Τεχνολογικο Εκπαιδευτικο Ιδρυμα Πατρας

Παραρτημα Αμαλιαδας

Τμημα Εφαρμογων Πληροφορικης στη Διοικηση
και στην Οικονομια

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μαθηματικά Εργαλεία για την Οικονομική Θεωρία

Mathematical Tools for Economic Theory

ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ ΝΙΚΟΛΟΠΟΥΛΟΥ (Α.Μ. 122)

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΔΡ. ΗΛΙΑΣ Κ. ΣΤΑΥΡΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΜΑΛΙΑΔΑ, ΜΑΪΟΣ 2011

Πρόλογος

Τα Οικονομικά Μαθηματικά αποτελούν κλάδο των Εφαρμοσμένων μαθηματικών και έχουν σκοπό να μελετήσουν και να λύσουν προβλήματα της Οικονομικής Επιστήμης. Σκοπός αυτής της πτυχιακής εργασίας είναι η επίλυση οικονομικών προβλημάτων με χρήση κατάλληλων μαθηματικών εργαλείων που προέρχονται από θεμελιώδεις περιοχές των Μαθηματικών. Η εργασία περιλαμβάνει μια σειρά οικονομικών προβλημάτων, καθώς και το θεωρητικό υπόβαθρο που είναι απαραίτητο για την επίλυσή τους.

Για την συγγραφή της πτυχιακής εργασίας χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα ηλεκτρονικής στοιχειοθεσίας LaTeX, ενώ το μεγαλύτερο μέρος των σχημάτων σχεδιάστηκε με χρήση του μαθηματικού προγράμματος συμβολικού υπολογισμού Maple [1].

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον εποπτεύοντα καθηγητή κ. Ηλία Σταυρόπουλο στον οποίο οφείλεται κατά ένα πολύ μεγάλο βαθμό η υλοποίηση της παρούσας εργασίας. Η ουσιαστική καθοδήγησή του στο ξεπέρασμα των ποικίλων δυσκολιών που συνάντησα κατά την διάρκεια της εργασίας, οι πολύτιμες συμβουλές και υποδείξεις του και η ηθική συμπαράστασή του με βοήθησαν τα μέγιστα.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στους γονείς μου που ήταν πάντα δίπλα μου και με στήριζαν.

[1] Περισσότερα στοιχεία για το υποστηρικτικό λογισμικό δίνονται στο Παράρτημα της εργασίας.

Περιεχόμενα

Πρόλογος **i**

Περιεχόμενα **ii**

Κατάλογος Σχημάτων **vii**

Abstract **x**

Περίληψη **ix**

1 Βασικές μαθηματικές έννοιες **1**

1.1 Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων 1

1.1.1 Πράξεις συνόλων 4

1.1.2 Καρτεσιανό γινόμενο 4

1.2 Στοιχεία Θεωρίας Πραγματικών Αριθμών 5

1.2.1 Πράξεις στο σύνολο $\mathbb{R}$ 6

1.2.2 Διαστήματα 8

2 Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας **10**

2.1 Βασικοί ορισμοί 10

2.1.1 Μη τετραγωνικές μήτρες 11

2.1.2 Τετραγωνικές μήτρες 12

2.2 Πράξεις με μήτρες 13

2.2.1 Πρόσθεση μητρών 13

2.2.2 Πολλαπλασιασμός μήτρας με αριθμό 14

2.2.3 Γινόμενο μητρών 15
2.3 Αντίθετη και Αντίστροφη μήτρα 15
2.4 Ορίζουσα μήτρας 16
2.4.1 Υπολογισμός Ορίζουσας 17
2.4.2 Σχέση αντίστροφης και προσαρτημένης μήτρας 20
2.4.3 Βαθμός μήτρας 21
2.5 Επίλυση γραμμικών συστημάτων 22
2.5.1 Μέθοδος οριζουσών 23
2.5.2 Μέθοδος πινάκων 26
2.5.3 Μέθοδος απαλοιφής Gauss 27
2.5.4 Ομογενή Γραμμικά Συστήματα 28

3 Λογισμός μιας μεταβλητής 29

3.1 Η έννοια της συνάρτησης 29
3.1.1 Είδη πραγματικών συναρτήσεων 31
3.1.2 Βασικά χαρακτηριστικά μιας συνάρτησης 35
3.2 Όρια και συνέχεια πραγματικών συναρτήσεων 37
3.2.1 Όρια πραγματικών συναρτήσεων 38
3.2.2 Συνέχεια πραγματικών συναρτήσεων 39
3.2.3 Ασυνέχεια πραγματικών συναρτήσεων 40
3.3 Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης 43
3.3.1 Πλευρικές παράγωγοι 44
3.3.2 Κανόνες παραγώγισης 45
3.3.3 Απροσδιόριστες μορφές – Κανόνας l' Hospital 46
3.3.4 Η έννοια του Διαφορικού 47
3.3.5 Βασικά θεωρήματα 48
3.4 Μελέτη συνάρτησης 48
3.4.1 Μονοτονία 49
3.4.2 Τοπικά ακρότατα 49
3.4.3 Καμπυλότητα 53

3.4.4 Σημεία καμπής 54
3.4.5 Ασύμπτωτες 54
3.5 Ολοκληρωτικός λογισμός 56
3.5.1 Αόριστο ολοκλήρωμα 57
3.5.2 Μέθοδοι ολοκλήρωσης 58
3.5.3 Ορισμένο ολοκλήρωμα 59

4 Οικονομικές εφαρμογές λογισμού μιας μεταβλητής 62
4.1 Οικονομικές εφαρμογές παραγώγου 62
4.1.1 Οικονομικά Υποδείγματα 63
4.1.2 Η έννοια της Οριακής και της Μέσης συνάρτησης 65
4.1.3 Ελαστικότητα συναρτήσεων 66
4.1.4 Σχέσεις ολικών, μέσων και οριακών μεγεθών και ελαστικοτήτων αυτών 68
4.1.5 Συνάρτηση παραγωγής 68
4.1.6 Μορφές αγοράς 71
4.1.7 Συνάρτηση εσόδων 72
4.1.8 Συνάρτηση κόστους 73
4.1.9 Μεγιστοποίηση κέρδους 78
4.1.10 Συνάρτηση χρησιμότητας 81
4.1.11 Κεφαλαιοποίηση-Προεξόφληση 82
4.1.12 Επιλογή άριστου χρόνου 83
4.2 Οικονομικές εφαρμογές ολοκληρωμάτων 84
4.2.1 Συνάρτηση εσόδων 84
4.2.2 Συνάρτηση κόστους 85
4.2.3 Συνάρτηση προϊόντος 85
4.2.4 Συναρτήσεις κατανάλωσης, αποταμίευσης, εθνικού εισοδήματος 85
4.2.5 Πλεόνασμα καταναλωτή 86
4.2.6 Πλεόνασμα παραγωγού 86
4.2.7 Προσδιορισμός παρούσας αξίας οικονομικού πόρου 88
4.2.8 Υπολογισμός ολικού κέρδους 89

5 Λογισμός πολλών μεταβλητών **90**

5.1 Η έννοια της μερικής παραγώγου . . . 91

5.2 Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης . . . 92

5.2.1 Εσσιανή μήτρα . . . 93

5.3 Ιακωβιανή μήτρα . . . 93

5.4 Ολικό διαφορικό . . . 95

5.4.1 Κανόνες διαφορικών . . . 95

5.5 Ολική παράγωγος . . . 96

5.6 Τετραγωνικές μορφές . . . 97

5.7 Ακρότατα πολυμετάβλητων συναρτήσεων . . . 101

5.7.1 Αδέσμευτα τοπικά ακρότατα . . . 101

5.7.2 Δεσμευμένα τοπικά ακρότατα . . . 104

5.8 Καμπυλότητα πολυμετάβλητων συναρτήσεων . . . 107

5.9 Ισοϋψείς καμπύλες – Ομογενείς συναρτήσεις . . . 108

5.9.1 Ισουψείς καμπύλες . . . 108

5.9.2 Ομογενείς συναρτήσεις . . . 109

6 Οικονομικές εφαρμογές παραγώγου πολλών μεταβλητών **111**

6.1 Μερική Ελαστικότητα . . . 111

6.2 Μεγιστοποίηση κέρδους . . . 113

6.3 Συνάρτηση παραγωγής . . . 114

6.3.1 Οριακός Λόγος Τεχνικής Υποκατάστασης . . . 115

6.3.2 Αποδόσεις κλίμακας της συνάρτησης παραγωγής . . . 116

6.3.3 Γραμμή ίσου κόστους . . . 118

6.3.4 Συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas . . . 119

6.4 Συνάρτηση χρησιμότητας . . . 120

6.4.1 Οριακός Λόγος Υποκατάστασης . . . 122

6.4.2 Περιορισμοί και δυνατότητες του καταναλωτή . . . 122

Παράρτημα **125**

Βιβλιογραφία **128**

Ευρετήριο **131**

Κατάλογος Σχημάτων

3.1 Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ στο διάστημα $[-10, 10]$. . . . 30

3.2 Γραφικές παραστάσεις σταθερής και ταυτοτικής συνάρτησης. 31

3.3 Γραφικές παραστάσεις των πολυωνυμικών συναρτήσεων $f_1(x) = 3x - 5$ στο $(-5, 5)$, $f_2(x) = x^2 - 3x - 5$ στο $(-10, 10)$ και $f_3(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ στο $(-3, 3)$. 32

3.4 Γραφικές παραστάσεις ρητής και άρρητης συνάρτησης. 33

3.5 Γραφικές παραστάσεις εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης. 34

3.6 Γραφικές παραστάσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων. 35

3.7 Γραφικές παραστάσεις της άρτιας συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ στο διάστημα $[-4, 4]$ και της περιττής συνάρτησης $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ στο διάστημα $[-13, 13]$. . . 36

3.8 Γραφική παράσταση της περιοδικής συνάρτησης $f(x) = \sin 3x$ στο $[-2\pi, 2\pi]$. . 37

3.9 Συνάρτηση μηνιαίων απολαβών ασφαλιστή. 42

3.10 Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 19$ στο $[-1, 5]$. 53

3.11 Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{3x}{x-1} + 3x$ στο $[-3, 5]$. 56

4.1 Καμπύλες Συνολικού, Οριακού και Μέσου Προϊόντος. 70

4.2 Καμπύλες ολικού, οριακού και μέσου ολικού κόστους. 75

4.3 Μεγιστοποίηση κέρδους στο μονοπώλιο. 79

4.4 Μεγιστοποίηση κέρδους στον πλήρη ανταγωνισμό. 81

4.5 Πλεόνασμα Καταναλωτή – Παραγωγού 87

5.1 Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x, y) = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2 + 1$. . . . 103

5.2 Χάρτης ισοϋψών καμπυλών της $f(x, y) = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2 + 1$. 109

6.1 Οι καμπύλες ισοπαραγωγής της συνάρτησης παραγωγής $q = 600K^2L^2 - K^3L^3$. 114

Περίληψη

Η παρούσα πτυχιακή εργασία αφορά τα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται στον κλάδο της Οικονομικής Επιστήμης για την αντιμετώπιση οικονομικών προβλημάτων, όπως η μεγιστοποίηση του κέρδους και η ελαχιστοποίηση του κόστους μιας επιχείρησης. Δίνουμε το απαραίτητο μαθηματικό θεωρητικό υπόβαθρο και παρουσιάζουμε εφαρμογές αυτού στην Οικονομική Θεωρία.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε στοιχειώδεις έννοιες της Θεωρίας Συνόλων και του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Το δεύτερο κεφάλαιο αφορά απαραίτητα στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας, ενώ στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζουμε βασικά στοιχεία απειροστικού, διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε εφαρμογές του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού σε οικονομικά προβλήματα. Το πέμπτο κεφάλαιο αναφέρεται στο θεωρητικό υπόβαθρο για πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, ενώ εφαρμογές αυτού δίνονται στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας.

Abstract

This thesis concerns to the mathematical tools that are used in the field of Economics for solving financial problems, such as firm' s profit maximization and cost minimization. We give the necessary mathematical theoretical background and we present a number of applications in Economics.

We start in Chapter 1 with the basic concepts of Set Theory and real numbers. Chapter 2 deals with all necessary background of Linear Algebra, while in the next chapter we present fundamental notions of differential and integral calculus for univariable real functions. In Chapter 4 we give a number of applications of calculus in Economics. Chapter 5 refers to the theoretical background for multivariable real functions, while its applications are presented in the last chapter.

Κεφάλαιο 1

Βασικές μαθηματικές έννοιες

Η Θεωρία Συνόλων αποτελεί μία από τις θεμελιώδεις περιοχές των Μαθηματικών. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε στοιχειώδεις ορισμούς και πράξεις μεταξύ συνόλων και θα κλείσουμε με ένα από τα πιο σημαντικά σύνολα της μαθηματικής ανάλυσης, το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Για περισσότερα στοιχεία ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει ενδεικτικά στις πηγές [24, Κεφ. 1, 11], [26, σελ. 29–42], [3], [8], [9], [25].

1.1 Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων

Κάθε μαθηματική έννοια μπορεί να εκφραστεί με συμβολισμούς, ορολογία και έννοιες της *θεωρίας συνόλων* (set theory). Η έννοια του συνόλου στα μαθηματικά είναι έννοια πρωταρχική. Η συστηματική μελέτη των συνόλων άρχισε στα τέλη του 19ου αιώνα από τον Γερμανό μαθηματικό Georg Cantor. Ο Cantor περιέγραψε την έννοια του συνόλου ως εξής:

Ορισμός 1 *[25] Με τη λέξη «σύνολο» εννοούμε μια οποιαδήποτε συνάθροιση σε ολότητα οριστικών και διακεκριμένων αντικειμένων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας.*

Τα αντικείμενα που αποτελούν ένα σύνολο ονομάζονται *στοιχεία* (elements) ή *μέλη* (members) του. Αν ένα στοιχείο x ανήκει σε ένα σύνολο X, τότε η σχέση αυτή συμβολίζεται $x \in X$. Αντιθέτως, αν ένα στοιχείο x δεν ανήκει στο σύνολο X, τότε η σχέση αυτή συμβολίζεται $x \notin X$.

Το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου X καλείται *πληθικός αριθμός ή πληθάριθμος* (cardinality) και συμβολίζεται με $n(X)$ ή $|X|$. Αν ισχύει $|X| = n$ για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο αριθμό n, τότε το σύνολο X είναι *πεπερασμένο*. Κάθε σύνολο που δεν είναι πεπερασμένο ονομάζεται *απειροσύνολο* (infinite set) [24, σελ. 17].

Τα στοιχεία ενός συνόλου μπορεί να έχουν μαθηματική υπόσταση (π.χ. αριθμοί, σημεία, συναρτήσεις, ακόμα και σύνολα) ή και όχι (π.χ. τα αεροπλάνα που έχει στην ιδιοκτησία της μία αεροπορική εταιρία, τα βιβλία που βρίσκονται σε μια βιβλιοθήκη, τα γραμματόσημα που έχει συλλέξει κάποιος).

Η παράσταση ενός συνόλου μπορεί να γίνει με έναν από τους παρακάτω τρόπους [24, σελ.18]:

- Με *άμεσο προσδιορισμό* (explicit specification), όπου γίνεται αναγραφή όλων των στοιχείων του συνόλου σε δύο αντικριστά άγκιστρα. Π.χ. το σύνολο X που έχει στοιχεία του τα x_1, x_3, x_5, x_7 παριστάνεται ως $X = \{x_1, x_3, x_5, x_7\}$.

- Με *έμμεσο προσδιορισμό* (implicit specification), όπου προσδιορίζεται μια ιδιότητα ή συνθήκη $p(x)$ που ικανοποιείται από τα στοιχεία x του συνόλου και μόνο από αυτά. Έτσι, για την πρόταση $p(x)$, με $X = \{x : p(x)\}$ συμβολίζεται το σύνολο X έτσι ώστε $x \in X$ αν και μόνο αν $p(x)$ είναι αληθής. Ένα σύνολο $X = \{x : p(x)\}$ αποτελείται από την *μεταβλητή* (variable) x, το X *πεδίο ορισμού* (domain) της x και τις *τιμές* (values) της x, που είναι τα στοιχεία του X.

- Με το *διάγραμμα Venn* (Venn-Euler Diagrams)

  Το διάγραμμα Venn είναι μια απλή κλειστή γραμμή που δεν τέμνει τον εαυτό της. Η επιφάνεια που περικλείει αυτή η γραμμή συμβολίζει το σύνολο. Τα στοιχεία του συνόλου παριστάνονται με κουκίδες στο εσωτερικό του περιγράμματος αν ο αριθμός τους είναι μικρός, ενώ αν ο αριθμός τους είναι μεγάλος το εσωτερικό του περιγράμματος διαγραμματίζεται κατάλληλα.

Ορισμένα σύνολα αναφέρονται συχνά στα μαθηματικά κείμενα. Τα πιο σημαντικά από αυτά είναι:

- Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

- Το σύνολο των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- Το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q} = \{\frac{\alpha}{\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \beta \neq 0\}$.
- Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, όπου περιλαμβάνει όλους τους ρητούς και άρρητους αριθμούς.
- Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$, όπου περιλαμβάνει αριθμούς με πραγματικό και φανταστικό μέρος.

Στην συνέχεια δίνουμε κάποιους στοιχειώδεις ορισμούς:

Ορισμός 2 *Το σύνολο X λέγεται* υποσύνολο *(subset) του συνόλου Y, συμβολικά $X \subseteq Y$, αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του X είναι και στοιχείο του Y.*

Ορισμός 3 *Το σύνολο X λέγεται γνήσιο υποσύνολο του συνόλου Y, συμβολικά $X \subset Y$, αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του X είναι και στοιχείο του Y και υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο του Y που δεν ανήκει στο X.*

Αν $X \subseteq Y$, τότε λέμε ότι το Y είναι *υπερσύνολο* του X, ενώ αν $X \subset Y$, τότε λέμε ότι το Y είναι *γνήσιο υπερσύνολο* του X.
Προφανώς για οποιοδήποτε σύνολο X ισχύει ότι $X \subseteq X$ και $\emptyset \subseteq X$ και επίσης $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Ορισμός 4 *Ένα σύνολο X που δεν περιέχει στοιχεία ονομάζεται* κενό σύνολο *(empty set) και συμβολίζεται με $\emptyset$ ή $\{\}$.*

Ορισμός 5 *Ένα σύνολο X που αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο ονομάζεται* μονομελές *ή* μονοσύνολο *(singleton).*

Ορισμός 6 *Το* δυναμοσύνολο *(power set) ενός συνόλου X συμβολίζεται με $P(X)$ και ορίζεται ως το σύνολο όλων των υποσυνόλων του.*

Για παράδειγμα, το δυναμοσύνολο του συνόλου $X = \{1, 2, 3\}$ είναι το $P(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Ένα μη κενό σύνολο ονομάζεται *καθολικό* (universal) ή *σύνολο αναφοράς* (reference set) ή *βασικό σύνολο* (basic set) και συμβολίζεται με Ω. Ουσιαστικά το σύνολο αναφοράς αποτελεί το σύμπαν, στο οποίο κινούμαστε και οτιδήποτε άλλο αποτελεί υποσύνολο αυτού.

1.1.1 Πράξεις συνόλων

Έστω δυο μη κενά σύνολα X και Y, υποσύνολα του συνόλου αναφοράς Ω. Ορίζουμε τις ακόλουθες πράξεις [26, σελ.31–33], [24, σελ.22–26]:

- *Ένωση* (union): Η ένωση των X και Y, συμβολικά $X \cup Y$, είναι το σύνολο που περιέχει στοιχεία που ανήκουν είτε στο X είτε στο Y, δηλαδή

$$X \cup Y = \{x : x \in X \quad \text{ή} \quad x \in Y\}.$$

- *Τομή* (intersection): Η τομή των συνόλων X και Y, συμβολικά $X \cap Y$, είναι το σύνολο που περιέχει στοιχεία που ανήκουν και στο X και στο Y, δηλαδή

$$X \cap Y = \{x : x \in X \quad \text{και} \quad x \in Y\}.$$

  Αν $X \cap Y = \emptyset$, τότε τα X και Y ονομάζονται *ξένα ή διαζευγμένα σύνολα* (disjoint sets) .

- *Διαφορά* (difference): Η διαφορά των συνόλων X και Y, συμβολικά $X \setminus Y$, είναι το σύνολο που περιέχει στοιχεία που ανήκουν στο X και δεν ανήκουν στο Y, δηλαδή

$$X \setminus Y = \{x : x \in X \quad \text{και} \quad x \notin Y\}.$$

- *Συμπλήρωμα* (complement): Το συμπλήρωμα του συνόλου X, συμβολικά $\bar{X}$, είναι το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο X, δηλαδή:

$$\bar{X} = \{x : x \in \Omega \quad \text{και} \quad x \notin X\}.$$

Παράδειγμα 1 *Έστω τα σύνολα* $X = \{1, 4, 5, 6\}$, $Y = \{2, 3, 5, 7\}$, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. *Τότε* $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \Omega$, $X \cap Y = \{5\}$, $X \setminus Y = \{1, 4, 6\}$, $Y \setminus X = \{2, 3, 7\}$, $\bar{X} = \{2, 3, 7\}$, $\bar{Y} = \{1, 4, 6\}$.

1.1.2 Καρτεσιανό γινόμενο

Παραπάνω δώσαμε τον ορισμό του μονομελούς συνόλου. Ένα *διμελές σύνολο ή ζεύγος* είναι ένα σύνολο που αποτελείται από δύο στοιχεία, π.χ. $X = \{1, 4\}$. Η σειρά με την οποία γράφονται τα στοιχεία ενός συνόλου δεν έχει σημασία, δηλαδή $X = \{1, 4\} = \{4, 1\}$. Υπάρχουν όμως ζεύγη, για τα οποία θέλουμε να έχει σημασία ποιο στοιχείο είναι πρώτο και ποιο δεύτερο. Τέτοια ζεύγη ονομάζονται *διατεταγμένα* (ordered pairs). Ένα διατεταγμένο ζεύγος με πρώτο μέλος ένα στοιχείο $\alpha \in A$ και δεύτερο μέλος ένα στοιχείο $\beta \in B$ συμβολίζεται με (α, β). Η ισότητα των ζευγών (α_1, β_1) και (α_2, β_2) εκφράζεται με την ισοδυναμία

$$(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2) \Longleftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \quad \text{και} \quad \beta_1 = \beta_2.$$

Ορισμός 7 *Έστω δύο μη κενά σύνολα A και B. Το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (α, β) με $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ ονομάζεται* Καρτεσιανό γινόμενο *(cartesian product) των A και B και συμβολίζεται με $A \times B$, δηλαδή:*

$$A \times B = \{(\alpha, \beta) : \alpha \in A \quad \textit{και} \quad \beta \in B\}.$$

Για παράδειγμα, έστω τα σύνολα $A = \{3, 5, 7\}$ και $B = \{4, 5\}$. Τότε $A \times B = \{(3, 4), (3, 5), (5, 4), (5, 5), (7, 4), (7, 5)\}$ και $B \times A = \{(4, 3), (4, 5), (4, 7), (5, 3), (5, 5), (5, 7)\}$.

Γενικεύωντας την έννοια του ζεύγους, μια *διατεταγμένη n-άδα* είναι μια ακολουθία στοιχείων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $n \geq 3$, που συμβολίζεται με $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Όπως στην περίπτωση του διατεταγμένου ζεύγους, ανάλογα διαμορφώνεται και το καρτεσιανό γινόμενο $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ των συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_n$ που ισούται με το σύνολο των διατεταγμένων n-άδων, δηλαδή

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) : \alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2, \ldots, \alpha_n \in A_n\}.$$

Για παράδειγμα, έστω τα σύνολα $A = \{1, 5, 7\}$, $B = \{0, 3\}$ και $\mathit{\Gamma} = \{2, 3, 4\}$. Τότε $A \times B \times \mathit{\Gamma} = \{(1, 0, 2), (1, 0, 3), (1, 0, 4), (1, 3, 2), (1, 3, 3), (1, 3, 4), (5, 0, 2), (5, 0, 3), (5, 0, 4), (5, 3, 2), (5, 3, 3), (5, 3, 4), (7, 0, 2), (7, 0, 3), (7, 0, 4), (7, 3, 2), (7, 3, 3), (7, 3, 4)\}$.

1.2 Στοιχεία Θεωρίας Πραγματικών Αριθμών

Ο Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, περιοχές που θα αναπτυχθούν σε επόμενα κεφάλαια, βασίζονται στις έννοιες των πραγματικών αριθμών και των πραγματικών συναρτήσεων. Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε βασικές έννοιες που αφορούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, δίνοντας έμφαση στην έννοια του διαστήματος. Οι πραγματικές συναρτήσεις θα μας απασχολήσουν στο Κεφάλαιο 3.

1.2.1 Πράξεις στο σύνολο $\mathbb{R}$

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ ορίζεται η πράξη της *πρόσθεσης* (addition) και του *πολλαπλασιασμού* (multiplication). Από αυτές ορίζονται και οι πράξεις της αφαίρεσης και της διαίρεσης, αντίστοιχα.

Ορισμός 8 *[24, σελ. 340] Σε κάθε δύο αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντιστοιχούν τους αριθμούς $\alpha + \beta$ (α συν β) και $\alpha\beta$ (α επί β) που ονομάζονται* άθροισμα *(sum) και* γινόμενο *(product) των α και β, αντίστοιχα.*

Για τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. *Αντιμεταθετική ιδιότητα* (commutative property)

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad \text{και} \quad \alpha\beta = \beta\alpha$$

2. *Προσεταιριστική ιδιότητα* (associative property)

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \quad \text{και} \quad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

3. *Επιμεριστική ιδιότητα* (distributive property), που συνδυάζει τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

4. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ υπάρχουν δύο διαφορετικοί μεταξύ τους αριθμοί που συμβολίζονται με 0 (μηδέν) και 1 (μονάδα) και ισχύει:

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha \quad \text{και} \quad \alpha 1 = 1\alpha = \alpha$$

Τα στοιχεία 0 και 1 ονομάζονται και *ουδέτερα ή ταυτοτικά στοιχεία* (neutral or identity elements) της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, αντίστοιχα.

5. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^{\star} = \mathbb{R} - \{0\}$ υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός, που τον συμβολίζουμε με $-\alpha$, τέτοιος ώστε $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$. Ο $-\alpha$ ονομάζεται *προσθετικός αντίστροφος* (additive inverse) ή απλά *αντίθετος* του α. Ο αντίθετος του μηδενός είναι το μηδέν. Η πράξη της αφαίρεσης $\alpha - \beta$ προκύπτει απλά ως πρόσθεση του α

με τον αντίθετο του β, δηλαδή $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^{\star}$ υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός, που τον συμβολίζουμε με α^{-1}, τέτοιος ώστε $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$. Ο α^{-1} ονομάζεται *πολλαπλασιαστικός αντίστροφος* (multiplicative inverse) ή απλά *αντίστροφος* του α. Η πράξη της διαίρεσης α/β, $\beta \neq 0$, προκύπτει απλά ως πολλαπλασιασμός του α με τον αντίστροφο του β, δηλαδή $\alpha/\beta = \alpha(1/\beta)$.

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ δεχόμαστε, επίσης, ότι οι πραγματικοί αριθμοί χαρακτηρίζονται από μία σχέση διάταξης $<$.

Ορισμός 9 *[24, σελ. 342] Με τη σχέση διάταξης που ορίζεται στο σύνολο $\mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται ένας αριθμός α ως μεγαλύτερος από (greater than) έναν άλλο αριθμό β και γράφουμε $\alpha > \beta$ ή $\beta < \alpha$. Η σχέση αυτή ονομάζεται ανισότητα (inequality).*

Οι ανισότητες ικανοποιούν τα ακόλουθα αξιώματα:

1. *Ιδιότητα της τριχοτομίας* (trichotomy property): Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει αποκλειστικά μία από τις σχέσεις $\alpha = \beta, \alpha < \beta, \alpha > \beta$.

2. *Μεταβατική ιδιότητα* (transitivity property): Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε ισχύει ότι $\alpha > \gamma$.

3. Αν $\alpha < \beta$ ή $\alpha \leq \beta$, τότε για κάθε $\gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ ή $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

4. Αν $\alpha < \beta$, τότε για κάθε $\gamma \in \mathbb{R}$ με $\gamma > 0$ ισχύει $\alpha\gamma < \beta\gamma$ και για κάθε $\gamma < 0$ ισχύει $\alpha\gamma > \beta\gamma$.

5. Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$ τότε $\alpha + \gamma < \beta + \delta$.

Ορισμός 10 *Έστω ένας αριθμός $\alpha \in \mathbb{R}^{\star}$. Αν $\alpha > 0$, τότε ο α ονομάζεται* θετικός, *αλλιώς αν $\alpha < 0$, τότε ο α ονομάζεται* αρνητικός. *Ο αριθμός α ονομάζεται μη θετικός ή μη αρνητικός αν ισχύει $\alpha \leq 0$ ή $\alpha \geq 0$, αντίστοιχα.*

Γεωμετρικά, το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ παριστάνεται με μία ευθεία, η οποία ονομάζεται *ευθεία των πραγματικών αριθμών ή πραγματική ευθεία* (real line) . Κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε ένα και μόνο ένα σημείο της ευθείας και αντιστρόφως. Αρχή της ευθείας θεωρείται το σταθερό σημείο που παριστάνει τον αριθμό 0. Οι θετικοί αριθμοί βρίσκονται δεξιά του μηδενός και οι αρνητικοί αριστερά.

Το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ το παριστάνουμε με την βοήθεια ενός συστήματος αξόνων στο Ευκλείδιο επίπεδο. Κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα και μόνο ένα ζεύγος πραγματικών αριθμών (α, β) και αντιστρόφως. Γι' αυτό λέμε ότι το σύνολο $\mathbb{R}^2$ είναι το σύνολο των σημείων του Ευκλείδιου επιπέδου (Ευκλείδιου χώρου των δύο διαστάσεων). Το σύνολο $0x = \{(\alpha, 0) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \in \mathbb{R}\}$ ονομάζεται *άξονας των x ή άξονας των τετμημένων* , ενώ το σύνολο $0y = \{(\beta, 0) \in \mathbb{R}^2 : \beta \in \mathbb{R}\}$ ονομάζεται *άξονας των y ή άξονας των τεταγμένων*. Οι αριθμοί α και β ονομάζονται *συντεταγμένες*. Αν οι άξονες είναι κάθετοι μεταξύ τους, τότε το σύστημα των συντεταγμένων ονομάζεται *ορθογώνιο ή καρτεσιανό* [24, σελ.343–344], [26, σελ.36].

1.2.2 Διαστήματα

Με βάση την διάταξη των πραγματικών αριθμών και τις ιδιότητες της, ορίζεται η έννοια του διαστήματος μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών α και β.

Ορισμός 11 Διάστημα *(interval) στο $\mathbb{R}$ είναι το σύνολο μεταξύ, και πιθανόν συμπεριλαμβανομένων, δύο πραγματικών αριθμών. Το διάστημα από το α στο β δηλώνεται ως εξής:*

- *κλειστό διάστημα (closed interval) $[\alpha, \beta]$: περιλαμβάνει τους πραγματικούς αριθμούς x έτσι ώστε $\alpha \leq x \leq \beta$.*

- *ανοικτό διάστημα (open interval) (α, β): περιλαμβάνει τους πραγματικούς αριθμούς x έτσι ώστε $\alpha < x < \beta$.*

- *κλειστό αριστερά διάστημα (closed to the left interval) $[\alpha, \beta)$: περιλαμβάνει τους πραγματικούς αριθμούς x έτσι ώστε $\alpha \leq x < \beta$.*

- *κλειστό δεξιά διάστημα (closed to the right interval) $(\alpha, \beta]$: περιλαμβάνει τους πραγματικούς αριθμούς x έτσι ώστε $\alpha < x \leq \beta$.*

Ορισμός 12 Μήκος του διαστήματος *(length of the interval) με άκρα α και β ονομάζεται ο μη αρνητικός αριθμός $\beta - \alpha$.*

Ορισμός 13 *Διαστήματα, των οποίων το ένα τουλάχιστον άκρο εκτείνεται απεριόριστα ονομάζονται* μη φραγμένα διαστήματα *(unbranded intervals) ή* άπειρα *(infinite intervals). Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Τα άπειρα διαστήματα διακρίνονται σε*

- ανοικτό κάτω φραγμένο $(\alpha, +\infty)$: *περιλαμβάνει τους πραγματικούς αριθμούς x έτσι ώστε $x > \alpha$.*
- ανοικτό άνω φραγμένο $(-\infty, \alpha)$: *περιλαμβάνει τους πραγματικούς αριθμούς x έτσι ώστε $x < \alpha$.*
- κλειστό κάτω φραγμένο $[\alpha, +\infty)$: *περιλαμβάνει τους πραγματικούς αριθμούς x έτσι ώστε $x \geq \alpha$.*
- κλειστό άνω φραγμένο $(-\infty, \alpha]$: *περιλαμβάνει τους πραγματικούς αριθμούς x έτσι ώστε $x \leq \alpha$.*
- *$(-\infty, +\infty)$ περιλαμβάνει όλους τους πραγματικούς αριθμούς.*

Σημείωση 1 *Το ∞ δεν είναι αριθμός, αλλά μόνο ένα σύμβολο που χρησιμοποιείται στον συμβολισμό των άπειρων διαστημάτων.*

Το εσωτερικό του διαστήματος είναι το σύνολο όλων των αριθμών του διαστήματος εκτός των άκρων. Έτσι το εσωτερικό του $[\alpha, \beta]$ είναι το (α, β). Το διάστημα (α, β) είναι επίσης το εσωτερικό των διαστημάτων $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$ και (α, β).

Κεφάλαιο 2

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Οι τεχνικές της Γραμμικής Άλγεβρας είναι από τα βασικότερα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση οικονομικών υποδειγμάτων[1]. Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφέρουμε στοιχειώδεις ορισμούς και πράξεις μεταξύ μητρών, θα παρουσιάσουμε δύο βασικά χαρακτηριστικά, την ορίζουσα και τον βαθμό μιας μήτρας και θα επιλύσουμε γραμμικά συστήματα με διάφορες μεθόδους. Ενδεικτικά προτείνονται τα βιβλία των Αναστασίου [18, Κεφ. 4–6], Ξεπαπαδέα [26, Κεφ. 6–7], Λουκάκη [24, Κεφ. 3-10] και Strang [15].

2.1 Βασικοί ορισμοί

Ξεκινάμε με τον ορισμό της μήτρας:

Ορισμός 14 *Μήτρα (matrix) ή πίνακας (array) $A = [\alpha_{ij}]$ διάστασης $m \times n$, με στοιχεία α_{ij}, όπου $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$, ονομάζεται μια ορθογώνια διάταξη των στοιχείων α_{ij} με m γραμμές και n στήλες της μορφής*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Το α_{ij} είναι το *στοιχείο* της μήτρας A που αντιστοιχεί στην i-οστή γραμμή και στην j-οστή στήλη. Ο δείκτης i λέγεται *δείκτης γραμμής* (row index) και ο δείκτης j λέγεται *δείκτης*

[1] Ο όρος οικονομικό υπόδειγμα αναφέρεται σε μία ή περισσότερες εξισώσεις, οι οποίες εκφράζουν με μαθηματικό τρόπο μία συγκεκριμένη θεωρία σχετικά με την εξέλιξη κάποιων μεγεθών

στήλης (column index). Το ζεύγος (m, n) ονομάζεται *τάξη* ή *μέγεθος* ή *τύπος* της μήτρας. Τα στοιχεία $\alpha_{ii}, i = 1, \ldots, \min\{m, n\}$, καλούνται *διαγώνια στοιχεία* ή *στοιχεία της κυρίας διαγωνίου*.

Βασιζόμενοι στον αριθμό των γραμμών και των στηλών μιας μήτρας, διακρίνουμε δύο κατηγορίες μητρών, τις μη τετραγωνικές και τις τετραγωνικές. Ακολουθεί ο ορισμός της τετραγωνικής μήτρας, που είναι χρήσιμος για την κατηγοριοποίηση των διαφόρων μητρών.

Ορισμός 15 Τετραγωνική μήτρα *(square matrix) ονομάζεται η μήτρα με ίσο αριθμό γραμμών και στηλών.*

Για παράδειγμα, μία τετραγωνική μήτρα 2×2 είναι η

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1.1 Μη τετραγωνικές μήτρες

1. Μια μήτρα $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$ με μία μόνο γραμμή λέγεται *μήτρα-γραμμή* (row matrix).

2. Μια μήτρα $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ με μία μόνο στήλη λέγεται *μήτρα-στήλη* (column matrix).

3. *Μηδενική μήτρα* $\mathbf{O}$ (zero matrix) είναι μία μήτρα τάξης $m \times n$ της οποίας όλα τα στοιχεία είναι μηδενικά. Για παράδειγμα, οι παρακάτω μήτρες είναι μηδενικές:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. *Ανάστροφη ή εναλλαγμένη μήτρα* (transpose matrix) ονομάζεται η μήτρα που έχει γραμμές τις στήλες του A και στήλες τις γραμμές του A. Συμβολίζεται με A' ή A^T.

   Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ τότε $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

2.1.2 Τετραγωνικές μήτρες

1. Μια μήτρα $A = (\alpha_{11})$ με ένα μόνο στοιχείο λέγεται *μήτρα-στοιχείο* .

2. *Μοναδιαία μήτρα* $\mathbf{I_n} = [\delta_{ij}]$ (unit matrix ή identity matrix) είναι μια τετραγωνική μήτρα τάξης $n \times n$ της οποίας όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι ίσα με 1 ενώ όλα τα υπόλοιπα είναι ίσα με 0, δηλαδή

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \\ 0 & , \quad i \neq j. \end{cases}$$

   Για παράδειγμα,

$$\mathbf{I_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. *Διαγώνια μήτρα* (diagonal matrix) είναι μια τετραγωνική μήτρα της οποίας όλα τα στοιχεία εκτός της κύριας διαγωνίου είναι μηδέν. Για παράδειγμα, οι παρακάτω μήτρες είναι διαγώνιες:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Προφανώς κάθε μοναδιαία μήτρα είναι διαγώνια μήτρα.

4. *Άνω τριγωνική* (upper triangular) ή απλά *τριγωνική* (triangular) μήτρα είναι μια τετραγωνική μήτρα $A = [\alpha_{ij}]$ της οποίας όλα τα στοιχεία που είναι κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά, δηλαδή $\alpha_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$. Αν $\alpha_{ij} = 0$ για κάθε $i < j$, τότε η μήτρα λέγεται *κάτω τριγωνική* (lower triangular).

   Για παράδειγμα, η μήτρα $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ είναι άνω τριγωνική, ενώ η $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ είναι κάτω τριγωνική. Κάθε διαγώνια μήτρα είναι άνω και κάτω τριγωνική.

5. *Συμμετρική μήτρα* (symmetric matrix) είναι μια τετραγωνική μήτρα $A = [\alpha_{ij}]$ για την οποία ισχύει $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Προφανώς κάθε συμμετρική μήτρα

ταυτίζεται με την ανάστροφή της. Για παράδειγμα η μήτρα

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 7 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

είναι συμμετρική.

6. *Αντισυμμετρική μήτρα* (skew-symmetric matrix) είναι μια τετραγωνική μήτρα $A = [\alpha_{ij}]$ για την οποία ισχύει $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

   Για παράδειγμα, η μήτρα

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

   είναι αντισυμμετρική. Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι μια αντισυμμετρική μήτρα ταυτίζεται με την αντίθετη[2] της ανάστροφης της.

2.2 Πράξεις με μήτρες

Οι μήτρες προστίθενται μεταξύ τους και πολλαπλασιάζονται. Πριν δούμε όμως τις πράξεις των μητρών, θα δώσουμε τον ορισμό της ισότητας δύο μητρών.

Ορισμός 16 *[18, σελ. 129] Δύο μήτρες $A = [\alpha_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ λέγονται ίσες, αν και μόνο αν είναι της ίδιας τάξης $m \times n$ και όλα τα στοιχεία τους είναι ίσα, ένα προς ένα, δηλαδή αν $[\alpha_{ij}] = [\beta_{ij}] \iff \alpha_{ij} = \beta_{ij}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$.*

2.2.1 Πρόσθεση μητρών

Δύο μήτρες A και B μπορούν να προστεθούν μόνο αν έχουν τις ίδιες διαστάσεις.

Ορισμός 17 *Έστω δύο μήτρες $A = [\alpha_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ τάξης $m \times n$. Το άθροισμα $A + B$ είναι μία μήτρα $\Gamma = [\gamma_{ij}]$ τάξης $m \times n$ και στοιχεία το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των A και B, δηλαδή:*

$$\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}.$$

[2] Τον ορισμό της αντίθετης μιας μήτρας δίνουμε σε επόμενη ενότητα.

Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ τότε

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Από τον ορισμό του αθροίσματος μητρών προκύπτουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. *Αντιμεταθετική*: Αν A, B είναι μήτρες τάξης $m \times n$ τότε $A + B = B + A$.
2. *Προσεταιριστική*: Αν A, B, Γ είναι μήτρες τάξης $m \times n$ τότε $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$.
3. *Ουδέτερο στοιχείο*: Η μηδενική μήτρα $\mathbf{O}$ είναι το ουδέτερο στοιχείο. Για κάθε μήτρα A ισχύει $A + \mathbf{O} = \mathbf{O} + A = A$.

2.2.2 Πολλαπλασιασμός μήτρας με αριθμό

Ορισμός 18 *Αν λ ένας πραγματικός αριθμός και $A = [\alpha_{ij}]$ μια μήτρα τάξης $m \times n$, το γινόμενο λA είναι μια μήτρα τάξης $m \times n$ που προέρχεται από την A αν κάθε στοιχείο της πολλαπλασιαστεί επί λ.*

Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, τότε $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 12 & -8 & 10 \end{pmatrix}$.

Από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού μήτρας επί ένα πραγματικό αριθμό προκύπτουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
3. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu(A))$, όπου λ, μ είναι πραγματικοί αριθμοί
4. $1 \cdot A = A$.

2.2.3 Γινόμενο μητρών

Ορισμός 19 *Έστω δύο μήτρες $A = [\alpha_{ij}]$ τάξης $n \times m$ και B=$[\beta_{ij}]$ τάξης $m \times r$, τότε το γινόμενο AB είναι μήτρα Γ τάξης $n \times r$, με στοιχεία*

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}\beta_{kj}.$$

Το γινόμενο ορίζεται μόνο αν το πλήθος των στηλών της μήτρας A ισούται με το πλήθος των γραμμών της μήτρας B.

Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, τότε

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -11 & 8 \\ 6 & 13 & 30 \end{pmatrix}.$$

Από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού μητρών προκύπτουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $(A + B) \cdot \Gamma = A \cdot \Gamma + B \cdot \Gamma$
2. $\Gamma \cdot (A + B) = \Gamma \cdot A + \Gamma \cdot B$
3. $(A \cdot B) \cdot \Gamma = A \cdot (B \cdot \Gamma)$
4. $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$
5. $\mathbf{I_m} A = A \mathbf{I_n} = A$

Στο γινόμενο μητρών δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή $AB \neq BA$, ακόμα και αν ορίζεται το γινόμενο BA.

2.3 Αντίθετη και Αντίστροφη μήτρα

Έχοντας δώσει τον ορισμό του αθροίσματος και του γινομένου δύο μητρών, μπορούμε να παρουσιάσουμε την έννοια της αντίθετης και της αντίστροφης μιας μήτρας.

Ορισμός 20 *Έστω μήτρα A τάξης $m \times n$. Η αντίθετη της A, συμβολίζεται με $-A$, είναι μία μήτρα τάξης $m \times n$ με στοιχεία τα αντίθετα της A.*

Για παράδειγμα, $-\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Η *διαφορά* $A - B$ των μητρών A και B τάξης $m \times n$ ορίζεται ως $A - B = A + (-B)$.

Ορισμός 21 *Έστω τετραγωνική μήτρα A τάξης $n \times n$. Η* αντίστροφη *(inverse) της A, συμβολίζεται με A^{-1}, είναι μία μήτρα τάξης $n \times n$ για την οποία ισχύει ότι $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{I}$, όπου $\mathbf{I_n}$.*

Η αντίστροφη μιας τετραγωνικής μήτρας A δεν ορίζεται πάντα. Αν υπάρχει η A^{-1}, τότε η A λέγεται αντιστρέψιμη ή *μη ιδιάζουσα* (non singular). Σε διαφορετική περίπτωση, η A καλείται μη αντιστρέψιμη ή *ιδιάζουσα* (singular). Στην επόμενη ενότητα θα αναφέρουμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι μία μήτρα μη ιδιάζουσα.

Ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 1 *[18, σελ. 155] Η αντίστροφη μιας τετραγωνικής μήτρας, εφόσον υπάρχει, είναι μοναδική.*

2.4 Ορίζουσα μήτρας

Για τον προσδιορισμό της έννοιας της ορίζουσας, είναι αναγκαίο πρώτα να αναφερθούμε στις έννοιες της ελάσσονας ορίζουσας και του αλγεβρικού συμπληρώματος.

Ορισμός 22 *Έστω τετραγωνική μήτρα $A = [\alpha_{ij}]$ τάξης $n \times n$. Η μήτρα που προκύπτει από την A με απαλοιφή της i-οστής γραμμής και της j-οστής στήλης ονομάζεται* υπομήτρα *που αντιστοιχεί στο στοιχείο α_{ij} και συμβολίζεται με M_{ij}. Η ορίζουσα $|M_{ij}|$ αυτής καλείται* υποορίζουσα ή ελάσσονα ορίζουσα *(minor determinant) της μήτρας A που αντιστοιχεί στο στοιχείο α_{ij}. Το* αλγεβρικό συμπλήρωμα ή προσημασμένη ελάσσων *του στοιχείου α_{ij} συμβολίζεται με Δ_{ij} και ορίζεται ως*

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|.$$

Η μήτρα $[\Delta_{ij}]$ καλείται μήτρα των αλγεβρικών συμπληρωμάτων της A.

Ορισμός 23 *[18, σελ. 194]* Ορίζουσα *(determinant) $det(A)$ ή $|A|$ μιας τετραγωνικής μήτρας A τάξης $n \times n$ είναι το άθροισμα των γινομένων που προκύπτουν, αν τα στοιχεία μιας γραμμής ή στήλης πολλαπλασιαστούν επί τα αντίστοιχα αλγεβρικά τους συμπληρώματα. Δηλαδή*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \Delta_{ij} \qquad \text{(ανάπτυγμα ως προς την } i\text{-οστή γραμμή)}$$

ή

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \Delta_{ij} \qquad \text{(ανάπτυγμα ως προς την } j\text{-οστή στήλη)}$$

2.4.1 Υπολογισμός Ορίζουσας

Ο υπολογισμός της ορίζουσας εξαρτάται από την τάξη της μήτρας.

- $n = 1$

  Η ορίζουσα της μήτρας $A = (\alpha_{11})$ είναι ίση με αυτό το στοιχείο, δηλαδή

  $$|A| = |\alpha_{11}| = \alpha_{11}.$$

  Η ορίζουσα αυτή ονομάζεται *ορίζουσα πρώτης τάξης*. Για παράδειγμα, αν $A = (5)$ τότε $|A| = 5$.

- $n = 2$

  Η ορίζουσα της μήτρας $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ είναι ίση με

  $$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}.$$

  Η ορίζουσα αυτή ονομάζεται *ορίζουσα δεύτερης τάξης*.

  Για παράδειγμα, $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-3) \cdot 4 = 14$

- $n = 3$

  Η ορίζουσα της μήτρας $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$ είναι ίση με $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} =$

$$= (-1)^{1+1}\alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\alpha_{12}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\alpha_{13}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}.$$

Η ορίζουσα προκύπτει από τον Ορισμό 23 αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη γραμμή.

Για παράδειγμα,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -10.$$

- $n > 3$

Η ορίζουσα της μήτρας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι ίση με

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & -5 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -6 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -6 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -6 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -6 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 10$$

Μία άλλη μέθοδος υπολογισμού της μεγαλύτερης της τρίτης τάξης ορίζουσας είναι ο υποβιβασμός της τάξης της εφαρμόζοντας διαδοχικούς μετασχηματισμούς μέχρις ότου τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης γίνουν όλα, πλην ενός, ίσα με μηδέν. Για να υποβιβάσουμε μια ορίζουσα $|A|$ τάξης n, σε ορίζουσα τάξης $n-1$, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Επιλέγουμε ένα στοιχείο $\alpha_{ij} = 1$ ή αν δεν υπάρχει, $\alpha_{ij} \neq 0$.

2. Χρησιμοποιούμε το στοιχείο αυτό ως οδηγό και εφαρμόζουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών ή στηλών έτσι ώστε τα στοιχεία της γραμμής ή της στήλης στην οποία ανήκει το α_{ij} να γίνουν μηδέν.

3. Αναπτύσσουμε την ορίζουσα κατά τα στοιχεία της γραμμής ή της στήλης στην οποία ανήκει το α_{ij}.

Με τον όρο «*στοιχειώδεις μετασχηματισμοί μήτρας*» εννοούμε πράξεις που μπορούν να γίνουν στις γραμμές και στις στήλες μιας μήτρας:

– Εναλλαγή δύο γραμμών ή στηλών. Σε αυτή την περίπτωση, η ορίζουσα της μήτρας που προκύπτει είναι αντίθετη από την ορίζουσα της αρχικής μήτρας.

– Πολλαπλασιασμός όλων των στοιχείων μιας γραμμής ή μιας στήλης με έναν αριθμό $\lambda \neq 0$. Σε αυτή την περίπτωση, η ορίζουσα της μήτρας που προκύπτει είναι λ φορές η ορίζουσα της αρχικής μήτρας.

– Αντικατάσταση των στοιχείων μιας γραμμής ή στήλης με τα στοιχεία που προκύπτουν αν στα στοιχεία αυτής προσθέσουμε τα στοιχεία μιας άλλης γραμμής ή στήλης, αφού πρώτα πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό $\lambda \neq 0$. Σε αυτή την περίπτωση, η ορίζουσα της μήτρας που προκύπτει είναι ίδια με την ορίζουσα της αρχικής μήτρας.

Για παράδειγμα, έστω η ορίζουσα μίας τετραγωνικής μήτρας $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -6 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς $\varGamma_2 \to \varGamma_2 - \varGamma_1, \varGamma_3 \to \varGamma_3 + \varGamma_1, \varGamma_4 \to \varGamma_4 - 2\varGamma_1$ προκύπτει η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -6 & -5 \\ 0 & 2 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 12 & 11 \end{vmatrix}.$$

Η ορίζουσα τρίτης τάξης $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 12 & 11 \end{vmatrix}$ μετατρέπεται σε

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 15 & 14 \end{vmatrix}$$

μετά από τους μετασχηματισμούς: $\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_1, \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1$ και $\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1$. Άρα η αρχική ορίζουσα είναι $|A| = -\begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 15 & 14 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 15 & 14 \end{vmatrix} = -10(-1) = 10.$

2.4.2 Σχέση αντίστροφης και προσαρτημένης μήτρας

Αναφέραμε ήδη την έννοια της μήτρας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων μιας τετραγωνικής μήτρας A τάξης n. Η *προσαρτημένη* (adjoint) της μήτρας A συμβολίζεται με $A^\star$ και ορίζεται ως η ανάστροφη της μήτρας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων, δηλαδή

$$A^\star = [M_{ji}].$$

Το παρακάτω θεώρημα φανερώνει τη σχέση αντίστροφης και προσαρτημένης μήτρας:

Θεώρημα 1 *[18, σελ. 199] Σε κάθε τετραγωνική μήτρα A, ο προσαρτημένος πίνακας $A^\star$ ικανοποιεί την σχέση*

$$A \cdot A^\star = A^\star \cdot A = |A|\mathbf{I}.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την παραπάνω σχέση με $\frac{1}{|A|}$, προκύπτει η σχέση

$$A \cdot \frac{A^\star}{|A|} = \frac{A^\star}{|A|} \cdot A = \mathbf{I} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^\star.$$

Παρατηρούμε ότι για να υπάρχει η αντίστροφη της μήτρας A πρέπει η ορίζουσα της να είναι διάφορη του μηδενός. Αν $|A| \neq 0$, τότε η μήτρα ονομάζεται *μη ιδιάζουσα* (non singular). Αν $|A| = 0$, τότε η μήτρα ονομάζεται *ιδιάζουσα* (singular).

Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ τότε $|A| = 10 \neq 0$. Άρα η μήτρα είναι αντιστρέψιμη.

Η μήτρα αλγεβρικών συμπληρωμάτων, που προκύπτει είναι η $[M_{ij}] = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ και η προσαρτημένη είναι η $A^\star = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Συνεπώς, η αντίστροφη της μήτρας A είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^\star = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/10 & 1/10 \\ 2/10 & 3/10 \end{pmatrix}.$$

2.4.3 Βαθμός μήτρας

Ένα στοιχείο που χαρακτηρίζει μια μήτρα είναι ο *βαθμός* της.

Ορισμός 24 *[18, σελ.212] Αν A είναι μία μήτρα τάξης $m \times n$, ο βαθμός (rank) της A συμβολίζεται με $rank(A)$ και είναι ο ακέραιος r που εκφράζει την τάξη r μιας μη μηδενικής υποορίζουσας της A, ενώ κάθε άλλη υποορίζουσα τάξης μεγαλύτερης του r είναι ίση με μηδέν.*

Για παράδειγμα, ο βαθμός της μήτρας $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ είναι ίσος με $rank(A) = 2$, γιατί υπάρχει υποορίζουσα δεύτερης τάξης διάφορη του μηδενός, π.χ. η $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = 2$, ενώ ο βαθμός της $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 6 & -4 & 10 \end{pmatrix}$ είναι ίσος με $rank(B) = 1$ γιατί όλες οι υποορίζουσες δεύτερης τάξης είναι μηδενικές, ενώ υπάρχει τουλάχιστον μία υποορίζουσα πρώτης τάξης διάφορη του μηδενός.

Θεώρημα 2 *[18, σελ. 214] Ο βαθμός μιας μήτρας δεν αλλάζει αν εκτελεστούν σε αυτήν οποιοιδήποτε στοιχειώδεις μετασχηματισμοί επί των γραμμών ή των στηλών της.*

Αν μια μήτρα A προκύπτει από μια μήτρα B μέσω μιας σειράς στοιχειωδών μετασχηματισμών, τότε οι μήτρες A και B καλούνται ισοδύναμες και συμβολίζονται με $A \sim B$.

Σημείωση 2 *[26, σελ. 247] Αν μια τετραγωνική μήτρα τάξης $n \times n$ είναι μη ιδιάζουσα, τότε $r(A) = n$. Αν η μήτρα είναι ιδιάζουσα, τότε $r(A) < n$.*

2.5 Επίλυση γραμμικών συστημάτων

Ορισμός 25 *[18, σελ. 226–227] Κάθε εξίσωση της μορφής*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \beta_1$$

λέγεται γραμμική εξίσωση *με αγνώστους* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *και συντελεστές* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$*.*
Ένα γραμμικό σύστημα m *εξισώσεων με* n *αγνώστους μπορεί να παρασταθεί ως:*

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2 \\ &\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n &= \beta_m \end{aligned}$$

ή πιο συνοπτικά ως $AX = B$*, όπου*

$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$ *είναι η μήτρα* $(m \times n)$ *των συντελεστών,*

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *είναι το διάνυσμα-στήλη των αγνώστων και*

$B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$ *είναι το διάνυσμα-στήλη των σταθερών όρων.*

Στην περίπτωση που η μήτρα A περιέχει ως στοιχεία τους συντελεστές των αγνώστων αλλά και τους σταθερούς όρους του συστήματος ονομάζεται *επαυξημένη μήτρα* (augmented matrix) του συστήματος. Συμβολίζεται:

$$[A|B] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{pmatrix}$$

Πριν προχωρήσουμε στην επίλυση γραμμικών συστημάτων, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι ένα σύστημα μπορεί να έχει μία ή περισσότερες λύσεις ή και καμία λύση. Με τον όρο «λύση» εννοούμε κάθε n-άδα αγνώστων που επαληθεύει το γραμμικό σύστημα. Στην περίπτωση, λοιπόν, που το σύστημα έχει λύση ονομάζεται *συμβιβαστό*. Διαφορετικά, αν δεν υπάρχει λύση ονομάζεται *μη συμβίβαστο ή αδύνατο*.

2.5.1 Μέθοδος οριζουσών

Η μέθοδος των οριζουσών βασίζεται στον κανόνα του Cramer. Εφαρμόζεται σε τετραγωνικές μήτρες, που είναι μη ιδιάζουσες.

Ορισμός 26 *[18, σελ. 227] Κάθε γραμμικό σύστημα στο οποίο το πλήθος των εξισώσεων είναι ίσο με το πλήθος των αγνώστων, δηλαδή $m = n$ και η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι μη μηδενική, ονομάζεται* σύστημα Cramer.

Το σύστημα Cramer έχει μία και μόνο λύση, την

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

όπου $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_n|$ οι ορίζουσες που προκύπτουν από την $|A|$, αν στην θέση των συντελεστών των αγνώστων $x_1, x_2, \ldots, x_n$ θέσουμε τους σταθερούς όρους, αντίστοιχα.

Διερεύνηση Γραμμικού Συστήματος

- Αν $m = n$, αν δηλαδή το πλήθος των εξισώσεων ισούται με το πλήθος των αγνώστων, το σύστημα έχει:
  - *μία και μόνο λύση*, αν $|A| \neq 0$
  - *καμία λύση*, αν $|A| = 0$ και μία τουλάχιστον ορίζουσα από τις $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_n|$ είναι διάφορη του μηδενός
  - *άπειρες λύσεις*, αν $|A| = 0$ και $|A_1| = |A_2| = \ldots = |A_n| = 0$ με την προϋπόθεση ότι μία τουλάχιστον υποορίζουσα $n - 1$ τάξης είναι διάφορη του μηδενός.

Για παράδειγμα, έστω το σύστημα

$$2x - 5y = 3$$

$$-x + 4y = 7$$

Είναι

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση, την $x = \frac{|A_x|}{|A|}$ και $y = \frac{|A_y|}{|A|}$.

Είναι

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 47$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 17$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι η $(x, y) = \left(\frac{47}{3}, \frac{17}{3}\right)$.

- Αν $m > n$, δηλαδή αν το πλήθος των εξισώσεων είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των αγνώστων, τότε το σύστημα έχει μία ή καμία λύση. Αν $m - n = k$ παραλείπουμε τις k εξισώσεις. Έτσι προκύπτει ένα νέο σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους, στο οποίο αν $|A| \neq 0$, θα έχουμε μία λύση. Η λύση αυτή αποτελεί λύση του αρχικού συστήματος αν επαληθεύει και τις υπόλοιπες k εξισώσεις.

  Για παράδειγμα, έστω το σύστημα

$$x + 4y = 9$$

$$3x - y = 1$$

$$-x + 2y = 3$$

  Ισχύει $m > n$, άρα $k = m - n = 1$. Παραλείπουμε μία εξίσωση, έστω την τρίτη, οπότε προκύπτει το σύστημα:

$$x + 4y = 9$$

$$3x - y = 1$$

Παίρνουμε την ορίζουσα

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0.$$

Άρα πρόκειται για ένα σύστημα Cramer με μοναδική λύση, την $x = \frac{|A_x|}{|A|}$ και $y = \frac{|A_y|}{|A|}$. Εύκολα προκύπτει ότι $(x, y) = (1, 2)$. Παρατηρούμε ότι η λύση αυτή επαληθεύει και την τρίτη εξίσωση, άρα αποτελεί λύση του αρχικού συστήματος.

- Αν $m < n$, δηλαδή αν το πλήθος των εξισώσεων είναι μικρότερο από το πλήθος των αγνώστων, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις ή καμία. Εξετάζουμε αν στη μήτρα των συντελεστών υπάρχει μη μηδενική ορίζουσα. Αν υπάρχει, τότε δίνουμε στους $n-k$ υπόλοιπους αγνώστους αυθαίρετες τιμές και λύνουμε το σύστημα, το οποίο έχει άπειρες λύσεις.

  Για παράδειγμα, έστω το σύστημα

$$2x - y + z = 1$$

$$x + y - 2z = -1$$

  Παρατηρούμε ότι το πλήθος των εξισώσεων είναι μικρότερο από το πλήθος των αγνώστων. Υπάρχει ορίζουσα δεύτερης τάξης διάφορη του μηδενός, π.χ.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

  Επομένως, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

  Τα στοιχεία της ορίζουσας $|A|$ είναι οι συντελεστές των x και y. Οπότε μεταφέρουμε τους όρους που περιέχουν το z στο δεύτερο μέλος και το σύστημα γράφεται:

$$2x - y = -z + 1$$

$$x + y = 2z - 1$$

  Επιλύουμε το σύστημα και βρίσκουμε τις τιμές των x και y συναρτήσει του z:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -z+1 & -1 \\ 2z-1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{z}{3} \quad \text{και} \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -z+1 \\ 1 & 2z-1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{5z-3}{3}$$

Άρα οι λύσεις του αρχικού συστήματος είναι οι $(x, y, z) = \left(\frac{z}{3}, \frac{5z-3}{3}, z\right), z \in \mathbb{R}$.

2.5.2 Μέθοδος πινάκων

Αν r ο βαθμός της μήτρας A των συντελεστών του συστήματος και R ο βαθμός της επαυξημένης μήτρας ισχύουν τα ακόλουθα:

- Αν $r = R$, τότε το σύστημα έχει λύση:

  1. Αν $r = R = n$, τότε το σύστημα έχει μία μόνο λύση.

     Για παράδειγμα, έστω το σύστημα

     $$x - y = 0$$
     $$2x - 3y = 1$$
     $$3x - 4y = 1$$

     Η μήτρα των συντελεστών είναι βαθμού 2, δηλαδή $r = 2$, γιατί υπάρχει ορίζουσα δεύτερης τάξης διάφορη του μηδενός, π.χ. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Η επαυξημένη μήτρα είναι επίσης βαθμού 2, δηλαδή $R = 2$, γιατί η ορίζουσα τρίτης τάξης είναι μηδέν, αλλά υπάρχει ορίζουσα δεύτερης τάξης διάφορη του μηδενός. Επειδή $r = R = n$, το σύστημα έχει μία λύση, που προκύπτει αν πάρουμε δύο από τις τρεις εξισώσεις και λύσουμε το σύστημά τους. Άρα το σύστημα έχει λύση την $x = -1$ και $y = -1$.

  2. Αν $r = R < n$, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες προκύπτουν αν δώσουμε αυθαίρετες τιμές σε $n-r$ αγνώστους του συστήματος, έτσι ώστε η μήτρα των συντελεστών των υπολοίπων r αγνώστων να είναι βαθμού r.

Για παράδειγμα, έστω το σύστημα

$$x + 2y - 3z = 5$$

$$2x + 4y + z = 3$$

Η μήτρα των συντελεστών $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ είναι βαθμού 2. Η επαυξημένη μήτρα $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ είναι επίσης βαθμού 2. Επειδή $r = R < n$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες προκύπτουν αν δώσουμε σε $n - r = 1$ αγνώστους αυθαίρετες τιμές. Τα στοιχεία της ορίζουσας που είναι διάφορη του μηδενός είναι συντελεστές των y και z. Μεταφέρουμε τους όρους που περιέχουν το x στο δεύτερο μέλος:

$$2y - 3z = 5 - x$$

$$4y + z = 3 - 2x$$

Επιλύουμε το σύστημα με την μέθοδο Cramer. Προκύπτει

$$y = \frac{2-x}{2} \quad \text{και} \quad z = \frac{-8}{7}$$

Άρα οι λύσεις του αρχικού συστήματος είναι οι $(x, y, z) = \left(x, \frac{2-x}{2}, -\frac{8}{7}\right), x \in \mathbb{R}$.

- Αν $r \neq R$, τότε το σύστημα δεν έχει λύση.

2.5.3 Μέθοδος απαλοιφής Gauss

Ένας άλλος τρόπος επίλυσης γραμμικών συστημάτων είναι η *Μέθοδος απαλοιφής Gauss*. Για οικονομία χώρου δεν θα επεκταθούμε σε αυτή τη μέθοδο. Θα αναφέρουμε μόνο ότι η επίλυση των γραμμικών συστημάτων βασίζεται στον μετασχηματισμό της επαυξημένης μήτρας σε μήτρα τριγωνικής μορφής, μέσω ισοδύναμων μετασχηματισμών. Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει ενδεικτικά στις βιβλιογραφικές πηγές [18, σελ. 250–257], [24, σελ. 99–110], [15].

2.5.4 Ομογενή Γραμμικά Συστήματα

Ορισμός 27 *Αν οι σταθεροί όροι όλων των γραμμικών εξισώσεων του συστήματος* $AX = B$ *είναι ίσοι με μηδέν, το σύστημα έχει την μορφή* $AX = \mathbf{0}$ *και λέγεται* ομογενές .

Ένα ομογενές σύστημα έχει πάντα την μηδενική λύση. Για την διερεύνησή του εξετάζουμε τον βαθμό της μήτρας A. Αν $r = n$, το σύστημα έχει μόνο την μηδενική λύση, γιατί η μήτρα των συντελεστών των αγνώστων και η επαυξημένη μήτρα έχουν τον ίδιο βαθμό, δηλαδή $r = R$. Αν $r < n$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να έχει ένα ομογενές γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους και άλλες λύσεις εκτός της μηδενικής, είναι $|A| = 0$.

Για παράδειγμα, έστω το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$2x - y + 3z = 0$$

$$3x + 2y + z = 0$$

$$x - 4y + 5z = 0$$

Το σύστημα έχει τη μηδενική λύση. Η ορίζουσα $|A|$ είναι ίση με

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Οι τιμές των x, y, z είναι ανάλογες προς τις υποορίζουσες που προκύπτουν, αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \lambda$$

οπότε $x = 14\lambda, y = -7\lambda$ και $z = -7\lambda$. Με διάφορες τιμές του λ προκύπτουν αντίστοιχες λύσεις του συστήματος.

Για περισσότερα στοιχεία σχετικά με την επίλυση ομογενών συστημάτων, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στις πηγές: [24, σελ. 125–126], [26, σελ. 273–274] [18], [15].

Κεφάλαιο 3

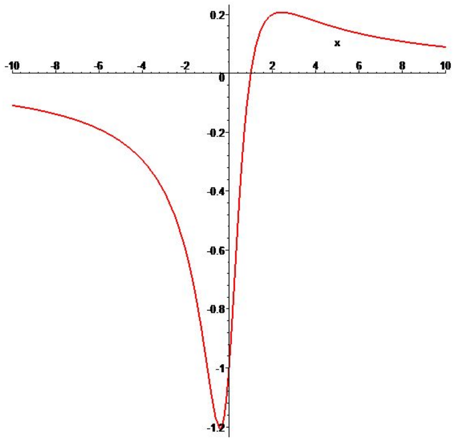
Λογισμός μιας μεταβλητής

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε βασικές έννοιες και τεχνικές απειροστικού, διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού πραγματικών συναρτήσεων μιας ανεξάρτητης μεταβλητής. Όπως θα διαπιστώσουμε στο Κεφάλαιο 4, οι τεχνικές αυτές αποτελούν βασικά εργαλεία για την ανάλυση, μελέτη και επίλυση οικονομικών προβλημάτων. Για περισσότερα στοιχεία ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει, ενδεικτικά, στις βιβλιογραφικές πηγές [24, σελ. 361–540], [26, Κεφ. 2–4], [14, Κεφ. 2], [4], [20] και [21].

3.1 Η έννοια της συνάρτησης

Ορισμός 28 *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Ονομάζουμε* πραγματική συνάρτηση *(real-valued function) με πεδίο ορισμού το X μια απεικόνιση (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in X$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό $y \in Y$. Το y ονομάζεται* τιμή της f στο x, *ή* τύπος της f *και συμβολίζεται με $f(x)$.*

Για την πραγματική συνάρτηση $f : X \to Y$ το σύνολο X ονομάζεται *πεδίο ορισμού* (domain) και συμβολίζεται με $D(f)$ ενώ το σύνολο όλων των στοιχείων του Y καθένα από τα οποία αντιστοιχεί σε ένα τουλάχιστον στοιχείο του X ονομάζεται *πεδίο τιμών* (range) της f και συμβολίζεται με $R(f)$ [24, σελ. 361]. Το x αναφέρεται συνήθως ως *ανεξάρτητη μεταβλητή* (independent variable), ενώ το y ως *εξαρτημένη μεταβλητή* (dependent variable) ή ως *εικόνα* (image) του x διά της f [26, σελ. 51].



Σχήμα 3.1: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ στο διάστημα $[-10, 10]$.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$. Για να ορίζεται η συνάρτηση, θα πρέπει $x^2 + 1 \neq 0$. Προφανώς, $x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι $D(f) = \mathbb{R}$.

Για να βρούμε το πεδίο τιμών λύνουμε την εξίσωση $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ ως προς x: $y = \frac{x-1}{x^2+1} \Rightarrow y(x^2 + 1) = x - 1 \Rightarrow yx^2 - x + y + 1 = 0$. Αφού $x \in \mathbb{R}$, θα πρέπει η διακρίνουσα $\Delta \geq 0$, δηλαδή

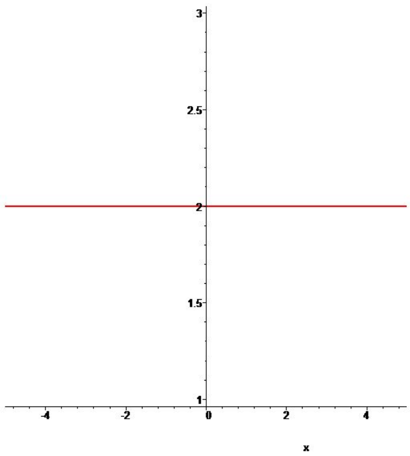
$$\Delta = (-1)^2 - 4y(y + 1) = 1 - 4y^2 - 4y \geq 0 \Rightarrow 4y^2 + 4y - 1 \leq 0.$$

Οι λύσεις της $4y^2 + 4y - 1 = 0$ είναι οι $y_1 = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$ και $y_2 = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$. Οπότε $4y^2 + 4y - 1 \leq 0$ αν και μόνο αν $y \in \left(\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)$. Άρα το πεδίο τιμών της f είναι το $R(f) = \left(\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

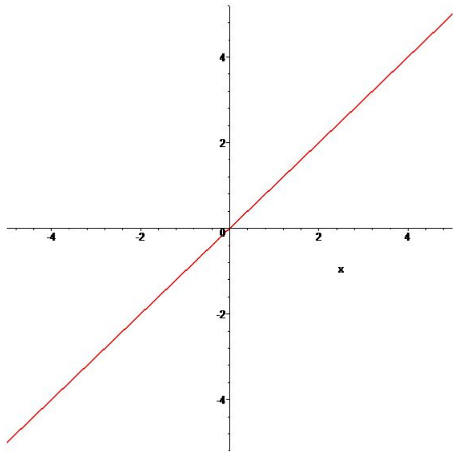
Οι γραφικές απεικονίσεις βοηθούν στην κατανόηση πολλών συναρτήσεων. Μια συνάρτηση με μια μεταβλητή, για παράδειγμα, μπορεί να σχεδιαστεί σε σύστημα αξόνων x, y και για κάθε τιμή του x, η τιμή της $f(x)$ να απεικονιστεί στον y άξονα.

Ορισμός 29 Γραφική παράσταση *μιας συνάρτησης f ονομάζεται η απεικόνιση της συνάρτησης με γραφικό τρόπο σε ένα σύστημα συντεταγμένων. Η γραφική παράσταση της f συμβολίζεται συνήθως με C_f και ονομάζεται καμπύλη της f.*

Στο Σχήμα 3.1 δίνουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης του προηγούμενου παραδείγματος.



(a) Η συνάρτηση $f(x) = 2$ στο $(-5, 5)$.



(b) Η συνάρτηση $f(x) = x$ στο $(-5, 5)$.

Σχήμα 3.2: Γραφικές παραστάσεις σταθερής και ταυτοτικής συνάρτησης.

3.1.1 Είδη πραγματικών συναρτήσεων

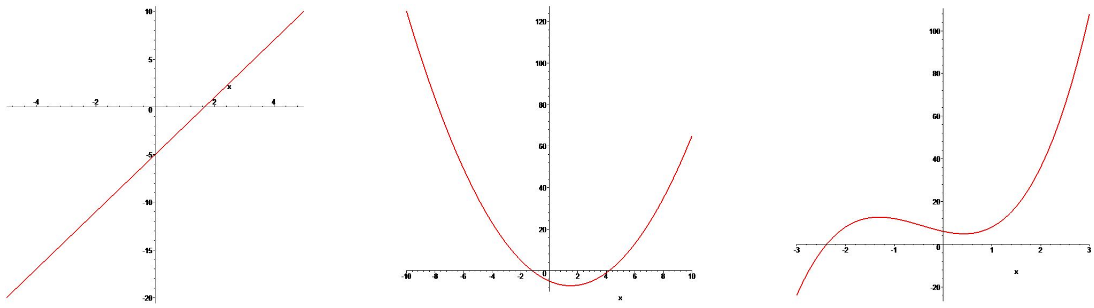
Στη συνέχεια παρουσιάζουμε συνοπτικά κάποια βασικά είδη πραγματικών συναρτήσεων. Για περισσότερα στοιχεία ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στις πηγές [24, σελ. 366–372], [26, σελ. 56–61], [20, σελ. 31–39].

Σταθερή συνάρτηση

Η σταθερή συνάρτηση (constant function) είναι της μορφής $f(x) = c$, όπου c πραγματική σταθερά, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Γραφικά παριστάνεται με ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x, που τέμνει τον άξονα y στο σημείο $(0, c)$ [24, σελ. 366]. Στο Σχήμα 3.2(a) δίνουμε την γραφική παράσταση της σταθερής συνάρτησης $f(x) = 2$.

Ταυτοτική συνάρτηση

Η ταυτοτική συνάρτηση (identity function) είναι της μορφής $f(x) = x$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Γραφικά παριστάνεται με ευθεία που διέρχεται από το κέντρο των αξόνων και σχηματίζει γωνία $45°$ με καθένα από αυτούς (βλέπε Σχήμα 3.2(b)).



(a) (b) (c)

Σχήμα 3.3: Γραφικές παραστάσεις των πολυωνυμικών συναρτήσεων $f_1(x) = 3x - 5$ στο $(-5, 5)$, $f_2(x) = x^2 - 3x - 5$ στο $(-10, 10)$ και $f_3(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ στο $(-3, 3)$.

Πολυωνυμική συνάρτηση

Η πολυωνυμική συνάρτηση (polynomial function) βαθμού $n \geq 0$ έχει την μορφή

$$f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i,$$

όπου $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\alpha_n \neq 0$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Για $n = 0$ προκύπτει η σταθερή συνάρτηση $f(x) = \alpha_0$, για $n = 1$ προκύπτει η *γραμμική συνάρτηση* (linear function) ή *συνάρτηση πρώτου βαθμού* $f(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$, ενώ για $n = 2$ προκύπτει η *τετραγωνική συνάρτηση* ή *συνάρτηση δευτέρου βαθμού* $f(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ [20, σελ. 31]. Στα Σχήματα 3.3(a), 3.3(b) και 3.3(c) δίνουμε παραδείγματα γραφικής παράστασης πολυωνυμικών συναρτήσεων 1ου, 2ου και 3ου βαθμού, αντίστοιχα.

Αλγεβρικές συναρτήσεις

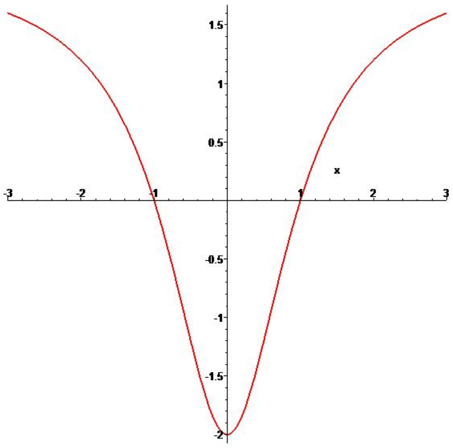
Αλγεβρική (algebraic function) είναι κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί μια εξίσωση της μορφής

$$P_n(x)y^n + P_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + P_0(x) = 0,$$

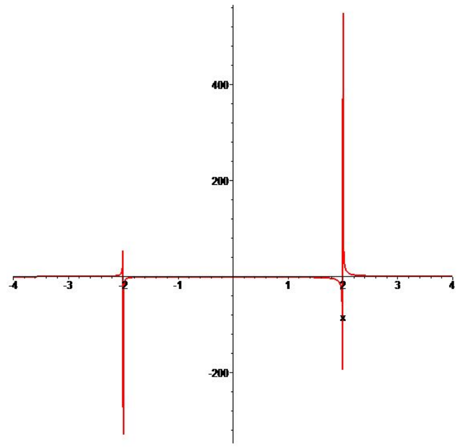
όπου $P_n(x), P_{n-1}(x), \ldots, P_0(x)$ είναι πολυώνυμα ως προς x [24, σελ. 367]. Οι αλγεβρικές συναρτήσεις διακρίνονται σε ρητές και άρρητες.

1. Η *ρητή συνάρτηση* (rational function) έχει την μορφή

$$f(x) = \frac{\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_m x^m + \ldots + \beta_1 x + \beta_0},$$



(a) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2-2}{x^2+1}$ στο διάστημα $(-3,3)$.



(b) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2-4}$ στο διάστημα $(-4,4)$.

Σχήμα 3.4: Γραφικές παραστάσεις ρητής και άρρητης συνάρτησης.

όπου m και n μη αρνητικοί ακέραιοι και $\alpha_0, \beta_0, \ldots, \alpha_n \beta_m \in \mathbb{R}$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ εκτός από τα σημεία που μηδενίζεται ο παρονομαστής. Στο Σχήμα 3.4(a) δίνουμε την γραφική παράσταση της ρητής συνάρτησης $f(x) = \frac{2x^2-2}{x^2+1}$.

2. Η *άρρητη συνάρτηση* (irrational function) έχει την μορφή

$$f(x) = \sqrt[n]{\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0}\ ,$$

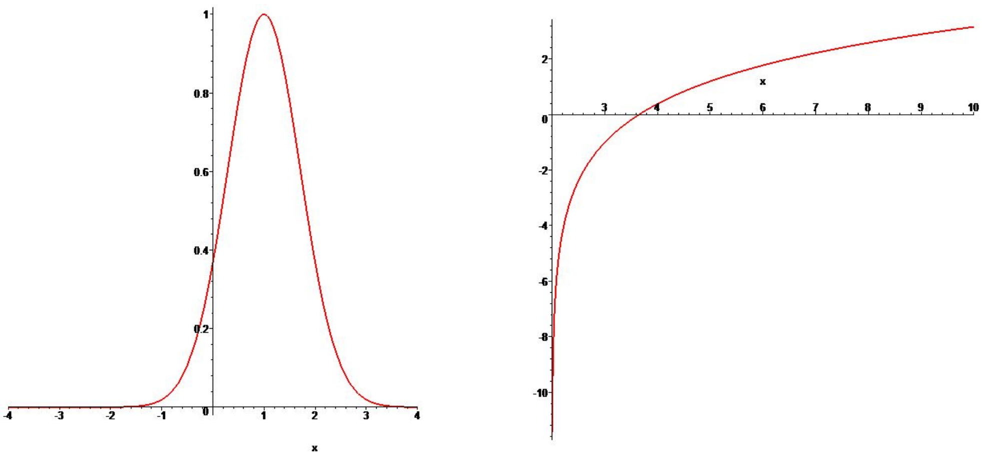
όπου $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\alpha_n \neq 0$ και πεδίο ορισμού κάθε πραγματικό αριθμό για τον οποίο η υπόριζη ποσότητα είναι θετική. Στο Σχήμα 3.4(b) δίνουμε την γραφική παράσταση της άρρητης συνάρτησης $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2-4}$.

Υπερβατικές συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις που δεν είναι αλγεβρικές ονομάζονται *υπερβατικές* (transcendental). Οι αλγεβρικές και οι υπερβατικές συναρτήσεις αποτελούν την κατηγορία των *στοιχειωδών συναρτήσεων* (elementary functions). Παρακάτω αναφέρουμε τις υπερβατικές συναρτήσεις που παρουσιάζουν περισσότερο ενδιαφέρον στην Οικονομική Επιστήμη και είναι μεταξύ άλλων οι εκθετικές, οι λογαριθμικές και οι τριγωνομετρικές.

1. Οι *εκθετικές συναρτήσεις* (exponential functions) έχουν γενικό τύπο

$$f(x) = \alpha^{g(x)},$$



(a) Η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2+2x-1}$ στο $(-4, 4)$.

(b) Η συνάρτηση $f(x) = 2\ln(x-2) - 1$ στο $(2, 10)$.

Σχήμα 3.5: Γραφικές παραστάσεις εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης.

όπου $0 < \alpha \neq 1$, $x \in D(g)$. Στην περίπτωση που $\alpha = e$ [1] και $g(x) = x$ προκύπτει η απλούστερη μορφή εκθετικής συνάρτησης $f(x) = e^x$. Στο Σχήμα 3.5(a) δίνουμε την γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = e^{-x^2+2x-1}$.

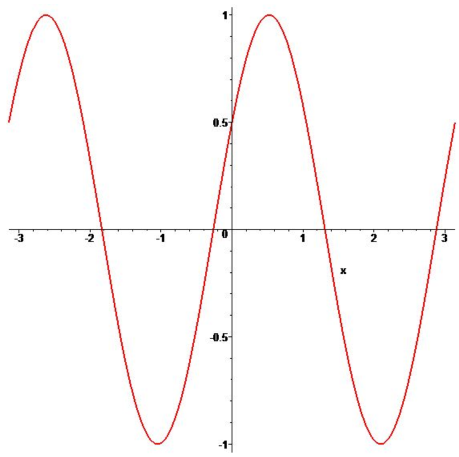
2. Οι *λογαριθμικές συναρτήσεις* (logarithmic functions) έχουν γενικό τύπο

$$f(x) = \log_\alpha g(x),$$

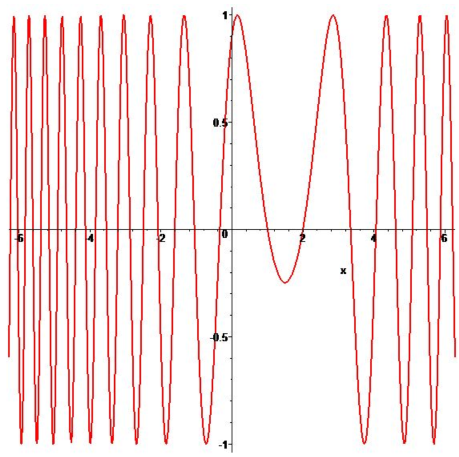
όπου $0 < \alpha \neq 1$ και $g(x) > 0$. Οι λογάριθμοι με βάση $\alpha = 2$ συμβολίζονται με lg και λέγονται δυαδικοί, με βάση $\alpha = 10$ συμβολίζονται με log και λέγονται δεκαδικοί και με βάση $\alpha = e$ συμβολίζονται με ln και ονομάζονται φυσικοί ή νεπέριοι λογάριθμοι [20, σελ. 33]. Στο Σχήμα 3.5(b) δίνουμε ένα παράδειγμα λογαριθμικής συνάρτησης.

3. Οι *τριγωνομετρικές ή κυκλικές συναρτήσεις* (trigonometric or circular functions) χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν μεγέθη τα οποία μεταβάλλονται κυρίως κυκλικά. Οι σημαντικότερες από αυτές είναι οι *συναρτήσεις του ημιτόνου* (sine) με τύπο $\eta\mu f(x)$ ή $\sin f(x)$ και του *συνημιτόνου* (cosine) με τύπο $\sigma\upsilon\nu f(x)$ ή $\cos f(x)$. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών το $[-1, 1]$. Με την βοήθεια αυτών ορίζονται και άλλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις όπως [20, σελ. 33–34]:

[1] Ο αριθμός $e \simeq 2.71828...$ ονομάζεται *αριθμός Euler ή σταθερά Napier* [24, Κεφ. 14].



(a) Η συνάρτηση $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$ στο $(-\pi, \pi)$.



(b) Η συνάρτηση $f(x) = \sin(x^2 - 3x + 2)$ στο $(-2\pi, 2\pi)$.

Σχήμα 3.6: Γραφικές παραστάσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

- *Εφαπτομένη* (tangent function): $\varepsilon\varphi f(x)$ ή $\tan f(x) = \frac{\sin f(x)}{\cos f(x)}$
- *Συνεφαπτομένη* (co-tangent function): $\sigma\varphi f(x)$ ή $\cot f(x) = \frac{\cos f(x)}{\sin f(x)} = \frac{1}{\tan f(x)}$
- *Τέμνουσα* (secant function): $\tau\varepsilon\mu f(x)$ ή $\sec f(x) = \frac{1}{\cos f(x)}$
- *Συντέμνουσα* (co-secant function): $\sigma\tau\varepsilon\mu f(x)$ ή $\csc f(x) = \frac{1}{\sin f(x)}$

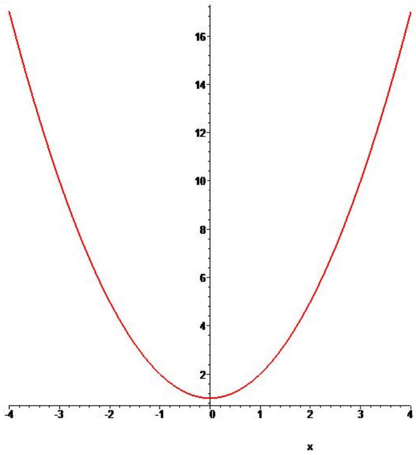
Στο Σχήμα 3.6 δίνουμε τις γραφικές παραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ και $f(x) = \sin\left(x^2 - 3x + 2\right)$.

3.1.2 Βασικά χαρακτηριστικά μιας συνάρτησης

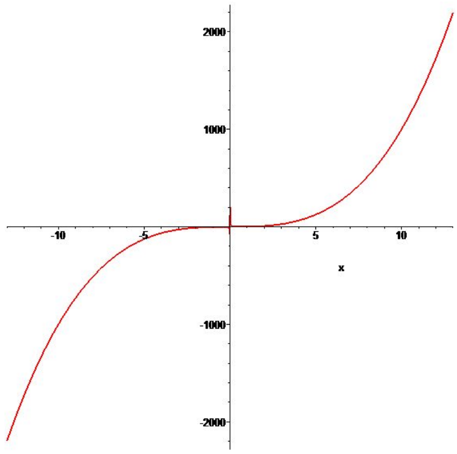
Η μελέτη των χαρακτηριστικών μιας συνάρτησης οδηγεί σε χρήσιμα συμπεράσματα για την «συμπεριφορά» της κατά μήκος του πεδίου ορισμού της και απλοποιεί τη σχεδίαση της γραφικής της παράστασης.

Ρίζες συνάρτησης

Ρίζα συνάρτησης ονομάζεται κάθε πραγματικός αριθμός $x \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) = 0$ [20, σελ. 40]. Για παράδειγμα οι ρίζες της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 3x - 5$ είναι οι $x_1 = 4.19$ και $x_2 = -1.19$. Η γραφική παράσταση της τέμνει τον άξονα x στα σημεία $(0, -1.19)$ και $(0, 4.19)$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3(b).



(a)



(b)

Σχήμα 3.7: Γραφικές παραστάσεις της άρτιας συνάρτησης $f(x) = x^2+1$ στο διάστημα $[-4, 4]$ και της περιττής συνάρτησης $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ στο διάστημα $[-13, 13]$.

Άρτια συνάρτηση

Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται άρτια (even), όταν για κάθε $x \in A$, $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$. Οι άρτιες συναρτήσεις έχουν γραφική παράσταση συμμετρική ως προς τον άξονα y [20, σελ. 40].

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$ είναι άρτια, αφού $D_f = \mathbb{R}$ και $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$ (βλέπε Σχήμα 3.7(a)).

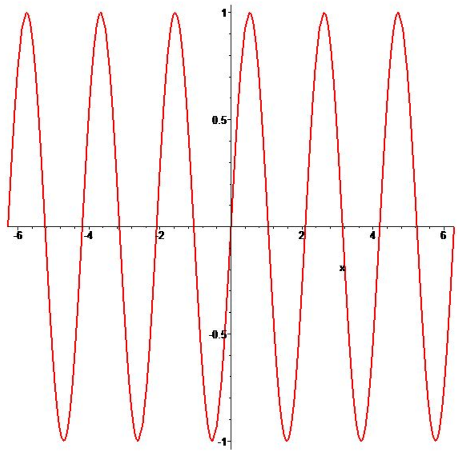
Περιττή συνάρτηση

Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται περιττή (odd), όταν για κάθε $x \in A$, $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$. Οι περιττές συναρτήσεις έχουν γραφική παράσταση συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων [20, σελ. 41].

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ είναι περιττή, αφού $D_f = \mathbb{R}$ και $f(-x) = -x^3 + \frac{1}{-x} = -x^3 - \frac{1}{x} = -(x^3 + \frac{1}{x}) = -f(x)$ (βλέπε Σχήμα 3.7(b)).

Περιοδική συνάρτηση

Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται περιοδική (periodic), όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T \neq 0$, τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει $(x + T) \in A$ και $f(x + T) = f(x)$



Σχήμα 3.8: Γραφική παράσταση της περιοδικής συνάρτησης $f(x) = \sin 3x$ στο $[-2\pi, 2\pi]$.

[20, σελ. 44].

Ο πραγματικός αριθμός T ονομάζεται *κύρια περίοδος* (fundamental period) της συνάρτησης f. Κάθε περιοδική συνάρτηση έχει απείρως πολλές περιόδους, οι οποίες είναι ακέραια πολλαπλάσια της κύριας περιόδου. Παραδείγματα περιοδικών συναρτήσεων είναι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Οι συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου έχουν περίοδο $T = 2\pi$, ενώ οι συναρτήσεις εφαπτομένης και συνεφαπτομένης έχουν περίοδο $T = \pi$.

Στο Σχήμα 3.8 δίνουμε την γραφική παράσταση της περιοδικής συνάρτησης $f(x) = \sin 3x$, με περίοδο $T = \frac{2\pi}{3}$. Αντίθετα, στο Σχήμα 3.6(b) παρατηρούμε ότι η τριγωνομετρική συνάρτηση $f(x) = \sin(x^2 - 3x + 2)$ δεν είναι περιοδική.

3.2 Όρια και συνέχεια πραγματικών συναρτήσεων

Μία από τις βασικότερες έννοιες της μαθηματικής ανάλυσης είναι η έννοια της συνέχειας των συναρτήσεων. Ειδικότερα, σε αρκετά μαθηματικά υποδείγματα που χρησιμοποιούνται στην Οικονομική Επιστήμη, υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις είναι συνεχείς. Η έννοια της συνέχειας είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την έννοια του ορίου. Η βασική τους διαφορά είναι ότι με την έννοια του ορίου μελετάται η συμπεριφορά μιας συνάρτησης $f(x)$ όταν η μεταβλητή x πλησιάζει ένα σημείο α, ενώ με την έννοια της συνέχειας προσδιορίζεται η συμπεριφορά της συνάρτησης, όταν στην πραγματικότητα φθάνουμε στο σημείο $x = \alpha$ [24, σελ. 377].

3.2.1 Όρια πραγματικών συναρτήσεων

Η μελέτη της συμπεριφοράς μιας συνάρτησης $f(x)$ προϋποθέτει ότι η f είναι ορισμένη σε μία γειτνίαση (γειτονιά) X του α.

Ορισμός 30 *[24, σελ. 359] Αν $\varepsilon > 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ τότε το ανοικτό διάστημα $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ ονομάζεται* ε-περιοχή *ή* ε-γειτνίαση *(ε-Neighborhood) με κέντρο το α και ακτίνα το ε και συμβολίζεται με $N(\alpha;\varepsilon)$. Είναι δηλαδή $N(\alpha;\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha| < \varepsilon\}$.*

Αφού δώσαμε τον ορισμό της ε-γειτνίασης, μπορούμε τώρα να παρουσιάσουμε τον ορισμό του ορίου ή της οριακής τιμής, όπως εισήχθη από τον Γερμανό μαθηματικό Karl Weierstrass (1815–1897).

Ορισμός 31 *[24, σελ. 386] Ο αριθμός l είναι το* όριο *(limit) της $f(x)$ καθώς x προσεγγίζει α και γράφουμε $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας αντίστοιχος αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε x με $0 < |x - \alpha| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - l| < \varepsilon$.*

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}.$$

Η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f = \mathbb{R} - [1]$.

Καθώς το x, κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα $x'x$, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 3, το $f(x)$, κινούμενο πάνω στον άξονα $y'y$, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 2.5. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 2.5$$

και διαβάζουμε «Το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο 3, είναι 2.5».

Για να ισχύει η εξίσωση $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l$, θα πρέπει η $f(x)$ να προσεγγίζει την ίδια και μοναδική τιμή l καθώς η x προσεγγίζει το α και από τις δύο κατευθύνσεις αριστερά και δεξιά του α. Αν η x προσεγγίζει το α από τα αριστερά, τότε η τιμή l είναι το *αριστερό όριο* (left hand limit) της f στο α και συμβολίζεται με $\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = l$. Αντίστοιχα, αν η x προσεγγίζει το α από τα δεξιά, τότε η τιμή l είναι το *δεξιό όριο* (right hand limit) της f

στο α και συμβολίζεται με $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = l$. Το αριστερό και δεξιό όριο μιας συνάρτησης ονομάζονται *πλευρικά όρια* (side limits).

Για παράδειγμα, από την παραπάνω συνάρτηση προκύπτει ότι το όριο από αριστερά είναι $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-4}{x-1} = +\infty$ και το όριο από δεξιά είναι $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-4}{x-1} = -\infty$. Παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα. Επομένως δεν υπάρχει όριο της f στο $x = 1$.

3.2.2 Συνέχεια πραγματικών συναρτήσεων

Ορισμός 32 *[24, σελ. 394] Μια συνάρτηση f είναι συνεχής (continuous) στο σημείο $\alpha \in D(f)$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε αν $|x-\alpha| < \delta$ με $x \in D(f)$ τότε $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$, δηλαδή αν ισχύει*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha).$$

Ο παραπάνω ορισμός συνεπάγεται ότι για να είναι μια συνάρτηση f συνεχής στο σημείο α του πεδίου ορισμού της, πρέπει να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες [26, σελ. 86]:

- να ορίζεται η f στο σημείο $x = \alpha$,
- να υπάρχει το όριο της f στο $x = \alpha$, και
- το όριο αυτό να ισούται με την τιμή της f στο $x = \alpha$.

Σύμφωνα με τον ορισμό του πλευρικού ορίου, αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι μια συνάρτηση συνεχής σε ένα σημείο α είναι

$$\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = \lim_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha).$$

Ένα πολύ σημαντικό θεώρημα που αναφέρεται σε ιδιότητες συνεχούς πραγματικής συνάρτησης σε κλειστά διαστήματα $[\alpha, \beta]$ στο $\mathbb{R}$ είναι το *Θεώρημα Bolzano* ή *Θεώρημα του μηδενικού σημείου μίας συνεχούς συνάρτησης* (zero-point theorem of a continuous function):

Θεώρημα 3 *[26, σελ. 88] Έστω f πραγματική συνάρτηση συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του $\mathbb{R}$ και έστω ότι τα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ είναι ετερόσημοι αριθμοί, δηλαδή $f(\alpha)f(\beta) < 0$. Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο γ στο ανοιχτό διάστημα (α, β) τέτοιο ώστε $f(\gamma) = 0$.*

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος Bolzano και είναι γνωστό ως *θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής* (intermediate value theorem).

Θεώρημα 4 *[20, σελ. 100] Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, τότε για κάθε αριθμό y μεταξύ $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός x στο $[\alpha,\beta]$, τέτοιος ώστε $f(x) = y$.*

Τέλος, παραθέτουμε το *θεώρημα των ακρότατων τιμών* (extreme values theorem) ή *θεώρημα του Weierstrass.*

Θεώρημα 5 *[24, σελ. 402] Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε η f παίρνει μια ελάχιστη τιμή m και μια μέγιστη τιμή M στο διάστημα αυτό. Δηλαδή υπάρχουν x_0 και x_1 στο $[\alpha,\beta]$ τέτοιοι ώστε $f(x_0) = m$, $f(x_1) = M$ και $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε σημείο x του $[\alpha,\beta]$.*

3.2.3 Ασυνέχεια πραγματικών συναρτήσεων

Ορισμός 33 *[26, σελ. 91] Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο α του πεδίου ορισμού της, λέμε ότι παρουσιάζει* ασυνέχεια *(discontinuity) στο α, ή ότι είναι* ασυνεχής *(discontinuous) στο α και το α ονομάζεται* σημείο ασυνέχειας *(point of discontinuity).*

Κατά συνέπεια, η f είναι ασυνεχής στο σημείο α αν ικανοποιείται μία από τις ακόλουθες συνθήκες:

1. Δεν ορίζεται η f στο σημείο $x = \alpha$.

2. Τα πλευρικά όρια τείνουν στο άπειρο.

3. Υπάρχουν τα πλευρικά όρια, αλλά οι τιμές αυτές δεν ταυτίζονται με την τιμή της f στο $x = \alpha$.

Ανάλογα με το ποια από τις τρεις συνθήκες του ορισμού της ασυνέχειας ικανοποιούνται διακρίνουμε τα εξής είδη ασυνέχειας [24, σελ. 395–398]:

- Η *εξαλείψιμη ασυνέχεια* (removable discontinuity) στο σημείο $x = \alpha$ παρουσιάζεται όταν ικανοποιούνται η πρώτη ή η τρίτη συνθήκη του ορισμού. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να εξαλείψουμε την ασυνέχεια και η συνάρτηση που θα προκύψει να είναι συνεχής παντού.

- Η *άπειρη ή ασυμπτωτική ασυνέχεια* (infinite or asymptotic discontinuity) στο σημείο $x = \alpha$ παρουσιάζεται όταν η $f(\alpha)$ δεν υπάρχει και $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \pm\infty$.

- Η *πεπερασμένη ασυνέχεια* (finite discontinuity) ή *ασυνέχεια με άλμα* (jump discontinuity) στο σημείο $x = \alpha$ παρουσιάζεται όταν τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα.

Παράδειγμα 2 *Έστω η συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & , \quad x \neq 2 \\ 1 & , \quad x = 2. \end{cases}$$

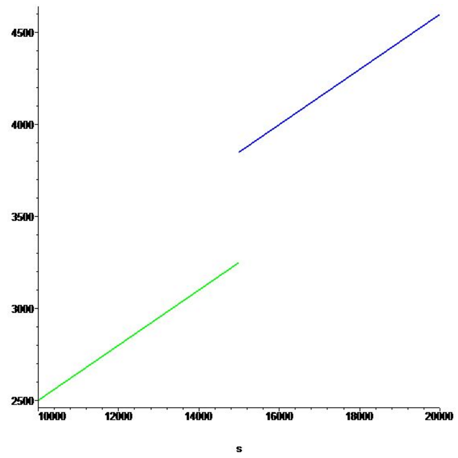
Η $f(x)$ γράφεται ισοδύναμα ως

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & , \quad x \neq 2 \\ 1 & , \quad x = 2. \end{cases}$$

Είναι $\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \neq f(2) = 1$. Συνεπώς, η f παρουσιάζει εξαλείψιμη ασυνέχεια στο $x = 2$. Μπορούμε να εξαλείψουμε την ασυνέχεια αν θέσουμε $f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

Στο χώρο της Οικονομικής Επιστήμης υπάρχουν αρκετά φαινόμενα που χαρακτηρίζονται από ασυνέχεια. Σε κάποιες περιπτώσεις είναι δυνατό, για λόγους ευκολίας, να προσεγγίσουμε τέτοια φαινόμενα με συναρτήσεις που είναι συνεχείς σε κάποιο διάστημα, χωρίς η προσέγγιση αυτή να έχει σοβαρές επιπτώσεις στην αξιοπιστία του οικονομικού υποδείγματος. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι συναρτήσεις παραγωγής της μορφής $y = f(x)$, όπου f είναι μια συνεχής συνάρτηση που συνδέει την ποσότητα εισροής x που χρησιμοποιείται σε μια παραγωγική διαδικασία και την αντίστοιχη παραγόμενη ποσότητα y. Σε άλλες περιπτώσεις, όμως, η ασυνέχεια αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό του φαινομένου που μελετάμε, όπως φαίνεται στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 3 *[26, σελ. 91] Ας υποθέσουμε ότι μια ασφαλιστική εταιρία αμείβει τους ασφαλιστές της με καθαρό μηνιαίο μισθό 1000 € συν προμήθεια 15% επί της αξίας των*



Σχήμα 3.9: Συνάρτηση μηνιαίων απολαβών ασφαλιστή.

συμβολαίων που συντάσσουν συν ένα πριμ αποδοτικότητας 600 € αν η αξία των συμβολαίων ανά μήνα ξεπεράσει τις 15000 €. Έτσι, οι μηνιαίες απολαβές P ενός ασφαλιστή δίνονται από την παρακάτω συνάρτηση:

$$P(S) = \begin{cases} 1000 + 0,15S & , \quad 10000 \leq S < 15000 \\ 1600 + 0,15S & , \quad 15000 \leq S \leq 20000 \end{cases}$$

όπου S είναι η αξία των συμβολαίων ανά μήνα.

Στο Σχήμα 3.9 φαίνεται ότι η συνάρτηση των μηνιαίων απολαβών ενός ασφαλιστή παρουσιάζει ασυνέχεια στο σημείο $S = 15000$ με άλμα ίσο με 600 €. Στην περίπτωση αυτή η ασυνέχεια της συνάρτησης έχει σοβαρές επιπτώσεις από οικονομική άποψη. Συγκεκριμένα, ένας ασφαλιστής ο οποίος λίγες μέρες πριν το τέλος του μήνα έχει συνάψει συμβόλαια ύψους 14000 € θα έχει πολύ ισχυρότερα κίνητρα να επιδιώξει πρόσθετα συμβόλαια από κάποιον άλλο, ο οποίος την ίδια περίοδο έχει συμβόλαια ύψους 11000 €.

Παράδειγμα 4 *[26, σελ. 92] Έστω $D(p)$ και $S(p)$ η συνάρτηση ζήτησης (demand function) και η συνάρτηση προσφοράς (supply function) ενός αγαθού, αντίστοιχα, και έστω p η τιμή του παραγόμενου αγαθού. Τότε η συνάρτηση $Z(p) = D(p) - S(p)$ εκφράζει την ποσότητα κατά την οποία η ζήτηση υπερβαίνει την προσφορά και ονομάζεται συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης (excess demand function). Αν υποθέσουμε ότι η παραγωγή του συγκεκριμένου αγαθού απαιτεί κάποιους παραγωγικούς συντελεστές, τότε η προσφερόμενη ποσότητα που αντιστοιχεί σε μηδενική τιμή είναι επίσης μηδενική, δηλαδή $S(0) = 0$. Επίσης, είναι λογικό* *να υποθέσουμε ότι η ζητούμενη ποσότητα που αντιστοιχεί σε μηδενική τιμή είναι θετική, δηλαδή $D(0) > 0$, οπότε $Z(0) = D(0) - S(0) > 0$. Αν υπάρχει κάποια αρκετά υψηλή τιμή p_1, τέτοια ώστε η προσφερόμενη ποσότητα που αντιστοιχεί στην τιμή αυτή να είναι μεγαλύτερη από τη ζητούμενη, τότε θα είναι $Z(p_1) = D(p_1) - S(p_1) < 0$. Αν οι συναρτήσεις $D(p)$ και $S(p)$ είναι συνεχείς, τότε και η διαφορά τους $Z(p)$ θα είναι συνεχής. Επομένως, με βάση το θεώρημα Bolzano, θα υπάρχει τιμή p_e ανάμεσα στο 0 και στο p_1, τέτοια ώστε $Z(p_e) = 0$, δηλαδή $D(p_e) = S(p_e)$. Η τιμή αυτή είναι η τιμή ισορροπίας (equilibrium price) στην οποία η ζητούμενη ποσότητα ισούται με την προσφερόμενη ποσότητα.*

3.3 Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης

Όπως διαπιστώσαμε, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του ορίου και της συνέχειας μας δίνεται η δυνατότητα να μελετήσουμε την συμπεριφορά μιας πραγματικής συνάρτησης. Όμως με την εισαγωγή μιας ακόμη σημαντικής ιδιότητας, της παραγωγισιμότητας, οι πληροφορίες μας σχετικά με την συμπεριφορά μιας πραγματικής συνάρτησης βελτιώνονται ουσιωδώς [24, σελ. 404].

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Αν η ανεξάρτητη μεταβλητή x μεταβληθεί κατά Δx, δηλαδή από x_0 σε $x_0 + \Delta x$, τότε η εξαρτημένη μεταβλητή θα μεταβληθεί κατά $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Η μέση μεταβολή του y (ανά μονάδα μεταβολής του x) στο διάστημα x_0 και $x_0 + \Delta x$, προσδιορίζεται από το πηλίκο των διαφορών

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ορισμός 34 *[26, σελ. 124] Αν το όριο*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

υπάρχει και είναι πεπερασμένο, τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη *(differentiable) στο σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Το όριο αυτό λέγεται παράγωγος (derivative) της f στο σημείο x_0.*

Αν τεθεί $x = x_0 + \Delta x$, το παραπάνω όριο γράφεται ισοδύναμα:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Η οριακή αυτή τιμή ονομάζεται *πρώτη παράγωγος* (first derivative) ή απλώς *παράγωγος* της f στο σημείο x_0 και συμβολίζεται με [24, σελ. 411]:

- $\frac{df(x_0)}{dx}$ *συμβολισμός του Leibniz* (1646-1716)
- $f'(x_0)$ *συμβολισμός του Lagrange* (1736-1813)
- $Df(x_0)$ *συμβολισμός του Cauchy* (1789-1857).

Η παράγωγος $f'(x_0)$ ονομάζεται συχνά και *οριακός ρυθμός μεταβολής* (marginal rate of change) ή *στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής* (instantaneous rate of change) της f στο σημείο x_0.

Αναγκαία συνθήκη για να είναι μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 είναι η συνάρτηση f να είναι συνεχής. Συνεπώς διαμορφώνεται το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 6 *[24, σελ. 420] Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε η f είναι συνεχής στο σημείο αυτό.*

Αντίθετα, όταν μία συνάρτηση f είναι συνεχής, δεν συνεπάγεται ότι είναι παραγωγίσιμη.

3.3.1 Πλευρικές παράγωγοι

Η έννοια της παραγώγου σε κάποιο σημείο x_0 εσωτερικό του πεδίου ορισμού της f, μπορεί να επεκταθεί έτσι ώστε να συμπεριλάβει παραγώγους στα άκρα του διαστήματος.

Ορισμός 35 *[26, σελ. 127] Έστω ότι η f ορίζεται σε ένα κλειστό διάστημα $S = [\alpha,\beta]$ και έστω ότι είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in S$. Η f λέμε ότι έχει* παράγωγο από δεξιά *στο x_0 αν υπάρχει το όριο από δεξιά*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πεπερασμένο. Η παράγωγος της f από δεξιά στο x_0 συμβολίζεται με $f'(x_0^+)$.

Παρόμοια ορίζεται η παράγωγος της f από αριστερά στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0^-)$. Ένας εναλλακτικός συμβολισμός είναι $f'_+(x)$ και $f'_-(x)$, αντίστοιχα.

Η παράγωγος από δεξιά και η παράγωγος από αριστερά (αν υπάρχουν) λέγονται *πλευρικές παράγωγοι* (side derivatives) ή *μονόπλευρες παράγωγοι* (one side derivatives). Για τις πλευρικές παραγώγους ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 7 *[26, σελ. 128] Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι της και είναι $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.*

3.3.2 Κανόνες παραγώγισης

Η διαδικασία εύρεσης της παραγώγου μιας συνάρτησης ονομάζεται *παραγώγιση* (differentiation). Επειδή ο υπολογισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης με βάση τον ορισμό της δεν είναι πάντα εύκολος, υπάρχουν μερικοί χρήσιμοι κανόνες που μας επιτρέπουν την εύρεση της παραγώγου. Οι κανόνες αυτοί ονομάζονται *κανόνες παραγώγισης* (differentiation rules). Στην συνέχεια αναφέρουμε κάποιους από αυτούς [24, σελ. 427–434].

- *Κανόνας δυνάμεως* (power rule)

  Η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $x \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

  $$f'(x) = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

- *Κανόνας γραμμικού συνδυασμού* (linear combination rule)

  Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x και $m, k \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση του γραμμικού τους συνδυασμού $mf + kg$ είναι παραγωγίσιμη στο x και ισχύει:

  $$(mf + kg)'(x) = mf'(x) + kg'(x).$$

- *Κανόνας γινομένου* (product rule)

  Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x, τότε και η συνάρτηση fg του γινομένου τους είναι παραγωγίσιμη στο x και ισχύει:

  $$(fg)'x = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

- *Κανόνας πηλίκου* (quotient rule)

  Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x, τότε και η συνάρτηση f/g είναι παραγωγίσιμη στο x και ισχύει:

  $$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, g(x) \neq 0.$$

- *Αλυσωτός κανόνας* (chain rule)

  Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x \in D(f)$ και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $f(x) \in D(g)$ τότε η σύνθετη συνάρτηση $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο x και ισχύει:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

3.3.3 Απροσδιόριστες μορφές – Κανόνας l' Hospital

Σε ορισμένες περιπτώσεις κατά τη διαδικασία υπολογισμού ορίων, είναι δυνατόν να εμφανιστούν *απροσδιόριστες μορφές* (indeterminate forms) τύπου $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$. Για τα όρια πηλίκου που οδηγούν σε απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, ισχύει το επόμενο θεώρημα που είναι γνωστό ως *κανόνας l' Hospital* .

- *Μορφές* $\frac{0}{0}$ *και* $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ [24, σελ. 437]

  Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0, \lim_{x\to x_0} g(x) = 0, x_0 \in \mathbb{R} \cup (-\infty, +\infty)$ και υπάρχει το

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad , \text{τότε} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

  Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty, \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty, x_0 \in \mathbb{R} \cup (-\infty, +\infty)$ και υπάρχει το

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad , \text{τότε} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

  Η εφαρμογή του κανόνα l' Hospital διακόπτεται μόλις παρουσιαστεί παράγωγος στο x_0 διάφορη του μηδενός.

  Για παράδειγμα, το όριο $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}$ είναι της μορφής $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα l' Hospital, προκύπτει:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{5\sqrt[4]{(1+x)^5}} = \frac{1}{5}.$$

  Αντίστοιχα, το όριο $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2}{5x^3+8x-1}$ είναι της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα l' Hospital, προκύπτει:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4x}{15x^2+8} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x+4}{30x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

- *Μορφές* $0 \cdot \infty$ *και* $\infty - \infty$

  Οι μορφές αυτές μπορούν να προσδιοριστούν αφού μετατραπούν σε μορφές $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

- *Μορφές* $0^0, \infty^0, 1^\infty$

  Οι μορφές αυτές μπορούν να προσδιοριστούν αφού πρώτα μετατραπούν σε μορφή 0^∞ με λογαρίθμηση της υπό εξέταση παράστασης.

3.3.4 Η έννοια του Διαφορικού

Ορισμός 36 *Έστω* $y = f(x)$ *μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο* x *και* $\Delta x = h \neq 0$ *μια οποιαδήποτε μεταβολή του* x, *ανεξάρτητη όμως από το τελευταίο. Τότε το διαφορικό της* f *στο* x *ορίζεται το γινόμενο* $f'(x)h = f'(x)\Delta x$, *το οποίο συμβολίζεται με* $df(x)$ *ή* dy, *δηλαδή* $dy = f'(x)dx$.

Όπως διαπιστώνουμε από τον ορισμό, για την μεταβολή h της x και για τη μεταβολή $df(x)$ της y συνηθίζεται να χρησιμοποιούνται τα σύμβολα dx και dy, αντίστοιχα.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = 3x^2$. Το διαφορικό της είναι $dy = f'(x)dx = 6xdx$. Η τιμή του διαφορικού στο σημείο $x = 2$ είναι $dy = 12dx$. Αν τώρα το x αυξηθεί κατά $dx = 0.01$ θα είναι $dy = 0.12$.

Ένα σημαντικό θεώρημα, που προκύπτει από τον παραπάνω ορισμό είναι το εξής:

Θεώρημα 8 *[24, σελ. 439] Η συνάρτηση* f *είναι διαφορίσιμη στο* x *αν και μόνο αν είναι παραγωγίσιμη στο* x.

Αυτό σημαίνει ότι στις πραγματικές συναρτήσεις η έννοια της διαφορισιμότητας είναι ισοδύναμη προς την έννοια της παραγωγισιμότητας.

Επειδή το *διαφορικό πρώτης τάξης* μιας συνάρτησης $y = f(x)$ είναι συνάρτηση, μπορεί να οριστεί το διαφορικό του. Έτσι το διαφορικό του διαφορικού πρώτης τάξης λέγεται *διαφορικό δεύτερης τάξης* και συμβολίζεται με d^2y. Το διαφορικό δεύτερης τάξης υπολογίζεται ως εξής:

$$d^2y = d(dy) = d[f'(x)dx].$$

Επειδή η x είναι ανεξάρτητη μεταβλητή και η μεταβολή dx είναι σταθερή ποσότητα έχουμε:

$$d^2y = d[f'(x)]dx = [f''(x)dx]dx = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2.$$

Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται το διαφορικό τρίτης τάξης, ως το διαφορικό του διαφορικού δεύτερης τάξης καθώς και τα διαφορικά ανώτερης τάξης. Γενικά, αποδεικνύεται ότι το *διαφορικό n-οστής τάξης* της συνάρτησης $y = f(x)$, το οποίο συμβολίζεται με $d^n y$ είναι:

$$d^n y = f^n dx^n.$$

3.3.5 Βασικά θεωρήματα

Με τη βοήθεια των παραγώγων και των διαφορικών μπορούμε να μελετήσουμε τα κυριότερα χαρακτηριστικά των πραγματικών συναρτήσεων. Πρώτα όμως, πρέπει να αναφέρουμε δύο βασικά θεωρήματα του διαφορικού λογισμού [26, σελ. 146–148].

Θεώρημα 9 (Θεώρημα Rolle) *[24, σελ. 447]*
Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) και ισχύει ότι $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = 0.$$

Γενίκευση του θεωρήματος Rolle αποτελεί το *Θεώρημα Μέσης Τιμής* (mean value theorem).

Θεώρημα 10 *[24, σελ. 450] Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε*

$$f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

3.4 Μελέτη συνάρτησης

Με τον όρο «μελέτη συνάρτησης» εννοούμε την μελέτη των κύριων χαρακτηριστικών μιας συνάρτησης, όπως πεδίο ορισμού, ρίζες, συνέχεια, μονοτονία, ακρότατα, καμπυλότητα, σημεία καμπής και ασύμπτωτες. Σε ορισμένα από αυτά, όπως πεδίο ορισμού, ρίζες, συνέχεια, έχουμε αναφερθεί σε προηγούμενες ενότητες. Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε στα υπόλοιπα χαρακτηριστικά, τα οποία αναλύονται με την βοήθεια του διαφορικού λογισμού. Στο Κεφάλαιο 4 θα δούμε ότι οι τεχνικές του διαφορικού λογισμού αποτελούν βασικά εργαλεία για την μελέτη οικονομικών συναρτήσεων [26, σελ. 149].

3.4.1 Μονοτονία

Ορισμός 37 *[20, σελ. 51] Μια συνάρτηση f λέγεται* αύξουσα *σε ένα διάστημα $(\alpha,\beta) \subseteq D_f$, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in (\alpha,\beta)$, με $x_1 < x_2$, ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$. Σε περίπτωση που $f(x_1) < f(x_2)$, η f καλείται γνησίως αύξουσα.*

Ορισμός 38 *[20, σελ. 51] Μια συνάρτηση f λέγεται* φθίνουσα *σε ένα διάστημα $(\alpha,\beta) \subseteq D_f$, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in (\alpha,\beta)$, με $x_1 < x_2$, ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$. Σε περίπτωση που $f(x_1) > f(x_2)$, η f καλείται γνησίως φθίνουσα.*

Κριτήρια μονοτονίας συνάρτησης

Το θεώρημα, που ακολουθεί χαρακτηρίζει μια συνάρτηση ως αύξουσα ή φθίνουσα χρησιμοποιώντας το πρόσημο της πρώτης παραγώγου.

Θεώρημα 11 *[24, σελ. 507] Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β). Τότε η f είναι* αύξουσα *ή* φθίνουσα *στο (α,β) αν και μόνο αν για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ ισχύει $f'(x) \geq 0$ ή $f'(x) \leq 0$, αντίστοιχα.*

Επίσης ισχύει και η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 2 *[24, σελ. 508] Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ ισχύει $f'(x) > 0$ ή $f'(x) < 0$. Τότε η f είναι στο $[\alpha,\beta]$* γνησίως αύξουσα *ή* γνησίως φθίνουσα*, αντίστοιχα.*

3.4.2 Τοπικά ακρότατα

Το επόμενο χαρακτηριστικό που αναφέρεται στην μελέτη μιας συνάρτησης f είναι τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Ορισμός 39 *[24, σελ. 509] Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $N_\varepsilon(x_0)$ μια ε-γειτνίαση του σημείου $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο σημείο x_0* τοπικό (ή σχετικό) μέγιστο *(local or relative maximum), αντίστοιχα* τοπικό (ή σχετικό) ελάχιστο *(local or relative minimum), όταν και μόνο όταν ισχύει $f(x) < f(x_0)$ (αντίστοιχα $f(x) > f(x_0)$) για κάθε $x \in N_\varepsilon(x_0) - x_0$.*

Το x_0 λέγεται *θέση ή σημείο τοπικού μέγιστου* (αντίστοιχα ελάχιστου) και $f(x_0)$ ονομάζεται *τοπικό μέγιστο* (αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο). Τα τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα ονομάζονται και *τοπικά ακρότατα* (local extremes).

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι το τοπικό ακρότατο αναφέρεται σε μια μικρή γειτνίαση ενός εσωτερικού σημείου. Στην περίπτωση όμως, που αναφερόμαστε σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού D_f της f, αναφερόμαστε ουσιαστικά στο *ολικό ή απόλυτο ακρότατο* (global or absolute extreme) .

Ορισμός 40 *[24, σελ. 510] Μια συνάρτηση f παρουσιάζει* ολικό ή απόλυτο μέγιστο *(global or absolute maximum) (αντίστοιχα ελάχιστο) στο σημείο $x_0 \in D_f$ όταν και μόνο όταν ισχύει $f(x_0) \geq f(x)$ (αντίστοιχα $f(x_0) \leq f(x)$) για κάθε $x \in D_f$.*

Κριτήριο πρώτης παραγώγου

Τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης f μπορεί να προσδιοριστούν με βάση τις παραγώγους $f'(x)$ και $f''(x)$. Συγκεκριμένα, ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 12 (Θεώρημα Fermat) *[24, σελ. 511] Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο τοπικού ακρότατου $x_0 \in D_f$ τότε $f'(x_0) = 0$.*

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι αν x_0 είναι ένα εσωτερικό σημείο του D_f για το οποίο ισχύει $f'(x_0) \neq 0$, τότε το x_0 αποκλείεται να είναι σημείο τοπικού ακρότατου. Με αυτή την έννοια, το θεώρημα Fermat χαρακτηρίζεται ως αναγκαία συνθήκη (necessary condition) ή συνθήκη πρώτης τάξης (first order condition) για τοπικό ακρότατο.

Οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ είναι:

1. *Στάσιμα ή σαγματικά σημεία* (stationary points) , δηλαδή εσωτερικά σημεία του $[\alpha, \beta]$ στα οποία η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται.

2. Τα άκρα του (α, β), αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της.

3. Σημεία στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.

4. Σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν ονομάζονται *κρίσιμα σημεία* (critical points) της f [26, σελ. 155].

Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του D_f, μπορούμε να προσδιορίσουμε το είδος του μελετώντας την μονοτονία της συνάρτησης στην περιοχή του x_0.

Θεώρημα 13 *[26, σελ. 156] Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x_0 και $f'(x_0) = 0$. Τότε η f παρουσιάζει στο x_0:*

- *Τοπικό ελάχιστο, αν $f'(x) < 0$ για $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ και $f'(x) > 0$ για $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$*

- *Τοπικό μέγιστο, αν $f'(x) > 0$ για $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ και $f'(x) < 0$ για $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$*

Κριτήριο δεύτερης παραγώγου

Για να εφαρμόσουμε το παραπάνω θεώρημα απαιτείται να προσδιορίσουμε το πρόσημο της f' εκατέρωθεν του x_0. Όταν ο προσδιορισμός αυτός δεν είναι εύκολος ή είναι αδύνατος, τότε το παρακάτω θεώρημα μπορεί να μας πληροφορήσει αν το x_0 είναι θέση τοπικού ακρότατου.

Θεώρημα 14 *[20, σελ. 248] Έστω μια συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) και $f'(x_0) = 0$ στο σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Η f παρουσιάζει στο x_0:*

- *Τοπικό ελάχιστο, αν $f''(x) > 0$*

- *Τοπικό μέγιστο, αν $f''(x) < 0$*

Οι παραπάνω συνθήκες χαρακτηρίζονται ως *ικανές συνθήκες* (sufficient conditions) ή *συνθήκες δεύτερης τάξης* (second order conditions) για τον προσδιορισμό τοπικών ακρότατων.

Κριτήριο παραγώγου ανώτερης τάξης

Όμως οι ικανές συνθήκες που αναφέραμε δεν καλύπτουν την περίπτωση $f''(x_0) = 0$. Μια ικανή συνθήκη για να είναι ένα στάσιμο σημείο θέση τοπικού ακρότατου δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 15 *[24, σελ. 512] Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ν φορές ($\nu \geq 2$) παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ με*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(\nu-1)}(x_0) = 0 \quad \text{και} \quad f^{(\nu)}(x_0) \neq 0.$$

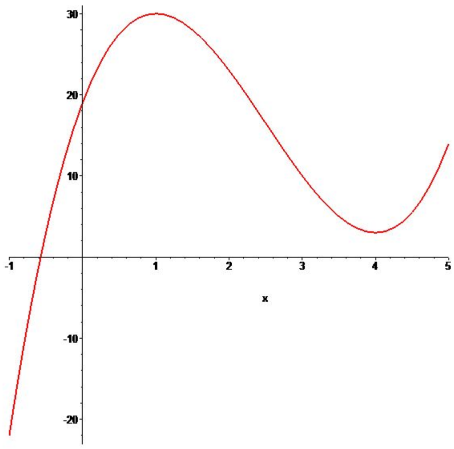
Τότε η f παρουσιάζει στο x_0:

- *Τοπικό ελάχιστο, αν $f^{(\nu)}(x_0) > 0$ και ν είναι άρτιος αριθμός.*
- *Τοπικό μέγιστο, αν $f^{(\nu)}(x_0) < 0$ και ν είναι άρτιος αριθμός.*
- *Δεν υπάρχει ακρότατο, αν ν είναι περιττός αριθμός.*

Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου μιας συνάρτησης f εργαζόμαστε ως εξής:

1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f.
2. Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.
3. Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 19$, $x \in [-1, 5]$. Έχουμε $f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$, $x \in [-1, 5]$. Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι οι $x = 1$, $x = 4$. Επομένως τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $x = 1$, $x = 4$. Οι τιμές της f στα κρίσιμα σημεία και στα άκρα του διαστήματος [-1, 5] είναι $f(1) = 30$, $f(4) = 3$, $f(0) = 19$ και $f(5) = 14$. Άρα, η μέγιστη τιμή της f στο [-1, 5] είναι ίση με 30 και παρουσιάζεται στο $x = 1$, ενώ η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με 3 και παρουσιάζεται για $x = 4$. Στο Σχήμα 3.10 δίνουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Σχήμα 3.10: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 19$ στο $[-1, 5]$.

3.4.3 Καμπυλότητα

Το επόμενο χαρακτηριστικό στο οποίο θα αναφερθούμε είναι η καμπυλότητα μιας συνάρτησης. Η καμπυλότητα αφορά τις έννοιες της κοιλότητας και της κυρτότητας, που χρησιμοποιούνται ευρέως στην Οικονομική Θεωρία.

Ορισμός 41 *[26, σελ. 150] Ας υποθέσουμε ότι η f ορίζεται στο $[\alpha, \beta]$. Λέγεται κυρτή (convex) αν και μόνο αν για κάθε x_1, $x_2 \in [\alpha, \beta]$ και για κάθε $\alpha \in (0, 1)$ ισχύει:*

$$f[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

Παρόμοια η συνάρτηση λέγεται κοίλη (concave) αν και μόνο αν για κάθε x_1, $x_2 \in [\alpha, \beta]$ και για κάθε $\alpha \in (0, 1)$ ισχύει:

$$f[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2).$$

Αν οι ανισότητες αντικατασταθούν από αυστηρές ανισότητες, κάνουμε λόγο για αυστηρά κυρτή ή αυστηρά κοίλη συνάρτηση.

Κριτήριο πρώτης και δεύτερης παραγώγου

Θεώρημα 16 *[24, σελ. 525] Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β). Τότε η f είναι κυρτή ή κοίλη στο $[\alpha, \beta]$ αν και μόνο αν η f' είναι αύξουσα ή φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$, αντίστοιχα.*

Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3 *[24, σελ. 525] Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ ισχύει $f''(x) \geq 0$ ή $f''(x) \leq 0$ τότε η f είναι στο $[\alpha,\beta]$ κυρτή ή κοίλη, αντίστοιχα.*

3.4.4 Σημεία καμπής

Κατά την μελέτη μιας συνάρτησης ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν σημεία ορισμού της στα οποία η συνάρτηση αλλάζει καμπυλότητα και από κυρτή γίνεται κοίλη ή αντίστροφα. Τέτοια σημεία ονομάζονται *σημεία καμπής* (inflection points) της συνάρτησης.

Ορισμός 42 *[24, σελ. 526] Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Τότε το σημείο $(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται* σημείο καμπής *του γραφήματος της f όταν και μόνο όταν υπάρχει μια ε-γειτνίαση $N_\varepsilon(x_0) \subset [\alpha,\beta]$ του x_0 τέτοια ώστε η f από έστω κυρτή στο διάστημα $[x_0 - \varepsilon, x_0]$ γίνεται κοίλη στο διάστημα $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ και αντίστροφα. Το σημείο x_0 ονομάζεται* θέση σημείου καμπής *του γραφήματος της f.*

Πιθανά σημεία καμπής μιας συνάρτησης μπορούν να προσδιοριστούν με τη βοήθεια της δεύτερης παραγώγου της. Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη σημείου καμπής.

Θεώρημα 17 *[24, σελ. 528] Αν $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής μιας συνάρτησης f, τότε είτε $f''(x_0) = 0$ είτε η $f''(x)$ δεν ορίζεται στο x_0.*

Για παράδειγμα, το σημείο $x_0 = 0$ είναι σημείο καμπής της $f(x) = x^3$, αφού αποτελεί ρίζα της $f''(x) = 6x$. Λόγω της παραπάνω Πρότασης η $f(x)$ είναι κοίλη στο $(-\infty, 0)$ και κυρτή στο $(0, +\infty)$.

3.4.5 Ασύμπτωτες

Το τελευταίο στοιχείο που μας ενδιαφέρει κατά τη μελέτη μίας συνάρτησης f είναι οι ασύμπτωτες. Με τις ασύμπτωτες περιγράφεται η συμπεριφορά της συνάρτησης καθώς το x παίρνει απεριόριστα μεγάλες ή απεριόριστα μικρές τιμές ή καθώς το x τείνει σε σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν ορίζεται. Διακρίνουμε τρία είδη ασύμπτωτων: τις πλάγιες, τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες.

Ορισμός 43 *[24, σελ. 531] Η ευθεία $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$ λέγεται* πλάγια ασύμπτωτη *(oblique asymptote) της f όταν και μόνο όταν ισχύει*

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (\alpha x + \beta)] = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x) - (\alpha x + \beta)] = 0.$$

Ορισμός 44 *[26, σελ. 161] Αν το όριο στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ του λόγου $f(x)/x$ είναι 0, τότε $\alpha = 0$ και η ευθεία γίνεται $f(x) = \beta$ και λέγεται* οριζόντια ασύμπτωτη *(horizontal asymptote) της f.*

Εκτός από την συμπεριφορά της συνάρτησης καθώς το x αυξάνεται ή μειώνεται απεριόριστα, ενδιαφέρον έχει και η συμπεριφορά της καθώς το x προσεγγίζει σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν ορίζεται.

Ορισμός 45 *[26, σελ. 161] Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x), \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη *(vertical asymptote) της f.*

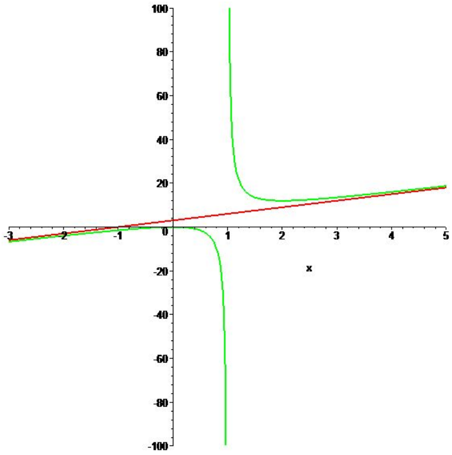
Για παράδειγμα, έστω η καμπύλη $f(x) = \frac{3x}{x-1} + 3x$. Εξετάζουμε αν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}(\frac{3x}{x-1} + 3x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}(\frac{3x}{x-1} + 3x) = +\infty.$$

Άρα η $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη. Στην συνέχεια, εξετάζουμε αν έχει πλάγια ασύμπτωτη:

$$\alpha = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{3}{x-1} + 3) = 3$$
$$\beta = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - \alpha x) = \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{3x}{x-1} + 3x - 3x) = 3.$$

Άρα η ευθεία $f(x) = 3x + 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της καμπύλης. Στο Σχήμα 3.11 δίνουμε την γραφική παράσταση της f. Η πράσινη καμπύλη αντιστοιχεί στην πλάγια ασύμπτωτη $y = 3x + 3$ αυτής.



Σχήμα 3.11: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{3x}{x-1} + 3x$ στο $[-3, 5]$.

Σημείωση 3 *[20, σελ. 272] Η οριζόντια ασύμπτωτη μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση της πλάγιας, όταν $\alpha = 0$. Έτσι, πλάγια και οριζόντια ασύμπτωτη δεν μπορούν να συνυπάρξουν σε μια καμπύλη.*

3.5 Ολοκληρωτικός λογισμός

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε την έννοια του ολοκληρώματος, έννοια απαραίτητη για την μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς των ενδογενών μεταβλητών ενός υποδείγματος. Η *ολοκλήρωση* (integration) είναι η αντίστροφη πράξη της παραγώγισης. Με την ολοκλήρωση μιας συνάρτησης βρίσκουμε όλες τις συναρτήσεις που ονομάζονται αντιπαράγωγοι ή αόριστα ολοκληρώματα.

Ορισμός 46 *[24, σελ. 592] Μια συνάρτηση F είναι μια* αντιπαράγωγος *(antiderivative) ή μια* παράγουσα συνάρτηση *(deriving function) ή μια* αρχική συνάρτηση *(initial function) της f σε ένα διάστημα $S \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in S$.*

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $F(x) = x^3$ είναι μια παράγουσα της $f(x) = 3x^2$ στο $\mathbb{R}$, αφού $(x^3)' = 3x^2$. Παρατηρούμε ότι και όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = x^3 + c = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο $\mathbb{R}$, αφού $(x^3 + c)' = 3x^2$.

3.5.1 Αόριστο ολοκλήρωμα

Ορισμός 47 *[24, σελ. 594] Αν f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα $S \in \mathbb{R}$ και F μια αντιπαράγωγός της, τότε το σύνολο των αντιπαραγώγων $F + C$ της f ονομάζεται* αόριστο ολοκλήρωμα (indefinite integral) *της f και συμβολίζεται ως*

$$\int f(x)dx.$$

Το σύμβολο $\int$, που ετέθη από τον Leibniz, ονομάζεται *σύμβολο ολοκλήρωσης (symbol of integration)* και το σύμβολο dx υποδηλώνει ότι η ολοκλήρωση γίνεται ως προς την μεταβλητή x. Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι το αόριστο ολοκλήρωμα είναι μια οικογένεια συναρτήσεων, οι οποίες περιγράφονται από την σχέση $\int f(x)dx = F(x) + c$, όπου c είναι μία τυχαία σταθερά και ονομάζεται *σταθερά ολοκλήρωσης (constant of integration)* .

Στη συνέχεια δίνουμε τα αόριστα ολοκληρώματα κάποιων στοιχειωδών συναρτήσεων:

- $\int 0dx = c$
- $\int 1dx = x + c$
- $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$
- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c$

Ιδιότητες αόριστων ολοκληρωμάτων

Οι σπουδαιότερες ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων είναι οι ακόλουθες:

- *Ιδιότητα της ομογένειας των ολοκληρωμάτων (Homogeneity property of integrals)*

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx, \lambda \in \mathbb{R}^*$$

- *Ιδιότητα της προσθετικότητας των ολοκληρωμάτων (Additivity property of integrals)*

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

3.5.2 Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Στη συνέχεια αναφέρουμε δύο βασικές τεχνικές υπολογισμού αόριστων ολοκληρωμάτων [24, σελ. 603–613].

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Με την μέθοδο αυτή υπολογίζουμε ολοκληρώματα που έχουν ή μπορούν να πάρουν την μορφή $\int f(g(x))g'(x)dx$. Η μέθοδος ολοκλήρωσης με αντικατάσταση βασίζεται στον αλυσωτό κανόνα παραγώγισης και εκφράζεται με τον ακόλουθο τύπο:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du,$$

όπου $u = g(x)$ και $du = g'(x)dx$.

Για παράδειγμα, έστω το αόριστο ολοκλήρωμα $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$. Θέτουμε $u = x^2 + 1$ και $du = (x^2+1)'dx = 2xdx$, οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx = \int \sqrt{u}du = \int u^{1/2}du = \frac{2}{3}u^{3/2} + c = \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c$.

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Η μέθοδος αυτή εκφράζεται με τον τύπο:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Για παράδειγμα, έστω το ολοκλήρωμα $\int (4x^3+1)lnxdx$. Έχουμε

$$\int (4x^3+1)lnxdx = \int (x^4+x)lnxdx = (x^4+x)lnx - \int (x^4+x)\frac{1}{x}dx =$$

$$= (x^4+x)lnx - \int (x^3+1)dx = (x^4+x)lnx - \frac{x^4}{4} - x + c.$$

3.5.3 Ορισμένο ολοκλήρωμα

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1,\ldots,\nu$ με την βοήθεια $\nu-1$ σημείων $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$. Το σύνολο των σημείων με τα οποία χωρίζουμε το $[\alpha,\beta]$ σε ν υποδιαστήματα λέγεται *διαμερισμός* του διαστήματος αυτού. Στην συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, για κάθε $k \in (1,\ldots,\nu)$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_\nu)\Delta x_\nu,$$

το οποίο συμβολίζεται:

$$S_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Το άθροισμα αυτό ονομάζεται *άθροισμα Riemann* .

Ορισμός 48 *[26, σελ. 437] Η συνάρτηση f λέγεται ολοκληρώσιμη κατά Riemann ως προς x στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ αν υπάρχει το όριο του αθροίσματος Riemann της f για $\nu \to +\infty$. Όταν το όριο αυτό υπάρχει, είναι ανεξάρτητο του διαμερισμού, ονομάζεται* ολοκλήρωμα Riemann *και συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, δηλαδή*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to+\infty} \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Η συνάρτηση f λέγεται *ολοκληρωτέα συνάρτηση* και τα α και β λέγονται *κάτω και άνω όριο* ολοκλήρωσης, αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι αριθμός, ενώ το αόριστο είναι ένα σύνολο συναρτήσεων.

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε το άθροισμα Riemann πλησιάζει την τιμή A που είναι το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$. Όσο περισσότερα είναι τα υποδιαστήματα στα οποία χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$, τόσο το άθροισμα Riemann θα πλησιάζει την τιμή $A = \int_\alpha^\beta f(x)dx$. Αν μάλιστα χωρίσουμε το $[\alpha, \beta]$ σε άπειρο αριθμό υποδιαστημάτων, τότε το άθροισμα Riemann, που παριστάνει το άθροισμα των εμβαδών των αντίστοιχων ορθογωνίων, θα τείνει στην τιμή $A = \int_\alpha^\beta f(x)dx$ [26, σελ. 437].

Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω f και g δύο συναρτήσεις ολοκληρώσιμες στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Οι ιδιότητες που ισχύουν για το αόριστο ολοκλήρωμα ισχύουν και για το ορισμένο. Επιπλέον, για το ορισμένο ολοκλήρωμα αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι ακόλουθες γραμμικές ιδιότητες [24, σελ. 638–641]:

- *Ιδιότητα της ομογένειας*: $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)dx$, όπου λ σταθερά
- *Ιδιότητα της γραμμικότητας*: $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)dx + \mu \int_\alpha^\beta g(x)dx$
- *Ιδιότητα της μονοτονίας*: Αν $f(x) \leq g(x)$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta g(x)dx$
- *Ιδιότητα της προσθετικότητας*: $\int_\alpha^\beta [f(x) + g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$
- $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$
- Αν $f(x) = c$ σταθερά, τότε $\int_\alpha^\beta c dx = c(\beta - \alpha)$
- $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$
- $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$

Θεμελιώδη θεωρήματα ολοκληρωτικού λογισμού

Θεώρημα 18 (Θεώρημα μέσης τιμής ολοκληρωτικού λογισμού) *[24, σελ. 641] Έστω συνάρτηση f ολοκληρώσιμη και συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\xi \in [\alpha, \beta]$ που ικανοποιεί την εξίσωση*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = (\beta - \alpha)f(\xi) \Leftrightarrow \frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\alpha f(x)dx = f(\xi).$$

Θεώρημα 19 (Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού) *[26, σελ. 442]* *Έστω f συνάρτηση η οποία είναι ολοκληρώσιμη και συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και F μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

Κεφάλαιο 4

Οικονομικές εφαρμογές λογισμού μιας μεταβλητής

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τις εφαρμογές του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού μιας μεταβλητής στην Οικονομική Θεωρία. Θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με οικονομικές συναρτήσεις πραγματικών μεταβλητών, δεδομένου ότι τα οικονομικά μεγέθη βρίσκονται ή προσφέρονται σε περιορισμένες ποσότητες, π.χ. με βάση το εισόδημά μας μπορούμε να αγοράσουμε συγκεκριμένες ποσότητες ενός προϊόντος. Για περισσότερα στοιχεία ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει, ενδεικτικά, στην ελληνική βιβλιογραφία [5, 23, 24, 26, 31] και στην αγγλική [1, 2, 4, 7].

4.1 Οικονομικές εφαρμογές παραγώγου

Η έννοια της παραγώγου είναι ένα από τα βασικότερα εργαλεία με τα οποία μπορούμε να μελετήσουμε οικονομικές συναρτήσεις, δηλαδή συναρτήσεις των οποίων οι μεταβλητές εκφράζουν οικονομικά μεγέθη, όπως κόστος, έσοδα, παραγωγή, κέρδη, επενδύσεις [24, σελ. 541].

Στα περισσότερα οικονομικά προβλήματα, υποθέτουμε ότι οι παράγοντες του οικονομικού συστήματος (καταναλωτές, επιχειρήσεις, κυβέρνηση) επιδιώκουν να επιλέξουν την απόφαση η οποία οδηγεί στο καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα για ένα δεδομένο επίπεδο διαθέσιμων πόρων μεταξύ ενός συνόλου εναλλακτικών αποφάσεων. Αν οι επιπτώσεις των αποφάσεων περιγράφονται από μια συνάρτηση, τότε η αναζήτηση της καλύτερης απόφασης ισοδυναμεί με την εύρεση του μέγιστου ή του ελάχιστου της συνάρτησης αυτής. Έτσι, η συμπεριφορά του καταναλωτή είναι τέτοια που να του δίνει τη μεγαλύτερη δυνατή χρησιμότητα από την κατανάλωση των αγαθών που αγοράζει, ενώ οι επιχειρήσεις στρέφονται σε λύσεις που τους επιτρέπουν είτε να μεγιστοποιήσουν το κέρδος τους είτε να ελαχιστοποιήσουν το κόστος τους.

Οικονομικά μπορούμε να κατατάξουμε τέτοια προβλήματα μεγιστοποίησης και ελαχιστοποίησης κάτω από τον γενικό τίτλο της *βελτιστοποίησης*. Η *βελτιστοποίηση* (optimization) οικονομικών συναρτήσεων που συχνά ονομάζεται και *οικονομικός προγραμματισμός* είναι μια από τις πιο βασικές και ενδιαφέρουσες περιοχές των οικονομικών επιστημών και τα εργαλεία του διαφορικού λογισμού παίζουν σημαντικό ρόλο στην επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων [24, σελ. 543].

4.1.1 Οικονομικά Υποδείγματα

Τα οικονομικά υποδείγματα αποτελούνται από μία ή περισσότερες εξισώσεις, οι οποίες εκφράζουν με μαθηματικό τρόπο μια συγκεκριμένη θεωρία σχετικά με την εξέλιξη κάποιων μεγεθών [26, σελ. 26].

Μεταβλητές

Τα μεγέθη των οποίων οι τιμές μπορεί να μεταβάλλονται είναι γνωστά ως *μεταβλητές* (variables). Μεταβλητές που συχνά χρησιμοποιούνται στην Οικονομία είναι τα έσοδα ή τα κέρδη μιας επιχείρησης, το εθνικό εισόδημα, ο πληθωρισμός, ο αριθμός των εργαζομένων σε μία επιχείρηση.

Με εφαρμογή κατάλληλων μαθηματικών μεθόδων στις εξισώσεις ενός υποδείγματος, μπορούμε να υπολογίσουμε τις συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές που θα πάρουν μία ή περισσότερες μεταβλητές. Για παράδειγμα, σε ένα οικονομικό υπόδειγμα που περιγράφει τα έσοδα και τα έξοδα μιας επιχείρησης σε σχέση με την παραγωγή της, μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος της παραγωγής που μεγιστοποιεί τα συνολικά κέρδη της επιχείρησης.

Οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές προκύπτουν από τις εξισώσεις του υποδείγματος λέγονται *ενδογενείς μεταβλητές* (endogenous variables). Αντίθετα, οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές καθορίζονται από εξωτερικούς παράγοντες, που δεν περιλαμβάνονται στο συγκεκριμένο υπόδειγμα, λέγονται *εξωγενείς μεταβλητές* (exogenous variables) [26, σελ. 26–27].

Σταθερές

Εκτός από τις μεταβλητές, σε ένα οικονομικό υπόδειγμα περιλαμβάνονται συνήθως και μεγέθη των οποίων οι τιμές δεν μεταβάλλονται. Τα μεγέθη αυτά λέγονται *σταθερές* (constants) του υποδείγματος [26, σελ. 27]. Όταν μια σταθερά τοποθετείται δίπλα σε μια μεταβλητή, τότε καλείται *συντελεστής* αυτής της μεταβλητής. Όμως, ένας συντελεστής μπορεί να είναι και σύμβολο αντί αριθμός, π.χ. $\alpha \cdot P$. Αν και το σύμβολο α είναι μια δεδομένη σταθερά, μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Γι' αυτό το λόγο ονομάζεται *παραμετρική σταθερά* ή *παράμετρος*.

Κατηγορίες εξισώσεων

Στα περισσότερα οικονομικά υποδείγματα οι μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους με μαθηματικές σχέσεις, οι οποίες περιγράφονται από τις εξισώσεις του υποδείγματος. Στα υποδείγματα που χρησιμοποιούνται στην Οικονομική Επιστήμη μπορούμε να διακρίνουμε τρεις κατηγορίες εξισώσεων, με βάση την ερμηνεία τους: τις εξισώσεις ορισμού, τις εξισώσεις συμπεριφοράς και τις εξισώσεις ισορροπίας [26, σελ. 27–28].

- Μια *εξίσωση ορισμού* (ή ταυτότητα) ισοδυναμεί με έναν ορισμό ενός μεγέθους με βάση άλλα μεγέθη του υποδείγματος.

  Το πιο συνηθισμένο παράδειγμα εξίσωσης ορισμού είναι η εξίσωση ορισμού των κερδών μιας επιχείρησης $\pi = TR - TC$, όπου π είναι τα κέρδη, TR τα συνολικά έσοδα και TC τα συνολικά κόστη της επιχείρησης.

- Μια *εξίσωση συμπεριφοράς* περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται μια μεταβλητή όταν μεταβάλλονται άλλες μεταβλητές του υποδείγματος.

  Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την εξίσωση $TD = 15 - 0.75 \cdot U$, όπου TD είναι τα έσοδα από την άμεση φορολογία (σε δισεκατομμύρια €) και U το επίπεδο ανεργίας, ως ποσοστό του οικονομικά ενεργού πληθυσμού. Η εξίσωση αυτή υποδηλώνει ότι αν εξαλειφθεί εντελώς η ανεργία, τότε τα έσοδα από την άμεση φορολογία θα είναι 15 δις € και ότι για κάθε αύξηση της ανεργίας κατά μία μονάδα τα έσοδα θα μειώνονται κατά 0.75 δις €.

- Μια *εξίσωση συνθηκών* χρησιμοποιείται όταν ζητάμε να ικανοποιείται μία συνθήκη [5, σελ. 32]. Για παράδειγμα, οι συνθήκες ισορροπίας απαντώνται σε υποδείγματα στα οποία υπεσέρχεται η έννοια του σημείου ισορροπίας [1].

  Η πιο γνωστή εξίσωση ισορροπίας είναι, ίσως, η εξίσωση $q_d = q_s$, όπου q_d και q_s είναι αντίστοιχα η ζητούμενη και η προσφερόμενη ποσότητα ενός συγκεκριμένου προϊόντος. Η συνθήκη αυτή πρέπει να ισχύει προκειμένου η αγορά του συγκεκριμένου προϊόντος να είναι σε ισορροπία. Οι συνθήκες ισορροπίας προσδιορίζουν τις τιμές ισορροπίας των ενδογενών μεταβλητών για δεδομένες τιμές των εξωγενών μεταβλητών και των παραμέτρων του υπό εξέταση φαινομένου.

4.1.2 Η έννοια της Οριακής και της Μέσης συνάρτησης

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε την μέση και την οριακή συνάρτηση και πως μπορούμε να τις εφαρμόσουμε στην ανάλυση των οικονομικών φαινομένων. Στις οικονομικές εφαρμογές ένα μέγεθος y εξαρτάται εν γένει, από κάποιο άλλο μέγεθος x. Η συνάρτηση $y = f(x)$ που περιγράφει την σχέση μεταξύ των δύο μεγεθών λέγεται συνήθως *ολική συνάρτηση* (total function).

Αν η ολική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη τότε ορίζεται η συνάρτηση της πρώτης παραγώγου $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, η οποία ονομάζεται *οριακή συνάρτηση* (marginal function). Η οριακή συνάρτηση εκφράζει τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής που οφείλεται σε μεταβολή της ανεξάρτητης κατά μία μονάδα. Εκτός από την οριακή συνάρτηση σε κάθε ολική συνάρτηση $y = f(x)$ αντιστοιχεί και μια *μέση συνάρτηση* (average function) $\frac{f(x)}{x}$ η οποία εκφράζει το μέγεθος της εξαρτημένης μεταβλητής ανά μονάδα ανεξάρτητης μεταβλητής [26, σελ. 171–172].

Για παράδειγμα, αν $C(q) = 5q^3 - 2q^2 + 10q + 20$ η συνάρτηση ολικού κόστους, τότε $\frac{C(q)}{q} =$

[1] Με τον όρο σημείο ή κατάσταση ισορροπίας (equilibrium) εννοούμε μια κατάσταση στην οποία οι μεταβλητές του συγκεκριμένου υποδείγματος που μελετάμε δεν μεταβάλλονται.

$5q^2 - 2q + 10 + \frac{20}{q}$ είναι η συνάρτηση του μέσου κόστους και $MC(q) = \frac{dC(q)}{dq} = 15q^2 - 4q + 10$ είναι η συνάρτηση του οριακού κόστους.

4.1.3 Ελαστικότητα συναρτήσεων

Στο Κεφάλαιο 3 ορίσαμε ως ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης $y = f(x)$ την παράγωγο $f'(x)$. Αυτό σημαίνει ότι με κάθε μεταβολή των x και y μεταβάλλεται και η παράγωγος. Ένας ρυθμός μεταβολής που είναι ανεξάρτητος από τα x και y είναι η *ελαστικότητα*.

Ορισμός 49 *[24, σελ. 545] Η* ελαστικότητα *(elasticity) μιας συνάρτησης $y = f(x)$ συμβολίζεται με n_y ή ε_y και ορίζεται ως ο λόγος της ποσοστιαίας μεταβολής $E_y = \frac{dy}{y}$ της y προς την ποσοστιαία μεταβολή $E_x = \frac{dx}{x}$ της x. Δηλαδή*

$$n_y = \varepsilon_y = \frac{E_y}{E_x} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}f'(x)$$

Αν στην παραπάνω σχέση πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με $\frac{y}{dx}$ παίρνουμε:

$$n_y = \varepsilon_y = \frac{\frac{dy}{y}\frac{y}{dx}}{\frac{dx}{x}\frac{y}{dx}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}} = \frac{\text{οριακή συνάρτηση}}{\text{μέση συνάρτηση}}$$

Ελαστικότητα σημείου

Αν η μεταβολή της μεταβλητής x είναι απειροελάχιστη, τότε προκύπτει μία άλλη κατηγορία ελαστικότητας, η *ελαστικότητα σημείου* (point elasticity), που δίνεται από τον τύπο

$$\varepsilon_y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}.$$

Αν οι εκφράσεις Δx και Δy αναχθούν στα διαφορικά dx και dy, τότε η ελαστικότητα σημείου δίνεται από τον τύπο της ελαστικότητας [5, σελ. 289–293].

Ελαστικότητα τόξου

Συχνά ο προσδιορισμός της αναλυτικής μορφής μιας οικονομικής συνάρτησης δεν είναι δυνατός. Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιείται η ελαστικότητα μεταξύ δύο σημείων (x_1, y_1) και (x_2, y_2) του γραφήματος της f που ονομάζεται *ελαστικότητα τόξου* (arc elasticity) ή *τοξοειδή ελαστικότητα*. Η ελαστικότητα τόξου μπορεί να λάβει μία από τις παρακάτω μορφές [24, σελ. 546]:

- στο σημείο (x_1, y_1) έχουμε:
$$\varepsilon_{y_1} = \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
- στο σημείο (x_2, y_2) έχουμε:
$$\varepsilon_{y_2} = \frac{x_2}{y_2} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
- της μέσης τιμής των (x_1, y_1) και (x_2, y_2) έχουμε:
$$\varepsilon_{y_{12}} = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

.

Σημείωση 4 *[24, σελ. 547] Η ελαστικότητα τόξου μειονεκτεί σε σχέση με την σημειακή ελαστικότητα, όπως μειονεκτεί το μέσο σε σχέση με το οριακό μέγεθος.*

Ορισμός 50 *[24, σελ. 548] Η συνάρτηση $y = f(x)$ ονομάζεται ελαστική (elastic), ανελαστική (inelastic) και μοναδιαίας ελαστικότητας (unit elasticity) σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της αν η ελαστικότητά της στο σημείο αυτό είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση με την μονάδα, αντίστοιχα.*

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση ζήτησης $D(q) = 200 - 5p$. Η οριακή συνάρτηση και η μέση συνάρτηση της δεδομένης ζήτησης είναι
$$\frac{dq}{dp} = -5 \quad \text{και} \quad \frac{q}{p} = \frac{200 - 5p}{q}.$$
Άρα η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή είναι
$$\varepsilon_d = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q} = -5\frac{p}{200 - 5p} = \frac{-p}{40 - p}.$$
Η ελαστικότητα σημείου υπολογίζεται αν δώσουμε τιμή στην μεταβλητή p. Η συνάρτηση ζήτησης είναι μοναδιαίας ελαστικότητας για $p = 20$, αφού $|\varepsilon_d| = 1$, ελαστική για $p = 30$, αφού $|\varepsilon_d| = 3$ και ανελαστική για $p = 10$, αφού $|\varepsilon_d| = 0,3$. Αν υποθέσουμε ότι $p_1 = 8$ και $p_2 = 14$, τότε με εφαρμογή του τύπου της συνάρτησης προκύπτει ότι $q_1 = 160$ και $q_2 = 130$. Η ελαστικότητα τόξου δίνεται από την σχέση:
$$\varepsilon_{12} = \frac{\Delta q}{\Delta p}\frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2} = \frac{130 - 160}{14 - 8}\frac{8 + 14}{160 + 130} = -0,4.$$
Άρα η συνάρτηση ζήτησης είναι ανελαστική.

Αν $|\varepsilon_y| = 0$ η συνάρτηση είναι πλήρως ανελαστική και αν $|\varepsilon_y| \to +\infty$ πλήρως ελαστική [26, σελ. 180].

4.1.4 Σχέσεις ολικών, μέσων και οριακών μεγεθών και ελαστικοτήτων αυτών

Αν $y = f(x)$ η συνάρτηση ενός ολικού μεγέθους, τότε οι συναρτήσεις του μέσου μεγέθους και του οριακού μεγέθους είναι $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ και $f'(x)$ αντίστοιχα. Με παραγώγιση της συνάρτησης του μέσου μεγέθους $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ παίρνουμε:

$$h'(x) = \frac{dh(x)}{dx} = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \quad \text{συνάρτηση οριακού μέσου μεγέθους.}$$

Παρακάτω θα αναφέρουμε κάποιες βασικές προτάσεις, χρήσιμες για τη μελέτη διαφόρων οικονομικών συναρτήσεων. Για τις αποδείξεις των προτάσεων, δείτε [24, σελ. 552–554].

Πρόταση 4 *Η συνάρτηση ενός μέσου μεγέθους $h(x)$ έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία που είναι ίση με την αντίστοιχη συνάρτηση του οριακού μεγέθους $f'(x)$. Παρουσιάζει τοπικά ελάχιστα ή τοπικά μέγιστα ανάλογα με το αν η παράγωγος του οριακού μεγέθους είναι θετική, δηλαδή $f''(x) > 0$ ή αρνητική δηλαδή, $f''(x) < 0$ αντίστοιχα.*

Πρόταση 5 *΄Οταν $h'(x) < 0$ τότε $f'(x) < h(x)$. ΄Οταν $h'(x) = 0$ τότε $f'(x) = h(x)$ και η $h(x)$ έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία αυτά και όταν η $h'(x) > 0$ τότε $f'(x) > h(x)$.*

Πρόταση 6 *Η συνάρτηση ενός μέσου μεγέθους έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία που η ελαστικότητα του αντίστοιχου ολικού μεγέθους είναι ίση με τη μονάδα.*

Πρόταση 7 *Η συνάρτηση ενός ολικού μεγέθους έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία που η ελαστικότητα του αντίστοιχου μέσου μεγέθους ισούται με -1.*

4.1.5 Συνάρτηση παραγωγής

Η συνάρτηση παραγωγής (production function) για ένα αγαθό εκφράζεται από μία εξίσωση η οποία δίνει την μέγιστη ποσότητα του αγαθού που μπορεί να παραχθεί από οποιοδήποτε συγκεκριμένο σύνολο εισροών, όταν στην παραγωγή χρησιμοποιείται η καλύτερη τεχνική που είναι διαθέσιμη. Η συνάρτηση παραγωγής συνιστά μία συναρτησιακή σχέση εισροής συντελεστών και εκροής προϊόντος. Η σχέση αυτή αλγεβρικά εκφράζεται ως εξής:

$$y = f(K, L, Y_1, \ldots, Y_K)$$

όπου y είναι το παραγόμενο προϊόν, K το χρησιμοποιούμενο κεφάλαιο, L η χρησιμοποιηθείσα εργασία και $Y_1, Y_2, \ldots, Y_K$ οι άλλοι χρησιμοποιούμενοι παραγωγικοί συντελεστές [22, σελ. 292].

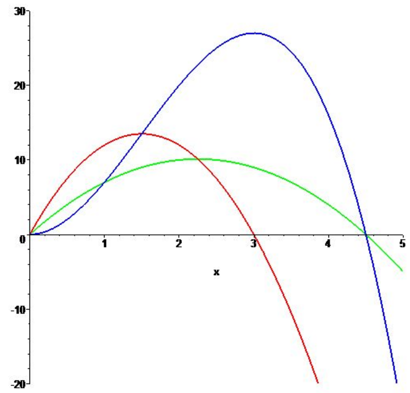
Θα αναφερθούμε εδώ μόνο σε *βραχυχρόνιες συναρτήσεις παραγωγής* (short-term production functions) και θα υποθέσουμε ότι εκτός από έναν οι υπόλοιποι συντελεστές παραγωγής παραμένουν σταθεροί. Η συνάρτηση ολικού προϊόντος δίνεται από την σχέση $q = f(x)$, όπου q είναι η παραγόμενη ποσότητα και x η εργασία. Η *μέση συνάρτηση παραγωγής* εκφράζει την ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος ανά μονάδα εισροής x και υπολογίζεται ως $AP = \frac{q}{x}$. Η AP ονομάζεται *μέσο προϊόν* (average product) της εισροής x. Η *οριακή συνάρτηση παραγωγής* εκφράζει την μεταβολή του προϊόντος που οφείλεται σε μία μικρή μεταβολή (κατά μία μονάδα) της εισροής x. Η $MP = \frac{dq}{dx}$ ονομάζεται *οριακό προϊόν* (marginal product) της εισροής x [26, σελ. 172].

Σχέσεις μεταξύ ολικού, μέσου και οριακού προϊόντος

Στο Σχήμα 4.1 παρουσιάζουμε τη σχέση μεταξύ του συνολικού, οριακού και μέσου προϊόντος κατά την βραχυχρόνια περίοδο. Η μπλε καμπύλη αναφέρεται στο οριακό, η πράσινη στο μέσο και η κόκκινη στο συνολικό προϊόν, αντίστοιχα. Διαπιστώνουμε ότι:

- Αν η εισροή είναι στο επίπεδο $x = 0$ δεν υπάρχει παραγωγή.
- Το οριακό προϊόν είναι θετικό μέχρι ενός σημείου και στη συνέχεια γίνεται αρνητικό. Συνεπώς η ολική παραγωγικότητα αρχικά είναι αύξουσα και στη συνέχεια είναι φθίνουσα, παρουσιάζοντας έτσι τοπικό μέγιστο.
- Το οριακό προϊόν μεγιστοποιείται όταν το συνολικό παρουσιάζει σημείο καμπής.

Πιο συγκεκριμένα το Σχήμα 4.1 αφορά την συνάρτηση παραγωγής $q = f(x) = -2x^3 + 9x^2$. Η οριακή συνάρτηση $MP = -6x^2 + 18x$ μηδενίζεται στα σημεία $x_1 = 0$ και $x_2 = 3$. Η συνάρτηση q παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x_1 = 0$ με $f(0) = 0$ και τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_2 = 3$ με $f(3) = 27$. Για να διαπιστώσουμε αν υπάρχει σημείο καμπής υπολογίζουμε τις ρίζες της $MP' = -12x + 18$. Πράγματι το σημείο $x = 1.5$ είναι σημείο καμπής και στο σημείο αυτό το οριακό προϊόν μεγιστοποιείται.



Σχήμα 4.1: Καμπύλες Συνολικού, Οριακού και Μέσου Προϊόντος.

Η συμπεριφορά του συνολικού, μέσου και οριακού προϊόντος εξηγείται από τον *νόμο της φθίνουσας ή μη ανάλογης απόδοσης*. Ο νόμος της φθίνουσας ή μη ανάλογης απόδοσης δηλώνει ότι στην βραχυχρόνια περίοδο παραγωγής, δηλαδή στην περίοδο που υπάρχει ένας τουλάχιστον σταθερός παραγωγικός συντελεστής, υπάρχει ένα σημείο μέχρι το οποίο η διαδοχική προσθήκη ίσων μονάδων του μεταβλητού συντελεστή δίνει συνεχώς μεγαλύτερες αυξήσεις στο ολικό προϊόν. Πέρα από το σημείο αυτό κάθε διαδοχική ίση αύξηση του μεταβλητού συντελεστή θα δίνει όλο και μικρότερες αυξήσεις στο ολικό προϊόν. Σε αυτή τη συμπεριφορά οφείλεται και η αρχική αύξηση και η τελική μείωση του οριακού προϊόντος [19, σελ. 122–125].

Επιπλέον, στις συναρτήσεις ολικού, μέσου και οριακού προϊόντος παρατηρούμε ότι [24, σελ. 556]:

- Στα σημεία που οι συναρτήσεις οριακού και μέσου προϊόντος είναι ίσες, η συνάρτηση του μέσου προϊόντος έχει τοπικά ελάχιστα ή τοπικά μέγιστα ανάλογα με το αν η παράγωγος του οριακού προϊόντος είναι θετική ή αρνητική αντίστοιχα στα σημεία αυτά.

- Όταν το οριακό μέσο προϊόν είναι αρνητικό τότε το οριακό προϊόν είναι μικρότερο από το μέσο προϊόν. Όταν το οριακό μέσο προϊόν είναι ίσο με μηδέν τότε το οριακό προϊόν είναι ίσο με το μέσο και το μέσο προϊόν έχει τοπικά ακρότατα στο σημείο αυτό. Τέλος όταν το οριακό μέσο προϊόν είναι θετικό τότε το οριακό προϊόν είναι μεγαλύτερο από το μέσο προϊόν.

- Η συνάρτηση του μέσου προϊόντος έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία που η ελαστικότητα της συνάρτησης παραγωγής είναι ίση με 1.
- Η συνάρτηση παραγωγής έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία που η ελαστικότητα του μέσου προϊόντος είναι ίση με -1.

4.1.6 Μορφές αγοράς

Πλήρης ανταγωνισμός

Ο *πλήρης ανταγωνισμός* (perfect competition) είναι το οικονομικό υπόδειγμα της αγοράς που έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά [22, σελ. 306]:

1. Ο αριθμός πωλητών και αγοραστών είναι τόσο μεγάλος, με αποτέλεσμα η τιμή των αγαθών να μην επηρεάζεται από αυτούς. Οι αγοραστές προσπαθούν να αποκτήσουν το αγαθό στη μικρότερη δυνατή τιμή και οι πωλητές προσπαθούν να το διαθέσουν στη μεγαλύτερη δυνατή τιμή.
2. Τα αγαθά είναι τέλεια ομοιογενή.
3. Οι πωλητές και οι αγοραστές έχουν τέλεια γνώση των συνθηκών της αγοράς και των διαφόρων εναλλακτικών λύσεων.
4. Υπάρχει ελευθερία εισόδου και εξόδου των επιχειρήσεων στην αγορά.

Καθαρό μονοπώλιο

Το *καθαρό μονοπώλιο* (pure monopoly) είναι το οικονομικό υπόδειγμα της αγοράς που έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά [22, σελ. 306]:

1. Η προσφορά ενός αγαθού προέρχεται από μία μόνο επιχείρηση, η οποία έχει πλήρη έλεγχο της αγοράς, τόσο ως προς την ποσότητα του, όσο και ως προς την τιμή του.
2. Δεν υπάρχουν υποκατάστατα αγαθά.

Αντίθετα με τις συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού όπου οι τιμές είναι δεδομένες και σταθερές, στο καθαρό μονοπώλιο, ο μονοπωλητής θέτει τις τιμές σε διάφορα επίπεδα και παρατηρεί τις αντιδράσεις των καταναλωτών σε σχέση με τις ζητούμενες ποσότητες. Στη περίπτωση αυτή, ο *νόμος της ζήτησης* (law of demand) αναφέρει ότι όσο μειώνεται η τιμή ενός προϊόντος τόσο αυξάνει η ζήτησή του και αντίστροφα. Αυτό σημαίνει ότι αν η $D(q)$ είναι παραγωγίσιμη, τότε $D'(q) < 0$, δηλαδή η $D(q)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επίσης, η $D(q)$ είναι συνήθως κυρτή, έχουμε δηλαδή $D''(q) > 0$ [24, σελ. 570].

4.1.7 Συνάρτηση εσόδων

Η συνάρτηση εσόδων (revenue function) εκφράζει τα ολικά έσοδα R που δημιουργούνται από την πώληση μιας δεδομένης ποσότητας προϊόντος q [26, σελ. 173].

Στην περίπτωση του πλήρους ανταγωνισμού (perfect competition), που η ποσότητα του προσφερόμενου προϊόντος δεν μπορεί να επηρεάσει την τιμή του, η *συνάρτηση ολικών εσόδων* (total revenue function, TR) διαμορφώνεται ως εξής [29, σελ. 520]:

$$TR = f(p, q) \Rightarrow TR = p \cdot q.$$

Στην περίπτωση του καθαρού μονοπωλίου (pure monopoly) η συνάρτηση ολικών εσόδων δίνεται από τον πολλαπλασιασμό της συνάρτησης ζήτησης επί την ποσότητα q, δηλαδή ισχύει $TR = qD(q)$.

Η *μέση συνάρτηση εσόδων* (average revenue function, AR) εκφράζει τα έσοδα ανά μονάδα προϊόντος. Το μέσο έσοδο δίνεται από τον τύπο:

$$AR = \frac{TR}{q} = D(q).$$

Όταν η επιχείρηση λειτουργεί σε συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού, η τιμή είναι δεδομένη και θεωρούμε ότι στην τιμή αυτή η επιχείρηση μπορεί να πωλήσει όλη την ποσότητα που παράγει. Ισχύει $AR = p$.

Η *οριακή συνάρτηση εσόδων* (marginal revenue function, MR) εκφράζει την μεταβολή των εσόδων από την πώληση μίας επιπλέον μονάδας προϊόντος:

$$MR = \frac{d(TR)}{dq} = R'(q).$$

Στον πλήρη ανταγωνισμό, που η τιμή είναι σταθερή το οριακό έσοδο είναι:

$$MR = (pq)' = p.$$

Τα οριακά έσοδα είναι μικρότερα, ίσα ή μεγαλύτερα από τα μέσα έσοδα, όταν τα μέσα έσοδα μειώνονται, παραμένουν σταθερά ή αυξάνονται, αντίστοιχα. Στα σημεία που τα οριακά έσοδα είναι ίσα με τα μέσα, τότε η συνάρτηση των μέσων εσόδων παρουσιάζει τοπικά ακρότατα [24, σελ. 574].

Από την μέση συνάρτηση εσόδων προκύπτει η *οριακή μέση συνάρτηση εσόδων* (marginal average revenue function, MAR) που διαμορφώνεται ως εξής: $MAR = \frac{d(AR)}{dq}$ [24, σελ. 569].

Όπως διαπιστώνουμε η μορφή της συνάρτησης εσόδων εξαρτάται από την μορφή της συνάρτησης ζήτησης $D(q)$ που με την σειρά της εξαρτάται από τις συνθήκες αγοράς που επικρατούν.

Η ελαστικότητα ολικών εσόδων και η ελαστικότητα ζήτησης συνδέονται με την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 8 *[24, σελ. 573] Η συνάρτηση ολικών εσόδων παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο που η ελαστικότητά της είναι ίση με μηδέν.*

4.1.8 Συνάρτηση κόστους

Το *ολικό κόστος* (total cost, TC) μιας επιχείρησης είναι το σύνολο των δαπανών στις οποίες προβαίνει η επιχείρηση για την παραγωγή του προϊόντος της [22, σελ. 82]. Στην βραχυχρόνια περίοδο το ολικό κόστος είναι το άθροισμα του *σταθερού κόστους* (fixed cost, FC) και του *μεταβλητού κόστους* (variable cost, VC), δηλαδή

$$TC = FC + VC.$$

Μεταβλητό κόστος είναι οι δαπάνες που καταβάλλονται για τους μεταβλητούς συντελεστές, π.χ. οι πρώτες ύλες και τα ημερομίσθια [19, σελ. 125]. *Σταθερό κόστος* είναι το κόστος που δεν μεταβάλλεται καθώς μεταβάλλεται η παραγόμενη ποσότητα προϊόντος, π.χ. τα ενοίκια των κτιριακών εγκαταστάσεων και τα ασφάλιστρα των επιχειρήσεων [19, σελ. 125].

Αντίθετα, στην μακροχρόνια περίοδο η επιχείρηση μπορεί να μεταβάλλει τις ποσότητες όλων των παραγωγικών συντελεστών. Μπορεί να αυξήσει ή να μειώσει τις ποσότητες των μηχανημάτων ή των κτιριακών εγκαταστάσεων της. Συνεπώς δεν υπάρχει σταθερό κόστος.

Η *συνάρτηση μέσου κόστους* (average cost function, AC) εκφράζει το κόστος ανά μονάδα προϊόντος και είναι ο λόγος του κόστους προς την αντίστοιχη μονάδα προϊόντος [26, σελ.

173]. Στην βραχυχρόνια περίοδο το μέσο συνολικό κόστος (ATC) ισούται με το άθροισμα του μέσου σταθερού (AFC) και του μέσου μεταβλητού κόστους (AVC), δηλαδή $ATC = AFC + AVC = FC/Q + VC/Q$.

Η *συνάρτηση οριακού κόστους* (marginal cost function, MC) εκφράζει το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το ολικό κόστος, όταν μεταβάλλεται η παραγωγή κατά μία μονάδα [26, σελ. 173]:

$$MC = dC/dq = C'(q).$$

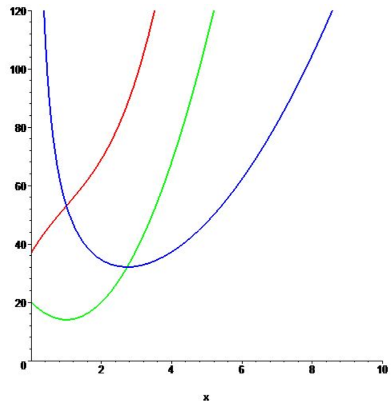
Στον πλήρη ανταγωνισμό, που η τιμή είναι σταθερή το οριακό κόστος είναι:

$$MC = (pq)' = p.$$

Σχέσεις μεταξύ οριακού και μέσου ολικού κόστους

Η σύγκριση της πορείας των καμπυλών μέσου ολικού κόστους και οριακού κόστους δείχνει ότι στα πρώτα επίπεδα παραγωγής το μέσο ολικό κόστος μειώνεται, το οριακό κόστος επίσης μειώνεται και έχει τιμές μικρότερες από το μέσο μεταβλητό κόστος. Όταν το μέσο ολικό κόστος έχει την χαμηλότερη τιμή του, η καμπύλη του οριακού κόστους συναντά την καμπύλη του μέσου ολικού στο σημείο αυτό. Το σημείο αυτό ονομάζεται *σημείο φυγής* (scuttle point) και η συνάρτηση του μέσου ολικού κόστους παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. Στο σημείο που το οριακό κόστος ελαχιστοποιείται, η συνάρτηση ολικού κόστους παρουσιάζει σημείο καμπής. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι οι καμπύλες του μέσου ολικού και του οριακού κόστους έχουν το σχήμα του λατινικού γράμματος U ως συνέπεια του νόμου της φθίνουσας ή μη ανάλογης απόδοσης. Τέλος, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση κόστους είναι αυστηρά αύξουσα, επειδή αύξηση της παραγόμενης ποσότητας σημαίνει και αύξηση του κόστους παραγωγής [29, σελ. 529–535].

Όλα τα παραπάνω παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.2: Έστω η συνάρτηση κόστους $C(q) = 2q^3 - 6q^2 + 20q + 37$ (η καμπύλη με κόκκινο χρώμα). Από την συνάρτηση κόστους προκύπτει ότι $TFC = 37, TVC = C - TFC = 2q^3 - 6q^2 + 20q$, $AVC = \frac{TVC}{q} = 2q^2 - 6q + 20$ και $ATC = \frac{C(q)}{q} = 2q^2 - 6q + 20 + \frac{37}{q}$. Η συνάρτηση μέσου μεταβλητού κόστους ελαχιστοποιείται στο σημείο που η πρώτη παράγωγος είναι ίση με μηδέν και η δεύτερη παράγωγος θετική,



Σχήμα 4.2: Καμπύλες ολικού, οριακού και μέσου ολικού κόστους.

δηλαδή:

$$\frac{d(AVC)}{dq} = 0 \Rightarrow 4q - 6 = 0 \Rightarrow q = 1.5 \quad \textit{και} \quad \frac{d^2(AVC)}{dq^2} = 4 > 0.$$

Έτσι στο σημείο $q = 1.5$ το μέσο μεταβλητό κόστος ελαχιστοποιείται με ελάχιστη τιμή ίση με 15.5. Η συνάρτηση του οριακού κόστους (η καμπύλη με πράσινο χρώμα) είναι

$$MC = \frac{dC}{dq} = 6q^2 - 12q + 20 \quad \textit{και} \quad C'(1.5) = 15.5.$$

Έτσι στο σημείο $q = 1.5$ το μέσο μεταβλητό κόστος είναι ελάχιστο και ίσο με το οριακό. Για να παρουσιάζει η συνάρτηση ολικού κόστους σημείο καμπής θα πρέπει το οριακό κόστος να ελαχιστοποιείται, δηλαδή θα πρέπει:

$$\frac{d(MC)}{dq} = 12q - 12 = 0 \Rightarrow q = 1 \quad \textit{και} \quad \frac{d^2(MC)}{dq^2} = 12 > 0.$$

Έτσι στο σημείο $q = 1$ η συνάρτηση ολικού κόστους παρουσιάζει σημείο καμπής [24, σελ. 563]. Στο Σχήμα 4.2 παρουσιάζουμε, με μπλε χρώμα, και την συνάρτηση μέσου ολικού κόστους $ATC = 2q^2 - 6q + 20 + 37/q$.

Υπόδειγμα άριστης ποσότητας παραγγελίας

Στο τμήμα αυτό θα παρουσιάσουμε ένα απλό υπόδειγμα προγραμματισμού αποθεμάτων που αναφέρεται ως υπόδειγμα άριστης ποσότητας παραγγελίας (economic order quantity). Στόχος κάθε προβλήματος προγραμματισμού αποθεμάτων είναι η ελαχιστοποίηση του ολικού κόστους αποθεματοποίησης. Το κόστος αποθεματοποίησης αποτελείται από τέσσερα βασικά είδη κόστους [24, σελ. 565]:

- *Κόστος διεκπεραίωσης ή αναπλήρωσης μιας παραγγελίας ή έναρξης μιας παραγωγικής δραστηριότητας* (setup cost or reorder cost), που περιλαμβάνει το κόστος προετοιμασίας της παραγγελίας ή το κόστος επαναλειτουργίας της παραγωγικής δραστηριότητας. Το κόστος αυτό αυξάνει αναλογικά με τον αριθμό των παραγγελιών που γίνονται στον χρονικό ορίζοντα προγραμματισμού.

- *Κόστος διατήρησης* (carrying cost or holding cost) αποθέματος, που περιλαμβάνει το κόστος του δεσμευμένου ανά μονάδα προϊόντος κεφαλαίου, ασφάλιστρα, ενοίκια αποθηκών και τα διάφορα είδη κόστους, διακίνησης και αποθήκευσης. Το κόστος αυτό αυξάνει αναλογικά με την ποσότητα του αποθέματος.

- *Κόστος έλλειψης* (shortage cost) αποθέματος, που αναφέρεται σε διάφορα είδη κόστους ή διαφυγόντων κερδών που συνεπάγεται η αδυναμία κάλυψης της ζήτησης ή συνέχισης της παραγωγικής δραστηριότητας.

- *Κόστος αγοράς ή παραγωγής* της μονάδας αποθέματος. Το κόστος αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως σταθερό και ανεξάρτητο ή ως μεταβλητό της παραγγελόμενης ή παραγόμενης ποσότητας. Τα πιο απλά υποδείγματα θεωρούν το κόστος αγοράς ή παραγωγής σταθερό και ανεξάρτητο του μεγέθους της παραγγελόμενης ή παραγόμενης ποσότητας.

Στο υπόδειγμα, που ακολουθεί θεωρούμε ότι [24, σελ. 566–568]:

- Η ζήτηση είναι γνωστή και κατανέμεται ομοιόμορφα στην περίοδο προγραμματισμού.

- Το κόστος αγοράς ή παραγωγής της μονάδας είναι σταθερό και ανεξάρτητο της ποσότητας και του χρόνου παραγγελίας.

- Ο χρόνος αναπλήρωσης, δηλαδή ο χρόνος μεταξύ παράδοσης και εκτέλεσης της παραγγελίας είναι σταθερός.

- Δεν υπάρχουν ελλείψεις, δηλαδή η ζήτηση ικανοποιείται πάντα πλήρως.

- Το κόστος αποθήκευσης είναι ανάλογο του κόστους του μέσου αποθέματος.

- Το κόστος διεκπεραίωσης της παραγγελίας και το κόστος έναρξης της παραγωγικής διαδικασίας είναι σταθερό.

- Η αναπλήρωση της παραγγελίας είναι άμεση, δηλαδή η παραγγελόμενη ποσότητα φθάνει σε μια δόση.

Οι παράμετροι και οι μεταβλητές του προβλήματος είναι:

- TC το ολικό κόστος αποθεματοποίησης
- q η ποσότητα παραγγελίας
- α το κόστος διατήρησης μιας μονάδας αποθέματος για μια χρονική περίοδο
- β το κόστος διεκπεραίωσης ή αναπλήρωσης μιας παραγγελίας
- D η ζητούμενη ποσότητα για μια χρονική περίοδο

Η συνάρτηση ολικού κόστους $TC = F(q)$ είναι άθροισμα του κόστους διατήρησης του αποθέματος C_h και του κόστους διεκπεραίωσης των παραγγελιών C_o. Το ολικό κόστος διατήρησης αποθέματος δίνεται από την σχέση $C_h = \frac{\alpha q}{2}$, όπου $\frac{q}{2}$ είναι το μέσο απόθεμα. Το ολικό κόστος διεκπεραίωσης των παραγγελιών δίνεται από την σχέση $C_o = \frac{\beta D}{q}$. Συνεπώς,

$$TC = F(q) = C_h + C_o = \frac{\alpha q}{2} + \frac{\beta D}{q}.$$

Η τιμή της q που ελαχιστοποιεί την $F(q)$ μηδενίζει την $F'(q)$:

$$\frac{d(TC)}{dq} = F'(q) = -\frac{\beta D}{q^2} + \frac{\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow q = q^\star = \pm\sqrt{\frac{2\beta D}{\alpha}}$$

και κάνει την $F''(q) > 0$:

$$F''(q) = \frac{2\beta D}{q^3} \quad \textit{για} \quad q^\star = \sqrt{\frac{2\beta D}{\alpha}}$$

Η $q^\star$ ονομάζεται *άριστη ποσότητα παραγγελίας*.

Το σημείο παραγγελίας N εξαρτάται από το *ρυθμό χρησιμοποίησης* (usage rate) R του αποθέματος και τον *χρόνο αναπλήρωσης* (lead time) L της παραγγελίας και προσδιορίζεται με τη σχέση:

$$N = RL.$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε φορά που η στάθμη του αποθέματος πέφτει στις N μονάδες γίνεται παραγγελία $q^\star$ μονάδων.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι $D = 10000$ μονάδες, $\alpha = 150$ € ανά μονάδα, $\beta = 1500$ € ανά παραγγελία και ο χρονικός ορίζοντας προγραμματισμού είναι το έτος που έχει 250 εργάσιμες ημέρες. Η άριστη ποσότητα παραγγελίας είναι $q^\star = \sqrt{\frac{2\beta D}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2(1500)(10000)}{150}} = \sqrt{200000} \cong 447$ μονάδες, με ελάχιστο κόστος $F(447) = \frac{(1500)(10000)}{447} + \frac{(150)(447)}{2} = 67081$ €. Αν υποθέσουμε ότι ο ρυθμός χρησιμοποίησης του αποθέματος είναι σταθερός και ο χρόνος αναπλήρωσης 5 εργάσιμες μέρες, τότε $R = 10000/250 = 40$ μονάδες ημερησίως και το σημείο παραγγελίας είναι όταν το επίπεδο του αποθέματος φθάσει τις $N = LR = 5(40) = 200$ μονάδες.

4.1.9 Μεγιστοποίηση κέρδους

Η συνάρτηση ολικών κερδών $\pi(q)$ προκύπτει αν από τα ολικά έσοδα TR αφαιρέσουμε το ολικό κόστος TC. Αν υποθέσουμε ότι $TR = R(q)$ και $TC = C(q)$ είναι οι συναρτήσεις των ολικών εσόδων και του ολικού κόστους, αντίστοιχα, τότε η συνάρτηση ολικών κερδών δίνεται από την σχέση:

$$\pi(q) = TR - TC = R(q) - C(q).$$

Στόχος της επιχείρησης είναι να προσδιορίσει την ποσότητα παραγωγής $q^\star$ η οποία μεγιστοποιεί το ολικό κέρδος της [26, σελ. 195]. Το σημείο, που τα ολικά έσοδα είναι ίσα με το ολικό κόστος και η επιχείρηση δεν έχει ούτε κέρδος ούτε ζημία ονομάζεται *νεκρό σημείο* [29, σελ. 537].

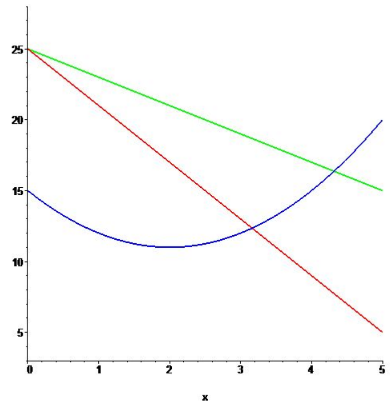
Η συνθήκη πρώτης τάξης για την μεγιστοποίηση της συνάρτησης κέρδους είναι:

$$\frac{d\pi}{dq} = 0 \Rightarrow \frac{dR}{dq} - \frac{dC}{dq} = 0 \Rightarrow MR(q^\star) - MC(q^\star) = 0 \Rightarrow MR(q^\star) = MC(q^\star).$$

Η συνθήκη δεύτερης τάξης είναι:

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} < 0 \Rightarrow \frac{dMR}{dq} < \frac{dMC}{dq}.$$

Επομένως το κέρδος μεγιστοποιείται στο επίπεδο παραγωγής $q^\star$ στο οποίο το οριακό έσοδο ισούται με το οριακό κόστος της επιχείρησης. Στο σημείο αυτό η κλίση της καμπύλης οριακού εσόδου είναι μικρότερη από την κλίση της καμπύλης οριακού κόστους. Στην συνέχεια θα εξειδικεύσουμε τις συνθήκες αυτές στις δύο ακραίες μορφές οργάνωσης της αγοράς, το μονοπώλιο και τον τέλειο ανταγωνισμό [26, σελ. 195].



Σχήμα 4.3: Μεγιστοποίηση κέρδους στο μονοπώλιο.

Μεγιστοποίηση κέρδους στο μονοπώλιο

Ας υποθέσουμε ότι για το προϊόν που παράγει η επιχείρηση δεν υπάρχουν υποκατάστατα οπότε η επιχείρηση λειτουργεί σε συνθήκες μονοπωλίου. Στην περίπτωση αυτή η επιχείρηση έχει τη δυνατότητα να καθορίσει η ίδια την ποσότητα παραγωγής και την τιμή στην οποία θα διαθέσει το προϊόν της, έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος της. Ακόμα και σε μια μονοπωλιακή αγορά, η επιχείρηση δεν μπορεί να θέσει μια αυθαίρετα υψηλή τιμή για το προϊόν της, γιατί η αύξηση της τιμής θα προκαλέσει μείωση της ζητούμενης ποσότητας και ενδεχομένως μείωση του κέρδους. Η σχέση μεταξύ της τιμής και της ζητούμενης ποσότητας προσδιορίζεται από τη συνάρτηση ζήτησης $q = f(p)$, όπου q είναι η ζητούμενη ποσότητα που αντιστοιχεί σε τιμή p.

Η ποσότητα $q^\star$ η οποία μεγιστοποιεί τα κέρδη της μονοπωλιακής επιχείρησης προσδιορίζεται από την ισότητα μεταξύ οριακού εσόδου και οριακού κόστους, από το σημείο τομής δηλαδή των καμπυλών $MR(q)$ και $MC(q)$. Είναι φανερό ότι όταν προσδιοριστεί η βέλτιστη ποσότητα $q^\star$, προσδιορίζεται και η βέλτιστη τιμή πώλησης $p^\star$. Η συνθήκη δεύτερης τάξης για μέγιστο είναι:

$$\frac{dMR}{dq} < \frac{dMC}{dq}.$$

Με αρνητική κλίση για την καμπύλη οριακού εσόδου, η συνθήκη δεύτερης τάξης ικανοποιείται όταν η καμπύλη οριακού κόστους τέμνει την καμπύλη οριακού εσόδου εκ των κάτω.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση κόστους μιας μονοπωλιακής επιχείρησης είναι $C(q) = \frac{1}{3}q^3 - \frac{7}{2}q^2 + 15q + 100$ και η συνάρτηση ζήτησης $p = 25 - 2q$. Η συνάρτηση ολικών εσόδων είναι $R(q) = 25q - 2q^2$. Στο Σχήμα 4.3 παρουσιάζονται η συνάρτηση μέσων εσόδων (με κόκκινο χρώμα) και οι καμπύλες οριακού κόστους (με πράσινο) και οριακών εσόδων (με μπλε), αντίστοιχα. Η συνθήκη πρώτης τάξης είναι $MR(q) = MC(q)$. Δηλαδή $\frac{dR}{dq} = \frac{dC}{dq} \Rightarrow 25 - 4q = q^2 - 7q + 15 \Rightarrow q^2 - 3q - 10 = 0$. Η εξίσωση $q^2 - 3q - 10 = 0$ έχει ρίζες $q_1 = -2 < 0$ και $q_2 = 5$. Η ρίζα q_1 απορρίπτεται, οπότε μοναδικό ακρότατο είναι το σημείο $q_2 = 5$. Από την δεύτερη συνθήκη $\frac{dMR}{dq} < \frac{dMC}{dq}$ προκύπτει ότι $-4 < 2q - 7$. Για $q^\star = 5$ η δεύτερη συνθήκη ικανοποιείται, αφού $-4 < 3$, οπότε στο σημείο αυτό το κέρδος της επιχείρησης μεγιστοποιείται [26, σελ. 195–197].

Μεγιστοποίηση κέρδους στον πλήρη ανταγωνισμό

Σε προηγούμενη ενότητα αναφέραμε ότι σε συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού η επιχείρηση δεν έχει καμία δυνατότητα να επηρεάσει την τιμή του προϊόντος που παράγει. Έτσι η τιμή τόσο για τους παραγωγούς όσο και για τους καταναλωτές θεωρείται ότι είναι σταθερή σε κάποιο επίπεδο p. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση ζήτησης έχει την γενική μορφή $D(q) = p$ και η ελαστικότητα ζήτησης τείνει στο άπειρο [26, σελ. 197]. Από τη συνάρτηση αυτή παράγονται οι συναρτήσεις των ολικών εσόδων $R(q) = pq$, οριακών εσόδων $MR = R'(q) = p$ και μέσων εσόδων $AR = \frac{R(q)}{q} = p$. Συνεπώς, σε συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού οι συναρτήσεις της ζήτησης, των οριακών και μέσων εσόδων είναι ίσες μεταξύ τους [24, σελ. 575].

Σε αυτή την περίπτωση, η συνθήκη πρώτης τάξης γίνεται:

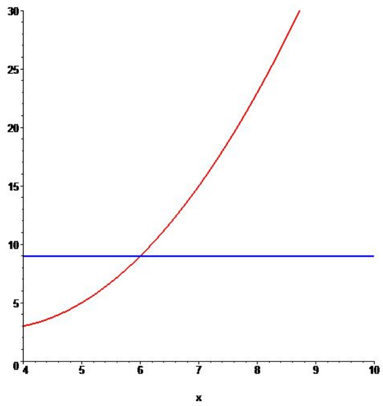
$$MR(q) = MC(q) \Rightarrow MC(q) = p$$

και η συνθήκη δεύτερης τάξης:

$$\frac{dMC}{dq} > 0.$$

Με άλλα λόγια, στο επίπεδο παραγωγής όπου μεγιστοποιείται το κέρδος, η καμπύλη οριακού κόστους πρέπει να είναι αύξουσα.

Για παράδειγμα, έστω η επιχείρηση του προηγούμενου παραδείγματος λειτουργεί τώρα σε συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού και ότι η τιμή πώλησης του προϊόντος είναι $p = 9$ χρηματικές μονάδες. Η συνάρτηση εσόδου είναι τώρα $R(q) = 9q$ και η συνθήκη πρώτης τάξης γίνεται $q^2 - 7q + 15 = 9 \Rightarrow q^2 - 7q + 6 = 0$. Η εξίσωση έχει ρίζες τις $q_1 = 1$ και $q_2 = 6$. Η συνθήκη



Σχήμα 4.4: Μεγιστοποίηση κέρδους στον πλήρη ανταγωνισμό.

δεύτερης τάξης γίνεται $2q-7>0$, η οποία ικανοποιείται μόνο στο σημείο $q_2=6$. Στο σημείο αυτό η επιχείρηση μεγιστοποιεί το κέρδος της [26, σελ. 198]. Στο Σχήμα 4.4 παρουσιάζονται οι συναρτήσεις της ζήτησης, των οριακών και μέσων εσόδων (με μπλε χρώμα) και του οριακού κόστους (με κόκκινο).

4.1.10 Συνάρτηση χρησιμότητας

Η συνάρτηση χρησιμότητας ή ωφελιμότητας (utility function) $U=f(x)$ εκφράζει την σχέση μεταξύ της ικανοποίησης που αισθάνεται ένα άτομο με την απόκτηση ή την κατανάλωση ενός αγαθού και της ποσότητας του αγαθού αυτού. Παρατηρείται ότι μέχρι ένα σημείο, όσες περισσότερες μονάδες ενός προϊόντος καταναλώνει ένα άτομο, τόσο μεγαλύτερη είναι η ολική χρησιμότητα. Παρά το γεγονός ότι η ολική χρησιμότητα αυξάνεται, η οριακή συνήθως μειώνεται. Η *οριακή χρησιμότητα* ισούται με την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης χρησιμότητας και συμβολίζεται ως $MU=dU/dx$. Εκφράζει την μεταβολή της χρησιμότητας λόγω μικρής μεταβολής στην κατανάλωση του x.

Το σημείο, στο οποίο η ολική χρησιμότητα είναι μέγιστη και η οριακή χρησιμότητα είναι μηδενική, ονομάζεται *σημείο κορεσμού*. Αν προστεθούν περισσότερες μονάδες προϊόντος πέρα από το σημείο κορεσμού, τότε η ολική χρησιμότητα αρχίζει να μειώνεται και η οριακή γίνεται αρνητική, αφού δημιουργούνται προβλήματα αποθήκευσης ή καταστροφής [29, σελ. 563–564].

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση χρησιμότητας ενός καταναλωτή δίνεται από την σχέση $U = -8x^2 + 35x + 70$. Για να μεγιστοποιήσει ο καταναλωτής την χρησιμότητα θα πρέπει να ισχύουν ότι $MU = 0$ και $MU' < 0$. Δηλαδή,

$$MU = U' = (-8x^2 + 48x + 70)' = -16x + 48 = 0 \Rightarrow x = -48/-16 \Rightarrow x = 3$$

Επίσης $MU' = -16 < 0$ για κάθε τιμή του x, άρα και για $x = 3$. Συνεπώς η συνάρτηση χρησιμότητας μεγιστοποιείται στο σημείο $x = 3$. Άρα για $x = 3$ η συνάρτηση U γίνεται $U = -8 \cdot 3^2 + 35 \cdot 3 + 70 = 103$ μονάδες χρησιμότητας. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι το σημείο $A(3, 103)$ είναι σημείο κορεσμού.

4.1.11 Κεφαλαιοποίηση-Προεξόφληση

Για να βρούμε την τελική αξία S ενός αρχικού κεφαλαίου P που τοκίζεται με επιτόκιο i μετά από t έτη κεφαλαιοποίησης (ανατοκισμού) χρησιμοποιούμε την εκθετική συνάρτηση:

$$S = P(1+i)^t.$$

Το διώνυμο $(1+i)^t$ ονομάζεται *συντελεστής κεφαλαιοποίησης ή συντελεστής ανατοκισμού*. Αν όμως ο ανατοκισμός γίνεται m φορές μέσα στο διάστημα του ενός έτους, τότε η παραπάνω συνάρτηση διαμορφώνεται ως εξής:

$$S = P\Big(1 + \frac{i}{m}\Big)^{mt} = P\Big[\Big(1 + \frac{i}{m}\Big)^m\Big]^t.$$

Αν τώρα ο ανατοκισμός είναι συνεχής, δηλαδή αν $m \to +\infty$ τότε:

$$S = P\Big[\lim_{m\to+\infty}\Big(1 + \frac{i}{m}\Big)^m\Big]^t = Pe^{it}.$$

Στην πράξη ο ανατοκισμός δεν είναι συνεχής, οπότε ο τελευταίος τύπος δεν χρησιμοποιείται και συνήθως για την επίλυση σχετικών προβλημάτων ο συντελεστής κεφαλαιοποίησης δίνεται σε ειδικό πίνακα [26, σελ. 186].

Για παράδειγμα, η τελική αξία ενός κεφαλαίου 800.000 € που ανατοκίζεται με επιτόκιο 6% για 4 έτη δίνεται από τον τύπο $S = P(1+i)^t$. Με αντικατάσταση των δεδομένων έχουμε:

$$S = 800.000(1 + 0.06)^4.$$

Τον συντελεστή ανατοκισμού τον βρίσκουμε από τον ειδικό πίνακα, άρα η ζητούμενη τελική αξία θα είναι $S = 800.000 \cdot 1,262477 = 1.009.982$ € [29, σελ. 589].

Με τον όρο *παρούσα αξία* (present value) ενός μελλοντικού ποσού S, το οποίο είναι διαθέσιμο τη χρονική στιγμή t, εννοούμε το ποσό P που αν κατατεθεί σήμερα με επιτόκιο i ανά έτος, θα έχει αξία S την χρονική στιγμή t [26, σελ. 187]. Η διαδικασία προσδιορισμού της παρούσας αξίας ενός μελλοντικού ποσού λέγεται *προεξόφληση* (discounting). Η παρούσα αξία ορίζεται ως εξής:

$$P = \frac{S}{(1+i)^t} = S(1+i)^{-t}.$$

Αν ο ανατοκισμός είναι συνεχής, η παρούσα αξία δίνεται από τον τύπο:

$$P = Se^{-it}.$$

Για παράδειγμα, η παρούσα αξία κεφαλαίου 1.000.000 € πληρωτέου μετά 10 έτη και με ετήσιο επιτόκιο 6% είναι $P = S(1+i)^{-t} = 1.000.000(1+0.06)^{-10} = 558.395$ €.

4.1.12 Επιλογή άριστου χρόνου

Η αξία πολλών οικονομικών μεγεθών, όπως επενδύσεις σε ακίνητα, οικόπεδα, κ.λπ. μεταβάλλεται σε σχέση με τον χρόνο. Το πρόβλημα επιλογής που προκύπτει σε μια τέτοια περίπτωση είναι ο προσδιορισμός του κατάλληλου χρόνου λήψης μιας απόφασης ή εκτέλεσης μιας δραστηριότητας. Ο αντικειμενικός στόχος στα προβλήματα αυτά είναι συνήθως η μεγιστοποίηση της παρούσας αξίας ενός οικονομικού μεγέθους [24, σελ. 585]. Η παρούσα αξία του μεγέθους αυτού ως συνάρτηση του χρόνου t εκφράζεται με την εξίσωση:

$$P(t) = S(t)e^{-it}.$$

Υποψήφια ακρότατα της συνάρτησης προκύπτουν από την λύση της εξίσωσης $P'(t) = 0$. Με λογαρίθμηση και παραγώγιση των δύο μερών της εξίσωσης έχουμε:

$$\ln P(t) = \ln S(t) - it \quad \textit{και} \quad \frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt} = \frac{S'(t)}{S(t)} - i$$

$$\Leftrightarrow \frac{dP(t)}{dt} = P(t)\left(\frac{S'(t)}{S(t)} - i\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{S'(t)}{S(t)} = i,$$

επειδή $P(t) > 0$.

Για να εξακριβώσουμε αν πράγματι υπάρχει ακρότατο την χρονική στιγμή $t^\star$ βασιζόμαστε στις συνθήκες δεύτερης τάξης. Η δεύτερη παράγωγος της $P(t)$ έχει ως εξής:

$$\frac{d^2P(t)}{dt^2} = P'(t)\left(\frac{S'(t)}{S(t)} - i\right) + P(t)\left(\frac{d}{dt}\frac{S'(t)}{S(t)}\right).$$

Ο πρώτος όρος του αθροίσματος είναι ίσος με μηδέν όταν υπολογιστεί στο βέλτιστο σημείο όπου $P'(t) = 0$. Επειδή έχουμε υποθέσει ότι $P(t) > 0$, η δεύτερη παράγωγος $P''(t) = \frac{d^2P(t)}{dt^2}$ είναι αρνητική μόνο όταν $\frac{d}{dt}\frac{S'(t)}{S(t)} < 0$.

Προκύπτει ότι η παρούσα αξία $P(t)$ μεγιστοποιείται στο χρονικό σημείο $t = t^\star$ αν και μόνο αν η συνάρτηση του ποσοστιαίου ρυθμού μεταβολής της $S(t)$ στο σημείο αυτό είναι φθίνουσα, είναι δηλαδή $\frac{d}{dt}\frac{S'(t)}{S(t)} < 0$ και ίση με το σταθερό ετήσιο επιτόκιο i, δηλαδή $S'(t) = iS(t)$ [24, σελ. 585–588].

4.2 Οικονομικές εφαρμογές ολοκληρωμάτων

Σε πολλά υποδείγματα υπάρχουν θεμελιώδη μεγέθη, τα οποία εκφράζουν ρυθμούς μεταβολής άλλων μεγεθών. Με τη βοήθεια των ολοκληρωμάτων μπορούμε να προσδιορίσουμε τις αρχικές συναρτήσεις από τις οποίες προέκυψαν τα μεγέθη αυτά. Η τεχνική της ολοκλήρωσης είναι η πιο κατάλληλη μέθοδος για να προσδιορίσουμε τις ολικές συναρτήσεις, αν γνωρίζουμε τις συναρτήσεις οριακής μορφής. Έτσι συναρτήσεις ολικών εσόδων, ολικού κόστους, ολικού προϊόντος, ολικής κατανάλωσης μπορούν να προσδιοριστούν αν γνωρίζουμε τις αντίστοιχες οριακές συναρτήσεις.

4.2.1 Συνάρτηση εσόδων

Αν τα οριακά έσοδα μιας επιχείρησης από την πώληση ενός προϊόντος δίνονται από την σχέση $MR = \frac{dR(q)}{dq}$, τότε η συνάρτηση των ολικών εσόδων είναι $TR = \int MRdq = R(q) + c$, όπου c σταθερά ολοκλήρωσης.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση οριακών εσόδων $MR = -q^2 + 5q + 2$. Η συνάρτηση ολικών εσόδων είναι $TR = R(q) = \int (-q^2 + 5q + 2)dq = -\frac{q^3}{3} + \frac{5q^2}{2} + 2q + c$. Αν $c = 5$ τότε η συνάρτηση ολικών εσόδων είναι $TR = -\frac{q^3}{3} + \frac{5q^2}{2} + 2q + 5$.

4.2.2 Συνάρτηση κόστους

Αν το οριακό κόστος μιας επιχείρησης από την παραγωγή ενός προϊόντος δίνεται από την σχέση $MC = \frac{dC(q)}{dq}$, τότε η συνάρτηση του ολικού κόστους είναι $TC = C(q) = \int MCdq = C(q) + c$.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση οριακού κόστους $MC = 3q^2 - 4q + 7$. Η συνάρτηση ολικού κόστους είναι $\int (3q^2 - 4q + 7)dq = q^3 - 2q^2 + 7q + c$, όπου ο προσδιορισμός της σταθεράς ολοκληρώσεως c γίνεται με την βοήθεια της τιμής του σταθερού κόστους. Αν δηλαδή γνωρίζουμε ότι $C(0) = TFC = 4$, τότε $TC = q^3 - 2q^2 + 7q + 4$.

4.2.3 Συνάρτηση προϊόντος

Αν το οριακό προϊόν μιας επιχείρησης δίνεται από την σχέση $MP = \frac{dq}{dx}$, τότε η συνάρτηση του ολικού προϊόντος είναι $q = \int MPdx$.

Για παράδειγμα, έστω η οριακή συνάρτηση παραγωγής $MP = -x^2 + 8x + 15$. Η συνάρτηση ολικού προϊόντος είναι $q = \int (-x^2 + 8x + 15)dx = -\frac{x^3}{3} + 4x^2 + 15x + c$. Αν $c = 5$ τότε $q = -\frac{x^3}{3} + 4x^2 + 15x + 5$.

4.2.4 Συναρτήσεις κατανάλωσης, αποταμίευσης, εθνικού εισοδήματος

Στη θεωρία του εθνικού εισοδήματος χρησιμοποιείται η ταυτότητα

$$Y = C + S$$

για να εκφράσει την υπόθεση ότι ένα μέρος C του εθνικού εισοδήματος Y καταναλώνεται και το υπόλοιπο $S = Y - C$ αποταμιεύεται [24, σελ. 668]. Η συνάρτηση κατανάλωσης $C = f(Y)$ εκφράζει τη συνολική κατανάλωση μιας οικονομίας ως συνάρτηση του συνολικού διαθέσιμου εισοδήματος Y. Ο ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης ως προς το εισόδημα $\frac{dC}{dY}$ είναι η συνάρτηση της *οριακής ροπής προς κατανάλωση* (marginal propensity to consume, MPC). Αν η οριακή ροπή προς κατανάλωση είναι γνωστή ή αν μπορεί να εκτιμηθεί, τότε η συνάρτηση της ολικής κατανάλωσης υπολογίζεται εύκολα [26, σελ. 468–469].

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση οριακής ροπής προς κατανάλωση

$$MPC = \frac{dC}{dY} = 0.6 + \frac{0.2}{\sqrt{Y}}.$$

Η συνάρτηση κατανάλωσης είναι $C = \int \left(0.6 + \frac{0.2}{\sqrt{Y}}\right) dY = 0.6Y + 0.4\sqrt{Y} + c$, όπου c η σταθερά ολοκλήρωσης. Αν υποθέσουμε ότι η κατανάλωση είναι 80 € όταν το διαθέσιμο εισόδημα είναι 100 €, δηλαδή αν $C(100) = 0.6 \cdot 100 + 0.4\sqrt{100} + c = 80 \Rightarrow c = 16$, τότε η συνάρτηση ολικής κατανάλωσης προσδιορίζεται ως εξής:

$$C = 0.6Y + 0.4\sqrt{Y} + 16.$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να προσδιοριστεί η συνάρτηση αποταμίευσης από την *οριακή ροπή προς αποταμίευση* (marginal propensity to save, MPS).

4.2.5 Πλεόνασμα καταναλωτή

Το *πλεόνασμα του καταναλωτή* (consumer surplus) είναι ένας δείκτης μέτρησης σε χρηματικούς όρους, των μεταβολών στην ευημερία του καταναλωτή, οι οποίες οφείλονται σε μεταβολές των τιμών των προϊόντων για τα οποία ο καταναλωτής εκδηλώνει ζήτηση [26, σελ. 480]. Ουσιαστικά, πλεόνασμα καταναλωτή είναι η διαφορά μεταξύ της μέγιστης τιμής που είναι πρόθυμος να πληρώσει ο καταναλωτής και της πραγματικής τιμής που πληρώνει.

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση ζήτησης ενός συγκεκριμένου προϊόντος, $p = D(q)$. Αν πωληθούν q_0 μονάδες προϊόντος στην τιμή αγοράς p_0 τότε το πλεόνασμα του καταναλωτή δίνεται από την σχέση

$$CS = \int_0^{q_0} D(q)dq - p_0 q_0.$$

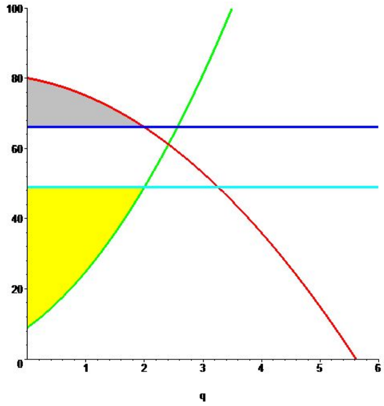
Στο Σχήμα 4.5 δίνουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης ζήτησης ενός προϊόντος $p = D(q) = -2q^2 - 3q + 80$ (με πράσινο χρώμα). Όταν $q_0 = 2$, τότε $p_0 = 66$. Άρα

$$CS = \int_0^2 (-2q^2 - 3q + 80)dq - 66 \cdot 2 = \Big[-\frac{2}{3}q^3 - \frac{3}{2}q^2 + 80q \Big]_0^2 - 132 = \frac{50}{3}.$$

Ουσιαστικά, πρόκειται για το εμβαδόν του γκρι χωρίου που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης ζήτησης και της ευθείας $p_0 = 66$ (με μπλε χρώμα).

4.2.6 Πλεόνασμα παραγωγού

Το *πλεόνασμα του παραγωγού* (producer surplus) εκφράζει την διαφορά ανάμεσα στο ποσό που πραγματικά εισπράττει ο παραγωγός και στο ποσό που θα ήταν διατεθειμένος να εισπράξει [26, σελ. 485].



Σχήμα 4.5: Πλεόνασμα Καταναλωτή – Παραγωγού

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση προσφοράς ενός συγκεκριμένου προϊόντος, $p = S(q)$. Αν πωληθούν q_1 μονάδες προϊόντος στην τιμή αγοράς p_1 τότε το πλεόνασμα του παραγωγού δίνεται από την σχέση

$$PS = p_1 q_1 - \int_0^{q_1} S(q)dq.$$

Στο Σχήμα 4.5 δίνουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης προσφοράς ενός προϊόντος $p = S(q) = 4q^2 + 12q + 9$ (με κόκκινο χρώμα). Όταν $q_1 = 2$, τότε $p_1 = 49$. Άρα

$$PS = 49 \cdot 2 - \int_0^2 (4q^2 + 12q + 9)dq = 98 - \left[\frac{4}{3}q^3 + \frac{12}{2}q^2 + 9q\right]_0^2 = \frac{136}{3}.$$

Ουσιαστικά, πρόκειται για το εμβαδόν του κίτρινου χωρίου που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης προσφοράς και της ευθείας $p_1 = 49$ (με γαλάζιο χρώμα).

Ουσιαστικά, το πλεόνασμα του παραγωγού είναι η πρόσοδος (το σύνολο των εισπράξεων από την πώληση της προσφερόμενης ποσότητας) μείον το κόστος παραγωγής και μετρά το κέρδος του παραγωγού από την συμμετοχή του στην αγορά. Έτσι προκύπτει η ακόλουθη σχέση [26, σελ. 485–486]:

$$PS = p_1 q_1 - \int_0^{q_1} MC(q)dq = p_1 q_1 - TVC(q_1) - TVC(0) = p_1 q_1 - TVC(q_1).$$

Για παράδειγμα, έστω ότι η συνάρτηση οριακού κόστους μιας επιχείρησης δίνεται από τον τύπο $MC(q) = 3q + 2$. Πρέπει να βρούμε το πλεόνασμα του παραγωγού που αντιστοιχεί στην τιμή $p_1 = 8$, στην τιμή $p_2 = 17$ και το πλεόνασμα του παραγωγού, καθώς η τιμή αυξάνεται από $p_1 = 8$ σε $p_2 = 17$.

Από την συνθήκη μεγιστοποίησης του κέρδους $p = MC(q)$, προκύπτει ότι στην τιμή $p_1 = 8$ αντιστοιχεί ποσότητα $q_1 = 2$, ενώ στην τιμή $p_2 = 17$ αντιστοιχεί ποσότητα $q_2 = 5$. Έτσι το πλεόνασμα του παραγωγού που αντιστοιχεί στην τιμή $p_1 = 8$ είναι:

$$PS_1 = 8 \cdot 2 - \int_0^2 (3q+2)dq = 16 - \left[\frac{3}{2}q^2 + 2q\right]_0^2 = 16 - 10 = 6.$$

Παρόμοια το πλεόνασμα που αντιστοιχεί στην τιμή $p_2 = 17$ είναι:

$$PS_2 = 17 \cdot 5 - \int_0^5 (3q+2)dq = 85 - \left[\frac{3}{2}q^2 + 2q\right]_0^5 = 85 - 47.5 = 37.5.$$

Τέλος, το πλεόνασμα καθώς η τιμή αυξάνεται από $p_1 = 8$ σε $p_2 = 17$, δηλαδή καθώς η ποσότητα αυξάνεται από $q_1 = 2$ σε $q_2 = 5$, είναι:

$$PS = PS_2 - PS_1 = 37.5 - 6 = 31.5.$$

4.2.7 Προσδιορισμός παρούσας αξίας οικονομικού πόρου

Σε προηγούμενη ενότητα εξηγήσαμε ότι η παρούσα αξία ενός χρηματικού ποσού διαθέσιμου σε κάποια μελλοντική χρονική στιγμή t, με ετήσιο επιτόκιο i και συνθήκες συνεχούς ανατοκισμού είναι $P = Se^{-it}$.

Στο τμήμα αυτό θα επεκτείνουμε την ανάλυσή μας για να περιλάβουμε τις περιπτώσεις που έχουμε αντί μιας σταθερής αρχικής χρηματικής ροής στην πρώτη περίοδο μια σειρά χρηματικών ροών συνεχώς [24, σελ. 675]. Πιο συγκεκριμένα, έστω η σειρά των χρηματικών ροών $S_1, S_2, \ldots, S_\nu$ οι οποίες είναι διαθέσιμες τις χρονικές στιγμές $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$, αντίστοιχα. Η χρηματική ροή μπορεί να αντιστοιχεί στη ροή των εσόδων από την πώληση ενός προϊόντος στο δεδομένο χρονικό ορίζοντα, στη ροή των τόκων μιας ομολογίας, κλ.π. Αν θεωρήσουμε ότι ο χρόνος είναι συνεχής μεταβλητή, τότε η χρηματική ροή μπορεί να περιγραφεί από μία πραγματική συνάρτηση $S(t)$ με πεδίο ορισμού τον χρονικό ορίζοντα $(0, T)$, η οποία εκφράζει το διαθέσιμο χρηματικό ποσό στη χρονική στιγμή t. Δηλαδή στη χρονική στιγμή t_1, ο ρυθμός της χρηματικής ροής είναι $S(t_1)$ χιλιάδες ευρώ το χρόνο. Η παρούσα αξία της χρηματικής ροής είναι:

$$PV = \int_0^T S(t)e^{-it}dt.$$

Αν η χρηματική ροή είναι σταθερή, δηλαδή αν ισχύει $S(t) = S$ τότε [26, σελ. 471]:

$$PV = -\frac{S}{i}\int_0^T e^{-it} d(-it) = -\frac{S}{i}[e^{-it}]_0^T = -\frac{S}{i}(e^{-iT} - 1) = \frac{S}{i}(1 - e^{-iT}).$$

4.2.8 Υπολογισμός ολικού κέρδους

Όπως είναι γνωστό από την θεωρία της επιχείρησης, η μεγιστοποίηση του κέρδους επιτυγχάνεται στο επίπεδο παραγωγής όπου τα οριακά έσοδα είναι ίσα με το οριακό κόστος. Στην περίπτωση μας το ολικό κέρδος είναι η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος το οποίο προσδιορίζεται από τη διαφορά ανάμεσα στα οριακά έσοδα και το οριακό κόστος από μηδέν επίπεδο παραγωγής μέχρι το σημείο που μεγιστοποιείται το κέρδος, δηλαδή:

$$TR = \int_0^{q^\star} (MR - MC) dq.$$

Για παράδειγμα, έστω $MR = 25 - 5q - 2q^2$ και $MC = 15 - 2q - q^2$ οι συναρτήσεις οριακών εσόδων και οριακού κόστους, αντίστοιχα.

Το κέρδος μεγιστοποιείται στο σημείο:

$$MR - MC = 0 \Rightarrow 25 - 5q - 2q^2 - 15 - 2q - q^2 = 0$$

$$\Rightarrow 10 - 3q - q^2 = 0 \Rightarrow (5 - q)(2 - q) = 9.$$

Άρα $q_1 = -5$ και $q_2 = 2$, όπου η αρνητική τιμή απορρίπτεται καθώς δεν νοείται αρνητικό επίπεδο παραγωγής και συνεπώς η μεγιστοποίηση του κέρδους επιτυγχάνεται στο $q_2 = 2$.

Συνεπώς, το ζητούμενο ολικό κέρδος είναι:

$$TR = \int_0^2 (MR - MC) dx = \int_0^2 (10 - 3q - q^2) dq = \left[10q - \frac{3q^2}{2} - \frac{q^3}{3}\right]_0^2 = \frac{34}{3}.$$

Κεφάλαιο 5

Λογισμός πολλών μεταβλητών

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάσαμε τις βασικές έννοιες του διαφορικού λογισμού πραγματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Στο κεφάλαιο αυτό θα επεκτείνουμε τις έννοιες αυτές σε συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών. Η επέκταση αυτή είναι αναγκαία προκειμένου να μπορούμε να αναλύουμε πιο πολύπλοκα υποδείγματα, στα οποία κάποια μεγέθη, εξαρτημένες ή ενδογενείς μεταβλητές, επηρεάζονται από ένα σύνολο ανεξάρτητων μεταβλητών ή εξωγενών παραμέτρων. Στις περιπτώσεις αυτές μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε πως μεταβάλλονται τα μεγέθη αυτά όταν μεταβάλλονται μία ή περισσότερες παράμετροι του υποδείγματος.

Έτσι θα αναφερθούμε στην έννοια της μερικής παραγώγου, η οποία εκφράζει το ρυθμό μεταβολής μιας εξαρτημένης μεταβλητής όταν μεταβάλλεται μία ανεξάρτητη μεταβλητή και οι τιμές των υπόλοιπων ανεξάρτητων μεταβλητών του υποδείγματος παραμένουν σταθερές. Θα επεκταθούμε στην έννοια της ολικής παραγώγου, η οποία εκφράζει το συνολικό ρυθμό μεταβολής μιας εξαρτημένης μεταβλητής ως προς μια ανεξάρτητη μεταβλητή ή παράμετρο, τόσο από την άμεση επίδραση της παραμέτρου στην μεταβλητή, όσο και από την επίδραση της σε άλλες μεταβλητές του υποδείγματος, οι οποίες συνδέονται έμμεσα με την μεταβλητή που μελετάμε και στην έννοια του ολικού διαφορικού.

Τέλος θα αναπτύξουμε την μέθοδο εύρεσης αδέσμευτων και δεσμευμένων ακρότατων και θα αναφέρουμε τις έννοιες των ομογενών συναρτήσεων και των ισοϋψών καμπυλών, οι οποίες βρίσκουν εφαρμογή σε σημαντικά οικονομικά προβλήματα. Ενδεικτικά, προτείνονται τα βιβλία των Chiang [4], Chiang & Wainwright [6, Κεφ. 11–12], Ξεπαπαδέα [26, Κεφ. 8] και Παπαντωνίου [28].

5.1 Η έννοια της μερικής παραγώγου

Η έννοια της παραγώγου μπορεί να επεκταθεί σε συναρτήσεις με ν ανεξάρτητες μεταβλητές. Οι κανόνες υπολογισμού των μερικών παραγώγων είναι ίδιοι με εκείνους που χρησιμοποιήσαμε για τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Πρέπει όμως να προσέχουμε ως προς ποια μεταβλητή θα παραγωγίσουμε, αν π.χ. παραγωγίσουμε την συνάρτηση $f(x,y)$ ως προς την μεταβλητή x, τότε όλες οι άλλες μεταβλητές θα θεωρούνται σταθερές και η παράγωγος θα ονομάζεται πρώτη μερική παράγωγος της $f(x,y)$.

Η μερική παράγωγος εκφράζει τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της εξαρτημένης μεταβλητής, που οφείλεται σε μεταβολή μιας από τις ανεξάρτητες μεταβλητές, ενώ όλες οι υπόλοιπες ανεξάρτητες μεταβλητές παραμένουν σταθερές [26, σελ. 328]. Στην συνέχεια, δίνουμε τον αυστηρό ορισμό.

Ορισμός 51 *[5, σελ. 266] Έστω η συνάρτηση $y = f(x_1, \ldots, x_\nu)$, όπου οι μεταβλητές x_i για $i = 1, 2, \ldots, \nu$ είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αν η μεταβλητή x_1 υφίσταται μια μεταβολή Δx_1, ενώ οι $x_2, \ldots, x_\nu$ παραμένουν σταθερές, θα υπάρχει μια αντίστοιχη μεταβολή στο y, δηλαδή Δ_y. Στην περίπτωση αυτή το πηλίκο διαφοράς μπορεί να εκφραστεί ως:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_\nu) - f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)}{\Delta x_1}.$$

Το όριο $\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_1}$ θα αποτελεί μια παράγωγο. Η παράγωγος αυτή ονομάζεται μερική παράγωγος *(partial derivative) της συνάρτησης ως προς x_1 και συμβολίζεται με:*

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} \quad ή \quad f_{x_1}.$$

Έστω, για παράδειγμα, η συνάρτηση $y = f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_1 x_2 + 4x_2^2$. Είναι

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 6x_1 + x_2 \quad \text{και} \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = x_1 + 8x_2.$$

Όπως και στην περίπτωση συναρτήσεων μιας μεταβλητής, αν μία συνάρτηση ν μεταβλητών είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 ως προς κάθε μεταβλητή ξεχωριστά, τότε είναι και συνεχής ως προς κάθε μεταβλητή στο σημείο αυτό [26, σελ. 329].

Όλες οι μερικές παράγωγοι μιας συνάρτησης $y = f(x_1, \ldots, x_\nu)$ μπορούν να συγκεντρωθούν σε μια απλή μαθηματική οντότητα που ονομάζεται *διάνυσμα βαθμίδας* (gradient vector) ή απλώς βαθμίδα μιας συνάρτησης f:

$$gradf(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = (f_1, f_2, \ldots, f_\nu),$$

όπου $f_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}$. Εναλλακτικά, η βαθμίδα μπορεί να συμβολιστεί με $\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$, όπου το ∇, που διαβάζεται ανάδελτα, είναι το ανεστραμμένο ελληνικό γράμμα Δ [5, σελ. 270].

Για παράδειγμα, το διάνυσμα βαθμίδας της συνάρτησης $f(x, y) = 3x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2$ είναι $\nabla f(x, y) = (6x_1 + x_2, x_1 + 8x_2)$.

5.2 Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

Αν η συνάρτηση $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ είναι παραγωγίσιμη ως προς x_i, τότε η παράγωγος αυτής ως προς x_i, λέγεται *μερική παράγωγος δεύτερης τάξης* της $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ ως προς x_i και συμβολίζεται με $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. Παρόμοια, αν η $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ είναι παραγωγίσιμη ως προς x_j με $j \neq i$, τότε η παράγωγος αυτής ως προς x_j, λέγεται μερική παράγωγος δεύτερης τάξης της $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ ως προς x_i και x_j και συμβολίζεται με $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x, y) = x^3y^2 - xy^5$. Οι παράγωγοι πρώτης τάξης αυτής είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - y^5 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 5xy^4$$

και οι παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2, f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3 - 20xy^3,$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x^2y - 5y^4, f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2y - 5y^4.$$

Οι παράγωγοι της μορφής $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $j \neq i$ ονομάζονται και *μικτές* (mixed). Στο προηγούμενο παράδειγμα, παρατηρούμε ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για κάθε συνάρτηση της οποίας ορίζονται οι μικτές μερικές παράγωγοι 2ης τάξης.

Θεώρημα 20 (Θεώρημα Young) *[26, σελ. 331] Αν για μία συνάρτηση $y = f(x_1, \ldots, x_\nu)$ ορίζονται οι μικτές μερικές παράγωγοι $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ και είναι συνεχείς συναρτήσεις, τότε είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

5.2.1 Εσσιανή μήτρα

Θα ορίσουμε τώρα την μήτρα των μερικών παραγώγων μιας συνάρτησης.

Ορισμός 52 *[26, σελ. 331] Η μήτρα όλων των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης της συνάρτησης $f(x_1, \ldots, x_\nu)$ υπολογισμένων σε ένα σημείο $x = x_1, \ldots, x_\nu$ ονομάζεται* Εσσιανή μήτρα[1] *(Hessian matrix) της f στο x και συμβολίζεται με $H(x)$ ή $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, \ldots, \nu$, δηλαδή:*

$$H(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_\nu} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1\nu} \\ f_{21} & \cdots & f_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{\nu 1} & \cdots & f_{\nu\nu} \end{pmatrix}.$$

Αν οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι συνεχείς, τότε από το θεώρημα Young προκύπτει:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, i, j = 1, \ldots, \nu, i \neq j$$

οπότε η μήτρα $H(x)$ είναι συμμετρική.

Για παράδειγμα, η Εσσιανή μήτρα της $f(x, y) = x^3 y^2 - x y^5$ είναι η

$$H(x) = \begin{pmatrix} 6xy^2 & 6x^2 y - 5y^4 \\ 6x^2 y - 5y^4 & 2x^3 - 20xy^3 \end{pmatrix}.$$

5.3 Ιακωβιανή μήτρα

Οι μερικές παράγωγοι αποτελούν έναν τρόπο ελέγχου της συναρτησιακής εξάρτησης μεταξύ των στοιχείων ενός συνόλου ν συναρτήσεων ν μεταβλητών. Αυτό επιτυγχάνεται με την

[1] Η Εσσιανή μήτρα πήρε το όνομά της προς τιμήν του Γερμανού Μαθηματικού Ludwig Otto Hesse.

βοήθεια της *Ιακωβιανής μήτρας*[2] (Jaccobian matrix).

Ορισμός 53 *[28, σελ. 120] Έστω οι συναρτήσεις* $f_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_\nu), f_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_\nu), \ldots, f_\nu = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$. *Με την βοήθεια των μερικών παραγώγων πρώτης τάξης σχηματίζουμε την Ιακωβιανή μήτρα και κατ' επέκταση την Ιακωβιανή ορίζουσα των συναρτήσεων* $(f_1, f_2, \ldots, f_\nu)$*:*

$$|J| = \left|\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_\nu)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_\nu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_\nu}{\partial x_1} & \frac{\partial f_\nu}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\nu} \end{vmatrix}.$$

Από τους Ορισμούς 52 και 53 εύκολα προκύπτει ότι η Ιακωβιανή της βαθμίδας μιας συνάρτησης f είναι η Εσσιανή αυτής. Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί κριτήριο για την ύπαρξη συναρτησιακής εξάρτησης μεταξύ των στοιχείων ενός συνόλου ν συναρτήσεων.

Θεώρημα 21 *[26, σελ. 346] Αν ο βαθμός της Ιακωβιανής μήτρας είναι* ν *ή ισοδύναμα η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι* $|J| \neq 0$*, τότε οι συναρτήσεις* $(f_1, f_2, \ldots, f_\nu)$ *είναι συναρτησιακά ανεξάρτητες μεταξύ τους. Με άλλα λόγια αν τα ανάδελτα (gradient vectors) της* f *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους, οι συναρτήσεις* $(f_1, f_2, \ldots, f_\nu)$ *είναι συναρτησιακά ανεξάρτητες. Διαφορετικά, αν* $|J| = 0$ *ή* $r(J) < \nu$ *ή τα ανάδελτα της* f *είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε οι συναρτήσεις* $(f_1, f_2, \ldots, f_\nu)$ *είναι συναρτησιακά εξαρτημένες.*

Για παράδειγμα, έστω δύο συναρτήσεις $y_1 = 2x_1 + 3x_2$ και $y_2 = 4x_1^2 + 12x_1x_2 + 9x_2^2$ [5, σελ. 280–281]. Οι τέσσερις μερικές παράγωγοι διαμορφώνονται ως εξής:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 2, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 3, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 8x_1 + 12x_2, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 12x_1 + 18x_2.$$

Προκύπτει η Ιακωβιανή ορίζουσα

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8x_1 + 12x_2 & 12x_1 + 18x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Άρα, με βάση το παραπάνω θεώρημα οι δύο συναρτήσεις είναι συναρτησιακά εξαρτημένες. Πράγματι, εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η y_2 είναι το τετράγωνο της y_1.

[2] Η Ιακωβιανή μήτρα πήρε το όνομά της προς τιμήν του Γερμανού Μαθηματικού Carl Gustav Jaccob Jaccobi.

5.4 Ολικό διαφορικό

Ορισμός 54 *[26, σελ. 336] Έστω η συνάρτηση $y = f(x_1, \ldots, x_\nu)$. Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ για $i = 1, \ldots, \nu$ τότε ονομάζουμε* ολικό διαφορικό *(total differential) πρώτης τάξης της συνάρτησης f και συμβολίζουμε με dy, το άθροισμα των μερικών διαφορικών αυτής, δηλαδή:*

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_\nu}dx_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i.$$

Από τον ορισμό αυτό είναι φανερό ότι το ολικό διαφορικό αποτελεί μία γραμμική προσέγγιση της μεταβολής της y, όταν οι ανεξάρτητες μεταβλητές λάβουν μικρές μεταβολές.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $y = f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 3x_2$. Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους: $f_1 = 10x_1$ και $f_2 = 3$. Το ολικό διαφορικό της συνάρτησης y δίνεται από την σχέση:

$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 = 10x_1 dx_1 + 3dx_2.$$

Ορισμός 55 *[26, σελ. 336] Το* ολικό διαφορικό δεύτερης τάξης *(second order total differential) της συνάρτησης $y = f(x_1, \ldots, x_\nu)$ είναι το διαφορικό του dy, δηλαδή $d(dy) = d^2y$. Με κατάλληλους υπολογισμούς προκύπτει ότι:*

$$d^2y = \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

5.4.1 Κανόνες διαφορικών

Ένας απλός τρόπος υπολογισμού του ολικού διαφορικού dy, δεδομένης μιας συνάρτησης $y = f(x_1, x_2)$ είναι να βρούμε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και να τις αντικαταστήσουμε στην εξίσωση $dy = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$.

Μερικές φορές όμως, είναι πιο εύκολο να εφαρμόσουμε συγκεκριμένους κανόνες διαφορικών. Έστω k μια σταθερά και u και v δύο συναρτήσεις των μεταβλητών x_1 και x_2. Τότε ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες [5, σελ. 298–299]:

1. Κανόνας σταθερής συνάρτησης: $dk = 0$.

2. Κανόνας δυναμοσυνάρτησης: $d(cu^n) = cnu^{n-1}du$.

3. Κανόνας αθροίσματος-διαφοράς: $d(u \pm v) = du \pm dv$.

4. Κανόνας γινομένου: $d(uv) = vdu + udv$.

5. Κανόνας πηλίκου: $d(\frac{u}{v}) = \frac{1}{v^2}(vdu - udv)$.

Έτσι, για την $y = f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 3x_2$ που εξετάσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, αν θέσουμε $u = 5x_1^2$ και $v = 3x_2$, με την βοήθεια αρχικά του 3ου κανόνα και στη συνέχεια του 2ου, θα πάρουμε:

$$dy = d(5x_1^2) + d(3x_2) = 10x_1dx_1 + 3dx_2.$$

5.5 Ολική παράγωγος

Σε προηγούμενη ενότητα δώσαμε τον ορισμό την έννοια της μερικής παραγώγου για συναρτήσεις της μορφής $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$. Η μερική παράγωγος της f ως προς μία μεταβλητή, έστω την x_1, δίνει το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης όταν μεταβάλλεται η x_1 με την υπόθεση ότι οι υπόλοιπες μεταβλητές $x_2, \ldots, x_\nu$ παραμένουν σταθερές. Συχνά, όμως, οι μεταβλητές $y, x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ συνδέονται μεταξύ τους. Έτσι, μπορεί να υπάρχει μία μεταβλητή π.χ. η x_2 η οποία να είναι συνάρτηση της x_1, δηλαδή $x_2 = g(x_1)$ [26, σελ. 344]. Διαμορφώνεται έτσι η σύνθετη συνάρτηση $y = f[x_1, g(x_1)]$. Επομένως, μία μεταβολή της x_1 επηρεάζει την y τόσο άμεσα, με ρυθμό που εκφράζεται από τη μερική παράγωγο $\frac{\partial y}{\partial x_1}$, όσο και έμμεσα, μέσω της μεταβολής που προκαλεί η x_1 στην x_2 λόγω της συνάρτησης g. Η έμμεση επίδραση μπορεί να εκφραστεί λόγω του κανόνα της αλυσίδας για την παραγώγιση σύνθετων συναρτήσεων μέσω του γινομένου $f_{x_2}\frac{dx_2}{dx_1}$ ή $\frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}$. Προσθέτοντας τις δύο επιδράσεις παίρνουμε την ολική παράγωγο του y ως προς x_1:

$$\frac{dy}{dx_1} = f_{x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + f_{x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + \frac{\partial y}{\partial x_1}.$$

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $y = f(x, w) = 3x - w^2$, όπου $x = g(w) = 2w^2 + w + 4$ [5, σελ. 303]. Η άμεση επίδραση εκφράζεται από τη μερική παράγωγο $\frac{\partial y}{\partial w} = -2w$, ενώ η έμμεση επίδραση εκφράζεται μέσω του γινομένου $\frac{\partial y}{\partial x}\frac{dx}{dw} = 3(4w + 1)$. Η ολική παράγωγος είναι:

$$\frac{dy}{dw} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{dx}{dw} + \frac{\partial y}{\partial w} = 3(4w + 1) - 2w = 10w + 3.$$

Αν θέλουμε να επαληθεύσουμε, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την συνάρτηση g στη συνάρτηση f, δηλαδή

$$y = 3(2w^2 + w + 4) - w^2 = 5w^2 + 3w + 12,$$

η οποία είναι μόνο συνάρτηση του w. Η παράγωγος βρίσκεται εύκολα και είναι η ίδια απάντηση $\frac{dy}{dw} = 10w + 3$.

5.6 Τετραγωνικές μορφές

Ορισμός 56 *[26, σελ. 285] Μια* τετραγωνική μορφή *(quadratic form) $Q(x)$ ν μεταβλητών έχει την μορφή*

$$Q(x_1, \ldots, x_\nu) = \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{12}x_1x_2 + \ldots + \alpha_{ij}x_ix_j + \ldots + \alpha_{\nu\nu}x_\nu^2 = \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\alpha_{ij}x_ix_j$$

όπου α_{ij}, $i = 1, \ldots, \nu$, $j = 1, \ldots, \nu$, είναι σταθερές.

Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 6x_2x_1 - 3x_2^2$$

είναι μια τετραγωνική μορφή δυο μεταβλητών [13, Κεφ. 3.2.1]. Μπορούμε να γράψουμε την τετραγωνική μορφή αυτού του παραδείγματος ως

$$Q(x_1, x_2) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Επειδή $4x_1x_2 - 6x_2x_1 = -2x_1x_2 = -x_1x_2 - x_2x_1$, μπορούμε εναλλακτικά να την γράψουμε ως

$$Q(x_1, x_2) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Αν γράψουμε την τετραγωνική μορφή με αυτό τον τρόπο τότε η μήτρα είναι συμμετρική.

Στην πραγματικότητα μπορούμε να γράψουμε οποιαδήποτε τετραγωνική μορφή ως $Q(x) = x'Ax$ όπου x είναι η στήλη διάνυσμα, A είναι μια συμμετρική $\nu \times \nu$ μήτρα και x' είναι η ανάστροφη της στήλης διάνυσμα. Το (i, j)-οστό στοιχείο της συμμετρικής μήτρας είναι ίσο με $\alpha_{ij} = \frac{\alpha_{ij}+\alpha_{ji}}{2}$. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι για οποιοδήποτε i και j ισχύει $x_i x_j = x_j x_i$, έτσι ώστε $\alpha_{ij}x_i x_j + \alpha_{ji}x_j x_i = (\alpha_{ij}+\alpha_{ji})x_i x_j = \frac{\alpha_{ij}+\alpha_{ji}}{2}x_i x_j + \frac{\alpha_{ji}+\alpha_{ij}}{2}x_j x_i$.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$Q(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2x_1 + 3x_1x_3 + x_3x_1 + 2x_2x_3 + 4x_3x_2 - x_2^2 + 2x_3^2.$$

Εύκολα προκύπτει ότι

$$Q(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 2\cdot x_1x_2 + 2\cdot 2x_1x_3 + 2\cdot 3x_2x_3 - x_2^2 + 2x_3^2.$$

Έχουμε $Q(x) = x'Ax$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 57 *[26, σελ. 287] Έστω $Q(x) = x'Ax$ μια τετραγωνική μορφή ν μεταβλητών. Λέμε ότι η $Q(x)$ είναι:*

- θετικά ορισμένη *(positive definite), αν $Q(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$,*
- αρνητικά ορισμένη *(negative definite), αν $Q(x) < 0$ για κάθε $x \neq 0$,*
- θετικά ημιορισμένη *(positive semidefinite) , αν $Q(x) \geq 0$ για κάθε $x \neq 0$, και*
- αρνητικά ημιορισμένη *(negative semidefinite) , αν $Q(x) \leq 0$ για κάθε $x \neq 0$.*

Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, για να εξακριβώσουμε αν μια τετραγωνική μορφή $Q(x) = x'Ax$ είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένη, πρέπει να εξετάσουμε τις ορίζουσες μερικών από τους υποπίνακες της. Στο Κεφάλαιο 2 αναφερθήκαμε στην έννοια της ορίζουσας μιας τετραγωνικής μήτρας A καθώς και στις ελάσσονες ορίζουσες αυτής. Παρακάτω θα αναφέρουμε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις ελασσόνων [26, σελ. 236]:

1. *Κύριες ελάσσονες* (principal minors)

   Οι κύριες ελάσσονες $\tilde{D}_k$ είναι οι ορίζουσες k τάξης που προκύπτουν από k γραμμές και τις ίδιες k στήλες της μήτρας.

Για παράδειγμα, στην μήτρα $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ αντιστοιχούν:

- τρεις κύριες ελάσσονες πρώτης τάξης, οι $|\alpha_{11}| = 1, |\alpha_{22}| = 2, |\alpha_{33}| = 3$,
- τρεις κύριες ελάσσονες δεύτερης τάξης, οι

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 3 \end{vmatrix},$$

- μία κύρια ελάσσων τρίτης τάξης, η

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

- *Διαδοχικές κύριες ελάσσονες* (leading principal minors)

  Η διαδοχική κύρια ελάσσων D_k είναι η υποορίζουσα που αντιστοιχεί στις k πρώτες γραμμές και στήλες της μήτρας.

  Για παράδειγμα, οι διαδοχικές κύριες ελάσσονες της προηγούμενης μήτρας A είναι οι: $D_1 = 1$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ και $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$.

Το θεώρημα που ακολουθεί βασίζεται στις διαδοχικές κύριες ελάσσονες.

Θεώρημα 22 *[26, σελ. 288] Έστω $Q(x) = x'Ax$ μια τετραγωνική μορφή, D_k, $k = 1, \ldots, \nu$, οι διαδοχικές κύριες ελάσσονες. Τότε η $Q(x)$ είναι*

- *θετικά ορισμένη αν και μόνο αν $D_k > 0$ για κάθε $k = 1, \ldots, \nu$,*
- *αρνητικά ορισμένη αν και μόνο αν $(-1)^k D_k > 0$ για κάθε $k = 1, \ldots, \nu$.*

Για παράδειγμα, έστω η τετραγωνική μήτρα

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Οι κύριες ελάσσονες της A είναι $D_1 = -3 < 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 > 0$ και $D_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -25 < 0$. Συνεπώς η τετραγωνική μορφή είναι αρνητικά ορισμένη [13, Κεφ. 3.2.2].

Για να καθορίσουμε αν η τετραγωνική μορφή είναι θετικά ή αρνητικά ημιορισμένη πρέπει να ελέγξουμε όλες τις κύριες ελάσσονες.

Θεώρημα 23 *[26, σελ. 289] Έστω $Q(x) = x'Ax$ μια τετραγωνική μορφή, $\tilde{D}_k$, $k = 1, \ldots, \nu$, οι κύριες ελάσσονες της A. Τότε η $Q(x)$ είναι*

- *θετικά ημιορισμένη αν και μόνο αν $\tilde{D}_1 \geq 0, \tilde{D}_2 \geq 0, \ldots, \tilde{D}_k \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν όλες οι κύριες ελάσσονες της A είναι μη αρνητικές.*
- *αρνητικά ημιορισμένη αν και μόνο αν $\tilde{D}_1 \leq 0, \tilde{D}_2 \geq 0, \ldots, (-1)^k \tilde{D}_k \geq 0$.*

Για παράδειγμα, έστω η τετραγωνική μήτρα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Οι διαδοχικές κύριες ελάσσονες είναι $D_1 = 3$, $D_2 = -4$ και $D_3 = -19$. Διαπιστώνουμε ότι η A δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένη. Αυτό φαίνεται αν ελέγξουμε τις δυο πρώτες κύριες ελάσσονες. Δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε την D_3.

Για να ελέγξουμε την θετική ή αρνητική ημιοριστικότητα πρέπει να ελέγξουμε τις κύριες ελάσσονες. Αυτή η μήτρα έχει τρεις πρώτης τάξης κύριες ελάσσονες, που μας δίνουν τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου της μήτρας: $\alpha_{11} = 3, \alpha_{22} = -1, \alpha_{33} = 2$. Παρατηρούμε ότι δεν ικανοποιούνται οι συνθήκες για θετική ή αρνητική ημιοριστικότητα. Συνεπώς, δεν μπορούμε να καταλήξουμε στο αν η τετραγωνική μήτρα A είναι ημιορισμένη θετικά ή αρνητικά, αντίστοιχα. Σε αυτή την περίπτωση, λέμε πως οι συνθήκες έχουν παραβιασθεί αυστηρά και η $|A|$ είναι αόριστη [13, Κεφ. 3.2.3].

Για παράδειγμα, έστω η τετραγωνική μήτρα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Οι δυο πρώτης τάξης κύριες ελάσσονες είναι 0 και -1 και η δεύτερης τάξης κύρια ελάσσων είναι 0. Η τετραγωνική μορφή είναι αρνητικά ημιορισμένη. Δεν είναι αρνητικά ορισμένη επειδή η πρώτη κύρια ελάσσων είναι μηδέν [13, Κεφ. 3.2.3].

Συνεπώς τα βήματα που ακολουθούμε για να διαπιστώσουμε την οριστικότητα ή ημιοριστικότητα μιας τετραγωνικής μορφής είναι τα παρακάτω [13, Κεφ. 3.2.3]:

- Βρίσκουμε τις κύριες ορίζουσες και ελέγχουμε αν οι συνθήκες για θετική ή αρνητική οριστικότητα ικανοποιούνται. Αν η μήτρα A είναι θετικά ορισμένη, τότε σίγουρα είναι και θετικά ημιορισμένη και αν είναι αρνητικά ορισμένη, τότε σίγουρα είναι και αρνητικά ημιορισμένη.
- Αν οι συνθήκες δεν ικανοποιούνται, τότε ελέγχουμε αν είναι αυστηρά παραβιασμένες. Αν ναι, η μήτρα A είναι αόριστη. Αν όχι, βρίσκουμε όλες τις κύριες ελάσσονες και ελέγχουμε αν οι συνθήκες για θετική ή αρνητική ημιοριστικότητα ικανοποιούνται.

5.7 Ακρότατα πολυμετάβλητων συναρτήσεων

5.7.1 Αδέσμευτα τοπικά ακρότατα

Τα ακρότατα (ολικά ή τοπικά) μιας πραγματικής συνάρτησης ν μεταβλητών ορίζονται όπως και για τις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Ορισμός 58 *[26, σελ. 375] Μια συνάρτηση $y = f(x_1, \ldots, x_\nu)$ ορισμένη σε ένα διάστημα $S \subseteq \mathbb{R}^\nu$ έχει:*

- ολικό μέγιστο *στο σημείο $x^\star \in S$ αν $f(x_1^\star, \ldots, x_\nu^\star) \geq f(x_1, \ldots, x_\nu)$ για κάθε $x \in S$,*
- ολικό ελάχιστο *στο σημείο $x^\star \in S$ αν $f(x_1^\star, \ldots, x_\nu^\star) \leq f(x_1, \ldots, x_\nu)$ για κάθε $x \in S$.*

Όταν για κάθε $x \neq x^\star$ ισχύουν αυστηρές ανισότητες, έχουμε μοναδικό ολικό μέγιστο ή ελάχιστο στο $x^\star$.

Τα μέγιστα και ελάχιστα που ορίστηκαν παραπάνω είναι *αδέσμευτα ακρότατα ή ακρότατα χωρίς περιορισμούς* (unconstrained optima), επειδή μπορεί να επιτευχθούν σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Παρόμοιοι είναι οι ορισμοί για τα τοπικά ακρότατα της f σε ένα σημείο $x^\star$ του πεδίου ορισμού της.

Ορισμός 59 *[26, σελ. 375] Έστω συνάρτηση f ν μεταβλητών, $\Delta \in D_f$ και $x^\star \in \Delta$. Η f έχει:*

- τοπικό μέγιστο *στο σημείο $x^\star$ αν και μόνο αν $f(x^\star) \geq f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$,*
- τοπικό ελάχιστο *στο σημείο $x^\star$ αν και μόνο αν $f(x^\star) \leq f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.*

Είναι προφανές ότι ένα ολικό μέγιστο (ελάχιστο) είναι και τοπικό μέγιστο (ελάχιστο), ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει κατ' ανάγκη.

Προσδιορισμός ακρότατων

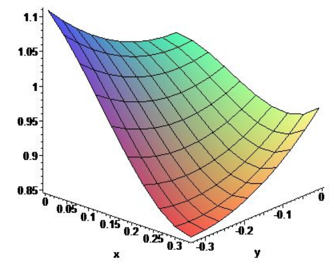
Όπως και στην περίπτωση των συναρτήσεων μιας ανεξάρτητης μεταβλητής, ο προσδιορισμός των ακρότατων μιας συνάρτησης πολλών ανεξάρτητων μεταβλητών γίνεται με την βοήθεια των μερικών παραγώγων πρώτης και δεύτερης τάξης.

Θεώρημα 24 *[6, σελ. 56] Έστω η συνάρτηση $y = f(x_1, \ldots, x_\nu)$. Ένα σημείο $x^\star$ είναι* στάσιμο σημείο *αν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της συνάρτησης σε αυτό το σημείο μηδενίζονται, δηλαδή:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_\nu) = 0 \text{ για } i = 1, \ldots, \nu.$$

Η συνθήκη αυτή είναι μόνο αναγκαία, όχι όμως και ικανή και γι' αυτό κάθε σημείο που επαληθεύει την παραπάνω συνάρτηση δεν είναι οπωσδήποτε σημείο τοπικού ακρότατου. Δηλαδή κάθε τοπικό ακρότατο είναι στάσιμο σημείο, ενώ κάθε στάσιμο σημείο δεν είναι αναγκαστικά και ακρότατο. Αν το στάσιμο σημείο $x^\star$ δεν είναι ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο, τότε λέγεται *σαγματικό σημείο* (saddle point) [29, σελ. 415].

Η ακόλουθη συνθήκη μας επιτρέπει να ελέγξουμε αν τα σημεία είναι ακρότατα και αν είναι να διαπιστώσουμε το είδος τους. Αυτό το επιτυγχάνουμε χρησιμοποιώντας την Εσσιανή μήτρα.



Σχήμα 5.1: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x, y) = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2 + 1$.

Θεώρημα 25 *[26, σελ. 376] Έστω f μια συνάρτηση ν μεταβλητών με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης, που ορίζονται στο διάστημα S και ότι το $x^\star$ είναι ένα στάσιμο σημείο της f στο εσωτερικό του διαστήματος S.*

- *Αν η $|H|$ είναι αρνητικά ορισμένη, τότε το $x^\star$ είναι σημείο τοπικού μέγιστου.*
- *Αν η $|H|$ είναι θετικά ορισμένη, τότε το $x^\star$ είναι σημείο τοπικού ελάχιστου.*

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x, y) = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2 + 1$. Έχουμε $\frac{\partial f}{\partial x} = 24x^2 + 2y - 6x$ και $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y$. Όπως αναφέραμε για να είναι στάσιμο ένα σημείο, θα πρέπει οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης να είναι μηδενικές. Από την δεύτερη ισότητα προκύπτει ότι $y = -x$. Προσθέτοντας αυτό στην πρώτη ισότητα βρίσκουμε ότι $24x^2 - 8x = 8x(3x - 1)$, το οποίο πρέπει να ισούται με μηδέν. Αυτή η εξίσωση έχει δυο λύσεις, $x_1 = 0$ και $x_2 = \frac{1}{3}$. Άρα τα στάσιμα σημεία είναι $(x_1, y_1) = (0, 0)$ και $(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ (βλέπε Σχήμα 5.1.

Η Εσσιανή ορίζουσα αυτής της συνάρτησης είναι:

$$|H| = \begin{vmatrix} 48x - 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Τώρα ας εξετάσουμε κάθε στάσιμο σημείο αντίστοιχα. Για το σημείο $(x_1, y_1) = (0, 0)$ προκύπτουν οι διαδοχικές κύριες ελάσσονες $|H_1| = -6 < 0$ και $|H_2| = -16 < 0$. Η Εσσιανή μήτρα δεν είναι ούτε θετικά ορισμένη ούτε αρνητικά ορισμένη. Συνεπώς το $(x_1, y_1) = (0, 0)$ δεν είναι ούτε τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο, αλλά είναι σαγματικό σημείο.

Για το σημείο $(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ προκύπτουν οι διαδοχικές κύριες ελάσσονες $|H_1| = 10 > 0$ και $|H_2| = 16 > 0$. Η Εσσιανή μήτρα είναι θετικά ορισμένη. Συνεπώς το $(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο με ελάχιστη τιμή την $f\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{23}{27}$.

5.7.2 Δεσμευμένα τοπικά ακρότατα

Μέχρι τώρα αναφερθήκαμε σε μεταβλητές οι οποίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Υπάρχει όμως το ενδεχόμενο αυτές οι μεταβλητές να μην είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, αλλά να συνδέονται με μία ή περισσότερες σχέσεις. Η εξάρτηση των μεταβλητών προκαλεί ένα βέλτιστο με περιορισμό. Σε αυτή την περίπτωση, τα ακρότατα μιας συνάρτησης, π.χ. $f(x, y)$ με περιορισμό $g(x, y) = c$ ονομάζονται *ακρότατα με περιορισμό* (extremals with restriction) ή *δεσμευμένα ακρότατα* (constrained extremals).

Αν ο περιορισμός δίνεται από μια περίπλοκη συνάρτηση, τότε εφαρμόζουμε την μέθοδο του *πολλαπλασιαστή Lagrange* (Lagrange multiplier). Η κεντρική ιδέα της μεθόδου του πολλαπλασιαστή Lagrange είναι να μετατρέψουμε ένα πρόβλημα ακρότατου με περιορισμό σε μια μορφή, ώστε η συνθήκη πρώτης τάξης του προβλήματος του ελεύθερου ακρότατου να μπορεί ακόμα να εφαρμοστεί [6, σελ. 113].

Δεδομένης της συνάρτησης $f(x, y)$ με περιορισμό $g(x, y) = c$, όπου οι συναρτήσεις f και g θεωρούνται συνεχείς και παραγωγίσιμες και c μια σταθερά, μπορούμε να γράψουμε την συνάρτηση του Lagrange ως:

$$Z = \mathit{\Lambda}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(g(x, y) - c),$$

όπου λ είναι μια νέα μεταβλητή που ονομάζεται πολλαπλασιαστής Lagrange.

Η αναγκαία συνθήκη για την εύρεση του δεσμευμένου ακρότατου θα αποτελείται από το σύστημα των ακόλουθων εξισώσεων:

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = g(x, y) - c = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί γενίκευση για την εύρεση δεσμευμένου τοπικού ακρότατου στην περίπτωση πολλών ανεξάρτητων μεταβλητών.

Θεώρημα 26 *Έστω η συνάρτηση* $y = f(x_1, \ldots, x_\nu)$ *με περιορισμό* $g(x_1, \ldots, x_\nu) = c$ *και* $Z = f(x_1, \ldots, x_\nu) + \lambda(g(x_1, \ldots, x_\nu) - c)$. *Ένα σημείο* $x^\star$ *είναι* στάσιμο σημείο *αν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της συνάρτησης σε αυτό το σημείο μηδενίζονται:*

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_\nu) = 0 \text{ για } i = 1, \ldots, \nu.$$

Όπως και στην περίπτωση του αδέσμευτου ακρότατου, έτσι και τώρα εκφράζουμε την ικανή συνθήκη δεύτερης τάξης με τη μορφή ορίζουσας. Η βασική διαφορά είναι ότι στη θέση της Εσσιανής ορίζουσας $|H|$ θα συναντήσουμε την *πλαισιωμένη Εσσιανή ορίζουσα,* $|\bar{H}|$ (bordered Hessian) [6, σελ. 126].

Η πλαισιωμένη Εσσιανή ορίζουσα για την παραπάνω περίπτωση διαμορφώνεται ως εξής:

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

- Αν η $|\bar{H}|$ είναι αρνητικά ορισμένη, τότε το $x^\star$ είναι σημείο τοπικού μέγιστου.
- Αν η $|\bar{H}|$ είναι θετικά ορισμένη, τότε το $x^\star$ είναι σημείο τοπικού ελάχιστου.

Δεδομένης μιας πλαισιωμένης Εσσιανής ορίζουσας

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_\nu} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1 \partial x_\nu} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_2 \partial x_\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_\nu} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_\nu \partial x_1} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_\nu \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 x_\nu} \end{vmatrix}$$

οι πλαισιωμένες κύριες ελάσσονές της είναι:

$$|\bar{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}, |\bar{H}_3| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}, \quad \text{κ.ο.κ} ,$$

με την τελευταία την $|\bar{H}_\nu| = |\bar{H}|$.

Η $|\bar{H}|$ είναι:

- θετικά ορισμένη, αν και μόνο αν οι πλαισιωμένες κύριες ελάσσονες είναι αρνητικές, δηλαδή αν
$$|\bar{H}_2|, |\bar{H}_3|, \ldots, |\bar{H}_\nu| < 0$$
- αρνητικά ορισμένη, αν και μόνο αν τα πρόσημα των πλαισιωμένων κύριων ελασσόνων εναλλάσσονται, δηλαδή αν
$$|\bar{H}_2| > 0, |\bar{H}_3| < 0, |\bar{H}_4| > 0, \ldots.$$

Όπως προηγουμένως, μία θετικά ορισμένη $|\bar{H}|$ καθορίζει το $x^\star$ ως τοπικό ελάχιστο, ενώ μία αρνητικά ορισμένη $|\bar{H}|$ το καθορίζει ως τοπικό μέγιστο.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x, y) = xy$ με περιορισμό $g(x, y) = x + y = 6$. Η συνάρτηση Lagrange είναι $\Lambda(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 6)$. Οι πρώτες μερικές παράγωγοι είναι:
$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = x + y - 6 = 0$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x} = y + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial Z}{\partial y} = x + \lambda = 0$$
Εφαρμόζοντας την μέθοδο του Cramer που αναφέραμε στο Κεφάλαιο 2 βρίσκουμε ότι $\lambda^\star = 3$, $x^\star = 3$, $y^\star = 3$. Άρα πιθανό σημείο τοπικού ακρότατου είναι το $z^\star = (3, 3, 3)$. Για να βρούμε το είδος του ακρότατου, θα πρέπει να επαληθευτεί η συνθήκη δεύτερης τάξης. Υπολογίζουμε, λοιπόν τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:
$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = 1, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 0.$$
Επίσης, $\frac{\partial g}{\partial x} = 1$ και $\frac{\partial g}{\partial y} = 1$. Αυτό συνεπάγεται ότι η ορίζουσα της πλαισιωμένης Εσσιανής είναι
$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0$$
Η πλαισιωμένη Εσσιανή είναι αρνητικά ορισμένη και η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $z^\star = (3, 3, 3)$ με $\Lambda(z^\star) = 9$ [6, σελ. 115].

5.8 Καμπυλότητα πολυμετάβλητων συναρτήσεων

Ορισμός 60 *[13, Κεφ. 3.3] Έστω f μια συνάρτηση ν ανεξάρτητων μεταβλητών που ορίζεται σε ένα ανοιχτό διάστημα $S \subseteq \mathbb{R}^{\nu}$. Τότε η f είναι*

- *κοίλη αν για κάθε $x, y \in S$ και κάθε $\lambda \in (0,1)$ ισχύει*

$$f[(1-\lambda)x + \lambda y] \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

- *κυρτή αν για κάθε $x, y \in S$ και κάθε $\lambda \in (0,1)$ ισχύει*

$$f[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Μια αυστηρά κοίλη συνάρτηση είναι αυτή που ικανοποιεί τον ορισμό της κοιλότητας με μια αυστηρή ανισότητα ($>$) για κάθε $x \neq x'$ και μια αυστηρά κυρτή συνάρτηση είναι αυτή που ικανοποιεί τον ορισμό της κυρτότητας με μια αυστηρή ανισότητα ($<$) για κάθε $x \neq x'$.

Μια διπλά παραγωγίσιμη συνάρτηση μιας ανεξάρτητης μεταβλητής είναι κοίλη αν και μόνο αν η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική παντού. Για να αποφασίσουμε αν μια διπλά παραγωγίσιμη συνάρτηση πολλών μεταβλητών είναι κοίλη ή κυρτή, πρέπει να εξετάσουμε όλες τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης. Η γενίκευση της μονομετάβλητης συνάρτησης στην περίπτωση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών έχει ως εξής:

Θεώρημα 27 *[26, σελ. 340] Έστω f μια συνάρτηση ν ανεξάρτητων μεταβλητών που ορίζεται σε ένα ανοιχτό διάστημα $S \subseteq \mathbb{R}^{\nu}$.*

- *Μια συνάρτηση είναι κοίλη αν και μόνο αν η $H(x)$ είναι αρνητικά ημιορισμένη για κάθε $x \in S$.*
- *Μια συνάρτηση είναι αυστηρά κοίλη αν η $H(x)$ είναι αρνητικά ορισμένη για κάθε $x \in S$.*
- *Μια συνάρτηση είναι κυρτή αν και μόνο αν η $H(x)$ είναι θετικά ημιορισμένη για κάθε $x \in S$.*
- *Μια συνάρτηση είναι αυστηρά κυρτή αν η $H(x)$ είναι θετικά ορισμένη για κάθε $x \in S$.*

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$. Οι πρώτες μερικές παράγωγοι είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2 + 2x_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 6x_3 + 2x_1.$$

Έτσι η Εσσιανή μήτρα διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Οι κύριες ελλάσσονες της Εσσιανής μήτρας είναι $|H_1| = 2 > 0$, $|H_2| = 4 > 0$ και $|H_3| = 8 > 0$. Συνεπώς η Εσσιανή μήτρα είναι θετικά ορισμένη και η f είναι αυστηρά κυρτή [13, Κεφ. 3.3].

5.9 Ισοϋψείς καμπύλες – Ομογενείς συναρτήσεις

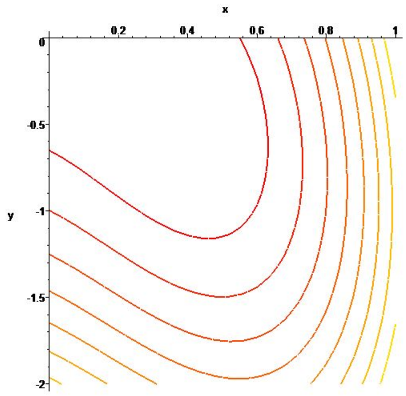
5.9.1 Ισουψείς καμπύλες

Ορισμός 61 *[26, σελ. 363] Έστω μία συνάρτηση $y = f(x_1, \ldots, x_\nu)$ με πεδίο ορισμού ένα διάστημα $S \subseteq \mathbb{R}^\nu$. Το σύνολο των σημείων για τα οποία η τιμή της συνάρτησης παραμένει σταθερή λέγεται* ισοϋψής καμπύλη *(contour) της συνάρτησης. Με άλλα λόγια ισοϋψής καμπύλη είναι κάθε σύνολο*

$$x \in S : f(x_1, \ldots, x_\nu) = y_0 \quad , \text{ όπου } y_0 \text{ σταθερά} .$$

Εναλλακτικές τιμές της σταθεράς y_0 προσδιορίζουν διαφορετικές ισοϋψείς καμπύλες. Το σύνολο των ισοϋψών καμπυλών που προσδιορίζεται για διαφορετικές τιμές της σταθεράς λέγεται *χάρτης ισοϋψών καμπυλών* (contour map).

Από τον ορισμό των ισοϋψών καμπυλών προκύπτει ότι σε κάθε ισοϋψή καμπύλη αντιστοιχεί μία σταθερή τιμή της συνάρτησης. Για κάθε συγκεκριμένο χάρτη ισοϋψών καμπυλών, η κατεύθυνση προς την οποία η τιμή της συνάρτησης αυξάνει ταχύτερα λέγεται *κατεύθυνση προτίμησης* (preference direction). Με άλλα λόγια, η κατεύθυνση προτίμησης είναι η κατεύθυνση προς την οποία οι τιμές που αντιστοιχούν στις ισοϋψείς καμπύλες αυξάνουν με το



Σχήμα 5.2: Χάρτης ισοϋψών καμπυλών της $f(x,y) = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2 + 1$.

μεγαλύτερο ρυθμό [26, σελ. 363–365]. Στο Σχήμα 5.2 δίνουμε τον χάρτη ισοϋψών καμπυλών της συνάρτησης $f(x,y) = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2 + 1$.

Η σχέση $f(x_1,\ldots,x_\nu) = y_0$ γράφεται ως $f(x_1,\ldots,x_\nu) - y_0 = 0$. Η μερική παράγωγος της x_i ως προς την x_j είναι:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial f_j}{\partial f_i},$$

όπου $f_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ για κάθε $i, j = 1,\ldots,\nu$.

Η παραπάνω σχέση εκφράζει την αναγκαία μεταβολή της x_i όταν μεταβάλλεται η x_j και οι υπόλοιπες μεταβλητές παραμένουν σταθερές, έτσι ώστε η τιμή της συνάρτησης να παραμείνει σταθερή στο y_0.

5.9.2 Ομογενείς συναρτήσεις

Στην Οικονομική Θεωρία χρησιμοποιούνται συχνά πολυμετάβλητες συναρτήσεις, οι οποίες είναι ομογενείς. Δίνουμε τον ορισμό στη συνέχεια.

Ορισμός 62 *[26, σελ. 369] Μια συνάρτηση f ν μεταβλητών, για την οποία $(tx_1,\ldots,tx_\nu) \in D_f$ όταν $t > 0$ και $(x_1,\ldots,x_\nu) \in D_f$ είναι* ομογενής *(homogeneous) βαθμού $\varkappa$ αν*

$$f(tx_1,\ldots,tx_\nu) = t^\varkappa f(x_1,\ldots,x_\nu)$$

για κάθε $(x_1,\ldots,x_\nu)$ στο πεδίο ορισμού της f και για $t > 0$. Αν $k = 1$ η συνάρτηση ονομάζεται γραμμικά ομογενής.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x_1,x_2) = Ax_1^\alpha x_2^b$ με πεδίο ορισμού $(x_1,x_2) : x_1 \geq 0 \quad \text{και} \quad x_2 \geq 0$ και A μια εξωγενής παράμετρος. Έχουμε

$$f(tx_1,tx_2) = A(tx_1)^\alpha (tx_2)^b = At^{\alpha+b}x_1^\alpha x_2^b = t^{\alpha+b}f(x_1,x_2),$$

έτσι ώστε η f να είναι ομογενής βαθμού $\alpha+b$.

Για τις ομογενείς συναρτήσεις ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 28 *[26, σελ. 370] Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση ν μεταβλητών και ομογενής βαθμού $\varkappa$. Τότε καθεμία από τις μερικές παραγώγους f_i για $i = 1,\ldots,\nu$ είναι ομογενής βαθμού $\varkappa - 1$.*

Στις ομογενείς συναρτήσεις ισχύει σύμφωνα με τον Leonhard Euler η ακόλουθη, χρήσιμη για την Οικονομική Θεωρία, πρόταση:

Θεώρημα 29 *[26, σελ. 372] Για μία παραγωγίσιμη, ομογενή συνάρτηση $\varkappa$ βαθμού ισχύει*

$$\sum_{i=1}^{\nu} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_\nu) = \varkappa f(x_1,\ldots,x_\nu).$$

Κεφάλαιο 6

Οικονομικές εφαρμογές παραγώγου πολλών μεταβλητών

Σε αυτό το κεφάλαιο θα επικεντρωθούμε σε βασικές εφαρμογές του πολυμετάβλητου διαφορικού λογισμού στην Οικονομική Θεωρία. Για περισσότερα στοιχεία ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει, ενδεικτικά, στην ελληνική βιβλιογραφία [6, 19, 22, 23, 26, 29, 31] και στην αγγλική βιβλιογραφία [1, 2, 4, 7].

6.1 Μερική Ελαστικότητα

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάσαμε την έννοια της ελαστικότητας για συναρτήσεις μίας ανεξάρτητης μεταβλητής. Θα γενικεύσουμε την έννοια αυτή για συναρτήσεις πολλών ανεξάρτητων μεταβλητών.

Ορισμός 63 *[26, σελ. 390] Έστω η συνάρτηση $y = f(x_1, \dots, x_\nu)$, συνεχής και παραγωγίσιμη στο $X \subseteq \mathbb{R}^\nu$. Η* μερική ελαστικότητα *(partial elasticity) της y ως προς την μεταβλητή x_i, $i = 1, \dots, \nu$ στο σημείο $x^\star \in X$ ορίζεται ως:*

$$\varepsilon_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{x_i}{y} = \frac{\partial y/\partial x_i}{y/x_i} = \frac{\partial y/y}{\partial x_i/x_i} = \frac{\partial(\ln y)}{\partial(\ln x_i)}.$$

Συνεπώς, η ελαστικότητα σε ένα σημείο $x^\star$ μετρά την ποσοστιαία μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής, η οποία οφείλεται σε πολύ μικρή ποσοστιαία μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής x_i όταν οι υπόλοιπες ανεξάρτητες μεταβλητές είναι σταθερές. Στη συνέχεια θα αναφέρουμε μερικές ελαστικότητες σε συναρτήσεις ζήτησης [19, σελ. 86–89], [26, σελ. 390].

Έστω η συνάρτηση ζήτησης $q_1 = D_1(p_1, \ldots, p_\nu, Y)$, όπου q_1 είναι η ζητούμενη ποσότητα του προϊόντος 1, $p_1, \ldots, p_\nu$ οι τιμές των προϊόντων και Y το εισόδημα του καταναλωτή. Τότε ορίζονται οι ακόλουθες ελαστικότητες:

Ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή (own elasticity)

Η μερική ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή για το προϊόν 1 δίνεται από τον τύπο:

$$n_1 = \frac{\partial q_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{q_1}.$$

Σταυροειδής ελαστικότητα ζήτησης (cross price elasticity)

Ορισμός 64 *Ο λόγος της ποσοστιαίας μεταβολής της ζητούμενης ποσότητας ενός προϊόντος προς την ποσοστιαία μεταβολή της τιμής κάποιου άλλου προϊόντος λέγεται σταυροειδής ελαστικότητα.*

Η μερική σταυροειδής ελαστικότητα του προϊόντος 2 δίνεται από την σχέση:

$$n_2 = \frac{\partial q_1}{\partial p_2}\frac{p_2}{q_1}.$$

Τα συμπεράσματα, που μπορούμε να εξάγουμε με βάση την σταυροειδή ελαστικότητα είναι ότι αν είναι θετική, δηλαδή αν $n_2 > 0$, τότε τα προϊόντα 1 και 2 είναι υποκατάστατα ή ανταγωνιστικά, ενώ αν είναι αρνητική, δηλαδή αν $n_2 < 0$, τότε τα προϊόντα 1 και 2 είναι συμπληρωματικά.

Υποκατάστατα ή ανταγωνιστικά είναι δύο (ή περισσότερα) προϊόντα, όταν το ένα μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί του άλλου, για να ικανοποιήσει την ίδια ανάγκη. Για παράδειγμα, το βούτυρο και η μαργαρίνη, το χοιρινό και το μοσχαρίσιο κρέας, τα σπίρτα και ο αναπτήρας.

Συμπληρωματικά είναι δύο (ή περισσότερα) προϊόντα, όταν η κατανάλωση του ενός απαιτεί και την κατανάλωση του άλλου (ή άλλων) για την ικανοποίηση μιας ανάγκης. Για παράδειγμα, ο καφές και η ζάχαρη, η φωτογραφική μηχανή και το φιλμ.

Εισοδηματική ελαστικότητα ζήτησης (income elasticity of demand)

Ορισμός 65 *Ο λόγος της ποσοστιαίας μεταβολής της ζητούμενης ποσότητας ενός προϊόντος προς την ποσοστιαία μεταβολή του εισοδήματος των καταναλωτών ονομάζεται εισοδηματική ελαστικότητα.*

Η μερική εισοδηματική ελαστικότητα για το προϊόν 1 δίνεται από την σχέση:

$$n_Y = \frac{\partial q_1}{\partial Y}\frac{Y}{q_1}.$$

Τα συμπεράσματα, που μπορούμε να εξάγουμε με βάση την εισοδηματική ελαστικότητα είναι ότι αν ισχύει $n_Y > 0$, τότε το προϊόν 1 είναι κανονικό ή ανώτερο, ενώ αν $n_Y < 0$, τότε το προϊόν 1 είναι κατώτερο.

Κανονικά ή ανώτερα προϊόντα ονομάζονται τα προϊόντα των οποίων η ζήτηση αυξάνεται, όταν αυξάνεται το εισόδημα. *Κατώτερα* προϊόντα ονομάζονται τα προϊόντα των οποίων η ζήτηση μειώνεται, όταν αυξάνεται το εισόδημα.

6.2 Μεγιστοποίηση κέρδους

Ας υποθέσουμε μια επιχείρηση δύο προϊόντων σε συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού. Όπως έχουμε αναφέρει, σε συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού η επιχείρηση δεν έχει την δυνατότητα να επηρεάσει τις τιμές των προϊόντων.

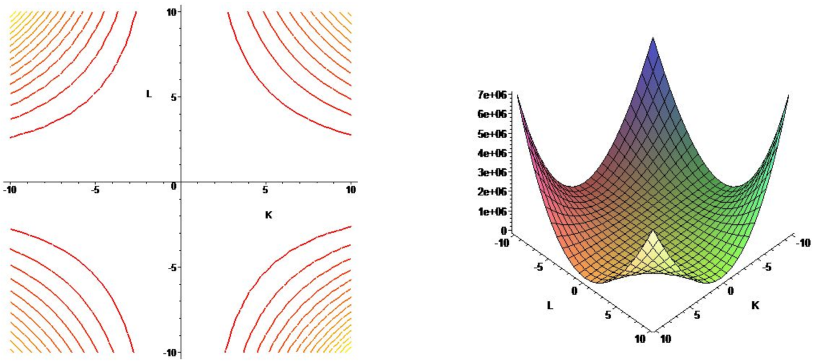
Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση εσόδων $R(q_1, q_2) = p_1q_1 + p_2q_2$ και η συνάρτηση κόστους $C(q_1, q_2) = 2q_1^2 + q_1q_2 + 2q_2^2$, όπου p_1, p_2 είναι οι τιμές των προϊόντων. Η συνάρτηση κέρδους ορίζεται ως

$$\pi = R(q_1, q_2) - C(q_1, q_2) = p_1q_1 + p_2q_2 - 2q_1^2 - q_1q_2 - 2q_2^2.$$

Στόχος μας είναι να βρούμε τις τιμές των q_1 και q_2 που μεγιστοποιούν την συνάρτηση κέρδους. Η αναγκαία συνθήκη για τοπικό μέγιστο είναι οι πρώτες μερικές παράγωγοι να μηδενίζονται. Άρα πρέπει

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = p_1 - 4q_1 - q_2 = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \pi}{\partial q_2} = p_2 - q_1 - 4q_2 = 0.$$

Προκύπτει ότι μοναδική λύση είναι η $q_1^\star = \frac{4p_1 - p_2}{15}$ και $q_2^\star = \frac{4p_2 - p_1}{15}$. Αν θέσουμε $p_1 = 12$ και $p_2 = 18$ έχουμε $q_1 = 2$ και $q_2 = 4$, οι οποίες συνεπάγονται $\pi^\star = 48$.



(a) (b)

Σχήμα 6.1: Οι καμπύλες ισοπαραγωγής της συνάρτησης παραγωγής $q = 600K^2L^2 - K^3L^3$.

Για να είμαστε βέβαιοι ότι πρόκειται για μέγιστο κέρδος, ελέγχουμε την συνθήκη δεύτερης τάξης. Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης μας δίνουν την ακόλουθη Εσσιανή ορίζουσα:

$$|H| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\pi}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2\pi}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2\pi}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2\pi}{\partial q_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}.$$

Επειδή $|H_1| = -4 < 0$ και $|H_2| = 15 > 0$, η Εσσιανή μήτρα είναι αρνητικά ορισμένη και η λύση πράγματι μεγιστοποιεί το κέρδος [6, σελ. 84–86].

6.3 Συνάρτηση παραγωγής

Ας υποθέσουμε ότι για την παραγωγή ενός προϊόντος χρησιμοποιούνται δύο εισροές, το κεφάλαιο K και η εργασία L. Η συνάρτηση παραγωγής διαμορφώνεται ως εξής:

$$q = f(K, L).$$

Αν θεωρήσουμε ότι η παραγόμενη ποσότητα q παραμένει σταθερή, τότε αναφερόμαστε σε ισοϋψείς καμπύλες, τις οποίες εξετάσαμε στο Κεφάλαιο 5. Στην Οικονομική Θεωρία, οι καμπύλες αυτές ονομάζονται *καμπύλες ίσου προϊόντος ή ισοπαραγωγής* (isoquants), επειδή στα σημεία τους αντιστοιχεί ίση παραγωγή προϊόντος. Στο Σχήμα 6.1(a) δίνουμε τις καμπύλες ισοπαραγωγής της συνάρτησης παραγωγής $q = 600K^2L^2 - K^3L^3$ (Σχήμα 6.1(b)). Διαπιστώνουμε ότι υπάρχει πλήθος καμπυλών ισοπαραγωγής, που δείχνουν διαφορετικά ύψη προϊόντος που μπορούν να παραχθούν με μεταβαλλόμενες ποσότητες των συντελεστών παραγωγής. Κάθε καμπύλη ισοπαραγωγής που είναι περισσότερο απομακρυσμένη από την αρχή των αξόνων, έναντι μίας άλλης, δείχνει μεγαλύτερο ύψος παραγωγής. Επίσης, οι καμπύλες ισοπαραγωγής είναι φθίνουσες και κυρτές. Αν η συνάρτηση παραγωγής $q = f(K, L)$ είναι παραγωγίσιμη, τότε η μερική παράγωγος $\frac{\partial q}{\partial K}$ ονομάζεται *οριακό προϊόν* ή καλύτερα *οριακή παραγωγικότητα* του συντελεστή K. Αντίστοιχα η μερική παράγωγος $\frac{\partial q}{\partial L}$ ονομάζεται *οριακό προϊόν* του συντελεστή L [29, σελ. 552–556].

6.3.1 Οριακός Λόγος Τεχνικής Υποκατάστασης

Στο σημείο αυτό αναφέρουμε τον οριακό λόγο τεχνικής υποκατάστασης, ο οποίος ουσιαστικά είναι η κλίση της καμπύλης ισοπαραγωγής.

Ορισμός 66 *[6, σελ. 185] Ο* οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης, *$O\Lambda TY$ (marginal rate of technical substitution) του συντελεστή παραγωγής K από το συντελεστή παραγωγής L μετρά την αναγκαία μείωση στην ποσότητα του συντελεστή K όταν αυξηθεί η ποσότητα του συντελεστή L, ώστε η παραγόμενη ποσότητα προϊόντος να παραμείνει η ίδια.*

Δηλαδή, ο $O\Lambda TY$ εκφράζει τον βαθμό κατά τον οποίο ο συντελεστής L μπορεί να υποκαταστήσει τον συντελεστή K σε οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης ισοπαραγωγής.

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση παραγωγής δίνεται από τον τύπο $q = f(K, L)$. Βρίσκουμε το ολικό διαφορικό, το οποίο είναι

$$dq = \frac{\partial f(K, L)}{\partial L} dL + \frac{\partial f(K, L)}{\partial K} dK = MP_L dL + MP_K dK.$$

Πάνω στην καμπύλη ίσου προϊόντος ισχύει ότι $dq = 0$, συνεπώς

$$dq = MP_L dL + MP_K dK = 0 \Rightarrow MP_L dL = -MP_K dK.$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι ο οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης του L στο K είναι:

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{MP_L}{MP_K}.$$

Όπως αναφέραμε στον ορισμό του οριακού λόγου τεχνικής υποκατάστασης, μας δίνεται η δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικούς συνδυασμούς εισροών για την παραγωγή της ίδιας ποσότητας. Αυτή η ευκολία υποκατάστασης μετράται από την *ελαστικότητα υποκατάστασης*, σ (elasticity of substitution). Η ελαστικότητα υποκατάστασης ορίζεται ως το πηλίκο του ποσοστιαίου ρυθμού μεταβολής του λόγου των εισροών δια του ποσοστιαίου ρυθμού μεταβολής του οριακού λόγου τεχνικής υποκατάστασης. Δηλαδή:

$$\sigma = \frac{\%\Delta(K,L)}{\%\Delta O\Lambda TY} = \frac{d(K/L)}{dO\Lambda TY} \cdot \frac{O\Lambda TY}{K/L} = \frac{\partial \ln K/L}{\partial \ln O\Lambda TY}.$$

Η ελαστικότητα υποκατάστασης χαρακτηρίζει την κυρτότητα των καμπυλών ίσου προϊόντος. Η τιμή της σ μπορεί να είναι μια τιμή μεταξύ 0 και ∞. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της, τόσο μεγαλύτερη η υποκατάσταση μεταξύ των δύο εισροών. Όμως, διακρίνουμε δύο ακραίες περιπτώσεις [26, σελ. 392]:

1. αν $\sigma = \infty$, τότε οι δύο εισροές είναι τέλεια υποκατάστατα και οι καμπύλες ίσου προϊόντος είναι ευθείες παράλληλες μεταξύ τους.

2. αν $\sigma = 0$, τότε δεν υπάρχουν δυνατότητες υποκατάστασης. Οι δύο εισροές είναι συμπληρωματικές και απαιτείται σταθερή ποσότητα από κάθε εισροή για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος. Οι καμπύλες ίσου προϊόντος είναι ορθές γωνίες.

6.3.2 Αποδόσεις κλίμακας της συνάρτησης παραγωγής

Οι αποδόσεις κλίμακας αναφέρονται στον τρόπο που μεταβάλλεται η εκροή καθώς μεταβάλλουμε την κλίμακα παραγωγής. Αν η συνάρτηση παραγωγής δίνεται από την μορφή $q = f(K, L)$ και όλες οι εισροές πολλαπλασιάζονται με την ίδια σταθερά $m > 1$ ταξινομούμε τις αποδόσεις κλίμακας ως εξής [19, σελ. 134–136]:

- *Αύξουσες Αποδόσεις Κλίμακας*: Η παραγωγική διαδικασία χαρακτηρίζεται από αύξουσες αποδόσεις κλίμακας όταν η αύξηση όλων των παραγωγικών συντελεστών κατά ένα ποσοστό επιφέρει αύξηση της παραγωγής κατά μεγαλύτερο ποσοστό. Οι αύξουσες αποδόσεις κλίμακας αναφέρονται ως *οικονομίες κλίμακας*. Ισχύει:

$$f(mK, mL) > mf(K, L) = mq.$$

- *Σταθερές Αποδόσεις Κλίμακας*: Η παραγωγική διαδικασία χαρακτηρίζεται από σταθερές αποδόσεις κλίμακας όταν η αύξηση όλων των παραγωγικών συντελεστών κατά ένα ποσοστό επιφέρει αύξηση της παραγωγής κατά το ίδιο ποσοστό. Οι σταθερές αποδόσεις κλίμακας αναφέρονται ως *σταθερές οικονομίες κλίμακας*. Ισχύει:

$$f(mK, mL) = mf(K, L) = mq.$$

- *Φθίνουσες Αποδόσεις Κλίμακας*: Η παραγωγική διαδικασία χαρακτηρίζεται από φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας όταν η αύξηση όλων των παραγωγικών συντελεστών κατά ένα ποσοστό επιφέρει αύξηση της παραγωγής κατά μικρότερο ποσοστό. Οι φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας αναφέρονται ως *αρνητικές οικονομίες κλίμακας ή αντιοικονομίες*. Ισχύει:

$$f(mK, mL) < mf(K, L) = mq.$$

Στην Οικονομική Θεωρία συνήθως υποθέτουμε ότι η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης είναι ομογενής βαθμού 1, δηλαδή αν όλες οι εισροές πολλαπλασιάζονται με m, τότε όλες οι εκροές πολλαπλασιάζονται με m. Μια συνάρτηση παραγωγής με αυτό το χαρακτηριστικό θεωρείται ότι έχει σταθερές αποδόσεις κλίμακας και ονομάζεται γραμμικά ομογενής.

Ο ορισμός της κλίμακας αποδόσεων μπορεί εύκολα να γενικευτεί σε μία συνάρτηση παραγωγής με ν εισροές. Αν η συνάρτηση δίνεται από τον τύπο:

$$q = f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$$

και όλες οι εισροές πολλαπλασιαστούν με μία θετική σταθερά m έχουμε:

$$f(mx_1, mx_2, \ldots, mx_\nu) = m^k f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = m^k q.$$

Ουσιαστικά έχουμε μια ομογενή συνάρτηση παραγωγής βαθμού k [26, σελ. 391].

Οι αποδόσεις κλίμακας προσδιορίζονται με βάση την ελαστικότητα του προϊόντος. Αν $|\varepsilon| < 1$, $|\varepsilon| = 1$ ή $|\varepsilon| > 1$, τότε η συνάρτηση παραγωγής παρουσιάζει φθίνουσες, σταθερές ή αύξουσες αποδόσεις κλίμακας, αντίστοιχα.

Η ελαστικότητα παραγωγής σε ένα δεδομένο σημείο x ορίζεται ως $\varepsilon = \frac{dy}{d\lambda}\frac{\lambda}{y}$. Αν πάρουμε το ολικό διαφορικό της συνάρτησης παραγωγής έχουμε $dy = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i$. Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε την σχέση με x_i:

$$dy = \sum_{i=1}^{\nu} x_i \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{dx_i}{x_i}.$$

Αν διαιρέσουμε και τις δύο πλευρές με y, τότε προκύπτει:

$$\frac{dy}{y} = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{x_i}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{dx_i}{x_i}.$$

Επειδή όλες οι εισροές αυξάνονται κατά το ποσοστό $\frac{d\lambda}{\lambda}$, ισχύει ότι $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dx_i}{x_i}$.
Άρα η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\frac{dy}{y} = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{x_i}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{d\lambda}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{dy}{d\lambda} \frac{\lambda}{y} = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{x_i}{y}.$$

Επομένως

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon_i.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Euler έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial y}{\partial x_i} x_i = mf(x) \quad \text{ή} \quad \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{x_i}{y} = m \quad \text{ή} \quad \sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon_i = \varepsilon = m.$$

Συνεπώς, αν $m > 1$, τότε $\varepsilon > 1$, αν $m < 1$, τότε $\varepsilon < 1$ και αν $m = 1$, τότε $\varepsilon = 1$.

6.3.3 Γραμμή ίσου κόστους

Γραμμή ίσου κόστους είναι η συνάρτηση που εκφράζει τη συνδυασμένη χρήση δύο συντελεστών παραγωγής, με δεδομένη ποσότητα συνολικής δαπάνης για την παραγωγή ενός προϊόντος. Πιο απλά μια γραμμή ίσου κόστους δίνει όλους τους διαφορετικούς συνδυασμούς εργασίας L και κεφαλαίου K που μια επιχείρηση μπορεί να αγοράσει με δεδομένα τον συνολικό προϋπολογισμό (total budget) ή την συνολική δαπάνη (total outlay, TO) της επιχείρησης και τις τιμές p_L και p_K των συντελεστών παραγωγής. Συνεπώς, αν η επιχείρηση ήθελε να ξοδέψει όλα τα χρήματα για να αγοράσει τον παραγωγικό συντελεστή κεφάλαιο, θα μπορούσε να αγοράσει $\frac{TO}{p_K}$ μονάδες κεφαλαίου. Αντίστοιχα, για τον παραγωγικό συντελεστή εργασία θα μπορούσε να αγοράσει $\frac{TO}{p_L}$ μονάδες εργασίας. Η κλίση της γραμμής ίσου κόστους είναι [29, σελ. 558–561]:

$$-\frac{\frac{TO}{p_K}}{\frac{TO}{p_L}} = -\frac{TOp_L}{TOp_L} = -\frac{p_L}{p_K}.$$

Η γραμμή ίσου κόστους δείχνει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των παραγωγικών συντελεστών που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, με δεδομένες τις τιμές τους, και οι οποίοι επιφέρουν το ίδιο κόστος στην παραγωγική διαδικασία. Ο επιχειρηματίας – παραγωγός ισορροπεί στο σημείο επαφής της γραμμής ίσου κόστους με την υψηλότερη εφικτά δυνατή καμπύλη ισοπαραγωγής [22, σελ. 299–301].

Μπορούμε, λοιπόν, να διατυπώσουμε αυτό το πρόβλημα ως ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κόστους. Η συνάρτηση κόστους είναι $C = Kp_K + Lp_L$, που υπόκειται στον περιορισμό του προϊόντος $f(K, L) = q_0$, με $MP_K, MP_L > 0$. Σχηματίζουμε την συνάρτηση του Lagrange:

$$z = Kp_K + Lp_L + \lambda(q_0 - f(K, L)).$$

Με βάση την συνθήκη πρώτης τάξης, οι μερικές παράγωγοι πρέπει να μηδενίζονται. Άρα προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = q_0 - f(K, L) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial K} = p_K - \lambda MP_K = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial L} = p_L - \lambda MP_L = 0$$

Η πρώτη εξίσωση είναι ουσιαστικά ο περιορισμός. Από τις επόμενες εξισώσεις προκύπτει ότι:

$$\frac{p_K}{MP_K} = \frac{p_L}{MP_L} = \lambda.$$

Η εξίσωση μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως εξής:

$$\frac{p_K}{p_L} = \frac{MP_K}{MP_L}.$$

Διαπιστώνουμε ότι στο σημείο αυτό οι απόλυτες τιμές των κλίσεων της καμπύλης ισοπαραγωγής και της γραμμής ίσου κόστους είναι ίσες. Για να εξασφαλίσουμε ένα ελάχιστο κόστος, αρκεί να έχουμε μια αρνητική πλαισιωμένη Εσσιανή [6, σελ. 176–178].

6.3.4 Συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas

Πρόκειται για μια νεοκλασσική συνάρτηση παραγωγής, η οποία θεωρείται ως συνάρτηση δύο μεταβλητών όπου η μία αντιπροσωπεύει ομογενή εισροή κεφαλαίου και η άλλη ομογενή εισροή εργασίας [26, σελ. 411], [6, σελ. 170–173].

Η συνάρτηση Cobb-Douglas δίνεται από τον τύπο:

$$y = \alpha_0 x_1^{\alpha} x_2^{\beta},$$

όπου $x_1, x_2 \geq 0$, α_0 εξωγενής παράμετρος (τεχνολογία) και $\alpha, \beta \geq 0$ παράμετροι. Συνήθως το x_1 αντιπροσωπεύει το κεφάλαιο και το x_2 την εργασία. Έτσι η συνάρτηση διαμορφώνεται ως $q = \alpha_0 K^{\alpha} L^{\beta}$. Στη συνέχεια εξετάζουμε την γενική μορφή της συνάρτησης.

Το οριακό προϊόν δίνεται από την σχέση:

$$MP_i = \frac{\partial y}{\partial x_i},$$

οπότε $MP_1 = \alpha \frac{y}{x_1}$ και $MP_2 = \beta \frac{y}{x_2}$.

Η ελαστικότητα του προϊόντος 1 είναι

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{x_1}{y} = MP_1 \frac{x_1}{y} = \alpha \frac{y}{x_1} \frac{x_1}{y} = \alpha.$$

Για το προϊόν 2 η ελαστικότητα είναι

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{x_2}{y} = MP_2 \frac{x_2}{y} = \beta \frac{y}{x_2} \frac{x_2}{y} = \beta.$$

Η ελαστικότητα παραγωγής είναι $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha + \beta$.

Συνεπώς, πρόκειται για καμπύλη ίσου προϊόντος, αφού ισχύει $\alpha_0 x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = y_0$, $x_1, x_2 > 0$. Η κλίση της καμπύλης είναι αρνητική, δηλαδή

$$\frac{dx_2}{dx_1} = O\Lambda TY = -\frac{MP_1}{MP_2} = -\frac{\alpha}{\beta} \frac{x_2}{x_1} < 0.$$

Η καμπύλη ίσου προϊόντος είναι κυρτή, δηλαδή

$$\frac{d^2 x_2}{dx_1^2} = -\frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{x_1^2} (x_1 \frac{dx_2}{dx_1} - x_2) > 0.$$

6.4 Συνάρτηση χρησιμότητας

Ας υποθέσουμε ότι για δύο προϊόντα x και y, οι ποσότητες που καταναλώνει κάποιος είναι q_x και q_y, αντίστοιχα. Αν U η χρησιμότητα, τότε η συνάρτηση χρησιμότητας διαμορφώνεται ως $U = f(q_x, q_y)$. Αν τώρα θεωρήσουμε ότι η χρησιμότητα U είναι σταθερή, δηλαδή ότι

$f(q_x, q_y) = c$, τότε είναι προφανές ότι αναφερόμαστε σε ισοϋψείς καμπύλες, οι οποίες ονομάζονται *καμπύλες ίσης χρησιμότητας* (isoutility curves) ή *καμπύλες αδιαφορίας* (indifference curves). Η τελευταία ονομασία οφείλεται στο γεγονός ότι ο καταναλωτής είναι αδιάφορος ως προς ποιον συνδυασμό θα επιλέξει, αφού οι συνδυασμοί του αποφέρουν το ίδιο ακριβώς επίπεδο χρησιμότητας. Όσο πιο ψηλά βρίσκεται μία καμπύλη αδιαφορίας τόσο μεγαλύτερο επίπεδο ή βαθμό χρησιμότητας εκφράζει. Το σύνολο αυτό των καμπυλών αδιαφορίας, που καθορίζει τις προτιμήσεις του καταναλωτή ονομάζεται *χάρτης καμπυλών αδιαφορίας* (παράδειγμα ισοϋψών καμπυλών δώσαμε στο Σχήμα 5.2, αλλά και στο Σχήμα 6.1(a)).

Οι καμπύλες αδιαφορίας παρουσιάζουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά [19, σελ. 100-104]:

- Κάθε καμπύλη αδιαφορίας, που βρίσκεται υψηλότερα από κάποια άλλη, δηλώνει υψηλότερο επίπεδο ή βαθμό χρησιμότητας.
- Οι καμπύλες αδιαφορίας έχουν αρνητική κλίση. Αυτό συμβαίνει γιατί κάθε καταναλωτής μειώνοντας την ποσότητα του ενός από τα δύο προϊόντα, πρέπει να αυξήσει την κατανάλωση του άλλου προϊόντος για να παραμείνει στο ίδιο επίπεδο χρησιμότητας.
- Οι καμπύλες αδιαφορίας δεν τέμνονται.
- Οι καμπύλες αδιαφορίας είναι κυρτές. Αυτό οφείλεται στην βασική αρχή, που είναι γνωστή ως «*φθίνουσα σχέση υποκατάστασης*» και λέει ότι, ένα άτομο που διαθέτει προϊόν σε μικρότερη ποσότητα έναντι ενός άλλου προϊόντος, είναι λιγότερο διατεθειμένο να θυσιάσει μέρος του πρώτου προϊόντος για να αποκτήσει επιπλέον μονάδες από το δεύτερο προϊόν. Με άλλα λόγια, η καμπύλη αδιαφορίας είναι κυρτή επειδή έχει οριακό λόγο υποκατάστασης που συνεχώς μειώνεται.

Είναι απαραίτητο να διευκρινίσουμε την βασική διαφορά των καμπυλών ισοπαραγωγής και αδιαφορίας. Σε κάθε καμπύλη ισοπαραγωγής έχουμε την ίδια ποσότητα παραγόμενου προϊόντος ανεξάρτητα από τις μεταβολές των συντελεστών παραγωγής. Αντίθετα, σε κάθε καμπύλη αδιαφορίας οι ποσότητες των προϊόντων x και y που καταναλώνει ο καταναλωτής είναι διαφορετικές.

Τέλος, αν η συνάρτηση χρησιμότητας $U = f(q_x, q_y)$ είναι παραγωγίσιμη ως προς τις ποσότητες q_x, q_y των χρησιμοποιούμενων προϊόντων, τότε η μερική παράγωγος $\frac{\partial U}{\partial q_x}$ ονομάζεται *οριακή χρησιμότητα* ως προς την ποσότητα q_x και συμβολίζεται MU_{q_x}. Το αντίστοιχο ισχύει και για την ποσότητα q_y [29, σελ. 567].

6.4.1 Οριακός Λόγος Υποκατάστασης

Ορισμός 67 *[26, σελ. 366] Ο* οριακός λόγος υποκατάστασης, *ΟΛΥ (marginal rate of substitution) ή* οριακή σχέση υποκατάστασης *(marginal relation of substitution) του προϊόντος y από το προϊόν x, μετρά την αναγκαία μείωση στην ποσότητα του προϊόντος y όταν αυξηθεί η ποσότητα του προϊόντος x, και μόνο αυτή, ώστε ο καταναλωτής να παραμείνει στην ίδια καμπύλη αδιαφορίας.*

Μια καμπύλη αδιαφορίας ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των συνδυασμών των x και y, τα οποία θα δώσουν ένα σταθερό επίπεδο της U [6, σελ. 153]. Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση χρησιμότητας δίνεται από τον τύπο $U = U(x, y)$. Βρίσκουμε το ολικό διαφορικό, το οποίο είναι:

$$dU = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}dy = MU_x dx + MU_y dy.$$

Πάνω στην καμπύλη ίσου προϊόντος ισχύει ότι $dU = 0$, συνεπώς

$$dU = MU_x dx + MU_y dy = 0 \Rightarrow MU_y dy = -MU_x dx.$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι ο οριακός λόγος υποκατάστασης του y στο x είναι:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{MU_y}{MU_x}.$$

6.4.2 Περιορισμοί και δυνατότητες του καταναλωτή

Στην προηγούμενη ενότητα ασχοληθήκαμε με τις καμπύλες αδιαφορίας που εκφράζουν τις προτιμήσεις του καταναλωτή, δηλαδή τις επιθυμίες του. Πρέπει όμως να τονίσουμε ότι αυτές οι καμπύλες αδιαφορίας είναι διαφορετικές για κάθε καταναλωτή, αφού κάθε καταναλωτής έχει διαφορετικές προτιμήσεις. Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τις δυνατότητες που έχει ένας καταναλωτής να ικανοποιεί τις προτιμήσεις του. Με άλλα λόγια, εδώ θα εξετάσουμε όχι τι επιθυμεί, αλλά τι μπορεί να επιτύχει ο καταναλωτής [19, σελ. 105].

Η *συνάρτηση καταναλωτικής δυνατότητας* (budget function) παριστάνει την σχέση μεταξύ της ποσότητας κατανάλωσης δύο προϊόντων, έτσι ώστε η συνολική δαπάνη για την απόκτηση των προϊόντων αυτών να είναι ορισμένη. Η *γραμμή εισοδηματικού περιορισμού* δίνει τους διαφορετικούς συνδυασμούς δύο προϊόντων που ένας καταναλωτής μπορεί να αγοράσει με δεδομένα το εισόδημά του και τις τιμές των προϊόντων. Υποθέτουμε ότι q_x, q_y είναι οι άγνωστες ποσότητες των προϊόντων x, y και p_x, p_y αντίστοιχα οι γνωστές τιμές τους, τότε με δεδομένο το εισόδημα Y μπορούμε να διατυπώσουμε την σχέση που αποτελεί τον *εισοδηματικό περιορισμό* του καταναλωτή:

$$Y = p_x q_x + p_y q_y.$$

Αν λύσουμε ως προς q_y προκύπτει:

$$q_y = \frac{Y}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} q_x.$$

Όπως είναι φανερό πρόκειται για μία ευθεία γραμμή, που έχει κλίση $-\frac{p_x}{p_y}$. Αν μεταβληθεί το εισόδημα, η εισοδηματική γραμμή μετατοπίζεται παράλληλα (δεξιά για αύξηση και αριστερά για μείωση εισοδήματος). Αν μεταβληθεί όμως, ο λόγος των τιμών των αγαθών θα αλλάξει κλίση.

Στόχος του καταναλωτή είναι να βρίσκεται σε ισορροπία, δηλαδή με δεδομένα το εισόδημά του και τις τιμές των προϊόντων, να μεγιστοποιεί την συνολική χρησιμότητά του από τις δαπάνες του. Ένας καταναλωτής βρίσκεται σε ισορροπία όταν, με δεδομένη την εισοδηματική γραμμή φθάνει την υψηλότερη καμπύλη αδιαφορίας. Το σημείο επαφής της καμπύλης αδιαφορίας και της γραμμής εισοδηματικού περιορισμού αντιπροσωπεύει τον συνδυασμό εκείνο των ποσοτήτων των προϊόντων x και y που δίνουν το πιο υψηλό επίπεδο χρησιμότητας και που έχει την δυνατότητα να επιτύχει ο καταναλωτής δαπανώντας όλο το εισόδημά του.
Ουσιαστικά, το πρόβλημά μας είναι να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση χρησιμότητας $U = U(x, y)$ που υπόκειται στον περιορισμό $p_x q_x + p_y q_y = Y$. Η συνάρτηση του Lagrange διαμορφώνεται ως εξής:

$$z = U(x, y) + \lambda(Y - q_x p_x - q_y p_y).$$

Ως συνθήκες πρώτης τάξης θα έχουμε τις ακόλουθες ταυτόχρονες εξισώσεις:

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = Y - q_x p_x - q_y p_y = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = MU_x - \lambda p_x = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = MU_y - \lambda p_y = 0$$

Η πρώτη εξίσωση είναι ουσιαστικά ο περιορισμός. Από τις επόμενες εξισώσεις προκύπτει ότι:

$$\frac{p_x}{MU_x} = \frac{p_y}{MU_y} = \lambda.$$

Η εξίσωση μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως $\frac{p_x}{p_y} = \frac{MU_x}{MU_y}$ και αποτελεί την συνθήκη ισορροπίας του καταναλωτή.

Παράρτημα

Για την συγγραφή της παρούσας πτυχιακής εργασίας χρησιμοποιήθηκε μια σειρά υποστηρικτικού λογισμικού. Το λογισμικό αυτό περιγράφουμε στη συνέχεια:

Για την σύνταξη του κειμένου χρησιμοποιήσαμε το πρόγραμμα ηλεκτρονικής στοιχειοθεσίας LaTeX[1]. Το LaTeX αποτελεί επέκταση του TeX. Το TeX είναι ένα πρόγραμμα ηλεκτρονικής στοιχειοθεσίας κειμένου το οποίο σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε από τον Donald Knuth στα τέλη της δεκαετίας του 1970. Όπως αναφέρει ο ίδιος ο Knuth, ο κύριος λόγος για τον οποίο αποφάσισε να δημιουργήσει το TeX ήταν η έλλειψη ενός ικανοποιητικού εργαλείου με το οποίο θα μπορούσε να προετοιμάζει τα τυπογραφικώς απαιτητικά κείμενα του. Η πρώτη σοβαρή προσπάθεια να δημιουργηθεί ένα σύστημα το οποίο να αποτελεί επέκταση του TeX και παράλληλα να επιτρέπει την εύκολη επεξεργασία πολύγλωσσου κειμένου έγινε από τους John Plaice και Γιάννη Χαραλάμπους με το σύστημα Ω.

Μολονότι το TeX είναι ένα πάρα πολύ ισχυρό εργαλείο, εντούτοις η προετοιμασία απλών και πολύπλοκων εγγράφων δεν είναι και τόσο απλή υπόθεση. Για να γίνει το TeX όσο το δυνατό φιλικό προς τον χρήστη, ο Leslie Lamport σχεδίασε για το σκοπό αυτό ένα σύνολο εντολών γνωστό ως LaTeX [11]. Αργότερα το LaTeX γράφτηκε από την αρχή από τον Frank Mittelbach και τους συνεργάτες του [12].

Το βασικό πλεονέκτημα του LaTeX είναι ότι επιτρέπει να επικεντρωθούμε στο περιεχόμενο και όχι να ασχολούμαστε συνέχεια με την μορφοποίηση του κειμένου. Αποτελεί ελεύθερο λογισμικό και μπορεί ο καθένας να το κατεβάσει εντελώς δωρεάν από το διαδίκτυο. Ένας από τους λόγους για τους οποίους το LaTeX είναι τόσο διάσημο είναι η τυπογραφική ποιότητα του τελικού αποτελέσματος, προσδίδοντας στο κείμενο επαγγελματική εμφάνιση. Επίσης

[1] Η εκμάθηση και χρήση του LaTeX αποτέλεσε και αυτή μέρος της εκπόνησης της πτυχιακής εργασίας.

είναι ιδανικό για την στοιχειοθεσία μαθηματικών εκφράσεων. Υποστηρίζει πολλά πακέτα για γραφικά, φωτογραφίες και παρουσιάσεις και ταυτόχρονα υποστηρίζεται από όλα τα λειτουργικά συστήματα, όπως Unix, Windows, Macintosh. Ο πηγαίος κώδικας είναι ένα αρχείο τύπου `.tex`). Ο κώδικας μεταγλωττίζεται με κατάλληλη επιλογή παραμέτρων, και παράγεται ένα αρχείο τύπου (`.dvi`) κατάλληλο για ανάγνωση και εκτύπωση. Ειδικές εφαρμογές μετατρέπουν το αρχείο `.dvi` σε μορφή με μικρό μέγεθος και κατάλληλη για μεταφορά, όπως αρχεία τύπου postscript (`.ps`) και portable document format (`.pdf`). Για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην διεύθυνση `www.latex-project.org` καθώς επίσης και στην επίσημη ιστοσελίδα της ομάδας χρηστών του TEX `www.tug.com`. Επίσης, ενδεικτικά αναφέρουμε τα εγχειρίδια εκμάθησης του LATEX των Helmut Kopka και Patrick W. Daly [10] και του Απόστολου Συρόπουλου [30].

Εκτός από το LATEX χρησιμοποιήσαμε ακόμα ένα μικρό σύνολο εφαρμογών για την σύνταξη, επεξεργασία και παρουσίαση του κειμένου:

- Η σουίτα *MikTeX* για Windows που περιλαμβάνει τα εκτελέσιμα αρχεία και τις βιβλιοθήκες του LATEX καθώς και μια σειρά υποστηρικτικών εργαλείων. Πρόκειται για λογισμικό ανοικτού κώδικα που διατίθεται δωρεάν στην διεύθυνση `www.miktex.org`.

- Ένας εκδότης (editor) για την συγγραφή του κειμένου. Χρησιμοποιήθηκε η σουίτα *WinEdt*, η οποία παρέχει διασύνδεση με το *MikTeX* αλλά και με άλλα βοηθητικά προγράμματα. Το λογισμικό είναι εμπορικό (με αρκετά χαμηλό κόστος) ενώ διατίθεται και δοκιμαστική έκδοση στην ιστοσελίδα `http://www.winedt.com`.

- Το λογισμικό *Adobe Reader* (ευρέως γνωστό και ως *Acrobat Reader*) για την ανάγνωση και εκτύπωση αρχείων τύπου (`.pdf`). Η εφαρμογή είναι διαθέσιμη δωρεάν στη διεύθυνση `http://www.acrobat.com`.

Για την σχεδίαση των σχημάτων της πτυχιακής εργασίας χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα συμβολικού υπολογισμού Maple. Το Maple είναι ένα ισχυρό εργαλείο επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων μέσω συμβολικών και αριθμητικών υπολογισμών. Η ανάπτυξη του ξεκίνησε στα πλαίσια ενός ερευνητικού προγράμματος στο Πανεπιστήμιο Waterloo του Καναδά πριν από περίπου 25 χρόνια και μέχρι σήμερα έχει εξελιχθεί σε ένα από τα καλύτερα πακέτα συμβολικού υπολογισμού που χρησιμοποιείται ευρέως στην εκπαίδευση, την έρευνα και την βιομηχανία. Είναι εμπορικό προϊόν και διατίθεται από την εταιρία MapleSoft (`www.maplesoft.com`). Η τρέχουσα έκδοση, Maple 15, που κυκλοφόρησε πρόσφατα, παρέχει σημαντικές εφαρμογές στην Μηχανική, την Εκπαίδευση, τα Οικονομικά και την Εφαρμοσμένη έρευνα. Στα πλαίσια της εργασίας χρησιμοποιήσαμε την έκδοση Maple 11, η οποία μας διατέθηκε από το Εργαστήριο Συνδυαστικών Αλγορίθμων του Τμήματος Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών (`lca.ceid.upatras.gr`).

Βιβλιογραφία

[1] R. Allen, *Mathematical Analysis for Economists*, McMillan, 1938.

[2] W. Baumol, *Economic Theory and Operations Research*, Prentice Hall, 1977.

[3] G. Birkhoff and T. Bartee, *Modern Applied Algebra*, McGraw-Hill, 1970.

[4] A. Chiang, *Fundamental Methods of Mathematical Economics, 3rd ed.*, McGraw-Hill, 1985.

[5] A. Chiang and K. Wainwright, *Μαθηματικές Μέθοδοι Οικονομικής Ανάλυσης, Τόμος Α'*, Αθήνα, Κριτική, 2009.

[6] A. Chiang and K. Wainwright, *Μαθηματικές Μέθοδοι Οικονομικής Ανάλυσης, Τόμος Β'*, Αθήνα, Κριτική, 2009.

[7] J. Draper and J. Klingman, *Mathematical Analysis Business and Economic Applications*, Harper and Row, 1972.

[8] P. Halmos, *Naive Set Theory*, Van-Nostrand, 1960.

[9] E. Kamke, *Theory of Sets*, Dover Publications, 1950.

[10] H. Kopka and P. Daly, *A guide to LaTeX2e, 2nd edition*, Addison-Wesley Publ. Co., 1995.

[11] L. Lamport, *LaTeX: A Document Preparation System, 2nd edition*, Addison-Wesley Publ. Co, Reading, MA, 1994.

[12] F. Mittelbach and M. Goosens, *The LaTeX Companion, 2nd edition*, Addison-Wesley Publ. Co, Reading, MA, 2004.

[13] M. Osborne, *Mathematical Methods for Economic Theories: A Tutorial*, 2007, http://www.economics.utoronto.ca./osborne/MathTutorial.

[14] G. Strang, *Calculus*, Wellesley-Cambridge Press, 1991.

[15] G. Strang, *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2006.

[16] E. Taylor, *Partial Differential Equations I, Basic Theory*, New York, Springer, 1997.

[17] Δ. Αναστασάτος, Κ. Αναστασίου, Ν. Γαγαλής, Φ. Κομισόπουλος, *Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, Μαθηματικά ΙΙ, Τόμος Α'*, Αθήνα, Δηρός, 2001.

[18] Κ. Αναστασίου, Δ. Δημητρακούδης, Π. Κικίλιας, Ι. Ντρικόγιας, Δ. Τσουκαλάς, *Άλγεβρα, Τόμος Α'*, Αθήνα, Δηρός, 2001.

[19] Θ. Γεωργακόπουλου, Θ. Λιανού, Θ. Μπένου, Γ. Τσέκουρα, Μ. Χατζηπροκοπίου, Γ. Χρήστου, *Εισαγωγή στην Πολιτική Οικονομία, Έκδοση ΣΤ'*, Αθήνα, Γ. Μπένου, 2002.

[20] Δ. Δημητρακούδης, Ι. Θεοδώρου, Π. Κικίλιας, Ν. Κουρής, Δ. Παλαμούρδας, *Διαφορικός – Ολοκληρωτικός Λογισμός, Μαθηματικά Ι, Τόμος Β'*, Αθήνα, Δηρός, 2001.

[21] Α. Καραγεώργος, *Γενικά Θέματα Ανάλυσης-Πραγματικές συναρτήσεις, όριο-συνέχεια, διαφορικός λογισμός*, Χαλκίδα, Κωστόγιαννος, 1998.

[22] Π. Κιόχος, *Οικονομική της Διοίκησης*, Αθήνα, Interbooks, 1999.

[23] Α. Κορκοτσίδης, *Μαθηματικά Οικονομικής Ανάλυσης, Τόμος Α'*, Εκδόσεις Παπαζήση, 1993.

[24] Μ. Λουκάκης, *Μαθηματικά Οικονομικών Επιστημών, Τόμος Α'*, Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις Σοφία, 2009.

[25] Γ. Μοσχοβάκης, *Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία*, Αθήνα, Εκδόσεις Νεφέλη, 1993.

[26] Α. Ξεπαπαδέας, *Μαθηματικές Μέθοδοι στα Οικονομικά, Θεωρία και Εφαρμογές, Τόμος Α'*, Αθήνα, Gutenberg, 2007.

[27] Γ. Οικονομόπουλος, *Οικονομικά Μαθηματικά*, Θεσσαλονίκη, 2002.

[28] Β. Παπαντωνίου, *Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, Θεωρία και Ασκήσεις*, Θεσσαλονίκη, Γαρταγάνη, 1986.

[29] Σ. Σάσσαλος, *Γενικά Μαθηματικά, 2η Έκδοση*, Αθήνα, Μακεδονικές Εκδόσεις, 2004.

[30] Α. Συρόπουλος, *LaTeX*, Θεσσαλονίκη, Παρατηρητής, 1998.

[31] T. Yamane και Α. Κιντή, *Μαθηματικά για οικονομολόγους*, Αθήνα, Gutemberg, 1981.

Ευρετήριο

Άθροισμα Riemann, 59
Άξονας
- X, 8
- Y, 8
- τεταγμένων, 8
- τετμημένων, 8

Όριο, 38
- αριστερό, 38
- δεξιό, 38
- πλευρικό, 39

Ακρότατα
- αδέσμευτα, 102
- απόλυτα, 50
- δεσμευμένα, 104
- με περιορισμό, 104
- ολικά, 50
- τοπικά, 50
- χωρίς περιορισμούς, 102

Αλγεβρικό συμπλήρωμα, 16
Αντίστροφος, 7
- πολλαπλασιαστικός, 7
- προσθετικός, 6

Αντιπαράγωγος, 56
Αποδόσεις κλίμακας
- αύξουσες, 116
- σταθερές, 116
- φθίνουσες, 117

Απροσδιόριστες μορφές, 46
Ασυνέχεια, 40
- άπειρη, 41
- ασυμπτωτική, 41
- εξαλείψιμη, 41
- με άλμα, 41
- πεπερασμένη, 41

Ασύμπτωτη
- κατακόρυφη, 55
- οριζόντια, 55
- πλάγια, 55

Βελτιστοποίηση, 63

Γραμμή
- ίσου κόστους, 118
- εισοδηματικού περιορισμού, 123

Γραμμική εξίσωση, 22
Γραφική παράσταση, 30

Δείκτης
- γραμμής, 10
- στήλης, 11

Διάγραμμα Venn, 2
Διάνυσμα βαθμίδας, 92
Διάστημα, 8
- άπειρο, 9

ανοικτό, 8
ανοικτό άνω φραγμένο, 9
ανοικτό κάτω φραγμένο, 9
κλειστό, 8
κλειστό άνω φραγμένο, 9
κλειστό αριστερά, 8
κλειστό δεξιά, 8
κλειστό κάτω φραγμένο, 9
μήκος, 8
μη φραγμένο, 9

Διαμερισμός, 59

Διατεταγμένη
n-άδα, 5

Διατεταγμένο
ζεύγος, 5

Διαφορικό, 47
n-οστής τάξης, 48
δεύτερης τάξης, 47
ολικό πρώτης τάξης, 95

Ελάσσονες
διαδοχικές κύριες, 99
κύριες, 98

Ελάχιστο
ολικό, 101
τοπικό, 50, 102

Ελαστικότητα, 66
εισοδηματική, 113
μερική, 111
μερική ως προς την τιμή, 112
σημείου, 66
σταυροειδής, 112
τόξου, 66
υποκατάστασης, 116

Εξίσωση
ορισμού, 64
συμπεριφοράς, 64
συνθηκών, 65

Θεώρημα
Bolzano, 39
Euler, 110
Fermat, 50
Rolle, 48
Young, 92
Μέσης Τιμής, 48
ακρότατων τιμών, 40
ενδιάμεσης τιμής, 40
μηδενικού σημείου, 39

Ιδιότητα
αντιμεταθετική, 6, 14
επιμεριστική, 6
μεταβατική, 7
ομογένειας ολοκληρωμάτων, 58
προσεταιριστική, 6, 14
προσθετικότητας ολοκληρωμάτων, 58
τριχοτομίας, 7

Καθαρό μονοπώλιο, 71

Καμπύλη
ίσης χρησιμότητας, 121
αδιαφορίας, 121
ισοπαραγωγής, 114
ισοϋψής, 108

Κανόνας
l' Hospital, 46

αλυσωτός, 46
γινομένου, 45
γραμμικού συνδυασμού, 45
δυνάμεως, 45
παραγώγιση, 45
πηλίκου, 45
Καρτεσιανό
γινόμενο, 5
σύστημα, 8
Κατεύθυνση προτίμησης, 108
Κεφαλαιοποίηση, 82
συντελεστής, 82

Μέγιστο
ολικό, 50, 101
τοπικό, 50, 102
Μέθοδος
απαλοιφής Gauss, 27
οριζουσών, 23
πινάκων, 26
Μήτρα, 10
Εσσιανή, 93
Εσσιανή πλαισιωμένη, 105
Ιακωβιανή, 94
άνω τριγωνική, 12
ανάστροφη, 11
αντίθετη, 16
αντίστροφη, 16
αντισυμμετρική, 13
βαθμός, 21
γραμμή, 11
διαγώνια, 12
διαφορά, 16
εναλλαγμένη, 11
επαυξημένη, 22
ιδιάζουσα, 16, 20
κάτω τριγωνική, 12
μέγεθος, 11
μη ιδιάζουσα, 16, 20
μηδενική, 11
μοναδιαία, 12
πολλαπλασιασμός, 14, 15
προσαρτημένη, 20
πρόσθεση, 13
στήλη, 11
στοιχείο, 12
συμμετρική, 12
τάξη, 11
τετραγωνική, 11
τριγωνική, 12
τύπος, 11
υποορίζουσα, 16
Μεταβλητή, 2
ανεξάρτητη, 29
ενδογενής, 64
εξαρτημένη, 29
εξωγενής, 64

Νόμος ζήτησης, 72

Οικονομικό υπόδειγμα, 63
άριστης ποσότητας παραγγελίας, 75
μεταβλητή, 63
παράμετρος, 64
σταθερά, 64
Ολοκλήρωμα

Riemann, 59
αόριστο, 57
ορισμένο, 59
Ολοκλήρωση, 56
Ορίζουσα, 17
δεύτερης τάξης, 17
προσημασμένη, 16
πρώτης τάξης, 17
Οριακός λόγος
τεχνικής υποκατάστασης, 115
υποκατάστασης, 122

Πίνακας, 10
Παράγωγος, 44
μερική, 91
μερική δεύτερης τάξης, 92
μικτή, 92
μονόπλευρη, 44
πλευρική, 44
πρώτη, 44
Πεδίο
ορισμού, 29
τιμών, 29
Πλήρης ανταγωνισμός, 71
Πλεόνασμα
καταναλωτή, 86
παραγωγού, 86
Πληθάριθμος, 2
Πολλαπλασιαστής Lagrange, 104
Πραγματική
ευθεία, 7
Προεξόφληση, 82
Προσδιορισμός
άμεσος, 2
έμμεσος, 2
Προϊόντα
κανονικά, 113
κατώτερα, 113
συμπληρωματικά, 112
υποκατάστατα, 112

Ρυθμός
μεταβολής οριακός, 44
μεταβολής στιγμιαίος, 44
χρησιμοποίησης, 77

Σημείο
ασυνέχειας, 40
ισορροπίας, 65
καμπής, 54
καμπής θέση, 54
κρίσιμο, 51
σαγματικό, 51, 102
στάσιμο, 51, 102, 105
Σταθερά ολοκλήρωσης, 57
Στοιχείο
διαγώνιο, 11
ουδέτερο, 6, 14
ταυτοτικό, 6
Συνάρτηση
άρρητη, 33
άρτια, 36
αλγεβρική, 32
ανελαστική, 67
αρχική, 56
ασυνεχής, 40

αύξουσα, 49
γνησίως αύξουσα, 49
γνησίως φθίνουσα, 49
γραμμική, 32
εθνικού εισοδήματος, 85
εκθετική, 33
ελαστική, 67
εσόδων, 72, 84
εφαπτομένης, 35
ζήτησης, 112
ημιτόνου, 34
κέρδους, 113
καταναλωτικής δυνατότητας, 122
κοίλη, 53
κυκλική, 34
κυρτή, 53
κόστους, 73, 85
λογαριθμική, 34
μέση, 65
μοναδιαίας ελαστικότητας, 67
ολική, 65
ομογενής, 109
οριακή, 65
παράγουσα, 56
παραγωγής, 68, 85, 114
παραγωγής Cobb-Douglas, 119
παραγωγίσιμη, 43
περιοδική, 36
περιττή, 36
πολυωνυμική, 32
πραγματική, 29
ρίζα, 35
ρητή, 32
σταθερή, 31
συνεφαπτομένης, 35
συνεχής, 39
συνημιτόνου, 34
συντέμνουσας, 35
τέμνουσας, 35
ταυτοτική, 31
τριγωνομετρική, 34
υπερβατική, 33
φθίνουσα, 49
χρησιμότητας, 81, 120

Σύμβολο ολοκλήρωσης, 57

Σύνολο, 1
Δυναμοσύνολο, 3
άπειρο, 2
ένωση, 4
αναφοράς, 3
βασικό, 3
γνήσιο υπερσύνολο, 3
γνήσιο υποσύνολο, 3
διαζευγμένο, 4
διαφορά, 4
διμελές, 4
καθολικό, 3
κενό, 3
μέλος, 1
μονομελές, 3
ξένο, 4
πεπερασμένο, 2
στοιχείο, 1
συμπλήρωμα, 4

τομή, 4

υπερσύνολο, 3

υποσύνολο, 3

Σύστημα

Cramer, 23

αδύνατο, 23

μη συμβιβαστό, 23

ομογενές, 28

ορθογώνιο, 8

συμβιβαστό, 23

Τετραγωνική μορφή, 97

αρνητικά ημιορισμένη, 98

αρνητικά ορισμένη, 98

θετικά ημιορισμένη, 98

θετικά ορισμένη, 98

Τιμή

ισορροπίας, 43

Υπομήτρα, 16

Χάρτης

ισοϋψών καμπυλών, 108

καμπυλών αδιαφορίας, 121

Χρόνος

αναπλήρωσης, 77