = 160 \quad \text{(ζήτηση αγοραστή 3)}$$
$$x_{A4} + x_{B4} + x_{\Gamma4} = 210 \quad \text{(ζήτηση αγοραστή 4)}$$
$$x_{A5} + x_{B5} + x_{\Gamma5} = 150 \quad \text{(ζήτηση αγοραστή 5)}$$
$$x_{ij} \geq 0,\ i = A, B, \Gamma,\ j = 1, 2, 3, 4, 5$$

Αναμφίβολα η βελτιστοποίηση με περιορισμούς είναι ο πιο εφαρμοσμένος κλάδος των μαθηματικών. Συνεπώς το πρόβλημα της z έχει ως εξής:

Ελαχιστοποίηση της

$$z = 10\ x_{A1} + 22\ x_{A2} + 8\ x_{A3} + 14\ x_{A4} + 9\ x_{A5} +$$
$$+ 12\ x_{B1} + 16\ x_{B2} + 26\ x_{B3} + 20\ x_{B4} + 19\ x_{B5} +$$
$$+ 18\ x_{\Gamma1} + 21\ x_{\Gamma2} + 15\ x_{\Gamma3} + 11\ x_{\Gamma4} + 17\ x_{\Gamma5}$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} + x_{A5} \leq 150$$
$$x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4} + x_{B5} \leq 350$$
$$x_{\Gamma1} + x_{\Gamma2} + x_{\Gamma3} + x_{\Gamma4} + x_{\Gamma5} \leq 280$$

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{\Gamma1} = 100$$
$$x_{A2} + x_{B2} + x_{\Gamma2} = 130$$
$$x_{A3} + x_{B3} + x_{\Gamma3} = 160$$
$$x_{A4} + x_{B4} + x_{\Gamma4} = 210$$
$$x_{A5} + x_{B5} + x_{\Gamma5} = 150$$

$$x_{ij} \geq 0,\ \ i = A, B, \Gamma,\ \ j = 1,2,3,4,5$$

2.6 Χαρακτηριστικά Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

Αν και οι εφαρμογές είναι ποικίλες, εν τούτοις όλα τα προβλήματα του Γ.Π. έχουν κάποια κοινά χαρακτηριστικά [55]:

- Αποβλέπουν στη μεγιστοποίηση του κέρδους ή στην ελαχιστοποίηση του κόστους. Το κέρδος ή κόστος δίνεται από μια γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών του προβλήματος η οποία αποκαλείται αντικειμενική συνάρτηση.
- Περιλαμβάνουν μια σειρά μεταβλητών που αντιπροσωπεύουν τις ποσότητες που πρέπει να προσδιορισθούν μέσω της επίλυσης του προβλήματος ώστε να επιτευχθεί η μεγιστοποίηση ή η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης.
- Υπάρχουν περιορισμοί οι οποίοι περιορίζουν τη δυνατότητα της απεριόριστης αύξησης της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης (δηλαδή του κέρδους). Όταν πρόκειται για ελαχιστοποίηση κόστους οι περιορισμοί του προβλήματος περιορίζουν τον βαθμό στον οποίο η ελάττωση του κόστους είναι εφικτή.
- Υπάρχουν εναλλακτικές λύσεις, εκ των οποίων θα επιλεγεί η βέλτιστη. Για παράδειγμα αν μια επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα θα μπορούσε να αφιερώσει όλο της το δυναμικό στη παραγωγή ενός προϊόντος ή να το μοιράσει μεταξύ δύο προϊόντων ή μεταξύ όλων. Αυτό θα μπορούσε να γίνει με διαφορετικές αναλογίες.

Στο κεφάλαιο αυτό με μορφή παραδειγμάτων παρουσιάστηκαν αντιπροσωπευτικές εφαρμογές από διάφορους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας. Πραγματικές εφαρμογές μπορεί κάποιος να βρει σε κατάλληλα επιστημονικά περιοδικά όπως το Operations Research [10] καθώς και στην «*βίβλο*» όπως ονομάζεται του Γ.Π., το βιβλίο του K.G. Murty [17]. Επίσης ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα βιβλία [48], [11], [23], [24], [25], [12], [45], [18], [8] και [26].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

3.1 Εισαγωγή

Η επίλυση ενός προβλήματος Γ.Π. απαιτεί γενικά την ύπαρξη ηλεκτρονικού υπολογιστή και κατάλληλου λογισμικού*. Ο πιο εύκολος τρόπος για να κατανοήσουμε τη μεθοδολογία επίλυσης των προβλημάτων Γ.Π. είναι μέσω της γραφικής μεθόδου [55]. Η εφαρμογή αυτής μπορεί να γίνει πιο κατανοητή όταν ένα πρόβλημα έχει το πολύ τρεις μεταβλητές οπότε το μοντέλο του απεικονίζεται εύκολα σε ένα σύστημα αξόνων στο επίπεδο ή στον χώρο. Όταν όμως υπάρχουν περισσότερες από τρεις μεταβλητές είναι δύσκολο οπτικά να την παρακολουθήσουμε. Σε ένα τέτοιο σύστημα αξόνων, μια γραμμική εξίσωση των Χ και Υ, απεικονίζεται σαν μια ευθεία και μια γραμμική ανισότητα αναπαρίσταται σαν ένα ημιεπίπεδο που αρχίζει από την ευθεία της αντίστοιχης ισότητας. Ως Σύστημα γραμμικών εξισώσεων ή ανισώσεων ή αλλιώς γραμμικό σύστημα χαρακτηρίζεται ένα σύνολο από γραμμικές εξισώσεις ή ανισώσεις με τους ίδιους αγνώστους, τους οποίους προσπαθούμε να προσδιορίσουμε ώστε να επαληθεύουν όλες τις εξισώσεις ή ανισώσεις του συνόλου. Για παράδειγμα, ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων δύο άγνωστων μεταβλητών είναι το:

$$
\begin{aligned}
3x + 5y &= 2 \\
2x - 7y &= 9
\end{aligned}
$$

Ενώ αντίστοιχο σύστημα γραμμικών ανισώσεων είναι το:

$$
\begin{aligned}
3x + 5y &\leq 2 \\
2x - 7y &\geq 9
\end{aligned}
$$

* Αναφορά και παρουσίαση κατάλληλου λογισμικού γίνεται στο Κεφάλαιο 6 της εργασίας.

3.2 Μεθοδολογία Επίλυσης Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

Οποιοδήποτε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που να μην υπερβαίνει τις τρεις μεταβλητές μπορεί να λυθεί γραφικά. Η γραφική επίλυση των προβλημάτων Γ.Π. ακολουθεί τα παρακάτω βήματα [40]:

1ο βήμα: Αντιστοιχούμε τις τιμές των μεταβλητών x_1 και x_2 σ' ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων. Ο οριζόντιος άξονας παριστά τις τιμές της x_1 και ο κάθετος τις τιμές της x_2. Επειδή οι μεταβλητές παίρνουν τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός χρησιμοποιούμε μόνο το πρώτο τεταρτημόριο όπου η αρχή των αξόνων παριστά τη λύση $(x_1, x_2) = (0,0)$. Η λύση αυτή σπανίως είναι η βέλτιστη. Για παράδειγμα για ένα πρόβλημα παραγωγής δύο προϊόντων παριστάνει την περίπτωση να μην παράγεται τίποτε. Κάθε λύση του προβλήματος η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη μη αρνητικότητας των μεταβλητών είναι σημείο του θετικού (πρώτου) τεταρτημόριου.

2ο βήμα: Η επόμενη φάση της γραφικής επίλυσης αφορά την διαδοχική χάραξη των περιορισμών με παράλληλη σκιαγράφηση της **εφικτής περιοχής**, τα σημεία της οποίας ικανοποιούν όλους τους (μέχρι στιγμής) περιορισμούς. Το σύνολο των σημείων (x_1, x_2) ικανοποιούν τα σημεία της αντίστοιχης ευθείας $f(x_1, x_2) = b$ μαζί με όλα τα σημεία που βρίσκονται στην πλευρά της. Για να προσδιορίσουμε τη συγκεκριμένη πλευρά, διαλέγουμε ένα τυχαίο σημείο $P(x_1, x_2)$ το οποίο δε βρίσκεται πάνω στην ευθεία $f(x_1, x_2) = b$. Αν ικανοποιεί τον περιορισμό, τότε και όλα τα σημεία της περιοχής που βρίσκεται από την πλευρά της ευθείας $f(x_1, x_2) = b$ που βρίσκεται το P ικανοποιούν τον περιορισμό. Οι λύσεις που βρίσκονται στην κοινή περιοχή όλων των περιορισμών (δηλαδή την εφικτή περιοχή) ονομάζονται εφικτές λύσεις αφού ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς.

3ο βήμα: Εντοπίζουμε τη βέλτιστη λύση. Χαράσσουμε δηλαδή την ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης $z = c_1 x_1 + c_2 x_2$ για αυθαίρετη τιμή z, και την μετακινούμε παράλληλα προς την κατεύθυνση βελτίωσης της τιμής (αύξησης σε προβλήματα μεγιστοποίησης, μείωσης σε προβλήματα ελαχιστοποίησης) της αντικειμενικής συνάρτησης. *Το ακραίο σημείο (κορυφή) από το οποίο διέρχεται η αντικειμενική συνάρτηση πριν απομακρυνθεί από την εφικτή περιοχή είναι η βέλτιστη λύση του προβλήματος και είναι φυσικά μία εκ των λύσεων.* Ένα πρόβλημα Γ.Π. μπορεί να έχει μία ή άπειρες βέλτιστες λύσεις. Μπορεί ακόμα να μην έχει καμία εφικτή λύση (γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι η εφικτή περιοχή είναι το κενό σύνολο δηλαδή οι περιορισμοί δεν συναληθεύουν πουθενά). Μία τελευταία περίπτωση είναι ένα πρόβλημα το οποίο είναι μη φραγμένο, δηλαδή η τιμή z της αντικειμενικής συνάρτησης να μπορεί να πάρει οποιαδήποτε μεγάλη ή μικρή τιμή σε πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης αντίστοιχα. Σε αυτή την περίπτωση το πιθανότερο είναι ότι έχουμε κάποιο σφάλμα στην προσέγγιση του προβλήματος (στον αληθινό κόσμο δεν υπάρχουν μη φραγμένα προβλήματα, προσπαθούμε πάντα, στα μέτρα του εφικτού να βρούμε μία πεπερασμένη λύση).

3.3 Γραφική Επίλυση Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού με δύο μεταβλητές

Οι λύσεις που προκύπτουν από την επίλυση των προβλημάτων Γ.Π. με δύο μεταβλητές σύμφωνα με την γραφική μέθοδο χωρίζονται στις παρακάτω κατηγορίες [35]:

- Τυπική περίπτωση μεγιστοποίησης.
- Τυπική περίπτωση ελαχιστοποίησης.
- Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις.
- Μη πεπερασμένη λύση.
- Μη πεπερασμένη λύση με πεπερασμένες βέλτιστες τιμές ορισμένων μεταβλητών.
- Πεπερασμένη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης με μη πεπερασμένες τιμές των μεταβλητών.
- Καμία λύση – ασυμβίβαστοι περιορισμοί.

3.3.1 Τυπική περίπτωση μεγιστοποίησης

Έστω το παρακάτω πρόβλημα Γ.Π.:

Μεγιστοποίηση της

$$z = 5x_1 + 3x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

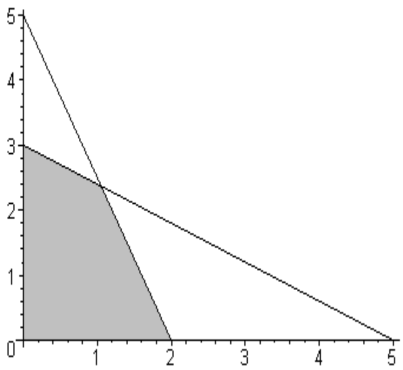
$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0$$

Αρχικά, θα βρούμε τα ζεύγη τιμών των x_1, x_2 που αποτελούν δυνατές λύσεις του προβλήματος. Εισάγουμε σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων x_1, x_2 και παρατηρούμε ότι κάθε σημείο που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο έχει συντεταγμένες $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ και συνεπώς ικανοποιεί τους περιορισμούς μη αρνητικότητας των μεταβλητών. Αντίστροφα, κάθε σημείο που αποτελεί δυνατή λύση θα βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

Για να βρούμε το σύνολο των ζευγών του πρώτου τεταρτημόριου που ικανοποιεί τους περιορισμούς, θα πρέπει να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά ανισότητες της μορφής $3x_1 + 5x_2 \leq 15$ και $5x_1 + 2x_2 \leq 10$. Σχεδιάζοντας τις ευθείες που παριστάνουν οι αντίστοιχες ισότητες μπορούμε να βρούμε το χωρίο που περιλαμβάνουν οι παραπάνω ανισότητες (Σχήμα 3.1):



Σχήμα 3.1: Γραφική επίλυση τυπικού προβλήματος μεγιστοποίησης.

Παρατηρούμε ότι τα σημεία που ικανοποιούν την συνθήκη μη αρνητικότητας και τη πρώτη ανισότητα είναι τα σημεία που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $3x_1 + 5x_2 = 15$ και στο πρώτο τεταρτημόριο. Αντίστοιχα, τα σημεία που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $5x_1 + 2x_2 = 10$ και στο πρώτο τεταρτημόριο ικανοποιούν τις συνθήκες μη αρνητικότητας και την δεύτερη ανισότητα. Συνεπώς το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς και συνθήκες είναι το γραμμοσκιασμένο χωρίο του Σχήματος 3.1. Κάθε σημείο του χωρίου αυτού και μόνο αυτά τα σημεία αποτελούν δυνατή λύση του προβλήματος. Για να επιλύσουμε το πρόβλημα θα πρέπει να βρούμε από το σύνολο των δυνατών λύσεων εκείνη που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση. Για κάθε σταθερή τιμή της z παρατηρούμε τι η εξίσωση $z = 5x_1 + 3x_2$ είναι ευθεία και μάλιστα οι ευθείες που προκύπτουν από διαφορετικές τιμές του z είναι παράλληλες. Επιθυμούμε να βρούμε την ευθεία με την μεγαλύτερη τιμή της z, που να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με το χωρίο των δυνατών λύσεων. Παρατηρούμε από το σχήμα ότι η ευθεία αυτή που τέμνει το χωρίο και έχει το μέγιστο z είναι η z_2 η οποία περνάει από το σημείο τομής των ευθειών $3x_1 + 5x_2 = 15$ και

$5x_1 + 2x_2 = 10$. Άρα λύνοντας το σύστημα* βρίσκουμε ότι $x_1 = 20/19$ και $x_2 = 45/19$ και αντικαθιστώντας στην αντικειμενική συνάρτηση βρίσκουμε ότι το $z = 235/19$. Αυτή είναι και η μέγιστη δυνατή λύση του προβλήματος.

3.3.2 Τυπική περίπτωση ελαχιστοποίησης

Έστω το παρακάτω πρόβλημα Γ.Π.:

Ελαχιστοποίηση της

$$z = 2x_1 + 3x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

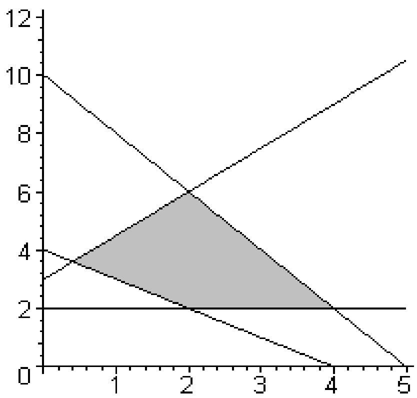
$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Η γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω προβλήματος είναι :



Σχήμα 3.2: Γραφική επίλυση τυπικού προβλήματος ελαχιστοποίησης.

Η ελάχιστη τιμή της z είναι η ευθεία z =10 η οποία περνάει από το σημείο $x_1 = 2$ και $x_2 = 2$, δηλαδή από την τομή των δύο ευθειών $x_1 + x_2 = 4$ και $x_2 = 2$.

---

*Για μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα βιβλία [19] και [20].

3.3.3 Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις

Έστω το παρακάτω πρόβλημα Γ.Π.:

Μεγιστοποίηση της

$$z = 2,5x_1 + x_2$$

Υπό τους περιορισμούς :

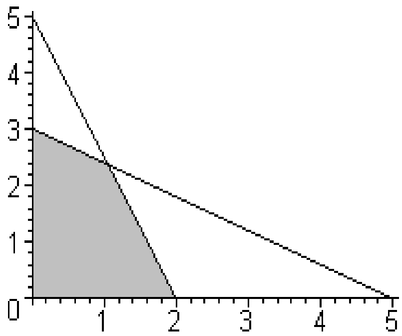
$$3x_1 + 5x_2 \le 15$$

$$5x_1 + 2x_2 \le 10$$

και

$$x_1 \ge 0 \;,\; x_2 \ge 0$$

Κάνοντας πάλι εδώ το χωρίο των δυνατών λύσεων και την αντικειμενική συνάρτηση για τις διάφορες τιμές έχουμε:



Σχήμα 3.3: Γραφική επίλυση προβλήματος ελαχιστοποίησης με άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις.

Παρατηρούμε ότι η z = 5 είναι η μέγιστη βέλτιστη λύση. Η διαφορά είναι ότι εδώ η βέλτιστη λύση συμπίπτει με μια πλευρά του πολυγώνου του χωρίου των δυνατών λύσεων. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ένα μόνα ζεύγος τιμών των x_1 , x_2 που να μεγιστοποιεί την z. Κάθε σημείο της πλευράς ΑΒ του πολυγώνου δίνει την μέγιστη τιμή. Δηλαδή η μέγιστη αυτή τιμή της z είναι μοναδική, αλλά υπάρχει άπειρος αριθμός δυνατών λύσεων. Η κορυφή Α του πολυγώνου αποτελεί και αυτή ένα ζευγάρι τιμών που δίνουν την μέγιστη λύση στο πρόβλημα. Επομένως λύνοντας το σύστημα* των δύο εξισώσεων $3x_1+5x_2 =15$ και $5x_1+2x_2 =10$ παίρνουμε $x_1 = 20/19$ και $x_2 = 45/19$ από όπου παίρνουμε ότι max z = 5. Όταν ένα πρόβλημα Γ.Π. έχει περισσότερες από μία βέλτιστες λύσεις, τότε λέμε ότι υπάρχουν

* Για μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα βιβλία [19] και [20].

εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις αυτό σημαίνει ότι τα διαθέσιμα μέσα είναι δυνατόν να συνδυαστούν κατά περισσότερες από ένα τρόπους προς μεγιστοποίηση του κέρδους.

3.3.4 Μη πεπερασμένη λύση

Έστω το πρόβλημα Γ.Π.:

Μεγιστοποίηση της

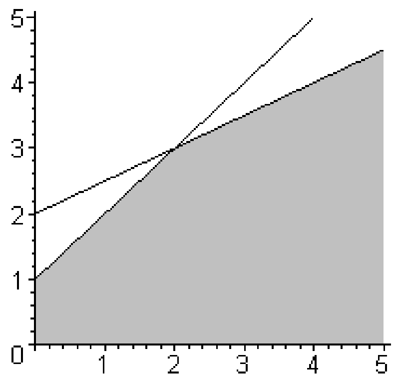
$$z = 2x_1 + 2x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 - x_2 \geq -1$$

$$-0.5\, x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$$



Σχήμα 3.4: Γραφική επίλυση προβλήματος μεγιστοποίησης με μη πεπερασμένη λύση.

Στο Σχήμα 3.4 δίνουμε τη γραφική επίλυση του προβλήματος. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα παρατηρούμε ότι η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να μετακινηθεί παράλληλα προς την κατεύθυνση όπου αυξάνεται το z μέχρι το άπειρο χωρίς να σταματήσει να έχει κοινά σημεία με το χωρίο των δυνατών λύσεων. Συνεπώς η z μπορεί να γίνει οπουδήποτε μεγάλη και το πρόβλημα δεν έχει πεπερασμένη μέγιστη τιμή της z. Σε μια τέτοια περίπτωση λέμε ότι το πρόβλημα δεν έχει πεπερασμένη λύση ή ότι έχει μια μη φραγμένη λύση.

3.3.5 Μη πεπερασμένη λύση με πεπερασμένες βέλτιστες τιμές ορισμένων μεταβλητών

Στο προηγούμενο παράδειγμα και οι δύο μεταβλητές μπορούν να λάβουν απεριόριστα μεγάλες τιμές καθώς αυξάνεται η z. Μια μη φραγμένη λύση όμως μπορεί να έχει και μεταβλητές με πεπερασμένη τιμή. Στο ακόλουθο πρόβλημα μπορούμε να το παρατηρήσουμε:

Μεγιστοποίηση της

$$z = -3x_1 + 2x_2$$

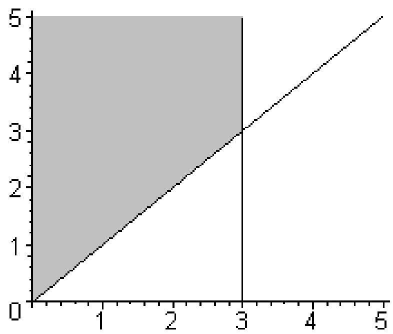
Υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 - x_2 \leq 0$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$$

Η γραφική επίλυση του προβλήματος δίνεται στο Σχήμα 3.5.



Σχήμα 3.5: Γραφική Επίλυση προβλήματος μεγιστοποίησης με μη πεπερασμένη λύση με πεπερασμένες βέλτιστες τιμές ορισμένων μεταβλητών.

Παρατηρούμε ότι ενώ η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να αυξάνεται απεριόριστα η μεταβλητή x_1 είναι πεπερασμένη.

3.3.6 Πεπερασμένη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης με μη πεπερασμένες τιμές των μεταβλητών

Έστω το παρακάτω πρόβλημα Γ.Π.:

Μεγιστοποίηση της

$$z = -x_1 + 2x_2$$

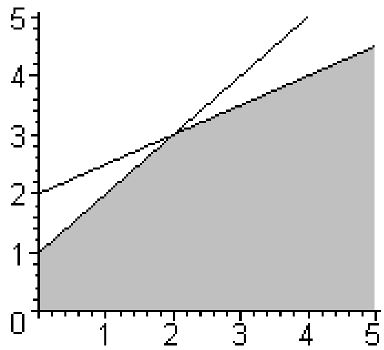
Υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 - x_2 \geq -1$$

$$-0.5\, x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0$$

Η γραφική επίλυση του προβλήματος δίνεται στο Σχήμα 3.6.:



Σχήμα 3.6: Γραφική επίλυση προβλήματος μεγιστοποίησης με πεπερασμένη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης με μη πεπερασμένες τιμές των μεταβλητών.

Παρατηρούμε ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση ενώ η z έχει πεπερασμένη μέγιστη τιμή z = 4 οι τιμές των μεταβλητών είναι απεριόριστα μεγάλες.

3.3.7 Καμία λύση – Ασυμβίβαστοι περιορισμοί

Έστω το πρόβλημα Γ.Π.:

Μεγιστοποίηση της

$$z = 2x_1 + 3x_2$$

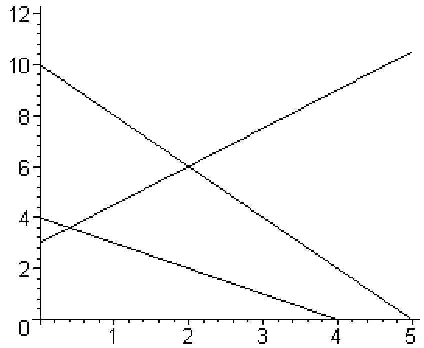
Υπό τους περιορισμούς:

$$2x_1 + x_2 \geq 10$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$-3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0$$



Σχήμα 3.7: Γραφική επίλυση προβλήματος μεγιστοποίησης με καμία λύση- ασυμβίβαστοι περιορισμοί.

Στο σχήμα 3.7 δίνουμε τη γραφική επίλυση του προβλήματος. Παρατηρούμε ότι οι περιορισμοί σε αυτήν την περίπτωση είναι μη συμβιβαστοί και έτσι δεν υπάρχει χωρίο δυνατών λύσεων. Δηλαδή δεν υπάρχει σημείο (x_1, x_2) που να ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς.

3.4 Γραφική Επίλυση Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού με τρεις μεταβλητές

Για να κατανοήσουμε την διαδικασία γραφικής επίλυσης προβλημάτων Γ.Π. τριών μεταβλητών ας δούμε ένα απλό παράδειγμα [6]:

Η εταιρία σοκολάτας Chocolatier παράγει δύο προϊόντα, μια απλή και οικονομική σοκολάτα, την Pyramide και μια πιο ακριβή, την Pyramide Nuit. Έστω x_1 τα κουτιά Pyramide και x_2 τα κουτιά Pyramide Nuit που παράγονται ανά ημέρα. Για την x_1 το κέρδος είναι 1€ και για την x_2 6€ το κάθε κουτί. Η ημερήσια ζήτηση περιορίζεται στα 200 κουτιά για την σοκολάτα Pyramide και στα 300 για την Pyramide Nuit. Επίσης το εργατικό δυναμικό μπορεί να παράγει ένα σύνολο το πολύ 400 κουτιά την ημέρα. Σκοπός μας είναι να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος της παραπάνω εταιρίας βρίσκοντας τα βέλτιστα επίπεδα παραγωγής. Η αντικειμενική συνάρτηση που πρέπει να μεγιστοποιήσουμε είναι η

$$z = x_1 + 6x_2$$

Οι περιορισμοί μπορούν να διατυπωθούν με μαθηματική μορφή ως εξής:

$$x_1 \leq 200$$

$$x_2 \leq 300$$

$$x_1 + x_2 \leq 400$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Συνεπώς το πρόβλημα της z έχει ως εξής:

Μεγιστοποίηση της

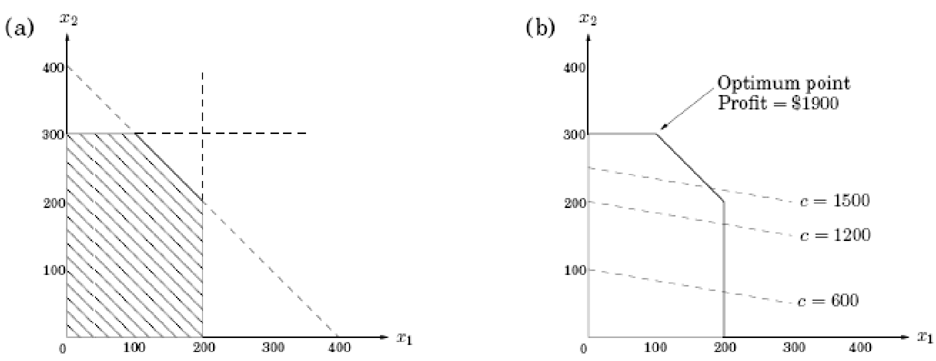
$$z = x_1 + 6x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 \leq 200$$
$$x_2 \leq 300$$
$$x_1 + x_2 \leq 400$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Αφού λύσουμε το πρόβλημα (με τον τρόπο που περιγράψαμε στην ενότητα 3.3.1) παρατηρούμε ότι σχηματίζεται ένα κυρτό πολύγωνο (Σχήμα 3.8 (a)). Η βέλτιστη λύση του προβλήματος είναι η υψηλότερη κορυφή του πολυγώνου όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.8 (b) με μέγιστο κέρδος 1900€.

Ευχαριστημένη η Chocolatier από την ζήτηση των καταναλωτών αποφασίζει να εισάγει ένα ακόμα πιο ακριβό και προϊόν σοκολάτας, την Pyramide Luxe. Ένα κουτί από αυτό το είδος σοκολάτας φέρνει κέρδος 13 € το καθένα. Έστω x_3 τα κουτιά που παράγονται από την σοκολάτα Pyramide Luxe. Οι παλιοί περιορισμοί εξακολουθούν να υφίστανται αν και ο περιορισμός της εργασίας επεκτείνεται τώρα καθώς το άθροισμα και των τριών μεταβλητών δεν μπορεί να ξεπερνά τα 400 κουτιά ημερησίως.



Σχήμα 3.8: Γραφική επίλυση προβλήματος μεγιστοποίησης δύο διαστάσεων.

Επιπλέον αποδεικνύεται ότι η Pyramide Nuit και η Pyramide Luxe χρειάζονται τα ίδια μηχανήματα για την παρασκευή τους με την προϋπόθεση ότι η δεύτερη χρησιμοποιεί τρεις φορές περισσότερο τα μηχανήματα. Οπότε η αντικειμενική συνάρτηση διαμορφώνεται ως εξής:

Μεγιστοποίηση της

$$z = x_1 + 6\,x_2 + 13\,x_3$$

Οι περιορισμοί μπορούν να διατυπωθούν με μαθηματική μορφή ως εξής:

$$x_1 \leq 200$$
$$x_2 \leq 300$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 400$$
$$x_2 + 3x_3 \leq 600$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

Συνεπώς το πρόβλημα της z έχει ως εξής:

Μεγιστοποίηση της

$$z = x_1 + 6\,x_2 + 13\,x_3$$

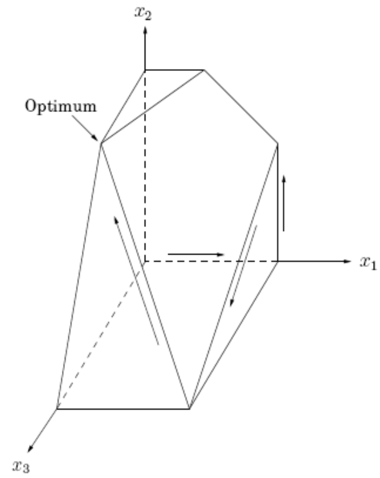
Υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 \leq 200$$
$$x_2 \leq 300$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 400$$
$$x_2 + 3x_3 \leq 600$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

Η γραφική επίλυση του προβλήματος φαίνεται στο Σχήμα 3.9. Ο χώρος των λύσεων πλέον είναι τρισδιάστατος. Τα κέρδη που αποφέρει κάθε κορυφή του πολυγώνου είναι:

(0,0,0) →	(200,0,0) →	(200,200,0) →	(200,0,200) →	(0,300,100)
0€	200€	1400€	2800€	3100€

Το σημείο της τελικής επαφής των εξισώσεων και ανισώσεων που αποφέρει κέρδος 3.100 € είναι το σημείο (0,300,100) και είναι η βέλτιστη λύση για το πρόβλημα της εταιρίας Chocolatier.



Σχήμα 3.9: Γραφική επίλυση προβλήματος μεγιστοποίησης τριών διαστάσεων.

Γενικά η διαδικασία γραφικής επίλυσης ενός προβλήματος Γ.Π. είναι πολύ σημαντική γιατί μας δίνει την δυνατότητα να σχεδιάσουμε την περιοχή των εφικτών λύσεων και να κατανοήσουμε τον τρόπο που λειτουργούν οι διάφορες μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων Γ.Π. [34]. Επίσης μας βοηθά να διερευνήσουμε την ευαισθησία της βέλτιστης λύσης του προβλήματος. Πρακτικά, βέβαια δεν έχει εφαρμογή αφού τα προβλήματα έχουν πολλές μεταβλητές και πολλούς περιορισμούς. Πολλές γενικές αλλά και πιο συγκεκριμένες πληροφορίες για την γραφική επίλυση προβλημάτων Γ.Π. μπορείτε να βρείτε στα βιβλία [41], [5], [52], και [50].

3.5 Προοπτικές Γενίκευσης

Η γραφική μέθοδος δε μπορεί να επεκταθεί σε πραγματικά προβλήματα Γ.Π. με περισσότερες από τρεις μεταβλητές απόφασης διότι πλέον η εφικτή περιοχή είναι ένα υπερπολύεδρο και είναι δύσκολο να αναπαρασταθεί γραφικά [34].

Για τον λόγο αυτό υπάρχει ένας συνδυαστικός τύπος όπως φαίνεται παρακάτω ο οποίος μας εμφανίζει πόσες κορυφές έχει το συγκεκριμένο υπερπολύεδρο. Πιο συγκεκριμένα αν m και n είναι το πλήθος των περιορισμών και μεταβλητών απόφασης του προβλήματος, αντίστοιχα, υπάρχουν (m+n) αλληλοτεμνόμενα υπερεπίπεδα και ο αριθμός των κορυφών του υπερπολυέδρου των λύσεων μπορεί να φτάσει στον αριθμό συνδυασμών των (m+n) ανά n, δηλαδή:

$$C_n^{m+n} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$$

Για παράδειγμα σε ένα γραμμικό πρόβλημα διαστάσεων 10 x 15 δηλαδή για m=10 και n=15 μπορεί να διαθέτει μέχρι 3.268.760 κορυφές και δεν είναι παρά ένα μικρό πρόβλημα Γ.Π.

Η επίλυση των γραμμικών προβλημάτων με τον παραπάνω τρόπο δεν είναι και τόσο αποτελεσματική, για αυτό έπρεπε να επινοηθεί μια νέα αλγεβρική μέθοδος η οποία θα βρίσκει άμεσα τη βέλτιστη κορυφή του υπερπολυέδρου δηλαδή την βέλτιστη εφικτή λύση της z για το πρόβλημα που κάθε φορά μας απασχολεί. Μια τέτοια μέθοδος είναι η μέθοδος Simplex την οποία παρουσιάζουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

4.1 Εισαγωγή

Όταν το πρόβλημα Γ.Π. έχει το πολύ τρεις μεταβλητές τότε μπορεί να λυθεί γραφικά όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα. Όμως στην γενική τους μορφή τα προβλήματα Γ.Π. έχουν πολλές μεταβλητές και πολλούς περιορισμούς, και η λύση τους είναι δυνατή μόνο με την βοήθεια της μεθόδου Simplex και ενός Η/Υ που θα την υλοποιήσει ταχύτατα. Η μέθοδος Simplex αναπτύχθηκε από τον Dantzig [3] και είναι η πλέον γνωστή και περισσότερο χρησιμοποιούμενη μέθοδος για την επίλυση γραμμικών προβλημάτων.

Στη μέθοδο Simplex παριστάνουμε το μοντέλο με τη μορφή ενός πίνακα (Simplex tableau) και με στοιχειώδης πράξεις μεταξύ των γραμμών του πίνακα οδηγούμαστε στη διαμόρφωση νέων πινάκων Simplex, μέχρι να φτάσουμε στον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης. Η Simplex βασίζεται στο γεγονός ότι η βέλτιστη λύση είναι κάποια κορυφή της εφικτής περιοχής. Η τεχνική ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων, δηλαδή από το σημείο όπου όλες οι μεταβλητές απόφασης έχουν μηδενική τιμή, διερευνά τις κορυφές της εφικτής περιοχής δηλαδή κάθε ενδιάμεσος πίνακας Simplex αντιστοιχεί σε μια κορυφή και τελικά εντοπίζει την καλύτερη κορυφή [40].

Η μέθοδος Simplex παραμένει ακόμα μια από τις αποτελεσματικότερες μεθόδους για μια μεγάλη πλειοψηφία πρακτικών προβλημάτων. Αν και διάφορες παραλλαγές της μεθόδου Simplex έχουν αναπτυχθεί, καμία από αυτές δεν έχει πολυωνυμική χρονική πολυπλοκότητα Terlaky, Zhang και Salahi [21]. Δηλαδή η μέθοδος Simplex μπορεί να απαιτήσει υπολογιστική προσπάθεια που αυξάνεται εκθετικά με το μέγεθος των δεδομένων του προβλήματος. Ως εκ τούτου, η μέθοδος Simplex δεν θεωρείται αποτελεσματική από θεωρητική άποψη αντίθετα προς την πρακτική αποτελεσματικότητά της.

4.2 Περιγραφή της Μεθόδου Simplex

Η μέθοδος Simplex αποτελεί μια αλγεβρική επαναληπτική διαδικασία η οποία επιλύει ακριβώς, κάθε πρόβλημα Γ.Π. σε ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων. Για την καλύτερη κατανόηση της λειτουργίας της μεθόδου θα την παρουσιάσουμε μέσα από ένα απλό παράδειγμα [50]:

Μεγιστοποίηση της

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 - 2x_4 + x_5 \leq 10 \quad (1)$$

$$x_2 + 3x_3 - x_5 \leq 15 \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (5α)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (5β)$$

$$x_3 \geq 0 \quad (5γ)$$

$$x_4 \geq 0 \quad (5δ)$$

$$x_5 \geq 0 \quad (5ε)$$

0^o Βήμα : Αρχικοποίηση. Το πρώτο βήμα για την επίλυση ενός γραμμικού προβλήματος με την μέθοδο Simplex είναι να μετατρέψουμε το γραμμικό μοντέλο στην τυποποιημένη μορφή του. Για να γίνει αυτό, πρέπει να μετατρέψουμε κάθε περιορισμό του γραμμικού προβλήματος που δίνεται ως ανισότητα σε ισότητα εισάγοντας μια βοηθητική μεταβλητή (slack variable). Έτσι το μοντέλο μας γίνεται ως εξής:

Μεγιστοποίηση της

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 - 2x_4 + x_5 + s_1 = 10 \quad (1)$$

$$x_2 + 3x_3 - x_5 + s_2 = 15 \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (5α)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (5β)$$

$$x_3 \geq 0 \quad (5γ)$$

$$x_4 \geq 0 \quad (5δ)$$

$$x_5 \geq 0 \quad (5ε)$$

$$S_1 \geq 0 \quad (5ζ)$$

$$S_2 \geq 0 \quad (5η)$$

Μεταφέροντας όλους τους όρους (μεταβλητές) της z στο αριστερό μέρος της σχέσεως, η z γίνεται όπως παρακάτω:

$$z - 3x_1 - 2\,x_2 - x_3 + x_4 - 2\,x_5 = 0 \quad (1β)$$

Η (1β) με τις (1), (2) και (5α-5η) αποτελούν την τυποποιημένη μορφή του μοντέλου. Στο επόμενο βήμα μπορούμε να εισάγουμε τους συντελεστές των μεταβλητών του προβλήματος.

1^{ο} Βήμα : Έλεγχος Βελτιστότητας. Κατά τον έλεγχο βελτιστότητας εάν όλες οι καταχωρήσεις της αντικειμενικής γραμμής (εκτός ενδεχομένως, από αυτή της δεξιότερης στήλης, η οποία αναπαριστά την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης) είναι μη αρνητικές, τότε η μέθοδος τερματίζεται. Στην δική μας περίπτωση δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο οπότε συνεχίζουμε την διαδικασία κατασκευάζοντας τον αρχικό πίνακα Simplex Πίνακας 4.1.

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	**ΔΜΕ**	**Πηλίκο**	**ΒΜ**
1	-3	-2	-1	1	-2	0	0	0		
0	1	0	0	2	1	1	0	10	10/1=10	s_1
0	0	1	3	0	1	0	1	15	----	s_2

Πίνακας 4.1: Αρχικός Πίνακας Simplex.

Ο αρχικός πίνακας Simplex περιέχει στην πρώτη γραμμή τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης με αντίθετα πρόσημα η οποία καλείται **αντικειμενική γραμμή** ενώ στις επόμενες γραμμές αναγράφονται οι συντελεστές των περιορισμών. Η στήλη ΔΜΕ αντιπροσωπεύει τις τιμές των μέσων που διατίθενται στο πρόβλημα μας (δεξί μέρος εξισώσεων). Η στήλη ΒΜ περιέχει τις βασικές μεταβλητές σε κάθε βήμα τις μεθόδου. Με τον όρο **βασική λύση** (basic solution) εννοούμε την λύση που προκύπτει όταν θέσουμε κάποιες μεταβλητές ίσες με το 0 και επιλύσουμε το σύστημα με βάση τις υπόλοιπες. Οι μεταβλητές που μηδενίστηκαν προτού επιλύσουμε το σύστημα ονομάζονται **μη βασικές** ενώ οι υπόλοιπες **βασικές**. Βασικές μεταβλητές στο παράδειγμά μας θεωρούμε τις βοηθητικές μεταβλητές. Οπότε θέτοντας τις μη βασικές μεταβλητές δηλαδή τις υπόλοιπες ίσες με το 0, η

βασική εφικτή λύση (καλείται η λύση όπου όλες οι μεταβλητές της βασικής λύσης είναι μη αρνητικές) του προβλήματος είναι η (0, 0, 0, 0, 0, 10, 15):

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0, \; s_1 = 10, \; s_2 = 15 \quad \text{με}$$
$$z = 3 \times 0 + 2 \times 0 + 1 \times 0 - 1 \times 0 + 2 \times 0 = 0$$

2ο Βήμα: Εύρεση εισερχόμενης μεταβλητής. Σε αυτό το βήμα εξετάζουμε αν η παραπάνω είναι η βέλτιστη λύση του γραμμικού προβλήματος, ελέγχοντας τους συντελεστές των μη βασικών μεταβλητών στη z. Βλέπουμε ότι υπάρχουν τέσσερις μη βασικές μεταβλητές με αρνητικούς συντελεστές (Πίνακας 4.1). Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να βελτιώσουμε τη λύση του γραμμικού προβλήματος, αυξάνοντας την τιμή μιας εξ' αυτών των μη βασικών μεταβλητών από 0 σε κάποια θετική τιμή. Από τους συντελεστές αυτών των τεσσάρων μεταβλητών την πιο αρνητική τιμή ο συντελεστής της x_1 και είναι το (-3), το οποίο ονομάζουμε **αξονικό στοιχείο**. Αυτό σημαίνει ότι αν αυξήσουμε την τιμή της x_1 θα επιτύχουμε τη μεγαλύτερη αύξηση στην z από κάθε άλλη μεταβλητή με αρνητικό συντελεστή. Η στήλη των συντελεστών της μεταβλητής x_1 λέγεται **στήλη περιστροφής** (pivot column) ενώ η νέα βασική μεταβλητή δηλαδή η x_1 ονομάζεται **εισερχόμενη μεταβλητή** (entering variable).

3ο Βήμα: Εύρεση απερχόμενης μεταβλητής. Για να βρούμε πόσο μπορούμε να αυξήσουμε την τιμή της x_1, πρέπει να υπολογίσουμε το **λόγο-θ** (θ-ratio) διαιρώντας την στήλη ΔΜΕ προς τον συντελεστή της στήλης περιστροφής για τον αντίστοιχο περιορισμό και για κάθε περιορισμό. Η μεταβλητή με το μικρότερο λόγο-θ, ονομάζεται **απερχόμενη μεταβλητή**, δηλαδή την μεταβλητή που πρόκειται να καταστεί μη-βασική και η οποία δίνει το ποσό κατά το οποίο θα αυξήσουμε την εισερχόμενη μεταβλητή x_1, ενώ η γραμμή στην οποία περιέχεται η απερχόμενη μεταβλητή ονομάζεται γραμμή περιστροφής. Στο πρόβλημα μας, έχουμε μόνο ένα λόγο-θ αφού δεν υπάρχει πηλίκο για το δεύτερο περιορισμό, οπότε απερχόμενη μεταβλητή είναι η s_1. Συνεπώς η x_1 θα αυξηθεί από το 0 σε 10, σύμφωνα με το μοναδικό λόγο-θ στον πρώτο περιορισμό. Επιλέγουμε το μικρότερο από τα πηλίκα, διότι η τιμή αυτή ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς του γραμμικού προβλήματος. Κάθε άλλο μεγαλύτερο πηλίκο παραβιάζει κάποιον ή κάποιους από τους περιορισμούς του προβλήματος. Παρατηρήστε ότι εάν δεν υπάρχουν θετικές καταχωρήσεις στην στήλη περιστροφής, τότε δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τους λόγους-θ, κάτι που καταδεικνύει ότι το πρόβλημα είναι μη-φραγμένο και ο αλγόριθμος τερματίζεται.

4^o **Βήμα:** Δημιουργία του επόμενου πίνακα. Για να γίνει βασική η μεταβλητή x_1 πρέπει να μηδενίσουμε όλους τους συντελεστές στην στήλη περιστροφής, χρησιμοποιώντας το αξονικό στοιχείο (-3). Εδώ, θέλουμε να μηδενίσουμε μόνο την πρώτη γραμμή, καθώς στην τελευταία έχουμε ήδη 0.

Πολλαπλασιάζοντας την γραμμή περιστροφής με το 3 και προσθέτοντας την στην πρώτη γραμμή παίρνουμε τα αποτελέσματα όπως αναγράφονται στον Πίνακα 4.2:

z	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{s_1}$	$\mathbf{s_2}$	**ΔΜΕ**	**Πηλίκο**	**ΒΜ**
1	0	-2	-1	7	1	3	0	30		
0	1	0	0	2	1	1	0	10	----	x_1
0	0	1	3	0	1	0	1	15	15/1=15	s_2

Πίνακας 4.2: Πρώτο βήμα βελτίωσης της z (x_1 βασική μεταβλητή).

Η νέα λύση για το πρόβλημα με βασικές μεταβλητές τις x_1 και s_2 είναι η ακόλουθη:

$$s_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0, \quad x_1 = 10, \quad s_2 = 15 \quad \text{με}$$
$$z = 3 \text{ x } 10 + 2 \text{ x } 0 + 1 \text{ x } 0 - 1 \text{ x } 0 + 2 \text{ x } 0 = 30$$

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **οδήγηση** (pivoting), και είναι παρόμοιος μα τον αλγόριθμο απαλοιφής Gauss-Jordan για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων*. Από τον προηγούμενο πίνακα μπορούμε να δούμε ότι δεν έχουμε ακόμη, βέλτιστη λύση αφού υπάρχουν δύο μεταβλητές με αρνητικούς συντελεστές στην αντικειμενική συνάρτηση. Ακολουθώντας την διαδικασία του βήματος 3, βλέπουμε ότι η x_2 θα εισέλθει στην βάση, με γραμμή περιστροφής αυτή του δεύτερου περιορισμού [50]. Η x_2 θα πάρει τιμή 15 (από το μοναδικό λόγο-θ που έχουμε). Ο νέος πίνακας με τη x_2 βασική μεταβλητή, δίνεται παρακάτω:

* Για μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα βιβλία [19] και [20].

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	ΔΜΕ	Πηλίκο	ΒΜ
1	0	0	5	7	3	3	2	60		
0	1	0	0	2	1	1	0	10		x_1
0	0	1	3	0	1	0	1	15		x_2

Πίνακας 4.3: Βέλτιστη λύση του Γ.Π.

Η νέα λύση για το πρόβλημα με βασικές μεταβλητές τις x_1 και s_2 είναι η :

$$s_1 = s_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0, \quad x_1 = 10, \quad x_2 = 15 \quad \text{με}$$
$$z = 3 \times 10 + 2 \times 15 + 1 \times 0 - 1 \times 0 + 2 \times 0 = 60$$

Στον Πίνακα 4.3 παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει άλλη μεταβλητή, με αρνητικό συντελεστή στη z. Άρα η τρέχουσα λύση δεν μπορεί να βελτιωθεί περισσότερο, συνεπώς είναι η βέλτιστη λύση.

4.3 Παγίδες της μεθόδου Simplex και πώς να τις αποφύγουμε

Ο σκοπός της παρούσας ενότητας ωστόσο είναι να αναλύσει αυστηρά την μέθοδο μελετώντας κάθε της βήμα. Τρία είδη παγίδων εμφανίζονται στη μέθοδο Simplex τα οποία είναι τα ακόλουθα [2]:

- **Αρχικοποίηση**. Μπορεί να μην μπορούμε να ξεκινήσουμε.
- **Επανάληψη.** Μπορεί να κολλήσουμε σε κάποια επανάληψη.
- **Τερματισμός.** Μπορεί να μην μπορούμε να τερματίσουμε.

Προτού όμως καταλήξουμε θα ήταν σκόπιμο να γνωρίσουμε την κάθε **«παγίδα»** ξεχωριστά.

- Για την **Αρχικοποίηση** το σημείο που χρειάζεται να εξηγηθεί είναι πώς να κρατήσουμε τον αρχικό υλοποιήσιμο πίνακα σε ένα πρόβλημα με μη υλοποιήσιμη ρίζα. Το πρόβλημα με την μη υλοποιήσιμη ρίζα είναι δύο διαστάσεων. Αρχικά, μπορεί να μην είναι ξεκάθαρο ότι το πρόβλημά μας έχει υλοποιήσιμες λύσεις και δεύτερον ακόμα και αν μια υλοποιήσιμη λύση είναι εμφανής στον πίνακα μπορεί να μην είναι. Ένας τρόπος για να ξεπεράσουμε και τα δύο αυτά εμπόδια χρησιμοποίει μια μέθοδο η οποία καλείται *βοηθητικό πρόβλημα* (auxiliary problem). Μια υλοποιήσιμη λύση του βοηθητικού προβλήματος είναι επαρκώς διαθέσιμη αρκεί να θέσουμε την τιμή του κάθε x_j με $1 \geq j \geq n$ στο 0 και να κάνουμε την τιμή του x_0 επαρκώς μεγάλη. Επιπλέον είναι εύκολο να δούμε ότι το αρχικό πρόβλημα έχει μία υλοποιήσιμη λύση αν και μόνο αν το βοηθητικό πρόβλημα έχει υλοποιήσιμη λύση με το $x_0 = 0$. Για να το θέσουμε διαφορετικά το αρχικό πρόβλημα έχει μια υλοποιήσιμη λύση αν και μόνον αν η βέλτιστη τιμή του βοηθητικού προβλήματος είναι 0. Έτσι το σχέδιο μας είναι να επιλύσουμε πρώτα το βοηθητικό πρόβλημα.

- Για την **Επανάληψη** δεδομένου κάποιου υλοποιήσιμου πίνακα πρέπει να επιλέξουμε μια εισερχόμενη μεταβλητή, να βρούμε μια απερχόμενη μεταβλητή και να κατασκευάσουμε τον επόμενο υλοποιήσιμο εξαρτώμενο πίνακα. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής:

α) Επιλέγοντας μια εξαρτώμενη μεταβλητή. Η εισερχόμενη μεταβλητή είναι μια μη βασική μεταβλητή x_j με την βοήθεια της $\hat{c}_j$ στη τελευταία γραμμή του ήδη υπάρχοντος λεξικού. Αυτός ο κανόνας είναι διφορούμενος με την έννοια ότι μπορεί να παρέχει περισσότερους από έναν υποψηφίους για να εισέλθουν στην βάση ή καθόλου υποψηφίους. Η τελευταία εναλλακτική υπονοεί ότι ο υπάρχον πίνακας περιγράφει μια βέλτιστη λύση, σε αυτό το σημείο στο οποίο η μέθοδος μπορεί να τερματιστεί.

β) Εντοπίζοντας την εξερχόμενη μεταβλητή. Η εξερχόμενη μεταβλητή είναι αυτή η βασική μεταβλητή της οποίας η μη αρνητικότητα θέτει το πιο αυστηρό άνω όριο στην αύξηση της εισερχόμενης μεταβλητής. Πάλι αυτός ο κανόνας είναι διφορούμενος με την έννοια ότι μπορεί να παρέχει περισσότερους από έναν υποψηφίους για να φύγουν από την βάση, ή καθόλου υποψηφίους.

γ) Με εκφύλιση. Η παρουσία περισσοτέρων από ενός υποψηφίων για έξοδο από την βάση έχει ενδιαφέρουσες συνέπειες. Βασικές λύσεις με μια ή περισσότερες βασικές μεταβλητές στο 0 λέγονται εκφυλισμένες. Οι επαναλήψεις της μεθόδου Simplex που δεν αλλάζουν την βασική λύση αποκαλούνται εκφυλισμένες. Κατά μια έννοια εκφύλιση είναι κάτι σαν ατύχημα. Μια βασική μεταβλητή μπορεί να εξαφανιστεί μόνο αν τα αποτελέσματα διαδοχικά εξαρτώμενων διαδικασιών απλά συμβαίνει να ακυρώνουν η μία την άλλη και παρόλα αυτά συναντάμε την εκφύλιση στα προβλήματα Γ.Π. να προκύπτει από πρακτικές εφαρμογές. Έχει ειπωθεί πως σχεδόν όλα τα προβλήματα αυτού του τύπου παρουσιάζουν βασικές υλοποιήσιμες λύσεις εκφύλισης σε κάποιο στάδιο της μεθόδου Simplex. Οποτεδήποτε και αν συμβεί αυτό η μέθοδος Simplex μπορεί να επιβιώσει περνώντας από μερικές εκφυλισμένες επαναλήψεις στην σειρά. Τυπικά μια τέτοια διαδικασία από εκφυλισμένες επαναλήψεις τελειώνει απότομα με μια μη εκφυλισμένη επανάληψη.

- Για τον **Τερματισμό** αξίζει να σημειωθεί ότι όλα κινούνται όπως ένας κύκλος. Η μέθοδος Simplex μπορεί να υποστεί μια ατελείωτη συχνότητα από επαναλήψεις χωρίς να βρει ποτέ μια βέλτιστη λύση. Σε αυτή την περίπτωση ισχύουν τα παρακάτω:

  1) Η εισερχόμενη μεταβλητή θα είναι πάντα η μη-βασική μεταβλητή που έχει την μεγαλύτερη σημασία στην γραμμή z του πίνακα.
  2) Αν δύο η περισσότερες βασικές μεταβλητές συναγωνίζονται για να φύγουν από την βάση, τότε ο υποψήφιος με την μικρότερη παραμονή θα αναγκαστεί να φύγει.

Λέμε ότι η μέθοδος Simplex λοιπόν κάνει κύκλο αν ένας πίνακας εμφανίζεται σε δύο διαφορετικές επαναλήψεις. Σημειώνεται λοιπόν ότι κύκλος μπορεί να συμβεί μόνο στην παρουσία της εκφύλισης αν η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αυξάνει με κάθε μη εκφυλισμένη επανάληψη και παραμένει η ίδια μετά από κάθε εκφύλιση όλες οι επαναλήψεις της συχνότητας που οδηγούν από τον πίνακα στην ίδια θα είναι εκφυλισμένες. Ο κύκλος είναι ένας λόγος γιατί η μέθοδος Simplex μπορεί να αποτύχει να τερματίσει. Το ακόλουθο θεώρημα δείχνει πως είναι και ο μόνος λόγος:

Αν η Simplex μέθοδος αποτύχει να τερματίσει τότε υποχρεωτικά κάνει κύκλο.

4.4 Πολυπλοκότητα της μεθόδου Simplex

Γενικά, η εκτίμηση της πολυπλοκότητας (complexity) ενός αλγορίθμου είναι η μελέτη του μέγιστου αριθμού στοιχειωδών πράξεων που απαιτεί ο συγκεκριμένος αλγόριθμος στις χειρότερες των περιπτώσεων εφαρμογής του. Όπως αποδείχθηκε το 1972 από τους V. Klee και G. J. Minty, είναι δυνατή η κατασκευή προβλημάτων Γ.Π. των οποίων η επίλυση μέσω της μεθόδου Simplex απαιτεί την θεώρηση ενός αριθμού ακροτάτων σημείων της εφικτής περιοχής ο οποίος αυξάνεται εκθετικά ως προς το μέγεθος του προβλήματος (δηλαδή, ως προς το συνολικό πλήθος μεταβλητών). *Η πολυπλοκότητα του Αλγορίθμου **Simplex** είναι λοιπόν εκθετική* (Klee Minty, 1972). Εν τούτοις, παρά την άσχημη συμπεριφορά του στις χειρότερες των περιπτώσεων, η εμπειρία πιστοποιεί ότι ο Αλγόριθμος Simplex αποδεικνύεται αρκετά αποτελεσματικός κατά την μελέτη και επίλυση μεγάλου μέρους προβλημάτων Γ.Π. πρακτικής φύσεως. Ωστόσο, η αναγκαιότητα εξασφάλισης της βεβαιότητας επιτυχούς διεκπεραίωσης οποιουδήποτε προβλήματος Γ.Π. επέβαλε την επινόηση άλλων μεθόδων των οποίων η πολυπλοκότητα θα είναι καλύτερη από την πολυπλοκότητα της μεθόδου Simplex [48].

Η εμφάνιση το 1984 του *Αλγορίθμου του **Karmarkar*** για την επίλυση Προβλημάτων Γ.Π. προκάλεσε μεγάλη αίσθηση στην μαθηματική κοινότητα, καθώς ήταν ο πρώτος αλγόριθμος πολυωνυμικής τάξης (δηλαδή πολυωνυμικής πολυπλοκότητας) που συναγωνιζόταν ευθέως την μέθοδο Simplex σε προβλήματα πραγματικού περιεχομένου και ενδιαφέροντος. Είχε προηγηθεί, το 1979, *ο Ελλειψοειδής Αλγόριθμος του **Khachiyan*** ο οποίος, αν και είχε επίσης πολυωνυμική πολυπλοκότητα, είχε μόνον θεωρητικό ενδιαφέρον κυρίως λόγω των διογκωμένων μετατροπών που επέβαλε στο αρχικό πρόβλημα (Karloff, 1991). Όπως και ο Ελλειψοειδής Αλγόριθμος, έτσι και ο Αλγόριθμος του Karmarkar, που φέρει επίσης και την ονομασία *Προβολικός Αλγόριθμος*, αγνοεί σχεδόν τελείως την συνδυαστική δομή του εκάστοτε Προβλήματος. Ο πολυωνυμικής τάξης Ελλειψοειδής Αλγόριθμος παράγει μία ακολουθία σημείων που βρίσκονται στο εξωτερικό μέρος της εφικτής περιοχής του προβλήματος. Πρόκειται, δηλαδή, για μία *"Μέθοδο Εξωτερικού Σημείου"*. Αντίθετα, ο Αλγόριθμος του Karmarcar είναι μία *"Μέθοδος Εσωτερικού Σημείου"*, γιατί παράγει μία ακολουθία σημείων που βρίσκονται στο εσωτερικό μέρος της εφικτής περιοχής και των οποίων τα κόστη των αντικειμενικών συναρτήσεων πλησιάζουν διαδοχικά το βέλτιστο κόστος. Στο τέλος υποδεικνύει έναν μηχανισμό μεταπήδησης σε μία κορυφή του πολυγώνου που αναπαριστά την εφικτή περιοχή, επί της οποίας το κόστος της αντικειμενικής συνάρτησης δεν θα είναι μεγαλύτερο από αυτό του τελευταίου σημείου της ακολουθίας [48]. Το κόστος αυτό θα είναι το βέλτιστο. Επισημαίνουμε ότι η μέθοδος Simplex παράγει τις κορυφές του πολυγώνου της εφικτής περιοχής του προβλήματος αναζητώντας σε κάθε στάδιο παραγωγής την κορυφή εκείνη στην οποία υλοποιείται το βέλτιστο κόστος.

Για περισσότερα στοιχεία αναφορικά με την τεχνική της μεθόδου Simplex εκτός από αυτά που αναφέραμε παραπάνω ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην μονογραφία του Dantzig [4] καθώς και στα βιβλία [56], [3], [14] και [27].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΔΥΪΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

5.1 Εισαγωγή

Κάθε μεγιστοποίηση ενός προβλήματος του Γ.Π. με την βασική μορφή δίνει έναρξη σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης του Γ.Π. και καλείται Δυϊκό πρόβλημα. Τα δύο προβλήματα συνδέονται με έναν ενδιαφέροντα τρόπο. Κάθε μια υπαρκτή λύση στο ένα προκαλεί ένα όριο στην βέλτιστη τιμή του άλλου. Στην πραγματικότητα, αν ένα από τα δύο προβλήματα έχει μια βέλτιστη λύση, ομοίως έχει και το άλλο και οι δύο βέλτιστες τιμές συμπίπτουν. Αυτό το γεγονός το οποίο είναι γνωστό ως το θεώρημα Δυϊκότητας είναι το αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου. Πρέπει επίσης να σημειωθεί πως σε επιχειρησιακές εφαρμογές οι μεταβλητές που περιέχονται στο δυϊκό πρόβλημα μπορεί να μεταφραστούν με έναν πολύ χρήσιμο τρόπο.

Σύμφωνα με τη δυϊκή θεωρία, σε κάθε πρόβλημα Γ.Π. αντιστοιχεί ένα δεύτερο πρόβλημα, το οποίο προκύπτει από το αρχικό [40]. Το αρχικό πρόβλημα το ονομάζουμε *πρωτεύον* ενώ το δεύτερο το ονομάζουμε *δυϊκό*. Το δυϊκό μοντέλο αποτελεί μια εναλλακτική άποψη του ίδιου προβλήματος, από το οποίο προέκυψε το πρωτεύον πρόβλημα, γεγονός που έχει ως αποτέλεσμα ενδιαφέρουσες οικονομικές ερμηνείες του συνολικού προβλήματος.

5.2 Πρωτεύον και Δυϊκό πρόβλημα

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ένα οποιοδήποτε γραμμικό πρόβλημα μπορούμε να το μετασχηματίσουμε σε κανονική μορφή. Το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα είναι σε κανονική μορφή και θα το ονομάζουμε πρωτεύον (primal).

Ελαχιστοποίηση της

$$z = c^T x$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

Από το πρωτεύον πρόβλημα μπορούμε να κατασκευάσουμε σε κανονική μορφή το δυϊκό του (dual) που θα έχει την εξής μορφή:

Μεγιστοποίηση της

$$z = b^T w$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$A^T w \geq c$$

$$w \geq 0$$

όπου w είναι οι μεταβλητές απόφασης του δυϊκού προβλήματος τις οποίες και θα ονομάζουμε δυϊκές μεταβλητές. Οι δυϊκές μεταβλητές w και οι δυϊκές χαλαρές μεταβλητές s του δυϊκού προβλήματος προσφέρουν σημαντικές οικονομικές ερμηνείες για το αρχικό γραμμικό πρόβλημα. Σύμφωνα με τη δυϊκή θεωρία μπορεί πολύ εύκολα κάποιος να υπολογίσει το δυϊκό ενός γενικού γραμμικού προβλήματος εφαρμόζοντας πολύ απλούς κανόνες μετασχηματισμού μερικοί από τους οποίους αναγράφονται παρακάτω [41]:

- Αν σε ένα πρωτεύον πρόβλημα ζητείται η ελαχιστοποίηση (ή μεγιστοποίηση) της αντικειμενικής συνάρτησης, τότε το δυϊκό πρόβλημα αυτού ζητείται η μεγιστοποίηση (ή ελαχιστοποίηση, αντίστοιχα) της αντικειμενικής συνάρτησης.
- Σε κάθε περιορισμό του πρωτεύοντος αντιστοιχεί μια μεταβλητή του δυϊκού του.
- Σε κάθε μεταβλητή του πρωτεύοντος αντιστοιχεί ένας περιορισμός του δυϊκού του.
- Το πρόβλημα μεγιστοποίησης πρέπει να έχει όλους τους περιορισμούς ($\geq$) και το πρόβλημα ελαχιστοποίησης πρέπει να έχει όλους τους περιορισμούς ($\leq$).
- Όλες οι πρωτεύουσες και δυϊκές μεταβλητές πρέπει να είναι μη αρνητικές.
- Κάθε περιορισμός σε ένα πρόβλημα αντιστοιχεί σε μια μεταβλητή του άλλου (και αντίστροφα).
- Τα στοιχεία της δεξιάς πλευράς των περιορισμών σε ένα πρόβλημα είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης στο άλλο πρόβλημα.
- Ο πίνακας των σταθερών συντελεστών για το πρόβλημα είναι ο ανάστροφος του πίνακα σταθερών συντελεστών για το άλλο πρόβλημα.

Έτσι στη μεταβλητή x_j του πρωτεύοντος προβλήματος αντιστοιχεί ο περιορισμός του δυϊκού προβλήματος και έχει τη μορφή:

$$(\text{στήλη συντελεστών } x_j)^T w \circledR c_i$$

όπου ® αντιστοιχεί σε ένα από τα σύμβολα =, ≤ και ≥.

Ο Πίνακας 5.1 παρουσιάζει τους κανόνες σχηματισμού του δυϊκού προβλήματος.

α/α	min			max	
1	περιορισμός	=		μεταβλητή	ελεύθερη
2	περιορισμός	≥		μεταβλητή	≥ 0
3	περιορισμός	≤		μεταβλητή	≤ 0
4	μεταβλητή	ελεύθερη		περιορισμός	=
5	μεταβλητή	≥ 0		περιορισμός	≤
6	μεταβλητή	≤ 0		περιορισμός	≥

Πίνακας 5.1: Κανόνες σχηματισμού δυϊκών προβλημάτων.

5.3 Παραδείγματα δυϊκών προβλημάτων

Συνήθως, η επίλυση του δυϊκού προβλήματος παρέχει πληροφορίες σχετικές με τη συνεισφορά και την αξία των πόρων (πρώτες ύλες) που καταναλώνονται στο βέλτιστο σχέδιο που βρέθηκε από το πρωτεύον [40]. Για να κατανοήσουμε την λειτουργία του , ας δούμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Ένα ξυλουργείο κατασκευάζει θρανία, τραπέζια και καρέκλες. Για την παραγωγή τους το μόνο που στ’ αλήθεια χρειάζεται είναι ξυλεία και η δουλειά του ξυλουργού, δουλειά που μπορεί να διαχωριστεί στη φάση της κατασκευής και στη φάση του φινιρίσματος σύμφωνα με τον Πίνακα 5.2:

ΠΡΟΪΟΝ				
ΠΡΩΤΗ ΥΛΗ	Θρανίο	Τραπέζι	Κάθισμα	ΔΙΑΘΕΣΙΜΕΣ ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ
Ξυλεία(m)	8	6	1	48 m
Κατασκευή (ώρες)	2	1.5	0.5	8 ώρες
Φινίρισμα(ώρες)	4	2	1.5	20 ώρες

Πίνακας 5.2: Πίνακας δυϊκού προβλήματος.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ένα θρανίο πωλείται προς 60 ευρώ, ένα τραπέζι προς 30 ευρώ και ένα κάθισμα προς 20 ευρώ, ο ξυλουργός ενδιαφέρεται να μάθει πως μπορεί να αξιοποιήσει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο τις πρώτες ύλες που διαθέτει ώστε να μεγιστοποιήσει τα συνολικά του έσοδα. Με άλλα λόγια, το ενδιαφέρον του ξυλουργού επικεντρώνεται στην εύρεση του «σωστού» πλήθους προϊόντων από το κάθε είδος που κατασκευάζει. Αν λοιπόν x_1, x_2 και x_3 είναι το πλήθος θρανίων, τραπεζιών και καθισμάτων αντίστοιχα που πρέπει να κατασκευάζονται, το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει το πρόβλημα του ξυλουργού είναι το παρακάτω:

Μεγιστοποίηση της

$$z = (60\,x_1 + 30\,x_2 + 20\,x_3) \quad \text{(συνολικά έσοδα σε ευρώ)}$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$8\,x_1 + 6\,x_2 + x_3 \le 48 \quad \text{(διαθέσιμη ποσότητα ξυλείας, m)}$$
$$2\,x_1 + 1.5\,x_2 + 0.5\,x_3 \le 8 \quad \text{(διαθέσιμος χρόνος για κατασκευή, hr)}$$
$$4\,x_1 + 2\,x_2 + 1.5\,x_3 \le 20 \quad \text{(διαθέσιμος χρόνος για φινίρισμα, hr)}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \le 0$$

Το ανωτέρω πρωτεύον πρόβλημα Γ.Π. έχει ως δυϊκό το:

Ελαχιστοποίηση της

$$z = (48\,w_1 + 8\,w_2 + 20\,w_3) \quad \text{(συνολικά έσοδα σε ευρώ)}$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$8\,w_1 + 2\,w_2 + 4\,w_3 \geq 60$$
$$6\,w_1 + 1.5\,w_2 + 2\,w_3 \geq 30$$
$$w_1 + 0.5\,w_2 + 1.5\,w_3 \geq 20$$
$$w_1,\quad w_2,\quad w_3 \geq 0$$

Από τον ορισμό των δύο προβλημάτων ξέρουμε ότι ο πρώτος περιορισμός του δυϊκού συνδέεται με την πρώτη μεταβλητή του πρωτεύοντος (θρανία), ο δεύτερος με τα τραπέζια και ο τρίτος περιορισμός έχει σχέση με τα καθίσματα. Ανάλογα, η δυϊκή μεταβλητή w_1 συνδέεται με τον πρώτο περιορισμό του πρωτεύοντος (ξυλεία), η w_2 με την κατασκευή των προϊόντων και η w_3 με το φινίρισμά τους.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι κάποιος εργολάβος επιθυμεί να αγοράσει όλους τους πόρους που έχει στη διάθεσή του το ξυλουργείο, δηλαδή τα 48m ξυλείας, τις 8 ώρες για την κατασκευή των παραγόμενων προϊόντων και τις 20 ώρες για το φινίρισμά τους. Προς τούτο, πρέπει να ορίσει μια τιμή ανά μονάδα του κάθε πόρου που είναι διατεθειμένος να πληρώσει. Ας είναι:

- w_1 το ποσό (ευρώ) που είναι διατεθειμένος να πληρώσει για ένα μέτρο ξυλείας,
- w_2 το ποσό (ευρώ) που είναι διατεθειμένος να πληρώσει για μία ώρα εργασίας και
- w_3 το ποσό (ευρώ) που είναι διατεθειμένος να πληρώσει για μία ώρα φινιρίσματος.

Κατά συνέπεια, η συνολική τιμή που διατίθεται να πληρώσει ο εργολάβος για όλους τους πόρους ανέρχεται σε $Y = 48\,w_1 + 8\,w_2 + 20\,w_3$. Η ποσότητα αυτή αφορά κόστος, και ως τέτοιο, στόχος μας πρέπει να είναι η ελαχιστοποίηση του. Κατά συνέπεια η αντικειμενική συνάρτηση για το δυϊκό πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής:

$$\text{Ελαχιστοποίηση της } Y = (48\,w_1 + 8\,w_2 + 20\,w_3)$$

Τι περιορισμούς όμως έχει να αντιμετωπίσει ο εργολάβος στην προσπάθεια του να ορίσει τις τιμές στην κάθε μονάδα πόρων του ξυλουργείου; Φυσικά οι τιμές αυτές θα πρέπει να είναι αρκετά υψηλές ώστε να παρακινηθεί ο ξυλουργός να πουλήσει. Για παράδειγμα ο εργολάβος θα πρέπει να προσφέρει στον ξυλουργό τουλάχιστον 60 ευρώ για να αγοράσει έναν συνδυασμό πόρων ο οποίος περιλαμβάνει 8 μέτρα ξύλου, 2 ώρες κατασκευής και 4 ώρες φινιρίσματος μια και ο ξυλουργός μπορεί να χρησιμοποιήσει αυτούς τους πόρους για να κατασκευάσει ένα θρανίο το οποίο θα πωλήσει προς 60 ευρώ. Άρα, αφού ο εργολάβος προσφέρει ($8\ w_1 + 2\ w_2 + 4\ w_3$) ευρώ για τους πόρους που παράγουν ένα θρανίο, θα πρέπει να ορίσει τα w_1, w_2 και w_3 σε τρόπο ώστε:

$$8\ w_1 + 2\ w_2 + 4\ w_3 \geq 60$$

Η συζήτηση αυτή αφορά βέβαια μόνο τον πρώτο περιορισμό του δυϊκού που συνδέεται με τα θρανία. Ανάλογα συμπεραίνουμε ότι τα w_1, w_2 και w_3 πρέπει να ορισθούν έτσι ώστε να ικανοποιούν και τις σχέσεις:

$$6\ w_1 + 1.5\ w_2 + \ 2\ w_3 \ \geq\ 30 \text{ (τραπέζια)},$$
$$w_1 + 0.5\ w_2 + 1.5\ w_3 \ \geq\ 20 \text{ (καρέκλες)}.$$

Με τον τρόπο αυτό προκύπτει το δυϊκό πρόβλημα το οποίο ελαχιστοποιεί την αξία των πόρων που καταναλώνονται στο άριστο σχέδιο παραγωγής. Καθόλου τυχαία δεν είναι το ότι η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος (δηλαδή η άριστη) είναι ίση με την βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού. Δηλαδή επέρχεται ισορροπία εκεί όπου το σύνολο των εσόδων ισούται με το σύνολο του κόστους των πόρων που αναλώνονται.

Α2^{o} Παράδειγμα

Ας δούμε ακόμα ένα παράδειγμα υπολογισμού του δυϊκού ενός προβλήματος [41]:

Ελαχιστοποίηση της

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 4$$
$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 3$$
$$-x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 \geq 1$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0$$

Για να κατασκευάσουμε το δυϊκό πρόβλημα αντιστοιχίζουμε σε κάθε περιορισμό μια μεταβλητή. Οι δυικές μεταβλητές w_1, w_2, w_3 αντιστοιχούν στους περιορισμούς του πρωτεύοντος προβλήματος οι οποίοι είναι της μορφής $\geq$, άρα θα ισχύει, $w_1, w_2, w_3 \geq 0$. Σε κάθε μεταβλητή του πρωτεύοντος προβλήματος αντιστοιχούμε και ένα περιορισμό του δυϊκού. Επειδή οι μεταβλητές είναι ≥ 0 αντιστοιχούν περιορισμοί της μορφής $\leq$. Η αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού θα είναι max αφού η αντικειμενική συνάρτηση του πρωτεύοντος είναι min.

Το δυϊκό πρόβλημα θα είναι:

Μεγιστοποίηση της

$$z = 4w_1 + 3w_2 + w_3$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} w_1 + 2w_2 - w_3 &\leq 2 \\ 2w_1 - 2w_2 + w_3 &\leq 3 \\ -w_1 + 3w_2 - 4w_3 &\leq 5 \\ w_1 + w_2 - 3w_3 &\leq 2 \\ w_1, \ w_2, \ w_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

5.4 Δυική Θεωρία

Ένα σημαντικό τμήμα της δυικής θεωρίας κατέχουν τα κριτήρια βελτιστότητας που είναι απαραίτητα για τον τερματισμό των αλγορίθμων [41]. Γι' αυτό στη συνέχεια παραθέτουμε κάποια θεωρήματα της δυϊκής θεωρίας που αφορούν στο μετασχηματισμό των προβλημάτων καθώς και τις σχέσεις που διέπουν το πρωτεύον και δυϊκό πρόβλημα σε σχέση με το κριτήριο της βελτιστότητας των προβλημάτων. Τα πρωτεύοντα και δυικά προβλήματα είναι στενά συνδεδεμένα μεταξύ τους. Από την μελέτη του ενός μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για το άλλο. Για τις αποδείξεις των θεωρημάτων, που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, αλλα και για εκτενή μελέτη των παραπάνω, ο αναγνώστης παραπέμπετε στα [42] και [48] .

Θεώρημα 1 *Το δυϊκό πρόβλημα του γραμμικού προβλήματος είναι το γραμμικό πρόβλημα.*

Πόρισμα 1 *Αν το πρωτεύον πρόβλημα είναι μεγιστοποίησης το δυϊκό του πρόβλημα είναι ελαχιστοποίησης.*

Θεώρημα 2 *Το δυϊκό πρόβλημα του δυικού προβλήματος είναι το πρωτεύον πρόβλημα.*

Θεώρημα 3 Αν x μια εφικτή λύση του πρωτεύοντος προβλήματος και w μια εφικτή λύση του δυϊκού του, τότε είναι $c^T x \geq w^T b$.

Το θεώρημα 3ο είναι γνωστό σαν ασθενές δυϊκό θεώρημα (weak duality theorem). Είναι πολύ χρήσιμο στην εξαγωγή κριτηρίων βελτιστότητας.

Θεώρημα 4 Έστω x μια εφικτή λύση του πρωτεύοντος προβλήματος και w μια εφικτή λύση του δυϊκού του. Αν ισχύει η σχέση $c^T x = w^T b$, τότε η x είναι βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος και η w είναι βέλτιστη λύση του του δυϊκού του.

Το θεώρημα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν κριτήριο για να ελέγξουμε αν δύο σημεία x και w είναι βέλτιστα για τα προβλήματα (P) και (DP) αντίστοιχα.

Λήμμα 1 Αν το ένα από τα προβλήματα πρωτεύον και δυϊκό, είναι απεριόριστο το άλλο είναι αδύνατο.

Λήμμα 2 Αν ένα πρόβλημα Γ.Π. είναι βέλτιστο, τότε και το δυϊκό του είναι βέλτιστο.

Θεώρημα 5 Έστω ένα πρωτεύον πρόβλημα και το δυικό του. Τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

- Αν το πρωτεύον είναι βέλτιστο, τότε και το δυϊκό είναι επίσης βέλτιστο, και αντιστρόφως.
- Αν το πρωτεύον είναι απεριόριστο, τότε το δυϊκό είναι αδύνατο. Ισχύει και η αντίθετη πρόταση.
- Αν το πρωτεύον είναι αδύνατο, τότε το δυϊκό είναι είτε αδύνατο είτε απεριόριστο, και αντιστρόφως.

Θεώρημα 6 Έστω x ένα εφικτό σημείο του πρωτεύοντος προβλήματος. Τότε, το σημείο x είναι βέλτιστη λύση αυτού αν υπάρχει εφικτή λύση w του δυϊκού προβλήματος τέτοια ώστε :

$$(c^T - w^T A)\, x = 0$$
$$w^T (Ax - b) = 0.$$

Η ιδέα της απόδειξης θεωρημάτων της ισχυρής δυϊκότητας έχει σαν αρχή τις συζητήσεις μεταξύ του G. Dantzig και του J. von Neumann [47]. Επίσης μια ενδιαφέρουσα ερμηνεία του δυϊκού προβλήματος παρουσιάζεται στα βιβλία [38], [18] και [1].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ Γ.Π.

6.1 Εισαγωγή

Αφού περιγράψαμε και αναλύσαμε την κλασική μέθοδο Simplex τώρα θα ασχοληθούμε με το πρακτικό κομμάτι, δηλαδή το πώς μπορούμε να επιλύσουμε προβλήματα Γ.Π. με την βοήθεια πολύ γνωστών ισχυρών υπολογιστικών εργαλείων. Τα πιο γνωστά προγράμματα επίλυσης προβλημάτων Γ.Π. είναι (με αλφαβητική διάταξη):

- LINDO. Το λογισμικό Lindo (http://www.lindo.com), δηλαδή Γραμμικός Διαδραστικός και Διακριτός Βελτιστοποιητής, της εταιρίας LINDO Systems Inc., είναι μια εφαρμογή για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού, ακέραιου και τετραγωνικού προγραμματισμού.
- LINGO. Το LINGO είναι ένα εργαλείο λογισμικού της εταιρίας LINDO Systems Inc. (http://www.lindo.com), με σκοπό την αποτελεσματική οικοδόμηση και την επίλυση γραμμικών και ακέραιων μοντέλων βελτιστοποίησης. Με τη γλώσσα μοντελοποίησης του LINGO, κατασκευάζονται και επιλύονται διάφορα μοντέλα από τον χρήστη. Επιλέγει αυτόματα τον πιο κατάλληλο λύτη για την επίλυση προβλημάτων Γραμμικού, μη γραμμικού και Ακεραίου προγραμματισμού. Επίσης αντλεί δεδομένα από λογιστικά φύλλα ή βάσεις δεδομένων. Και τα δύο προγράμματα (Lindo & Lingo) χρησιμοποιούν το ίδιο σύνολο των υποκείμενων λυτών προκειμένου να λύσουν το πρόβλημα. Η βασική τους διαφορά βασίζεται στον τρόπο με τον οποίο εκφράζονται τα μοντέλα και πως αυτά συσχετίζονται μεταξύ τους. Για το πρόγραμμα LINGO πληροφορίες βρίσκονται στο βιβλίο [32] και στο εγχειρίδιο [22].
- LINPRO. Το Linpro ένα νέο εκπαιδευτικό λογισμικό για Γ.Π. (http://www.line.co.ba). Εκτός του φιλικού περιβάλλοντος εργασίας για το χρήστη, περιέχει μια πληθώρα συναρτήσεων για την αντιμετώπιση των προβλημάτων Γ.Π. συμπεριλαμβανομένης της γεωμετρικής επίλυσης, οπτικής και βήμα προς βήμα παρουσίασης αλγορίθμων και ανάλυσης ευαισθησίας. Το LinPro, λειτουργεί σε περιβάλλον Matlab, με ανοιχτό κώδικα, για διδασκαλία του γραμμικού προγραμματισμού. Επιλύει προβλήματα αποκλειστικά γραμμικού προγραμματισμού, ενώ επίσης είναι σε θέση να οπτικοποιήσει τις λύσεις σε

χώρο δυο διαστάσεων. Για το πρόγραμμα LINPRO σημαντικές πληροφορίες ο αναγνώστης θα βρεί στο εγχειρίδιο [33].

- MAPLE. Το Maple της Maple-soft (http://www.maplesoft.com) είναι ένα μαθηματικό πακέτο λογισμικού που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη συμβολική αλλά και για αριθμητικούς υπολογισμούς. Χρησιμοποιείται ως εργαλείο για να επαληθεύσει τους υπολογισμούς σας δηλαδή τα αποτελέσματα. Για το πρόγραμμα Maple πληροφορίες βρίσκονται στο βιβλίο [39] καθώς και στο εγχειρίδιο [54].
- MATLAB. Το πακέτο λογισμικού MATLAB (http://www.mathworks.com) παρέχει ένα δυναμικό, εύχρηστο και ανοικτό υπολογιστικό περιβάλλον για υλοποίηση επιστημονικών εφαρμογών σε ένα μεγάλο φάσμα γνωστικών πεδίων, όπως στη Γραμμική Άλγεβρα, τη Στατιστική, τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, την Αριθμητική Ανάλυση, την Επεξεργασία Σημάτων και Εικόνας και τη Θεωρία Ελέγχου. Έχει υλοποιηθεί σε πολλές λειτουργικές πλατφόρμες (όπως Windows, Macintosh OS και Unix) και σε δύο βασικές εκδόσεις, την επαγγελματική και την εκπαιδευτική. Για το πρόγραμμα MATLAB ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην ηλεκτρονική διεύθυνση [29] και στα βιβλία [48] και [49].
- MICROSOFT EXCEL SOLVER. Το λογισμικό Excel της Microsoft (http://office.microsoft.com/) είναι ένα γενικό περιβάλλον δημιουργίας λογιστικών φύλλων. Μπορεί ωστόσο να χρησιμοποιηθεί επίσης για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης, όπως για παράδειγμα προβλημάτων γραμμικού, ακέραιου και μη γραμμικού προγραμματισμού. Ενδιαφέρουσες συλλογές εφαρμογών όπου ο αναγνώστης μπορεί να βρεί εκτενής περιγραφές για την χρήση του Excel για την επίλυση γραμμικών προβλημάτων είναι τα βιβλία [25], [7] και [48].

Κάθε ένα από αυτά έχει το δικό του τρόπο λειτουργίας και τον δικό του τρόπο επίλυσης. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε την επίλυση ενός προβλήματος Γ.Π. με την βοήθεια των προγραμμάτων Lindo, Microsoft Excel Solver και Maple. Για την επίδειξη της χρήσης των προγραμμάτων αυτών θα χρησιμοποιήσουμε ένα απλό πρόβλημα Γ.Π. [50].

Η εταιρία PC.com κατασκευάζει δύο ειδών Η/Υ οικιακούς και επαγγελματικούς. Ας υποθέσουμε ότι μπορεί να παράγει το πολύ 10 οικιακούς και το πολύ 12 επαγγελματικούς Η/Υ σε καθημερινή βάση. Επιπλέον, η συναρμολόγηση ενός απλού υπολογιστή απαιτεί 1 ώρα εργασία, ενώ η συναρμολόγηση ενός επαγγελματικού απαιτεί 2 ώρες και η εταιρία για αυτόν το σκοπό μπορεί να διαθέσει 2 άτομα καθημερινά, δηλαδή 16 εργατοώρες. Η εταιρία αναζητά έναν τρόπο να μεγιστοποιήσει το κέρδος της, δεδομένου ότι κάθε οικιακός Η/Υ αφήνει καθαρό κέρδος 100€ ενώ κάθε επαγγελματικός 150€. Αν τεθεί x_1 το πλήθος των οικιακών Η/Υ και x_2 το πλήθος των επαγγελματικών Η/Υ που πρέπει να κατασκευαστούν, τότε το πρόβλημα μπορεί να γραφτεί ως ένα πρόβλημα Γ.Π. ως εξής:

Μεγιστοποίηση της

$$z = 100\,x_1 + 150\,x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 \leq 10$$

$$x_2 \leq 12$$

$$x_1 + 2\,x_2 \leq 16$$

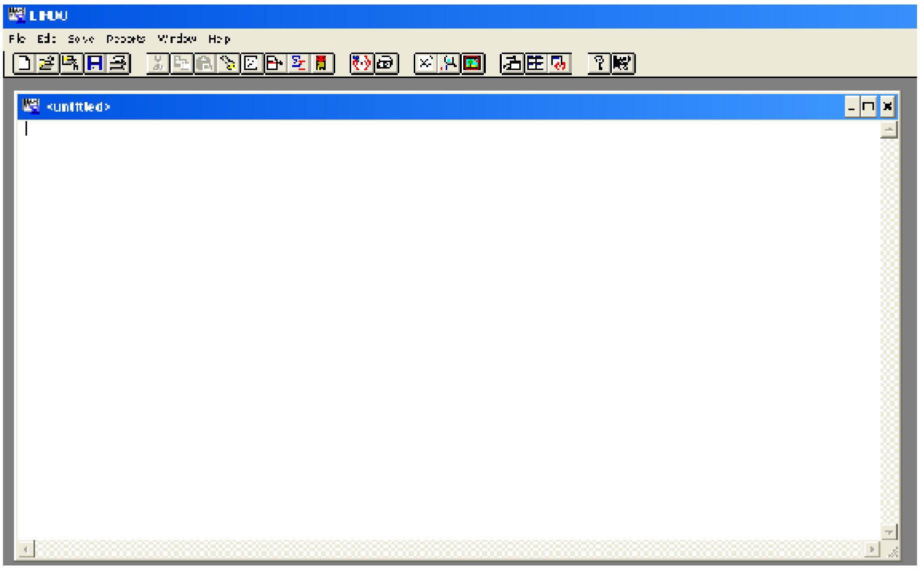
$$x_1 , x_2 \;\geq 0$$

6.2. Το λογισμικό LINDO

Για τις ανάγκες της επίδειξης του τρόπου με τον οποίο χρησιμοποιείται το LINDO, ας ορίσουμε HOME το πλήθος των οικιακών Η/Υ και με PRO το πλήθος των επαγγελματικών. Όταν το LINDO εκκινεί, η οθόνη πρέπει να μοιάζει με αυτήν της Εικόνας 6.1.

Το εξωτερικό παράθυρο με το όνομα LINDO είναι το κυρίως παράθυρο της εφαρμογής. Όλα τα άλλα παράθυρα θα περιέχονται σε αυτό. Το κυρίως παράθυρο επίσης περιέχει όλες τις εντολές μενού και τη γραμμή εργαλείων των εντολών. Το μικρότερο παράθυρο που περιέχεται στο παράθυρο LINDO και έχει τίτλο «*untitled*» είναι ένα νέο, κενό παράθυρο μοντέλου. Σε αυτό ο χρήστης γράφει το πρόβλημα Γ.Π. το οποίο και θέλει να επιλύσει. Το επόμενο βήμα είναι να καταχωρίσουμε την αντικειμενική συνάρτηση. Ένα μοντέλο στο LINDO προϋποθέτει τουλάχιστον τα εξής τρία πράγματα:

- την αντικειμενική συνάρτηση,
- τις μεταβλητές απόφασης και
- τους περιορισμούς.



Εικόνα 6.1: Το βασικό παράθυρο του LINDO.

Η αντικειμενική συνάρτηση ονομάζεται έτσι, με την έννοια του αντικειμενικού σκοπού. Δίνονται δυο επιλογές για τον αντικειμενικό σκοπό MAX ή MIN, που αναφέρονται στην μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης αντίστοιχα. Ο μαθηματικός τύπος, που ακολουθεί είναι η αντικειμενική συνάρτηση. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα πρέπει να γραφτεί:

MAX 100 HOME + 150 PRO

Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός και η εισαγωγή των περιορισμών. Η έναρξη των περιορισμών φαίνεται από τη δεσμευμένη λέξη SUBJECT TO (ή απλά ST) στη γραμμή που ακολουθεί τον ορισμό της αντικειμενικής συνάρτησης. Στη συνέχεια ο χρήστης πρέπει να γράψει τους περιορισμούς, τον κάθε ένα σε μία γραμμή, δηλαδή:

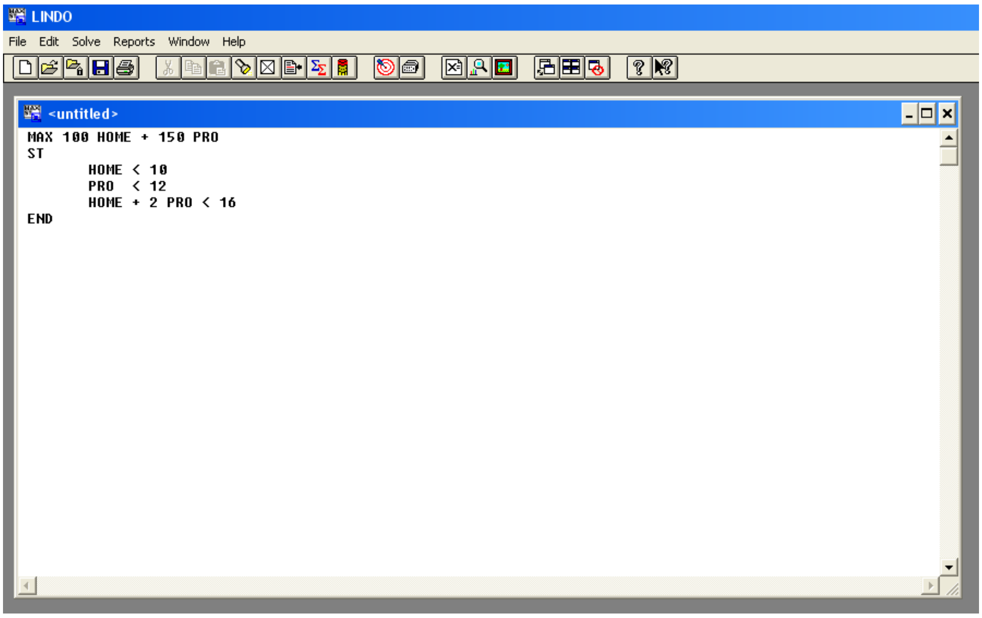
HOME < 10
PRO < 12
HOME + 2 PRO< 16

Σημειώνεται ότι το LINDO ερμηνεύει το σύμβολο «<» ως μικρότερο ή ίσο και όχι ως αυστηρά μικρότερο. Προαιρετικά, μπορεί να βάλει κανείς τα σύμβολα «≤». Για το LINDO, αυτό δεν παίζει απολύτως κανένα ρόλο. Το τέλος των περιορισμών εμφαίνετε από τη δεσμευμένη λέξη END. Αφού έχουν εισαχθεί τα παραπάνω, η οθόνη πρέπει να μοιάζει με αυτήν του Σχήματος 6.2. Το μοντέλο τώρα είναι έτοιμο να λυθεί.

Εφόσον έχει εισαχθεί η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί, για να λυθεί το μοντέλο, αρκεί να επιλεχθεί η εντολή Solve ή να γίνει κλικ στο κουμπί της επίλυσης στη γραμμή εργαλείων. Το LINDO θα ξεκινήσει να μεταγλωττίζει (compile) το μοντέλο. Αυτό σημαίνει ότι το LINDO θα εξετάσει αν το μοντέλο είναι σωστό από μαθηματική σκοπιά και αν είναι γραμμένες σωστά οι εντολές. Αν κάτι από τα προηγούμενα δεν ισχύει, τότε θα εμφανιστεί ένα μήνυμα σφάλματος όπως βλέπουμε παρακάτω:

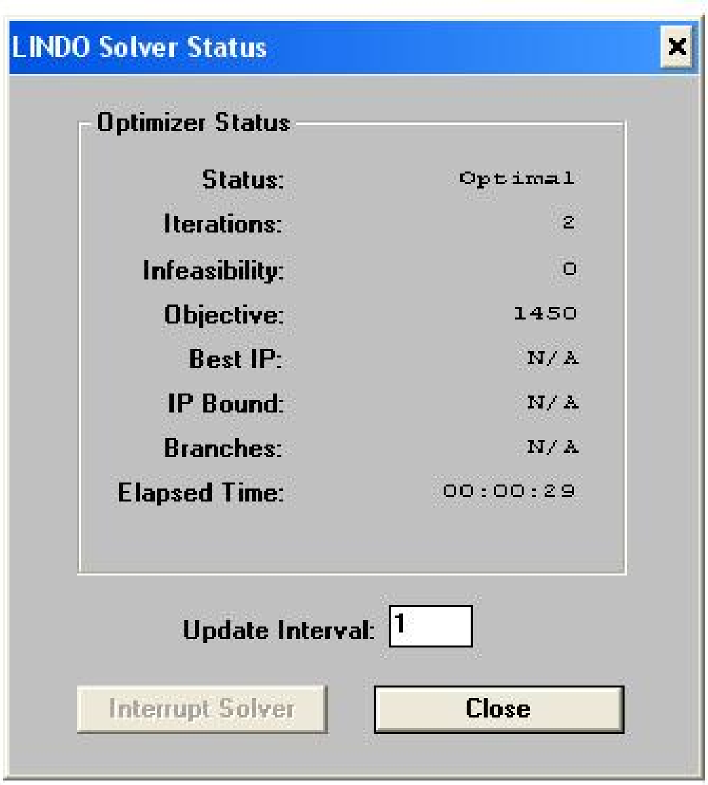
An error occurred during compilation on line: n

Αυτό σημαίνει, ότι ένα σφάλμα συνέβη κατά τη διάρκεια της μεταγλώττισης στη γραμμή **n** οπότε το LINDO θα πάει στη γραμμή στην οποία συνέβη το σφάλμα. Ο χρήστης θα πρέπει τότε να εξετάσει τη γραμμή αυτή για συντακτικά λάθη και να τη διορθώσει. Αν δεν υπάρχουν σφάλματα κατά τη φάση της μεταγλώττισης, τότε το LINDO θα αρχίσει να λύσει το πρόβλημα. Όταν ξεκινά η διαδικασία επίλυσης, εμφανίζεται ένα *Παράθυρο Κατάστασης* το οποίο μοιάζει με αυτό της Εικόνας 6.3.



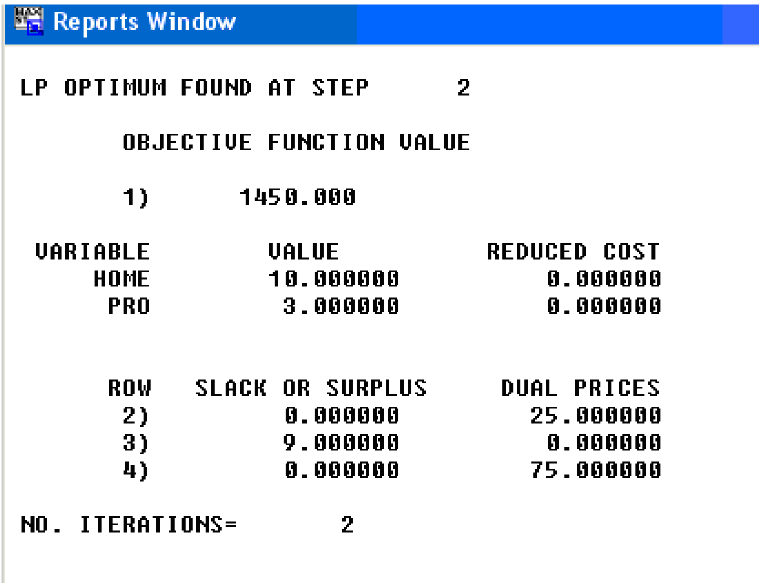
Εικόνα 6.2: Καταχώρηση προβλήματος στο LINDO.

Το *Παράθυρο Κατάστασης* (Εικόνα 6.3) είναι χρήσιμο για την παρακολούθηση της προόδου της επίλυσης. Μία περιγραφή των διαφόρων πεδίων που εμφανίζεται στο Παράθυρο Κατάστασης. Όταν η επίλυση ολοκληρωθεί, θα εμφανιστεί ένα παράθυρο, το οποίο ρωτάει το χρήστη αν θέλει να γίνει ανάλυση ευαισθησίας. Το επόμενο βήμα είναι η ερμηνεία των αποτελεσμάτων στο Παράθυρο Αναφορών (Εικόνα 6.4).



Εικόνα 6.3: Το παράθυρο Κατάστασης της Λύσης.

Μετά το πέρας της επίλυσης του προβλήματος εμφανίζεται ένα νέο παράθυρο, το *Παράθυρο Αναφορών*. Το *Παράθυρο Αναφορών* (Εικόνα 6.4) είναι αυτό στο οποίο το LINDO στέλνει όλα τα αποτελέσματα σε μορφή κειμένου. Το παράθυρο αυτό μπορεί να εμφανίσει μέχρι 64.000 χαρακτήρες. Αν η αναφορά είναι πολύ μακροσκελής, και ο χρήστης θέλει να τη μελετήσει καλύτερα, τότε μπορεί να αποθηκεύσει όλη την πληροφορία που εμφανίζεται στο *Παράθυρο Αναφορών* σε ένα αρχείο χρησιμοποιώντας την εντολή μενού File log Output. Στη συνέχεια μπορεί να μελετήσει την αναφορά χρησιμοποιώντας έναν οποιοδήποτε επεξεργαστή κειμένου, όπως το Notepad ή WordPad.



```
Reports Window

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      1450.000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
     HOME        10.000000          0.000000
      PRO         3.000000          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000         25.000000
       3)         9.000000          0.000000
       4)         0.000000         75.000000

NO. ITERATIONS=       2
```

Εικόνα 6.4: Το παράθυρο αναφορών του LINDO.

Το παράθυρο αυτό λέει ότι το LINDO χρειάστηκε δύο επαναλήψεις (iterations) για να λύσει το πρόβλημα και ότι η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (OBJECTIVE FUNCTION VALUE) είναι 1450. Το υπόλοιπο της αναφοράς διακρίνεται σε δύο ενότητες.

- § Στην πρώτη ενότητα η αναφορά επικεντρώνεται στις μεταβλητές. Για κάθε μεταβλητή υπάρχει μία γραμμή στην οποία υπάρχουν το όνομα της μεταβλητής (VARIABLE), η τιμή της (VALUE) και το ευκαιριακό της κόστος (REDUCED COST). Έτσι, η αναφορά της Εικόνας 6.4 λέει ότι οι μεταβλητές HOME και PRO παίρνουν τις τιμές 10 και 3 αντίστοιχα και έχουν μηδενικά ευκαιριακά κόστη.

- § Στην δεύτερη ενότητα η αναφορά επικεντρώνεται στους περιορισμούς. Για κάθε περιορισμό υπάρχει μία γραμμή στην οποία υπάρχουν το όνομα του περιορισμού (ROW), εφόσον του έχει δοθεί, ο αντίστοιχος αριθμός, η περιθώρια τιμή του (SLACK OR SURPLUS) και η σκιώδης τιμή του (DUAL PRICE). Έτσι, η αναφορά της Εικόνας 6.4 λέει ότι οι περιορισμοί 2) και 4) έχουν περιθώριες τιμές ίσες με το 0 (άρα είναι δεσμευτικοί) και έχουν σκιώδεις τιμές 25 και 75 αντίστοιχα. Ο περιορισμός 3) έχει περιθώρια τιμή 9 και συνεπώς δεν έχει σκιώδη τιμή.

Για το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι ενδιαφέρον ότι πρέπει να κατασκευαστούν λιγότεροι επαγγελματικοί Η/Υ από ότι οικιακοί παρά το γεγονός ότι οι επαγγελματικοί Η/Υ αφήνουν μεγαλύτερο κέρδος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι απαιτείται μεγαλύτερος χρόνος συναρμολόγησης για τους επαγγελματικούς Η/Υ.

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την εγκατάσταση του και την εφαρμογή του προγράμματος LINDO μπορείτε να απευθυνθείτε στην σελίδα του διαδικτύου [51] καθώς και στο βιβλίο [48].

6.3 Το λογισμικό Microsoft Excel Solver

Το λογισμικό Excel της Microsoft είναι ένα γενικό περιβάλλον δημιουργίας λογιστικών φύλλων. Η τελευταία έκδοση Excel ΄97, περιλαμβάνει το επιπρόσθετο πρόγραμμα «επίλυση» (solver), το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης, όπως για παράδειγμα προβλημάτων γραμμικού, ακέραιου και μη γραμμικού προγραμματισμού [48]. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε πως μπορούμε να λύσουμε γραμμικά προβλήματα με το Excel.

Για να λύσουμε γραμμικά προβλήματα στο Excel πρέπει μερικά από τα δεδομένα να εισαχθούν στο φύλλο εργασίας (Εικόνα 6.5). Σαν παράδειγμα επίδειξης θα πάρουμε το γραμμικό πρόβλημα της εταιρίας PC.com που διατυπώσαμε παραπάνω [51].

Μεγιστοποίηση της

$$z = 100\,x_1 + 150\,x_2$$

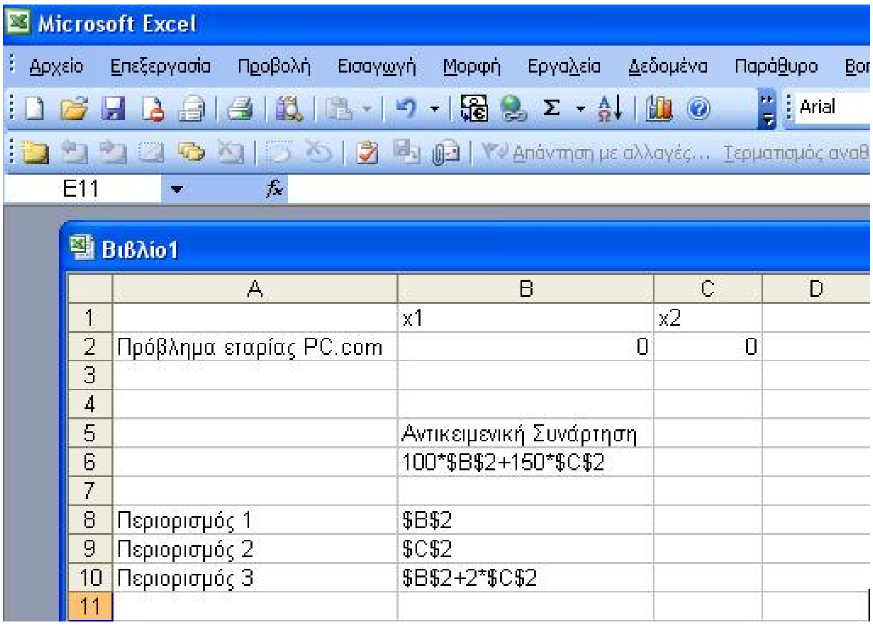
Υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 \leq 10$$

$$x_2 \leq 12$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 16$$

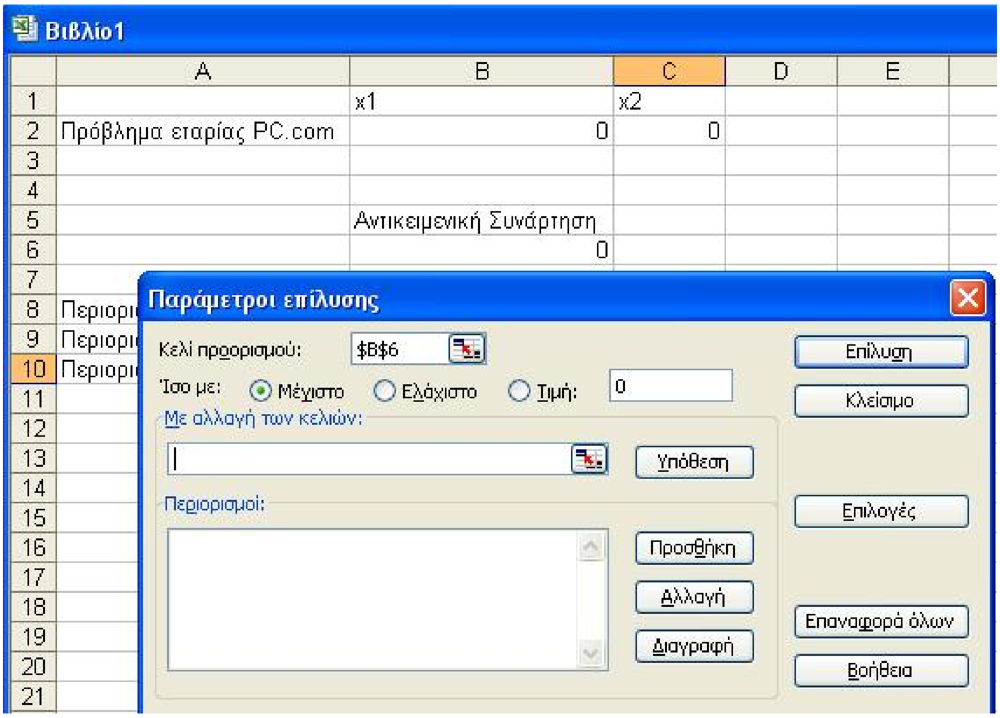
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Εικόνα 6.5: Εισαγωγή δεδομένων στο φύλλο εργασίας.

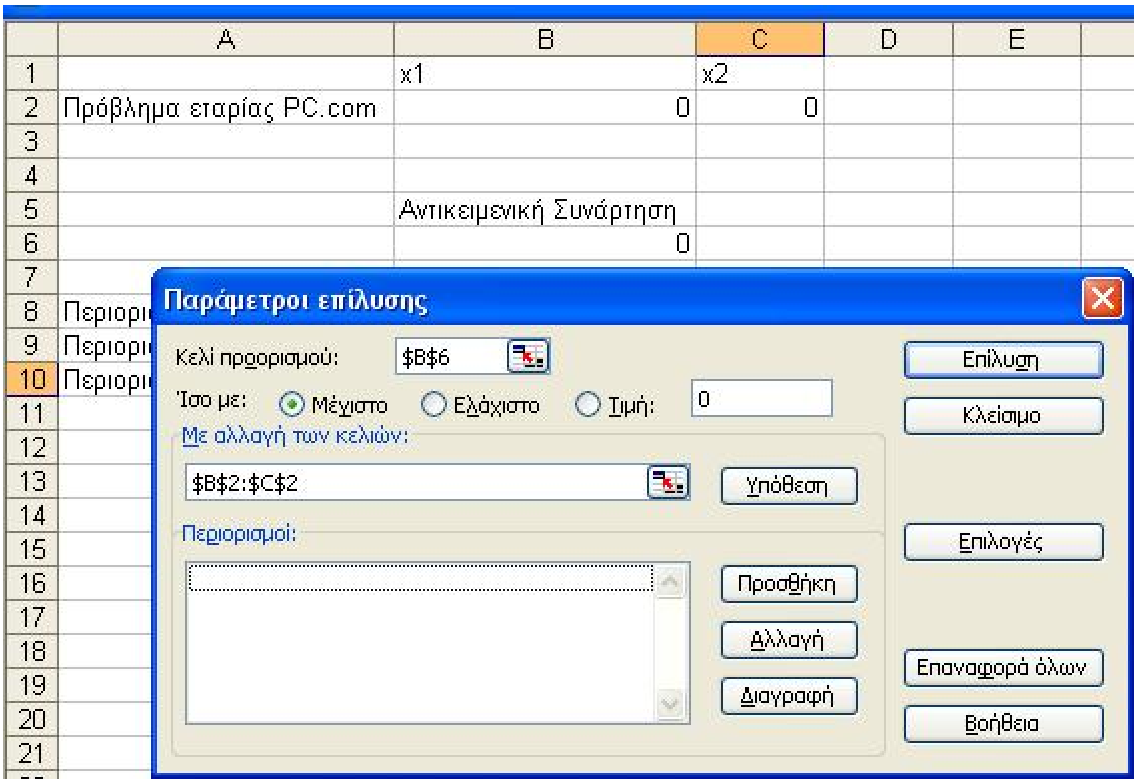
Για να εγκαταστήσουμε την «Επίλυση», κάνουμε κλικ στην εντολή **Πρόσθετα** του μενού **Εργαλεία** και κατόπιν επιλέγουμε το πλαίσιο ελέγχου **Επίλυση**. Κάνουμε κλικ στο κουμπί **ΟΚ** και το Excel θα εγκαταστήσει την «Επίλυση». Μόλις εγκατασταθεί το πρόσθετο, μπορούμε να εκτελέσουμε την «Επίλυση» κάνοντας κλικ στην εντολή **Επίλυση** από το μενού **Εργαλεία**. Η Εικόνα 6.6 δείχνει το παράθυρο διαλόγου **Παράμετροι Επίλυσης**, στο οποίο περιέχονται το κελί προορισμού, τα κελιά αλλαγών και οι περιορισμοί που εφαρμόζονται στο μοντέλο βελτιστοποίησής μας. Αφού εισάγουμε τα δεδομένα από το μενού *Εργαλεία* πατάμε την επιλογή *Επίλυση* και εμφανίζεται στην οθόνη το πλαίσιο διαλόγου *Παράμετροι Επίλυσης* (Εικόνα 6.6).

Στην πάνω αριστερή γωνία του πλαισίου, δεξιά της έκφρασης «κελί προορισμού» γράφουμε την αναφορά του κελιού της αντικειμενικής συνάρτησης. Στο παράδειγμά μας γράφουμε B6. Στην δεύτερη γραμμή του πλαισίου *Παράμετροι Επίλυσης* υπάρχει η έκφραση *ίσο με* και δεξιά τρία κουμπιά ραδιοφώνου, μέγιστο, ελάχιστο και τιμή. Ανάλογα με τον τύπο του γραμμικού προβλήματος min ή max επιλέγουμε το κουμπί ελάχιστο ή μέγιστο αντίστοιχα. Στο παράδειγμά μας επιλέγουμε το κουμπί μέγιστο [48]. Το κουμπί τιμή δεν εφαρμόζεται στα γραμμικά προβλήματα. Στην περιοχή του πλαισίου διαλόγου *Παράμετροι Επίλυσης* με τίτλο *με αλλαγή κελιών* εισάγουμε την περιοχή των κελιών η οποία κρατήθηκε για τις μεταβλητές απόφασης. Στο παράδειγμά μας πληκτρολογούμε B2 : C2.



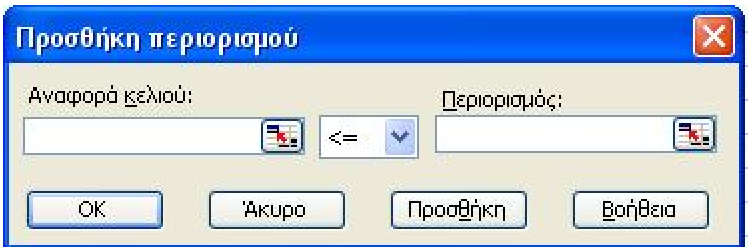
Εικόνα 6.6: Πλαίσιο διαλόγου Παράμετροι Επίλυσης.

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε παραπάνω φαίνεται στην Εικόνα 6.7.



Εικόνα 6.7: Πλαίσιο διαλόγου Παράμετροι Επίλυσης.

Οι τεχνολογικοί περιορισμοί εισάγονται στην περιοχή με τίτλο *Περιορισμοί*. Πατώντας το κουμπί *Προσθήκη* εμφανίζεται το πλαίσιο της Εικόνας 6.8. Στο πλαίσιο αυτό εισάγουμε κάθε φορά έναν - έναν τους περιορισμούς. Στο αριστερό τμήμα με τίτλο *Αναφορά κελιού* εισάγουμε το κελί το οποίο αναφέρεται στο αριστερό τμήμα του περιορισμού, στο μεσαίο τμήμα γίνεται η επιλογή του συμβόλου του περιορισμού και στο δεξιό τμήμα με τίτλο *Περιορισμός* πληκτρολογούμε το δεξιό τμήμα του περιορισμού.

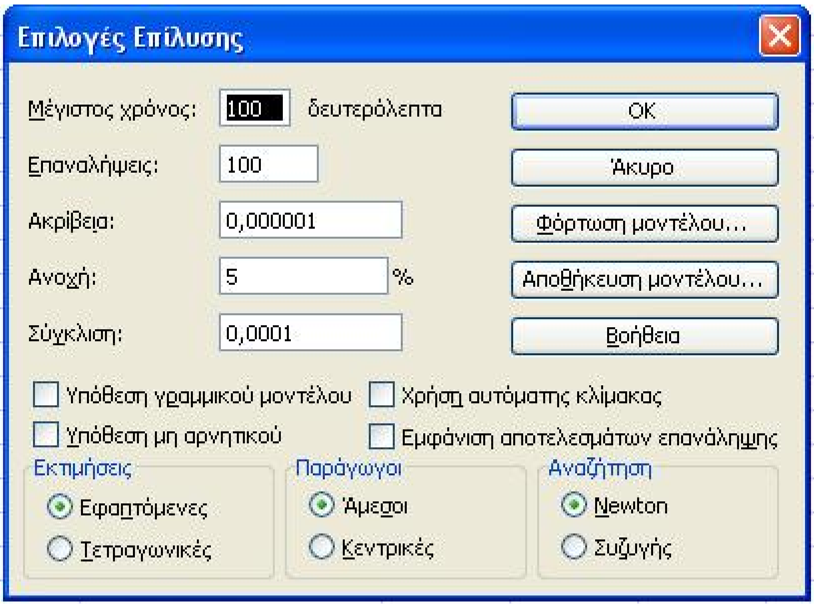


Εικόνα 6.8: Πλαίσιο προσθήκης περιορισμών.

Μετά την εισαγωγή και των τριών περιορισμών του προβλήματος της εταιρίας PC.com, το πλαίσιο *Παράμετροι Επίλυσης* παίρνει την μορφή της Εικόνας 6.9:

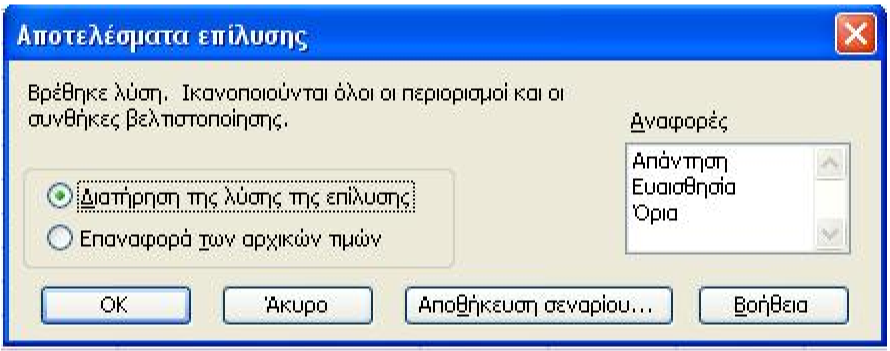
Εικόνα 6.9: Πλαίσιο διαλόγου Παράμετροι Επίλυσης μετά την εισαγωγή δεδομένων.

Το επόμενο βήμα είναι να επιλέξουμε το κουμπί *Επιλογές* από το πλαίσιο *Παράμετροι Επίλυσης*. Με αυτόν τον τρόπο δηλώνουμε ότι πρόκειται για γραμμικό πρόβλημα (Εικόνα 6.10).



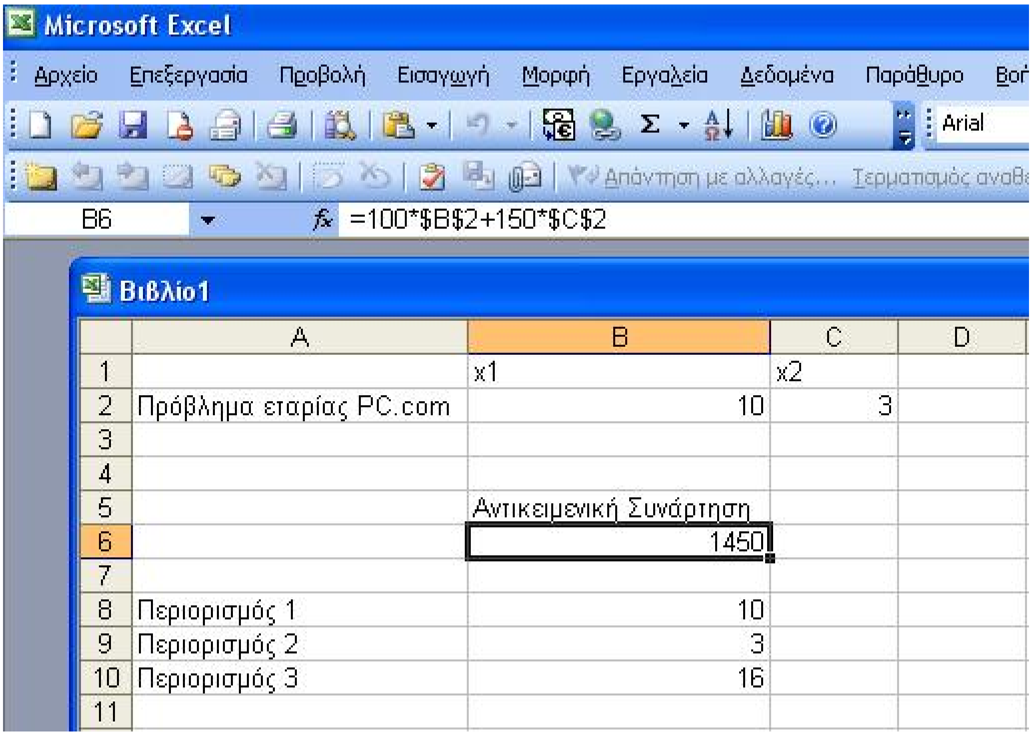
Εικόνα 6.10: Πλαίσιο διαλόγου Επιλογές Επίλυσης.

Στη συνέχεια από το πλαίσιο *Παράμετροι Επίλυσης* επιλέγουμε το κουμπί Επίλυση που βρίσκεται πάνω και δεξιά (Εικόνα 6.9) και αμέσως εμφανίζεται το πλαίσιο *Αποτελέσματα επίλυσης* (Εικόνα 6.11).



Εικόνα 6.11: Πλαίσιο Αποτελέσματα επίλυσης.

Τέλος επιλέγουμε από το πλαίσιο *Αποτελέσματα επίλυσης* το πεδίο *Διατήρηση της λύσης της* επίλυσης (Εικόνα 6.11) και εμφανίζεται παράθυρο του Microsoft Excel με τα αποτελέσματα του Γ.Π.(Εικόνα 6.12).



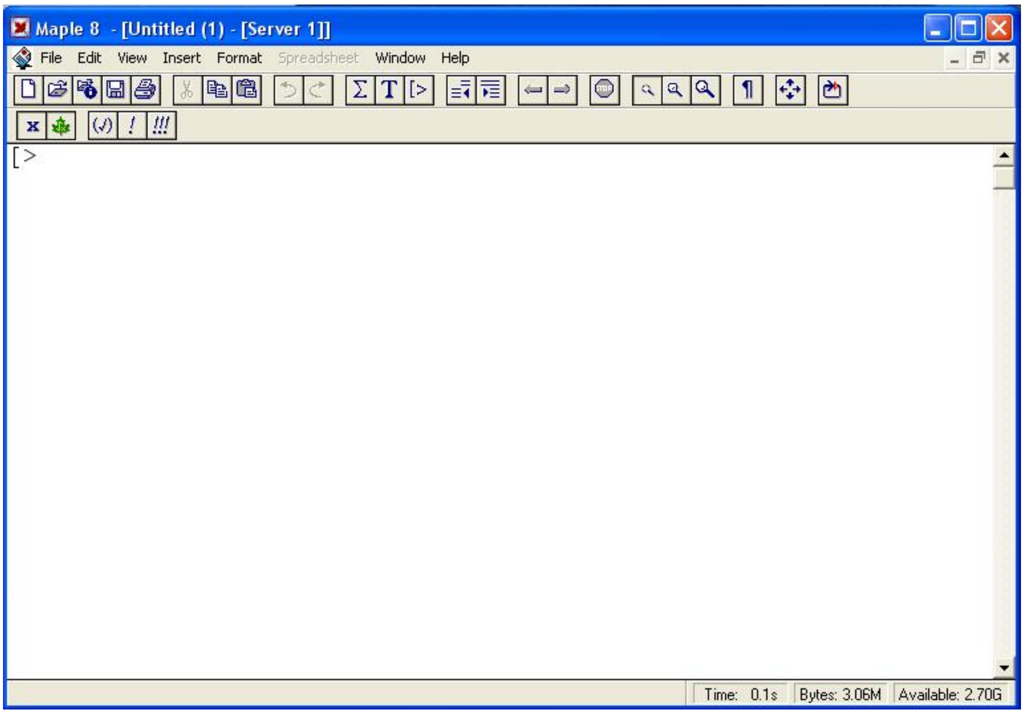
Εικόνα 6.12: Πλαίσιο Excel μετά την επίλυση του γραμμικού προβλήματος.

Για το πρόβλημα μας (Εικόνα 6.12) λοιπόν η βέλτιστη λύση για την εταιρία PC.com είναι να κατασκευάσει 10 οικιακούς Η/Υ και 3 επαγγελματικούς. Τότε όπως φαίνεται και από το κελί της αντικειμενικής συνάρτησης τα έσοδα της εταιρίας από την πώληση των Η/Υ θα είναι 1450€.

6.4 Το λογισμικό MAPLE

Το πρόγραμμα Maple* είναι το εργαλείο το οποίο χρησιμοποιείται για να εκτελεί μαθηματικούς υπολογισμούς οι οποίοι δεν μπορούν να γίνουν με το χέρι ή η διαδικασία επίλυσης ενός γραμμικού προβλήματος θα μας πάρει πολύ χρόνο. Έτσι το Maple, είναι ένα χρήσιμο εργαλείο στο οποίο εισάγονται εντολές για επεξεργασία [54]. Μόλις ανοίξουμε την εφαρμογή του Maple εμφανίζεται στην οθόνη του υπολογιστή αυτό που απεικονίζεται στην Εικόνα 6.13.

* Η γραφική επίλυση των προβλημάτων που δόθηκαν στο Κεφάλαιο 3 έγινε με χρήση του Maple.



Εικόνα 6.13: Το βασικό παράθυρο του ***Maple.***

Κάτω από τις οριζόντιες λωρίδες που μόλις περιγράψαμε βλέπουμε ένα λευκό ορθογώνιο παράθυρο που καλύπτει ένα σημαντικό μέρος της υπόλοιπης οθόνης. Σε αυτό το μέρος μπορούμε να πληκτρολογήσουμε κείμενο ή εντολές του συστήματος για επεξεργασία. Στο πάνω μέρος αυτού του πλαισίου υπάρχει μια λωρίδα που αρχίζει με ένα εικονίδιο και την λέξη Untitled (χωρίς τίτλο). Το υπόλοιπο του πλαισίου είναι λευκό, εκτός από το πάνω αριστερό μέρος του όπου εμφανίζεται μια αγκύλη ([), δίπλα της μια σφήνα (>) και ακολουθεί ο δείκτης, η κατακόρυφη γραμμή που αναβοσβήνει (cursor). Το ορθογώνιο πλαίσιο στο οποίο αναφερόμαστε αποτελεί την αρχική μορφή ενός φύλλου εργασίας (worksheet). Είναι ο χώρος στον οποίο μπορούμε να εισάγουμε κείμενο ή και εντολές του συστήματος Maple και να δούμε το αποτέλεσμα της εκτέλεσης. Η εισαγωγή και η εκτέλεση των εντολών γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο. Αφού ανοίξουμε το Maple και φέρουμε τον κέρσορα που αναβοσβήνει δεξιά της σφήνας, πληκτρολογούμε τις εκφράσεις που θέλουμε. Οι εκφράσεις παρουσιάζονται με κόκκινα γράμματα. Αυτό δηλώνει ότι βρισκόμαστε στην περιοχή όπου εισάγονται εντολές για επεξεργασία. Στο τέλος των εκφράσεων θα πρέπει να βάζουμε είτε ερωτηματικό (;) είτε «άνω- κάτω τελεία» (:). Το ερωτηματικό στο τέλος, δηλώνει στο Maple να εμφανίσει το αποτέλεσμα των εντολών που έχουμε βάλει, ενώ ή «άνω- κάτω τελεία» δηλώνει όπως το αποτέλεσμα των εντολών να μην ανακοινωθεί. Αφού πληκτρολογήσουμε τις εκφράσεις (εντολές) που θέλουμε και βάλουμε το ερωτηματικό στο τέλος, πατάμε το πλήκτρο Enter ώστε να εμφανιστεί το αποτέλεσμα των πράξεων. Το αποτέλεσμα εμφανίζεται με γαλάζια στοιχεία. Από κάτω, θα εμφανιστεί η σφήνα (>) και δίπλα της ο δείκτης που αναβοσβήνει. Αυτό δηλώνει ότι το πρόγραμμα είναι έτοιμο να δεχτεί νέες εντολές για επεξεργασία. Σαν παράδειγμα επίδειξης θα πάρουμε το γραμμικό πρόβλημα της εταιρίας PC.com που διατυπώσαμε παραπάνω [51].

Μεγιστοποίηση της

$$z = 100\, x_1 + 150\, x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

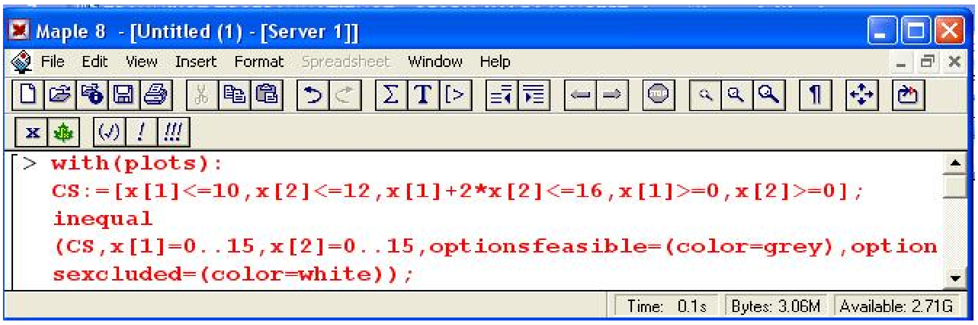
$$x_1 \leq 10$$

$$x_2 \leq 12$$

$$x_1 + 2\, x_2 \leq 16$$

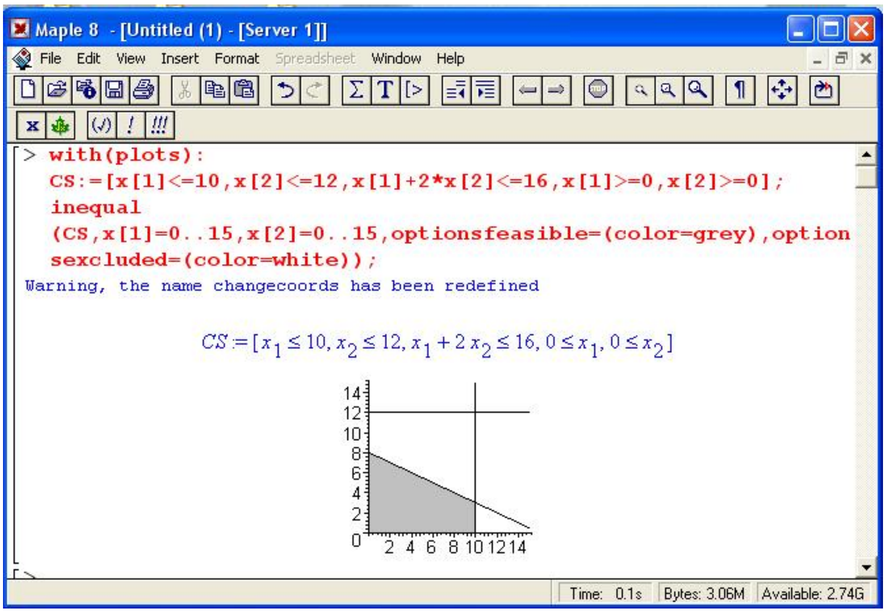
$$x_1 ,\, x_2 \ \geq 0$$

Η πρώτη μας ενέργεια είναι να πληκτρολογήσουμε τις εκφράσεις (εντολές) του προβλήματος (Εικόνα 6.14) με τον τρόπο που αναφέραμε παραπάνω.



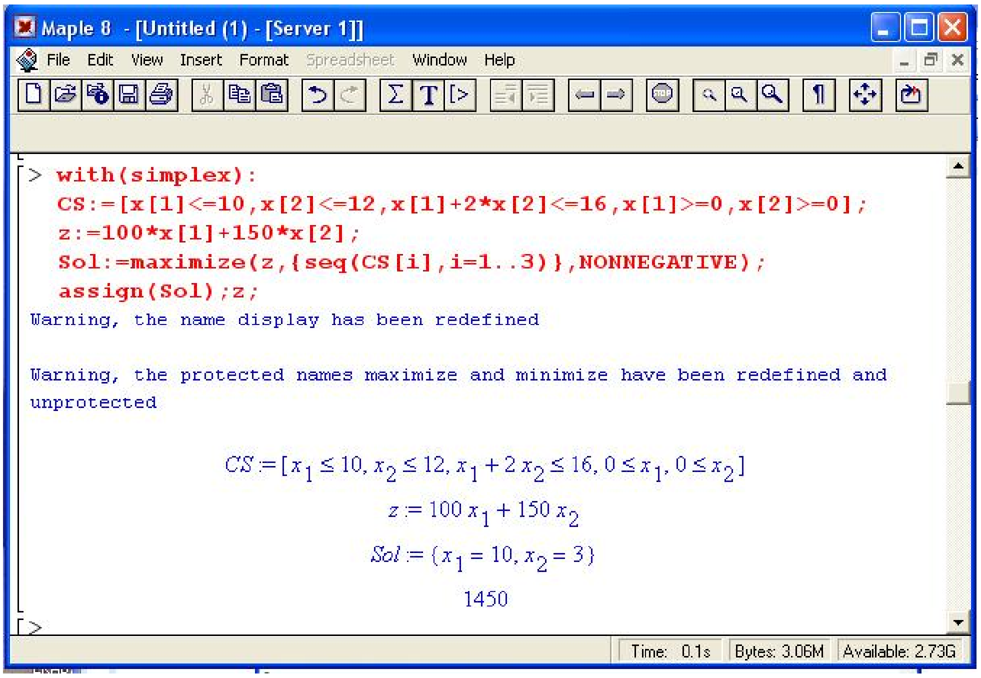
Εικόνα 6.14: Εισαγωγή εντολών στο Maple.

Στη συνέχεια και αφού πληκτρολογήσαμε τις εντολές πατώντας «enter» μας εμφανίζει την γραφική αναπαράσταση των περιορισμών όπως φαίνεται και στην Εικόνα 6.15.



Εικόνα 6.15: Γραφική αναπαράσταση των εντολών.

Συνεπώς το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς και συνθήκες είναι το γραμμοσκιασμένο χωρίο της Εικόνας 6.15. Κάθε σημείο του χωρίου αυτού και μόνο αυτά τα σημεία αποτελούν δυνατή λύση του προβλήματος. Για να επιλύσουμε το πρόβλημα θα πρέπει να βρούμε από το σύνολο των δυνατών λύσεων εκείνη που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.



Εικόνα 6.16: Αποτελέσματα Επίλυσης.

Για το πρόβλημα μας λοιπόν η βέλτιστη λύση για την εταιρία PC.com είναι να κατασκευάσει 10 οικιακούς Η/Υ και 3 επαγγελματικούς. Τότε όπως φαίνεται και από την Εικόνα 6.16 τα έσοδα της εταιρίας από την πώληση των παραπάνω Η/Υ θα είναι 1450€.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΑΓΓΛΙΚΗ

1. Balinski M.L., Tucker A.W. Duality Theorem of Linear Programs, A Constructive Approach with Applications. SIAM Review, 1969.

2. Chvatal V. Linear Programming. W. H. Freeman & Company, 2002.

3. Dantzig G.B., Orden A., Wolf P. The generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality constrains. *Pacific J.*, 1955.

4. Dantzig G.B. Linear Programming and Extensions. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963, http://www.turma-aguia.com/davi/doc/Lustig.pdf

5. Dantzig G.B., Thapia M. N. Linear Programming 1- Introduction. Springer-Verlag. New York, 1997.

6. Dasgupta S., Papadimitriou C.H., Vazirani U.V. Algorithms. Mc Graw Hill, 2006.

7. Eppen G.D., Gould F.J., Schmidt C.P., Moore J.H., Weatherford L.R. Introductory Management Science, Decision Making with Soreadsheets. Prentice Hall International, New Jersey.

8. Gass, Riley. Linear program approach to linear differential problems, International Journal of Engineering Science, 1958.

9. Gauss S. Γραμμικός Προγραμματισμός - Συμπλήρωμα Στοχαστικός προγραμματισμός. Εκδόσεις Παπαζήση, 1974.

10. Hillier F., Lieberman G. *Operations Research*. Holden-Day, Inc. Ελληνική μετάφραση από τις Εκδόσεις Παπαζήση, 1967, 1974, 1980, 1989.

11. Kallrath J., Wilson J. M. Business Optimisation Using Mathematical Programming. MacMillan Press, London, 1997.

12. Katzman I. Solving Feed Problems through Linear Programming. Journal of Farm Economics,1956.

13. Luce R., Howard R. Games and Decisions, Introduction and Critical Survey. John Wiley and Sons, New York, 1957.

14. Miller C.E. The Simplex Method for Local Separable Programming. In Recent Advances in References, Mathematical Programming. New York, 1963.

15. Minoux M. Mathematical Programming. John Wiley and Sons, 1986.

16. Morgestern O. The Theory of Games. Sci American, 1949.

17. Murty K. Linear Programming. John Wiley and Sons, New York, 1983.

18. Schrijver A. Theory of Linear and Integer Programming. John Wiley and Sons, New York, 1986.

19. Strang G. Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές. Π.Ε.Κ., 2005.

20. Strang G. Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα. Εκδόσεις Παν/μίου Πατρών, 2006.

21. Terlaky T., Zhang G., Salahi M. The Complexity of Self-Regular Proximity Based Infeasible IPMs. Scientific Article, 2006.

22. Thornburg K., Hummel A. LINGO 8.0 TUTORIAL, http://www.math.utu.fi/opiskelu/opetusohjelma/kurssit/aineopinnot/smat5108/Lingo_tutorial.pdf

23. Williams H.P. Model Building in Mathematical Programming. John Wiley and Sons, New York, 1985.

24. Williams H.P. Model Solving in Mathematical Programming. John Wiley and Sons, New York (1993).

25. Winston W.L. Operations Research, Applications and Algorithms. International Thomson Publishing, London, 1994.

26. Winston W.L., Albright S. C. Practical Management Science, Spreadsheet Modeling and Applications. International Thomson Publishing, London, 1994.

27. Wolfe P. The Simplex Method for Quadratic Programming. Econometrica, 1959.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

28. Badr EL., SAID M. Παράλληλος Προγραμματισμός Αλγορίθμων για Προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού, Διδακτορική Διατριβή. Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, Οικονομικών και Κοινωνικών Επιστημών, Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής, http://dspace.lib.uom.gr/bitstream/2159/540/4/Badr.pdf

29. Βαρσάμης Δ. Αριθμητικές Μέθοδοι Σε Περιβάλλον MATLAB. Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών. Τμήμα Πληροφορικής & Επικοινωνιών. Σέρρες, 2005,http://www.teiserron.gr/index.php?action=dlattach;topic=541.0;attach=741

30. Βασιλείου Π., Τσάντας Ν. Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα. Εκδόσεις Ζήτη, Αθήνα, 2000.

31. Βασιλείου Π. Εφαρμοσμένος Μαθηματικός Προγραμματισμός. Εκδόσεις Ζήτη, Αθήνα, 2001.

32. Γκιούρδας Β. LINGO. Πλήρης οδηγός Macromedia Director 8, 2001.

33. Δόσιος Κ., Παπαρρίζος Κ., Παπατζίκος Ν., Σιφαλέρας Ά. Το LinPro, Ένα Εκπαιδευτικό Πληροφοριακό Σύστημα Για Γραμμικό Προγραμματισμό. 15ο Εθνικό Συνέδριο Ελληνικής Εταιρίας Επιχειρησιακών Ερευνών, Τρίπολη, 2002.

34. Κολέτσος Ι. Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Γραμμικός Προγραμματισμός. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών,http://www.math.ntua.gr/~coletsos/Documents/linearprogramming.pdf

35. Κολέτσος Ι. Γραμμικός Προγραμματισμός. Παραδείγματα Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών,http://www.math.ntua.gr/~coletsos/Documents/paradeigmata.pdf

36. Κολέτσος Ι. Γραμμικός Προγραμματισμός – Μέθοδος Simplex. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, http://www.math.ntua.gr/~coletsos/Documents/method%20Simplex.pdf

37. Λειβαδιώτη Φ. Θεωρία ελέγχου αποθεμάτων και εφαρμογές. Διπλωματική Εργασία Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Πανεπιστημίου Πειραιά, 2004.

38. Λουκάκης Μανώλης. Γραμμικός Προγραμματισμός - Αριστοποίηση σε Δίκτυα. Εκδόσεις Σοφία Α.Ε., Αθήνα, 1994.

39. Ματζάκος Ν. Εισαγωγή στο Maple. Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών. Αθήνα, 2007

40. Μπάτης Ν., Γκανάς Ι., Γεωργίου Α. Συχνές Ερωτήσεις και Απαντήσεις Επιχειρησιακής Έρευνας. Ελληνικό Ανοιχτό Πανεπιστήμιο Πατρών, Διοίκηση Επιχειρήσεων και Οργανισμών, http://www.eap.gr/programmes/deo/deo13/docs/faq%20OR.pdf

41. Μπότσαρης Χ. Γραμμικός Προγραμματισμός. Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα, 1990.

42. Μπότσαρης Χ. Επιχειρησιακή Έρευνα. Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα, 1991.

43. Μπότσαρης Χ. Επιχειρησιακή Έρευνα - Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία παιγνίων. Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα, 2002.

44. Ξηροκώστας Δ. Επιχειρησιακή Έρευνα – Μη Γραμμικός και Δυναμικός Προγραμματισμός. Εκδόσεις Συμμετρία, 1996.

45. Ξηροκώστας Δ. Γραμμικός Προγραμματισμός. Σημειώσεις παραδόσεων στο Ε.Μ.Π., 1980.

46. Παναγιώτου Ν. Επιχειρησιακή Έρευνα, Εισαγωγικά στοιχεία για τον Επιστημονικό Τομέα της Επιχειρησιακής Έρευνας. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, http://athensmba.ntua.gr/prosopiko/WebPagePanayiot/attachments/032_01MBAOR.pdf

47. Παπαρρίζος Κ. Προσωπική συνομιλία με G. B. Dantzig, International Symposium of Mathematical Programming. Lausanne, Switzerland, 1997.

48. Παπαρρίζος Κ. Γραμμικός Προγραμματισμός - Αλγόριθμοι και Εφαρμογές. Εκδόσεις Ζυγό, Θεσσαλονίκη, 1999.

49. Παπαρρίζος Κ., Σαμαράς Ν. MATLAB. Ένα Σύγχρονο Υπολογιστικό Περιβάλλον. Εκδόσεις Ζυγός, Θεσσαλονίκη, 1999.

50. Σαπουτζής Κ. Τεχνικές Επιχειρησιακής Έρευνας. Εκδόσεις Σταμούλη, Πειραιάς, 1992.

51. Σαραγιώτη Χ. Γραμμικός Προγραμματισμός και Βελτιστοποίηση. Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Σερρών, Τμήμα Πληροφορικής Και Επικοινωνιών. Σέρρες, 2006, http://www.teiser.gr/icd/staff/dvarsam/lp/lp_main.htm

52. Σμυρλής Γ., Καϊμακάμης Γ., Πάντα Μ. Μέθοδοι & Εφαρμογές - Επιχειρησιακής Έρευνας - Γραμμικός Προγραμματισμός. 1η Έκδοση, Αθήνα, 2010.

53. Τζεκίνης Χ. Προγραμματισμός ανθρωπίνου δυναμικού. Εκδόσεις Γαλαίος, Αθήνα, 1988.

54. Τσαούση Χ. Αλγεβρική Υπολογιστική στη Διδασκαλία Ανώτερων Μαθηματικών. Ασύγχρονη τηλεκπαίδευση Ανώτερων Μαθηματικών με αλγεβρική υπολογιστική. http://194.42.1.1/~christod/maple/linearalgebramaple.pdf

55. Υψηλάντης Π. Επιχειρησιακή Έρευνα - Λήψη Επιχειρηματικών Αποφάσεων. 2η Έκδοση, εκδόσεις Ελλήν, Λάρισα, 1998.

56. Υψηλάντης Π. Επιχειρησιακή Έρευνα – Εφαρμογές στη σημερινή επιχείρηση. Εκδόσεις Προπομπός.

57. Ψηφιακή Βιβλιοθήκη & Ιδρυματικό Καταθετήριο. Εισαγωγικά Στοιχεία Γραμμικού Προγραμματισμού, Κεφάλαιο 1. Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, Οικονομικών και Κοινωνικών Επιστημών, http://dspace.lib.uom.gr/handle/2159/234.pdf .