ΤΕΙ ΠΑΤΡΑΣ (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΜΑΛΙΑΔΑΣ)
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΣΤΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ ΚΑΙ ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΑΣ

ANALYSIS OF RELIABILITY AND STABILITY

ΣΠΟΥΔΑΣΤΡΙΕΣ: ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΕΥΑ
ΗΡΟΔΟΤΟΥ ΑΝΘΗ

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΝΙΚΟΛΟΠΟΥΛΟΥ ΕΙΡΗΝΗ

ΑΜΑΛΙΑΔΑ-2011

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία αυτή αναφέρεται στην αξιοπιστία και τη σταθερότητα ενός συστήματος συνιστωσών. Αρχικά, επικεντρώνεται στους ορισμούς της στατιστικής και των πιθανοτήτων καθώς και στις βασικές κατανομές που χρειάζονται για την ανάλυση τους.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται συζήτηση για την θεωρία της αξιοπιστίας ως την πιθανότητα να λειτουργεί ή όχι ένα σύστημα σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή και εφαρμογές αυτής στην καθημερινή ζωή. Έπειτα η ανάλυση της αξιοπιστίας ενός συστήματος εξαρτάται από τις επιμέρους συνιστώσες του γι΄ αυτό αναλύουμε τις καταστάσεις των συνιστωσών και δίνουμε εφαρμογές αυτών σε συστήματα όπως : σειριακό, παράλληλο, κ – από – τα – n : G σύστημα, γέφυρα, στερεοφωνικό συγκρότημα. Ακόμα, αναφέρουμε την αξιοπιστία συστημάτων με ανεξάρτητες μονάδες καθώς και σύνθετα συστήματα τα οποία απαιτείται να τα διασπάσουμε σε επιμέρους υποσυστήματα δίνοντας ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Επίσης εξετάζεται η δυναμική συμπεριφορά μιας συνιστώσας ή ενός συστήματος, δηλαδή μελετάμε την αξιοπιστία συστημάτων στο χρόνο και δίνουμε συγκεκριμένα παραδείγματα σειριακού, παράλληλου, συνεχόμενου 2 από τα F και κ – από – τα – n : G συστήματος . Στη συνέχεια, γίνεται ανάλυση του ρυθμού αποτυχίας μιας συνιστώσας ή ενός συστήματος μέσω συγκεκριμένων εφαρμογών και κατανομών (κατανομή Weibull, σειριακό σύστημα, παράλληλο σύστημα). Στην επόμενη ενότητα διευκρινίζουμε το μέσο χρόνο ζωής συστημάτων και συνιστωσών, με εφαρμογή σε ένα σύστημα αποθήκευσης δεδομένων , καθώς και των υπολειπόμενο χρόνο ζωής του συστήματος όταν βρίσκεται ήδη σε λειτουργία t χρόνου. Έπειτα , αναλύουμε τις ιδιότητες των μονάδων ενός συστήματος, τους διάφορους τύπους φθοράς που μπορεί να οφείλονται σε εξωτερικούς παράγοντες ή στις πολλές ώρες λειτουργίας, πώς συμπεριφέρεται το σύστημα με την πάροδο του χρόνου και τις κατανομές που είναι άφθαρτες. Στην τελευταία ενότητα αυτού του κεφαλαίου μελετάμε τις πιο σημαντικές κατανομές : Εκθετική, Weibull, Rayleigh, Poisson, Erlang, Γάμμα, Κανονική, Λογαριθμοκανονική, Ομοιόμορφη .

Στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζεται η έννοια της σταθερότητας ως ένα μέτρο ικανότητας μιας συνιστώσας να διορθωθεί ή να παραμείνει σε σταθερή κατάσταση. Έπειτα, αναφέρουμε το πιο σημαντικό στοιχείο της σταθερότητας, τη διαθεσιμότητα, και εξετάζουμε την εφαρμογή αυτής σε ένα σύστημα 2 συνεχόμενων συνιστωσών. Ακόμα, γίνεται ανάλυση της συντηρησιμότητας ενός συστήματος με διάφορους τρόπους, όπως η απομόνωση των ελαττωμάτων του. Βέβαια, σημαντικό μέρος λαμβάνει ο έλεγχος, η αφαίρεση και επανεγκατάσταση στοιχείων. Στην επόμενη παράγραφο διευκρινίζουμε κάποιες στρατηγικές αντικατάστασης λόγω ηλικίας χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες παραδοχές για το σύστημα. Στην τελευταία ενότητα αυτής της εργασίας αναφέρουμε ένα γενικό μοντέλο αντικατάστασης λόγω ηλικίας

μιας συνιστώσας ή υποομάδας αυτών καθώς και την προκαθορισμένη αντικατάσταση με τη βοήθεια της οποίας σε ορισμένες περιπτώσεις μειώνουμε το κόστος .

ABSTRACT

This work refers to the reliability and stability of a system component. Originally referred to definitions of statistics and probabilities and the underlying distributions needed in the analysis below. The second chapter is a discussion of the theory of reliability as the probability of working or not a system at a particular time and that applications in everyday life. After the analysis of the reliability of a system depends on the individual components so that we analyze the situations of the components and give their applications to systems such as serial, parallel, etc - of - the - n: G system, deck, stereo. Still, mention the reliability of systems with independent units and complex systems that need to break into individual subsystems giving a specific example. In section 2.3 examines the dynamic behavior of a component or a system that we study the reliability of systems in time and give concrete examples of serial, parallel, contiguous 2 by F and K - of - the - n: G system. Then, an analysis of the rate of failure of a component or system through specific applications and distributions (distribution Weibull, serial system, parallel system). In the next section we clarify the average lifespan of systems and components, with application to a data storage system, and the remaining life of the system when it is already running t years. Then analyze the properties of a system of units, different types of wear can be caused by external factors or many hours, how the system behaves over time and distributions which are unspoiled. In the last section of this chapter we study the most important distributions: exponential, Weibull, Rayleigh, Poisson, Erlang, Gamma, Normal, Logarithmokanoniki, Uniform. The final chapter presents the concept of stability as a measure of the ability of a component to correct or remain stable. Then mention the most important element of stability, availability, and we apply this to a system of 2 consecutive components. Still, an analysis of maintainability of a system in various ways, such as isolation of defects. Of course, an important part of taking control, removal and relocation information. In the next section we clarify some alternatives to using age specific assumptions about the system. In the last section of this paper mention a general model replacement age of a component or subgroup thereof and replace the default with the help of which in some cases reduce costs.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανάπτυξη της τεχνολογίας και της επιστήμης έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία πολυσύνθετων μηχανημάτων και δομών. Είναι λοιπόν αναγκαίο να συντονιστούν οι λειτουργίες όλων των συνιστωσών δίνοντας το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Επίσης, ιδιαίτερα σημαντική είναι η εκτίμηση και η βελτιστοποίηση της λειτουργίας καθώς και τη δυνατότητα επιδιόρθωσης ή αντικατάστασης μιας συνιστώσας ή ολόκληρου του συστήματος. Μ΄ αυτόν τον τρόπο αναπτύχθηκε η θεωρία της αξιοπιστίας και της σταθερότητας, οι οποίες απαιτείται να συνυπάρχουν για τη σωστή λειτουργία μιας δομής.

Επίσης, χρησιμοποιούμε μεθόδους από τη στατιστική και τη θεωρία πιθανοτήτων για να μελετήσουμε την πιθανότητα λειτουργίας ή όχι μιας δομής ακόμα και την ικανότητα επιδιόρθωσης και αντικατάστασής της. Πρακτικά, ο χρόνος ζωής ακολουθεί μια συγκεκριμένη κατανομή και με τη βοήθεια στατιστικών μέτρων υπολογίζεται η πιθανότητα λειτουργίας ή αποτυχίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ – ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1.1 Τι είναι η Στατιστική

Στην καθομιλούμενη, Στατιστική σημαίνει συστηματική απαρίθμηση και παρουσίαση αριθμητικών δεδομένων ή στοιχείων, τα οποία προέρχονται από πολλές παρατηρήσεις ή μετρήσεις. Οι παρατηρήσεις αυτές ή οι μετρήσεις αναφέρονται σε συγκεκριμένο αντικείμενο ή γεγονός. Ανάλογα με το αντικείμενο ή το γεγονός στο οποίο αναφέρονται τα αριθμητικά δεδομένα, η Στατιστική παίρνει και ιδιαίτερη ονομασία. Έτσι, όταν μιλάμε π.χ. Γεωργική Στατιστική, Στατιστική Επιχειρήσεων ή Στατιστική Εργατικού Δυναμικού κ.λπ., εννοούμε αριθμητικά δεδομένα που αναφέρονται αντίστοιχα στη γεωργία, στις επιχειρήσεις ή στο εργατικό δυναμικό κ.λπ. Στην επιστημονική γλώσσα, η λέξη Στατιστική έχει ευρύτερη σημασία, σημαίνει την επιστήμη που έχει ως αντικείμενο όχι μόνο τη συγκέντρωση και παρουσίαση, αλλά και τη μελέτη και ανάλυση των παρατηρήσεων ή μετρήσεων που αναφέρονται σε ένα συγκεκριμένο αντικείμενο ή γεγονός, οποιαδήποτε και αν είναι η φύση του. Έτσι, η Στατιστική περιλαμβάνει τόσο τις μεθόδους συλλογής και επεξεργασίας στοιχείων, όσο και τις μεθόδους ανάλυσης και μελέτης τους, ανακαλύπτοντας έτσι τις σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στα διάφορα φαινόμενα και διατυπώνοντας συμπεράσματα που είναι χρήσιμα για τη λήψη ορθών αποφάσεων.

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι: Στατιστική είναι η επιστήμη που ασχολείται με τις επιστημονικές μεθόδους συλλογής, οργάνωσης, παρουσίασης και ανάλυσης των αριθμητικών εκείνων στοιχείων που αναφέρονται σε χαρακτηριστικές ιδιότητες διαφόρων οικονομικών, κοινωνικών, δημογραφικών, φυσικών κ.λπ. φαινομένων και έχει ως σκοπό τη συστηματική μελέτη αυτών των στοιχείων για την κατάληξη σε γενικά συμπεράσματα, που είναι χρήσιμα στη διαδικασία της λήψης ορθών αποφάσεων.

Αναλύοντας τον ορισμό αυτό της Στατιστικής, παρατηρούμε ότι τα βασικά στάδια που ακολουθούμε για τη μελέτη των ιδιοτήτων των διαφόρων μονάδων μιας πολυπληθούς ομάδας είναι τα εξής:

1 Η συγκέντρωση των στατιστικών στοιχείων που είναι αναγκαία για τη μελέτη του προβλήματος που θέλουμε να αναλύσουμε.
2 Η μεθοδική επεξεργασία και παρουσίαση των στατιστικών στοιχείων σε μορφή αριθμητικών πινάκων και γραφικών παραστάσεων.
3 Η ανάλυση των στοιχείων αυτών και η εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων για να ληφθούν σωστές αποφάσεις.

Σημαντικός τομέας της Στατιστικής είναι οι Πιθανότητες των οποίων οι έννοιες αναφέρονται σε αυτή την εργασία.

(Στατιστική Πέτρος Α. Κιόχος)

1.2 Ο σκοπός της θεωρίας των πιθανοτήτων και χρήση αυτών.

Οι Φυσικές επιστήμες στηρίζονται αφ' ενός μεν σε βασικές μαθηματικές έννοιες αφ' ετέρου δε σε τρεις γενικές αρχές:

- Την αρχή της επιστημονικής νομοτέλειας.
- Την αρχή της αιτιότητας.
- Την αρχή της προσεγγίσεως.

Σύμφωνα με την αρχή της νομοτέλειας καθορίζεται ότι κάθε τι στη φύση καθορίζεται από νόμους. Η αρχή της αιτιότητας ορίζει ότι οι νόμοι αυτοί είναι αμετάβλητοι. Κατά την αρχή της προσεγγίσεως η επίδραση σε κάποιο στοιχείο, άλλων ευρισκόμενων σε άπειρη απόσταση είναι αμελητέα.

Κατά πολλούς συγγραφείς η θεωρία των πιθανοτήτων προσδιορίζει και εξετάζει τους νόμους της τύχης και μελετά τυχαία γεγονότα.

Η θεωρία των πιθανοτήτων χρησιμοποιείται ευρύτατα σε όλα τα πεδία της ανθρώπινης δραστηριότητας. Η οικονομική επιστήμη, η Βιολογία, η Κοινωνιολογία, η Ψυχολογία, η Ανθρωπολογία και πολλές άλλες επιστήμες χρησιμοποιούν τη θεωρία των πιθανοτήτων.

Στη Φυσική και τη Χημεία ο Λογισμός των πιθανοτήτων είναι απαραίτητος μετά την εμφάνιση της μοριακής θεωρίας της δομής της ύλης. Οι επιστήμονες της Γενετικής με τους νόμους της θεωρίας των πιθανοτήτων καθορίζουν τις αναλογίες με τις οποίες εμφανίζονται διάφορα χαρακτηριστικά των ατόμων. Ο Λογισμός των Πιθανοτήτων χρησιμοποιείται επίσης και στις επιχειρήσεις για τις αναμενόμενες εξελίξεις στην αγορά και για την αξιοπιστία των προϊόντων. Τέλος, η Στατιστική και οι Ασφαλιστικές επιστήμες βασίζονται κατά κύριο λόγο στο Λογισμό των Πιθανοτήτων.

1.3 Μαθηματικοί Ορισμοί της Πιθανότητας

1.3.1 Βασικές έννοιες:

1. Γεγονός όπως δηλώνει και ο όρος σημαίνει κάθε τι του οποίου η πραγματοποίηση λαμβάνει χώρα σε κάποια στιγμή ή σε κάποιο διάστημα (είτε του παρελθόντος, είτε του παρόντος, είτε του μέλλοντος) του χρόνου.
2. Η λέξη συμβάν εκφράζει κάθε τι το οποίο συνέβη. Όπως όμως και η έννοια του γεγονότος γενικά εκφράζει κάθε τι το οποίο είτε συνέβη είτε συμβαίνει είτε θα συμβεί.
3. Φαινόμενο λέγεται κάθε μεταβολή η οποία συμβαίνει στη φύση ή στην κοινωνία.
4. Ενδεχόμενο λέγεται κάθε γεγονός το οποίο ενδέχεται να πραγματοποιηθεί σε κάποιο χρόνο (παρελθόντα, παρόντα ή μέλλοντα).

- Δύο ενδεχόμενα E_1 και E_2 χαρακτηρίζονται ως ασυμβίβαστα όταν δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν και τα δύο δηλαδή αν πραγματοποιηθεί το ένα από αυτά, το άλλο δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί. Αν όμως το ένα από αυτά δεν πραγματοποιηθεί το άλλο μπορεί να πραγματοποιηθεί.
- Δύο ενδεχόμενα E_1 και E_2 λέγονται αντίθετα όταν η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου και η μη πραγματοποίηση του ενός επιβάλλει την πραγματοποίηση του άλλου.

5. Ως πείραμα τύχης χαρακτηρίζεται κάθε πείραμα το οποίο μπορεί να επαναλαμβάνεται υπό συγκεκριμένες συνθήκες και του οποίου το αποτέλεσμα δεν μπορεί να προβλεφθεί εκ των προτέρων (a priori).
6. Δειγματικός χώρος ή δειγματοχώρος ονομάζεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης. Ο δειγματοχώρος είναι ένα σύνολο πεπερασμένο ή άπειρο και εκφράζεται συνολικά με τη χρήση κεφαλαίων γραμμάτων.

1.3.2 Κλασσικός ορισμός της Πιθανότητας:

Ο ορισμός αυτός διατυπώθηκε σαφώς κατά πρώτον από τον θεμελιωτή του Λογισμού των Πιθανοτήτων Laplace (1812) κι έχει ως εξής: Η Πιθανότητα P(E) του γεγονότος (ή συμβάντος ή ενδεχομένου) ορίζεται ως ο λόγος του αριθμού n_E των ευνοϊκών περιπτώσεων προς το πλήθος N_E των δυνατών περιπτώσεων με την προϋπόθεση ότι όλες οι περιπτώσεις είναι εξίσου πιθανές. Είναι δηλαδή : $P(E)=\frac{n_E}{N_E}$.

Οι αριθμοί n_E και N_E προσδιορίζονται εκ των προτέρων εκ της φύσεως του πειράματος και όλες οι δυνατές και ευνοϊκές περιπτώσεις θεωρούνται ισοδύναμες ή ισοπίθανες.

1.3.3 Στατιστικός ορισμός της Πιθανότητας:

Ο R. Von Mises στην προσπάθειά του να αντιμετωπίσει τα αδιέξοδα του κλασσικού ορισμού της Πιθανότητας σκέφτηκε το 1919 να διατυπώσει ένα νέο ορισμό της Πιθανότητας με βασική σκέψη την εναρμόνιση του νέου αυτού ορισμού προς τα στατιστικά κυρίως δεδομένα των οποίων οι παρατηρήσεις δείχνουν μια τάση σταθεροποίησης των συχνοτήτων επαναλήψεως.

Κατά τον Von Mises αντικείμενο του Λογισμού των Πιθανοτήτων είναι η μελέτη των επαναλαμβανόμενων φαινομένων ή των μαζικών πληθυσμών.

Ο Von Mises αναχωρεί από μια απείρως εκτεταμένη σειρά ομοιογενών παρατηρήσεων $E_1,E_2,\ldots,E_n$ σε κάθε στοιχείο της οποίας αντιστοιχεί σε ένα σήμα σ_i, i= 1,2,…,n.

Το σύνολο Σ όλων των δυνατών σημάτων ονομάζεται χώρος σημάτων. Αν μεταξύ των n πρώτων ενδεχομένων $E_1,E_2,\ldots,E_n$ το πλήθος των εμφανιζομένων στο συγκεκριμένο σήμα σ είναι $f_n(E_i, \sigma)$ (το πλήθος αυτό ονομάζεται συχνότητα εμφάνισης του σ) τότε το πηλίκο $F_n(E_i,\sigma) = \frac{f_n(E_i,\sigma)}{n}$ ονομάζεται μέση συχνότητα εμφάνισης του σ. Αν τώρα το n τείνει στο άπειρο και το πηλίκο $\frac{f_n(E_i, \sigma)}{n}$ τείνει σε κάποιο πεπερασμένο όριο $P_n(E_i, \sigma)$ το όριο αυτό ονομάζεται στατιστική πιθανότητα εμφανίσεως του σήματος σ.

1.3.4 Αξιώματα της πιθανότητας:

- Ο δειγματικός χώρος Ω δηλαδή το σύνολο των στοιχειωδών ενδεχομένων (πειραματικών αποτελεσμάτων) θεωρείται ως βέβαιο γεγονός.
- Τα διάφορα υποσύνολα του δειγματοχώρου Ω είναι τα χαρακτηριζόμενα ως ενδεχόμενα.
- Το κενό υποσύνολο του Ω αποτελεί το αδύνατο ενδεχόμενο.
- Η αναγνώριση των πειραματικών αποτελεσμάτων δεν είναι πάντοτε μοναδική.
- Σε κάθε πείραμα τύχης παρατηρείται ένα μοναδικό αποτέλεσμα.
- Το βέβαιο ενδεχόμενο παρατηρείται σε κάθε πείραμα τύχης και το αδύνατο δεν πραγματοποιείται ποτέ.
- Το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται όταν το ενδεχόμενο Α ή Β ή και τα δύο ενδεχόμενα Α και Β πραγματοποιηθούν.
- Το ενδεχόμενο $A \cap B$ πραγματοποιείται όταν και τα δύο ενδεχόμενα Α και Β πραγματοποιηθούν.
- Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα και πραγματοποιηθεί το ένα (έστω το Α) τότε το άλλο (δηλαδή το Β) δεν πραγματοποιείται.
- Αν $A \subset B$ και πραγματοποιείται το Α, τότε πραγματοποιείται και το Β.
- Σε κάθε πείραμα τύχης είτε πραγματοποιείται το ενδεχόμενο Α είτε το ενδεχόμενο Α΄.

1.4 Δεσμευμένη πιθανότητα

Η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου E_1 όταν δίνεται η πραγματοποίηση (στο παρελθόν ή στο μέλλον) ενός ενδεχομένου E_2 χαρακτηρίζεται ως δεσμευμένη πιθανότητα του E_1 και συμβολίζεται ως εξής: $P(E_1/ E_2)$. Η δεσμευμένη αυτή πιθανότητα ορίζεται από τον τύπο: $P(E_1/E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$, $P(E_2) \neq 0$.

Από τον παραπάνω τύπο προκύπτει ο εξής: $P(E_1 \cap E_2) = P(E_2) \cdot P(E_1/E_2)$ ο οποίος μας δίνει την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί και το γεγονός E_1 και το γεγονός E_2 (όταν τα ενδεχόμενα αυτά δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους).

1.5 Ολική πιθανότητα – θεώρημα Bayes

Έστω το ενδεχόμενο E του οποίου η εμφάνιση εξαρτάται από τα ασυμβίβαστα γεγονότα E_1, E_2, …, E_n τότε ο τύπος της ολικής πιθανότητας είναι:
$$P(E) = P(E_1)\cdot P(E/E_1) + P(E_2)\cdot P(E/E_2) + ... + P(E_n)\cdot P(E/E_n)$$

Και χρησιμοποιώντας τη σχέση $P(E_i / E) = \dfrac{P(E_i \cap E)}{P(E)}$ προκύπτει ο τύπος :

$$P(E_i / E) = \frac{P(E_i)\cdot P(E/E_i)}{P(E_1)\cdot P(E/E_1) + P(E_2)\cdot P(E/E_2) + ... + P(E_n)\cdot P(E/E_n)}$$ ο οποίος εκφράζει το θεώρημα του Bayes.

Η πιθανότητα $P(E_i)$ ονομάζεται a priori πιθανότητα (εκ των προτέρων πιθανότητα) και η δεσμευμένη πιθανότητα $P(E_i/E)$ ονομάζεται a posteriori πιθανότητα (εκ των υστέρων πιθανότητα).

1.6 Τυχαία μεταβλητή – κατανομή τυχαίας μεταβλητής

Ορισμός 1.6.1: Τυχαία μεταβλητή (τ.μ) ονομάζεται κάθε συνάρτηση που αντιστοιχίζει τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ορισμός 1.6.2: Κατανομή της τ.μ. X ονομάζεται η αντιστοιχία των τιμών αυτής x_i και των πιθανοτήτων p_i με τις οποίες η τ.μ. X λαμβάνει τις αντίστοιχες δυνατές τιμές x_i.

Ορισμός 1.6.3: Συνάρτηση πιθανότητας_ ονομάζεται η συνάρτηση $p_i = P\{X = x_i\}$ η οποία δίνει για κάθε τιμή x_i της τ.μ. X την αντίστοιχη πιθανότητα. Ισχύει: $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Ορισμός 1.6.4: Ως συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X χαρακτηρίζεται η συνάρτηση που ορίζεται από την πιθανότητα του ενδεχομένου «η τυχαία μεταβλητή X λαμβάνει τιμές μικρότερες ή ίσες της τιμής x». Έτσι έχουμε:

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_i \le X} p_i \text{ , αν η τ.μ. είναι διακριτή} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \text{ , αν η τ.μ. είναι συνεχής} \end{cases}$$

1.7 Μέση τιμή

1.7.1 Διακριτή τυχαία μεταβλητή:

Μέση τιμή ή Μαθηματική ελπίδα ή αναμενόμενη τιμή μιας διακριτής τ.μ. X ονομάζεται η ποσοτική έκφραση: $E(X) = \sum_{i} p_i \cdot x_i$.

Αν η τ.μ. X λαμβάνει πεπερασμένο πλήθος τιμών τότε: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i$. Στην ειδική περίπτωση που οι δυνατές τιμές αυτές είναι ισοπίθανες τότε ο τύπος γίνεται: $E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Αν η τ.μ. X λαμβάνει άπειρο πλήθος τιμών τότε: $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot x_i$.

1.7.2 Συνεχής τυχαία μεταβλητή:

Η μέση τιμή μιας συνεχούς τ.μ. X που παίρνει τιμές σε όλο το $\mathbb{R}$ ορίζεται από την έκφραση:
$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$, υπό τον όρο ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Αν το πεδίο τιμών της τ.μ. X είναι το διάστημα (α,β), ο τύπος παίρνει τη μορφή:
$E(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot f(x)dx$

1.8 Διακύμανση – Τυπική απόκλιση

Η διακύμανση (η βασικότερη εκ των παραμέτρων αποκλίσεως) τυχαίας μεταβλητής X είναι ένα μέτρο της μεταβλητότητας των τιμών της X ή της συγκεντρώσεως των τιμών της X περί την μέση τιμή αυτής. Η διακύμανση της τ.μ. X συμβολίζεται με το σύμβολο V(X) ή σ^2 ή Var(X).

Ορισμός 1.8.1: Διακύμανση ή διασπορά ή σκεδασμός μιας τ.μ. X ονομάζεται η μέση τιμή των τετραγώνων των αποκλίσεων των τιμών αυτής από την μέση τιμή της. Είναι δηλαδή:

$$V(X) = E\left[X - E(X)\right]^2 = \begin{cases} \sum\limits_i \left[x_i - E(X)\right]^2 \cdot p_i \text{ , διακριτή τ.μ.} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[x_i - E(X)\right]^2 \cdot f(x)dx \text{ , συνεχής τ.μ.} \end{cases}$$

Ένας άλλος τύπος για τη διασπορά είναι ο εξής: $V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$

<u>Ορισμός 1.8.2:</u> Τυπική απόκλιση μιας τ.μ. Χ ονομάζεται η θετική τετραγωνική ρίζα της διακυμάνσεώς της και συμβολίζεται ως εξής: $\sqrt{V(X)}$ ή σ^2.

(ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Π.ΚΙΚΙΛΙΑΣ Δ ΠΑΛΑΜΟΥΡΔΑΣ Α.ΠΕΤΡΑΚΗΣ Δ.ΤΣΟΥΚΑΛΑΣ)

1.9 Ροπές κατανομής συχνοτήτων

Ο όρος ροπή έχει εισαχθεί από την Μηχανική , όπου χρησιμοποιείται για τη μέτρηση τάσης μιας δύναμης που παράγει περιστροφή.

Η δύναμη της τάσης αυτής εξαρτάται τόσο από το μέγεθος της δύναμης όσο και από την απόσταση από την αρχή του σημείου πάνω στο οποίο ασκείται η δύναμη. Έτσι , αν υποθέσουμε ότι έχουμε αναρτήσει μια ομοιογενή σιδερένια ράβδο από το κέντρο βάρους της , αυτή θα ισορροπεί . Αν τώρα , σε απόσταση δύο μονάδων μήκους , αναρτήσουμε βάρος , π.χ. 5 Kgr , θα αναπτυχθεί ροπή $2 \cdot 5 = 10$ μονάδων , η οποία θα τείνει να περιστρέφει τη ράβδο γύρω από το σημείο εξάρτησής της. Για να ισορροπήσει , θα πρέπει να αναπτυχθεί μια ροπή ίση και αντίθετη με την πρώτη.

Αυτό θα γίνει αν , σε απόσταση - 1 μονάδας μήκους τοποθετήσουμε βάρος 10 Kgr , οπότε θα αναπτυχθεί ροπή $-1 \cdot 10 = -10$ μονάδες.

Ανάλογη είναι η σημασία της ροπής στη Στατιστική.

Το ιστόγραμμα μιας κατανομής μπορεί να θεωρηθεί ως κάτι το στερεό και ότι κάθε στήλη του ασκεί πίεση πάνω στον άξονα των τετμημένων ίση με την αντίστοιχη στήλη της συχνότητας.

Η ροπή κάθε στήλης μετριέται από το γινόμενο της συχνότητας της τάξης και της αντίστοιχης απόστασης , από το σημείο της μεταβλητής x_i , το οποίο πήραμε ως αρχή. Το άθροισμα όλων των μερικών γινομένων όταν αυτά διαιρεθούν με το συνολικό αριθμό των συχνοτήτων της κατανομής μας δίνει των πρώτη ροπή.

Η τιμή των ροπών εξαρτάται από τον εντοπισμό της αρχής.

Επομένως, αν ως αρχή είναι η τιμή της μεταβλητής x=0 ή x=μ έχουμε ροπές περί την αρχή ή περί τον αριθμητικό μέσο.

Ροπές περί την αρχή

- Η κατανομή που μας δόθηκε δεν παρουσιάζει συχνότητες:

Πρώτη ροπή : $V_1 = \frac{\sum x_i}{N}$

Δεύτερη ροπή : $V_2 = \frac{\sum x_i^2}{N}$

Τρίτη ροπή : $V_3 = \frac{\sum x_i^3}{N}$

.

.

.

Ροπή t τάξης : $V_t = \frac{\sum x_i^t}{N}$

- Η κατανομή παρουσιάζει συχνότητες :

Πρώτη ροπή : $V_1 = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i}$

Δεύτερη ροπή : $V_2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i}$

.

.

.

Ροπή t τάξης : $V_t = \frac{\sum f_i \cdot x_i^t}{\sum f_i}$

Ροπές περί τον αριθμητικό μέσο

- Αν η κατανομή δεν παρουσιάζει συχνότητες

Πρώτη ροπή : $\mu_1 = \frac{\sum (x_i - \mu)}{N}$

Δεύτερη ροπή : $\mu_2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}$

.

.

.

Ροπή t τάξης : $\mu_t = \frac{\sum (x_i - \mu)^t}{N}$

- Αν η κατανομή παρουσιάζει συχνότητες :

  Πρώτη ροπή : $\mu_1 = \dfrac{\sum f_i \cdot (x_i - \mu)}{\sum f_i}$

  Δεύτερη ροπή : $\mu_2 = \dfrac{\sum f_i \cdot (x_i - \mu)^2}{\sum f_i}$

  .

  .

  .

  Ροπή t τάξης : $\mu_t = \dfrac{\sum f_i \cdot (x_i - \mu)^t}{\sum f_i}$

1.10 Κατανομές

1.10.1 Η κατανομή Poisson:

Πολλές φορές στην εφαρμογή της διωνυμικής κατανομής (η κατανομή κατά την οποία έχουμε μόνο δύο δυνατά ενδεχόμενα Ε και $\bar{E}$ με αντίστοιχες πιθανότητες p και q=1-p) παρατηρούμε ότι η τιμή p είναι πολύ μικρή (μικρότερη του 0,10) , ενώ το μέγεθος του δείγματος n είναι αρκετά μεγάλο (μεγαλύτερο του 50) , έτσι που ο αναμενόμενος αριθμητικός μέσος είναι E(X)=np να είναι ένας μικρός αριθμός που περιλαμβάνεται μεταξύ 0 και 10. Με άλλα λόγια , αν η συνεχής τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή, όπου $n \to \infty$, $p \to 0$, τότε αντί της διωνυμικής κατανομής για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων P(X=x), όπου x = 0,1,2,3,…,n , εφαρμόζεται μια άλλη κατανομή, γνωστή ως κατανομή Poisson και της οποίας η συνάρτηση πιθανότητας δίνεται από τη σχέση : $P(X = x) = P_x = \dfrac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$, όπου :

λ : ο μέσος της κατανομής

e = 2,71828

P (χ) : η πιθανότητα σε ένα δείγμα μεγέθους n μονάδων να έχουμε x επιτυχίες

Επομένως , αν Χ είναι μια τυχαία μεταβλητή που μπορεί να πάρει τιμές x = 0,1,2,3,…n και έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας: $P(X = x) = P_x = \dfrac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ λέμε τότε ότι η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κατανομή Poisson.

Η κατανομή Poisson ανακαλύφθηκε από τον Γάλλο S.D Poisson στις αρχές του $19_{ου}$ αιώνα.

Η κατανομή του Poisson εμφανίζεται σε εκείνες τις περιπτώσεις στις οποίες το ενδεχόμενο «επιτυχία» εμφανίζεται σπάνια ενώ το μέγεθος του δείγματος είναι αριθμός μεταξύ 0 και 10. Στην περίπτωση αυτή οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής X που αναφέρονται στο ενδεχόμενο «επιτυχία» τείνουν να συγκεντρωθούν στις πρώτες μικρές τιμές της X , ενώ οι μεγάλες τιμές δεν έχουν συχνότητες

Για παράδειγμα, μια κάλπη περιέχει 5000 σφαιρίδια εκ των οποίων τα 80 είναι λευκά και τα υπόλοιπα μαύρα. Παίρνουμε ένα δείγμα 150 σφαιριδίων με επανατοποθέτηση και σημειώνουμε το πλήθος των λευκών σφαιριδίων. Αν συνεχίσουμε τη διαδικασία αυτής της εξαγωγής 150 σφαιριδίων κάθε φορά, τότε η θεωρητική κατανομή των δειγμάτων από 150 σφαιρίδια ακολουθεί τον νόμο του Poisson.

<u>Χαρακτηριστικές τιμές της κατανομής Poisson</u>:

- Μαθηματική ελπίδα ή αριθμητικός μέσος : $E(X) = n \cdot p$
- Διακύμανση : $Var(X) = \lambda = np$
- Τυπική απόκλιση : $\sigma = \sqrt{\lambda}$

<u>Η κατανομή Poisson στα μοντέλα αξιοπιστίας:</u>

Θεωρούμε ότι μια συνιστώσα ενός συστήματος τυχαία αποτυγχάνει. Γνωρίζουμε ότι ο χρόνος μέχρι την αποτυχία ακολουθεί εκθετική κατανομή. Υποθέτουμε ότι μια μονάδα που αποτυγχάνει επισκευάζεται αμέσως ή ο χρόνος επισκευής είναι τόσο μικρός που θεωρείται αμελητέος. Μ’ αυτόν τον τρόπο έχουμε μια διαδικασία στην οποία τα γεγονότα (αποτυχίες) συμβαίνουν κατά τη διάρκεια του χρόνου και οι χρόνοι ανάμεσα σε διαδοχικές αποτυχίες είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν εκθετική κατανομή. Θεωρούμε ως $T_1 , T_2 , \ldots$ τις τυχαίες μεταβλητές που αντιστοιχούν στους χρόνους ανάμεσα σε διαδοχικές αποτυχίες. Κάθε T_i έχει συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση αξιοπιστίας : $\begin{matrix} F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \\ R(t) = e^{-\lambda t} \end{matrix}$ όπου λ είναι ο ρυθμός αποτυχίας. Στη συνέχεια, θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $W_1 , W_2 , \ldots$ που δίνονται από τις ισότητες : $\begin{matrix} W_1 = T_1 \\ W_2 = T_1 + T_2 \\ W_3 = T_1 + T_2 + T_3 \end{matrix}$ κ.ο.κ.

Μ’ αυτόν τον τρόπο ερμηνεύουμε την W_n ως τον χρόνο μέχρι την νιοστή αποτυχία. Έτσι, εισάγουμε την διαδικασία N(t) που ορίζεται ως το πλήθος των αποτυχιών που συμβαίνουν μέχρι τη χρονική στιγμή t. Συγκεκριμένα, η N(t) συνδέεται στενά με τους χρόνους $T_1 , T_2 , \ldots$ και $W_1 , W_2 , \ldots$. Όταν οι $T_1 , T_2 , \ldots$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή τότε η N(t) είναι η διαδικασία Poisson.

Θα κάνουμε την ανάλυση της διαδικασίας Poisson με τον εξής τρόπο :
Αρχικά, γνωρίζουμε την κατανομή των χρόνων ανάμεσα στις αποτυχίες : $T_1 , T_2 , \ldots$ από την οποία μπορούμε να αντλήσουμε την κατανομή των $W_1 , W_2 , \ldots$. Συνεπώς, η κατανομή της N(t) δίνεται από την ισότητα : $\{ N(t) < n \} = \{ W_n > t \}$

Η κατανομή της W_n μας οδηγεί Erlang κατανομή : $P\{W_n > t\} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda t}(l\,t)^k}{k!}$

Επομένως , έχουμε :

$$P\{N(t) = n\} = P\{N(t) < n + 1\} - P\{N(t) < n\}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$
$$= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

που είναι ακριβώς η κατανομή Poisson με παράμετρο λt. Η Poisson κατανομή παίρνει τιμές μόνο από φυσικούς αριθμούς 0,1,2,… κι έχει μέση τιμή και διασπορά λt.

Γενικά, η διαδικασία κατά την οποία :

- Τα γεγονότα συμβαίνουν τυχαία κατά τη διάρκεια του χρόνου.
- Οι χρόνοι ανάμεσα σε δύο γεγονότα είναι τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή.
- Οι χρόνοι των γεγονότων είναι τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την Erlang κατανομή.
- Το πλήθος των γεγονότων που συμβαίνουν στο χρόνο t είναι τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την κατανομή Poisson.

Λέγεται διαδικασία Poisson. Πρόκειται για μια θεμελιώδης διαδικασία που λαμβάνει χώρο σε πολλούς τομείς της θεωρίας αξιοπιστίας.

1.10.2 Τυπική κανονική κατανομή:

Ο υπολογισμός της πιθανότητας μια τυχαία μεταβλητή Χ που ακολουθεί την κανονική κατανομή να πάρει π.χ. τιμή : $\alpha \le X \le \beta$ δίνεται από το ολοκλήρωμα :

$$P\{\alpha \le X \le \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \ .$$

Για κάποιο γνωστό ζεύγος των παραμέτρων μ και σ, αν μεταβληθούν οι τιμές μ και σ, θα χρειαστεί να υπολογίσουμε ένα νέο ολοκλήρωμα της παραπάνω μορφής. Ο υπολογισμός όμως του παραπάνω ολοκληρώματος για καθεμία κανονική κατανομή παρουσιάζει πολύ μεγάλες δυσκολίες στις εφαρμογές. Για να αντιμετωπίσουμε τις δυσκολίες αυτές, κάνουμε τον εξής γραμμικό μετασχηματισμό, αντικαθιστώντας τη μεταβλητή Χ με μια νέα μεταβλητή Z , δηλαδή : $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

Αποδεικνύεται ότι, αν μια τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την κανονική κατανομή που έχει αριθμητικό μέσο μ και διακύμανση σ^2, τότε και η τυχαία μεταβλητή $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή που έχει αριθμητικό μέσο 0 και διακύμανση 1, δηλαδή :

$$E(Z) = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} E(X - \mu) = \frac{1}{\sigma} [E(X) - \mu] = \frac{1}{\sigma}(\mu-\mu) = 0$$

$$Var(Z) = Var\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} Var(X - \mu) = \frac{1}{\sigma^2} [Var(X) - o] =$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 = 1$$

Η κανονική κατανομή που έχει μέση τιμή 0 και διακύμανση 1, λέγεται τυποποιημένη κανονική κατανομή και συμβολίζεται με N(0,1).

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής δίνεται από την σχέση : $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $-\infty < z < +\infty$.

Στην περίπτωση που η κανονική κατανομή είναι τυποποιημένη , αποδεικνύεται ότι μεταξύ ± 1 η καμπύλη περιλαμβάνει το 68 % περίπου των περιπτώσεων , στο διάστημα μεταξύ ± 2 η καμπύλη περιλαμβάνει το 95,4 % των περιπτώσεων και στο διάστημα ± 3 το 99,7 % των περιπτώσεων.

Για παράδειγμα , μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με αριθμητικό μέσο (μ=7) και τυπική απόκλιση (σ=2) . Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(X \leq 12)$, θα χρησιμοποιήσουμε πρώτα το μετασχηματισμό $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ κι έχουμε :

$$P(X \leq 12) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{12 - 7}{2}\right) = P(Z \leq 2{,}5) = \Phi(2{,}5)$$

1.10.3 Erlang κατανομή:

Η κατανομή Erlang είναι μια συνεχής κατανομή με πολλές εφαρμογές λόγω της σχέσης της με την εκθετική και Γάμμα κατανομή. Η Erlang κατανομή ανακαλύφθηκε από τον A.K. Erlang για να εξετάσει τον αριθμό των τηλεφωνικών κλήσεων που μπορεί να πραγματοποιήθηκαν σε συγκεκριμένους σταθμούς. Αυτή η διαδικασία μπορεί να επεκταθεί για να θεωρήσουμε χρόνους αναμονής σε συστήματα ουράς. Η κατανομή χρησιμοποιείται κυρίως στους τομείς των στοχαστικών διαδικασιών και στα βιομαθηματικά.

Όπως αναφέραμε παραπάνω , η Erlang είναι μια συνεχής κατανομή που έχει θετική τιμή για όλους τους πραγματικούς αριθμούς μεγαλύτερους από το μηδέν και δίνεται μέσω 2 παραμέτρων : κ , που είναι μη αρνητικός ακέραιος και το ρυθμό λ που είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Υπάρχουν κάποιες περιπτώσεις που η κατανομή καθορίζεται χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο του ρυθμού, μ.

Όταν κ = 1 τότε έχουμε την εκθετική κατανομή. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η Erlang είναι μια ειδική περίπτωση της Γάμμα κατανομής όπου το κ δεν είναι κάποιος ακέραιος αριθμός.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Erlang κατανομής είναι :

$$f(x;\kappa,\lambda) = \frac{\lambda^{\kappa} x^{\kappa-1} e^{-\lambda x}}{(\kappa-1)!}, \; x, \lambda \geq 0$$

ή

$$f(x;\kappa,\mu) = \frac{x^{\kappa-1} e^{-\frac{x}{\mu}}}{\mu^{\kappa}(\kappa-1)!}, \; x, \mu \geq 0 \qquad \mu = \frac{1}{\lambda}$$

Αν μ=2 έχουμε την χι τετράγωνο κατανομή.

Τέλος, είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι γνωρίζουμε πως γεγονότα που συμβαίνουν ανεξάρτητα με κάποιο μέσο ρυθμό κατηγοριοποιούνται στην Poisson διαδικασία. Οι χρόνοι αναμονής όμως ανάμεσα σε κ συμβάντα ακολουθούν Erlang κατανομή.

1.10.4 Εκθετική κατανομή:

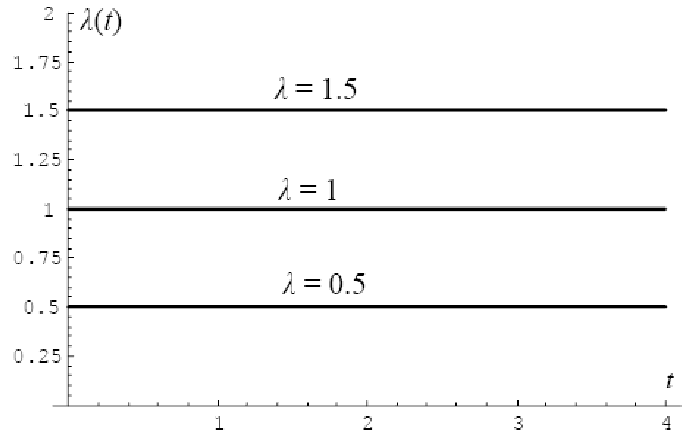
Γνωρίζουμε ότι η απλούστερη περίπτωση κατανομής χρόνου ζωής μιας μονάδας ή ενός συστήματος είναι η εκθετική κατανομή. Αν μία τυχαία μεταβλητή T ~ Εκθετική(λ) τότε θα έχει συνάρτηση κατανομής : $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$, $\lambda > 0$ από όπου εύκολα προκύπτει ότι,

$$R(t) = e^{-\lambda t}, \; f(t)=\lambda e^{-\lambda t}, \; \lambda(t) = \lambda, \; t \geq 0 \quad \text{και} \quad E(T) = \frac{1}{\lambda}, \; V(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

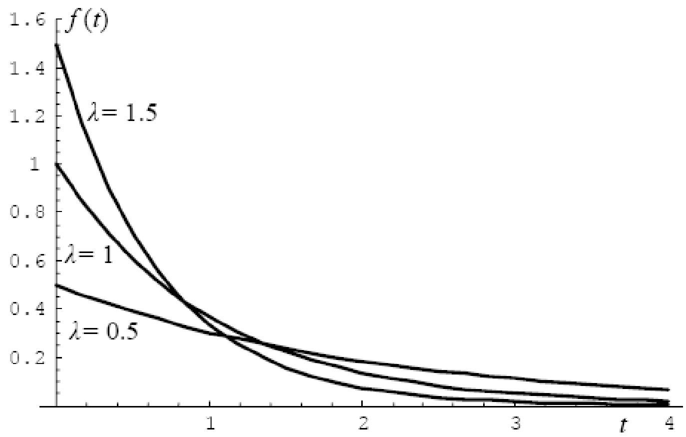
Είδαμε επίσης παραπάνω ότι η εκθετική κατανομή είναι η μοναδική κατανομή με την ιδιότητα της αμνησίας, αυτό σημαίνει ότι αν έχουμε μονάδες όπου οι χρόνοι ζωής τους ακολουθούν την εκθετική κατανομή τότε αυτές είναι ‘αφθαρτες , δηλαδή λειτουργούν ως καινούργιες και δεν έχει σημασία ο χρόνος λειτουργίας τους («άφθαρτες μονάδες»):

$$R(t\backslash x) = \frac{R(x+t)}{R(x)} = \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda t} = R(t) = R(t\backslash 0) \text{ για κάθε } x \geq 0 \text{ και } t \geq 0$$

ο τύπος αυτός δηλώνει ότι η αξιοπιστία σε μια χρονική στιγμή t είναι ανεξάρτητη του χρόνου λειτουργίας x που έχει προηγηθεί.
Συνεπώς η συνάρτηση του ρυθμού αποτυχίας είναι σταθερή στο χρόνο t :



και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για τα διάφορα λ είναι :



1.10.5 Weibull κατανομή:

Στη θεωρία πιθανοτήτων η Weibull κατανομή είναι μια συνεχής κατανομή. Ονομάστηκε έτσι από τον Waloddi Weibull που την περιέγραψε λεπτομερώς το 1951, αν και πρώτη φορά είχε εντοπιστεί από τον Frechet (1927) και εφαρμόστηκε για πρώτη φορά από τους Rosin & Rammler (1933) για να περιγράψει το μέγεθος της κατανομής των μορίων.

Η πυκνότητα πιθανότητας είναι : $f(x\,;\lambda\,,\kappa) = \begin{cases} \frac{\kappa}{\lambda}\cdot\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\kappa-1}\cdot\ e^{-(\kappa/\lambda)^{\kappa}} & , x\ \geq\ 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$

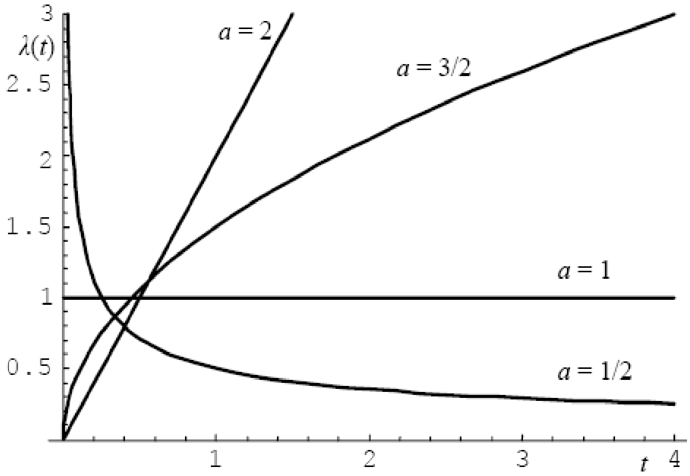
Η Weibull κατανομή συσχετίζεται με πολλές άλλες κατανομές , στην πραγματικότητα όμως κινείται ανάμεσα στην εκθετική κατανομή (κ=1) και στην Rayleigh κατανομή (κ=2).

Η κατανομή Weibull μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση της εκθετικής κατανομής αφού προκύπτει όταν η βαθμίδα αποτυχίας είναι της μορφής $\lambda(t) = c \cdot t^{b}$ για κάποιες σταθερές c, t. Υπάρχουν πολλές ισοδύναμες εκφράσεις για την συνάρτηση κατανομής της συγκεκριμένης κατανομής ανάλογα με την μορφή των σταθερών c, t. Μια συνήθης μορφή της συνάρτησης κατανομής της Weibull (την οποία και θα θεωρούμε στη συνέχεια) είναι η : $F(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^{\alpha}}$, $\lambda > 0$, $\alpha > 0$, $t > 0$. Η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι : $f(t) = F'(t) = \alpha\lambda^{\alpha} t^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^{\alpha}}$, $t \geq 0$ ενώ η βαθμίδα αποτυχίας είναι :

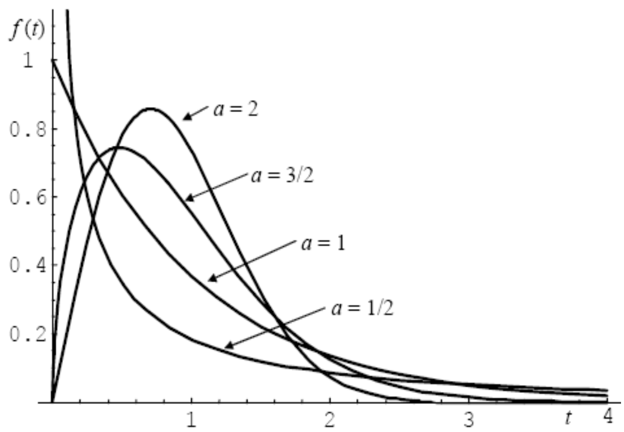
$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{\alpha\lambda^{\alpha} t^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^{\alpha}}}{e^{-(\lambda t)^{\alpha}}} = \alpha\lambda^{\alpha} t^{\alpha-1} \text{ , } t \geq 0$$

Επομένως αν T ~ Weibull(λ,α), τότε

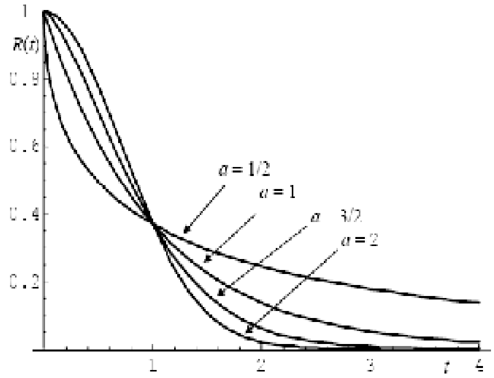
- αν $\alpha \geq 1$ τότε η μονάδα φθείρεται με την πάροδο του χρόνου.
- αν $0 < \alpha \leq 1$ τότε η μονάδα λειτουργεί ομαλότερα όσο περνά ο χρόνος. (αν α = 1 προκύπτει η εκθετική κατανομή η οποία έχει την ιδιότητα να φθείρεται και να λειτουργεί ομαλότερα με την πάροδο του χρόνου). Π.χ. για λ = 1 και για διάφορες τιμές του α, ο ρυθμός αποτυχίας θα έχει την ακόλουθη μορφή:



Παρατηρούμε και στο διάγραμμα ότι αν $\alpha \geq 1$ τότε έχουμε αυξανόμενο ρυθμό αποτυχίας ενώ αν $0 < \alpha < 1$ τότε έχουμε φθίνοντα ρυθμό αποτυχίας.
Για τις ίδιες τιμές του α (με λ = 1) η συνάρτηση πιθανότητας f και η συνάρτηση αξιοπιστίας $R = 1 - F$ θα έχουν την ακόλουθη μορφή:



Παρατηρούμε ότι όταν το α αυξάνεται τότε η καμπύλη της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας γίνεται στενότερη. Βέβαια το α λέγεται παράμετρος «μορφής» (shape parameter).



Η παράμετρος λ καλείται παράμετρος κλίμακας (scale parameter) διότι η κατανομή της Weibull εξαρτάται από το λ και το t μόνο μέσα από το λt. Η κατανομή Weibull αποτελεί την πιο συνήθη παραμετρική οικογένεια κατανομών χρόνων ζωής.

<u>Παρατήρηση 1.10.1:</u>

Είναι ενδιαφέρον να αναφέρουμε ότι η κατανομή Weibull προκύπτει και κατά τη μελέτη της κατανομής του ελαχίστου από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Ειδικότερα, έστω μία οικογένεια μη-αρνητικών ανεξάρτητων και ισόνομων (iid) τυχαίων μεταβλητών X_1 ,X_2,...,X_n με συνάρτηση κατανομής F για την οποία ισχύει ότι : $\frac{F(x)}{(l\,x)^a} \underset{x\to 0^+}{\to} 1$ για κάποιες σταθερές α, λ > 0. Η συνθήκη αυτή είναι αρκετά ασθενής με συνέπεια να ικανοποιείται από τις περισσότερες γνωστές κατανομές όπως π.χ. την εκθετική, την Weibull, την γάμμα, την ομοιόμορφη, κ.α. (π.χ. ικανοποιείται από την εκθετική διότι $(1 - e^{-\lambda x})/(l\,x) \to 1$ για $x \to 0$) Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $Y_n = n^{\frac{1}{\alpha}} X_{(1)} = n^{\frac{1}{\alpha}} \min\{X_1,...,X_n\}$ συγκλίνει στην κατανομή Weibull.Πράγματι,

$$R_{Y_n}(t) = P(Y_n > t) = P(n^{\frac{1}{\alpha}} X_{(1)} > t) = P(X_{(1)} > \frac{t}{n^{1/a}}) = P(X_{(1)} > \frac{t}{n^{1/a}},...,X_{(n)} > \frac{t}{n^{1/a}}) = (1 - F(\frac{t}{n^{1/a}}))^n$$

και άρα, για κάθε t > 0, $\lim_{n\to\infty} R_{Y_n(t)} = \exp(-(l\,t)^a)$ Επομένως, κάτω από την παραπάνω συνθήκη τυχαία μεταβλητή $Y_n = n^{1/a} X_{(1)}$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μία κατανομή Weibull όταν n → ∞.

Από το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει και ένα συμπέρασμα για την ασυμπτωτική κατανομή ενός μεγάλου σειριακού συστήματος. Αν T_1, T_2,...,T_n είναι οι χρόνοι ζωής των n iid μονάδων ενός σειριακού συστήματος με κοινή συνάρτηση κατανομής F που ικανοποιεί την $F(x)/(l\,x)^a \underset{x\to 0^+}{\to} 1$ (για κάποια λ ,α)

τότε για την αξιοπιστία του συστήματος στο χρόνο $t/n^{1/a}$ θα ισχύει ότι : $R_s(\frac{t}{n^{1/a}}) = \mathrm{P}(\mathrm{T}_{(1)} > \frac{t}{n^{1/a}}) = \mathrm{P}(\mathrm{n}^{1/a}T_{(1)} > t) \to \exp(-(l\,t)^a)$ για n → ∞ (λιγότερο αυστηρά, $R_s(x) \approx \exp(-n(l\,x)^a)$ για x μικρό). Με άλλα λόγια, αν πάρουμε έναπολύ μεγάλο σειριακό σύστημα, τότε ο χρόνος ζωής του (θεωρούμενος σε κατάλληλη χρονική κλίμακα) θα ακολουθεί προσεγγιστικά κατανομή Weibull, ανεξάρτητα από την κατανομή των χρόνων ζωής των n μονάδων (αρκεί να ικανοποιείται η συνθήκη για την F που αναφέρεται παραπάνω).

Παρατήρηση 1.10.2:

Εκτός της εκθετικής, μία άλλη ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση της κατανομής Weibull είναι η κατανομή Rayleigh. Αυτή προκύπτει όταν α=2 $l = (k/2)^{1/2}, k > 0$ και επομένως, η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής αυτής θα είναι $\lambda(t) = \alpha\lambda^a t^{a-1} = k t, t \geq 0$ δηλαδή γραμμικά αύξουσα συνάρτηση του χρόνου t. Η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα είναι : $\mathrm{F(t)} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}kt^2}, t \geq 0$ και $\mathrm{f(t)} = k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}kt^2}, t \geq 0$

και η μέση τιμή και διασπορά της Rayleigh θα είναι : $\mathrm{E(T)} = \lambda^{-1}\Gamma(1+\alpha^{-1}) = \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{-1/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}}\frac{1}{2}\sqrt{p} = \sqrt{\frac{p}{2\kappa}}$ και

$$\mathrm{E(T_x)} = \mathrm{E(T - x \setminus T>x)} = \frac{1}{\mathrm{R(x)}}\int_x^\infty \mathrm{R(t)dt} = \frac{1}{\mathrm{e}^{-\frac{k}{2}x^2}}\int_x^\infty \mathrm{e}^{-\frac{k}{2}t^2}\,dt \overset{y=t\sqrt{k}}{=} \frac{1}{\sqrt{k}e^{-\frac{k}{2}x^2}}\int_{x\sqrt{k}}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = \frac{\sqrt{2p}\,e^{\frac{k}{2}x^2}}{\sqrt{k}}(1 - \Phi(\mathrm{x}\sqrt{\mathrm{k}}))$$

1.10.6 Η κατανομή Γάμμα

Η κατανομή Γάμμα προκύπτει γενικεύοντας την Erlang, και συγκεκριμένα θεωρώντας ότι η παράμετρος k γενικότερα ανήκει στο (0,∞) και όχι αποκλειστικά στο {1,2,...}.

Ορισμός1.10.1: Η κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(t) = \frac{l^a}{\Gamma(a)}t^{a-1}e^{-l t}, t \geq 0$ όπου λ > 0, και α ≥ 0 καλείται κατανομή Γάμμα με παραμέτρους (λ, α). Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση Γάμμα είναι η : $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$.

Ένα γενικότερο ολοκλήρωμα που εμφανίζεται και αυτό αρκετές φορές σε διάφορες εφαρμογές και δεν μπορεί να γραφεί σε απλούστερη μορφή είναι το : $\Gamma(a,b) = \int_b^{\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$. Το ολοκλήρωμα αυτό αν θεωρηθεί ως συνάρτηση των α, b καλείται μη-πλήρης συνάρτηση Γάμμα. Προφανώς ισχύει ότι Γ(α, 0) = Γ(α). Η συνάρτηση αξιοπιστίας της κατανομής Γάμμα (λ, α) θα είναι (t ≥ 0) :

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(x)dx = \frac{l^a}{\Gamma(a)}\int_t^{\infty} x^{a-1}e^{-lx}dx \overset{y=lx}{=} \frac{l^a}{\Gamma(a)}\int_t^{\infty}\left(\frac{y}{l}\right)^{a-1} e^{-y}\frac{dy}{l} = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_{lt}^{\infty} y^{a-1}e^{-y}dy = \frac{\Gamma(a,lt)}{\Gamma(a)}$$

και η αντίστοιχη βαθμίδα αποτυχίας θα είναι : $l(t) = \dfrac{f(t)}{R(t)} = \dfrac{l^a}{\Gamma(a,lt)}t^{a-1}e^{-lt}$

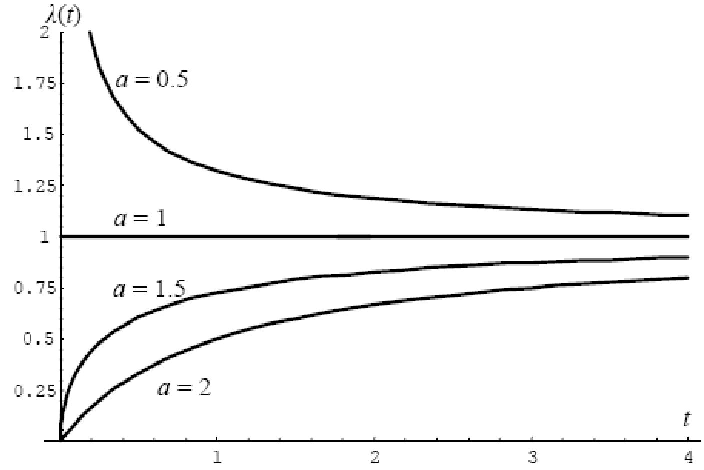
Για να εξετάσουμε αν η κατανομή Γάμμα είναι IFR ή DFR παρατηρούμε ότι :

$$l(t) = \frac{f(t)}{\int_t^{\infty} f(x)dx} = \frac{\dfrac{l^a}{\Gamma(a)}t^{a-1}e^{-lt}}{\int_t^{\infty}\dfrac{l^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-lx}dx} = \frac{1}{\int_t^{\infty}\left(\dfrac{x}{t}\right)^{a-1}e^{-l(x-t)}dx} \underset{y=x-t}{=} \frac{1}{\int_0^{\infty}\left(1+\dfrac{y}{t}\right)^{a-1}e^{-ly}dy} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} l$$

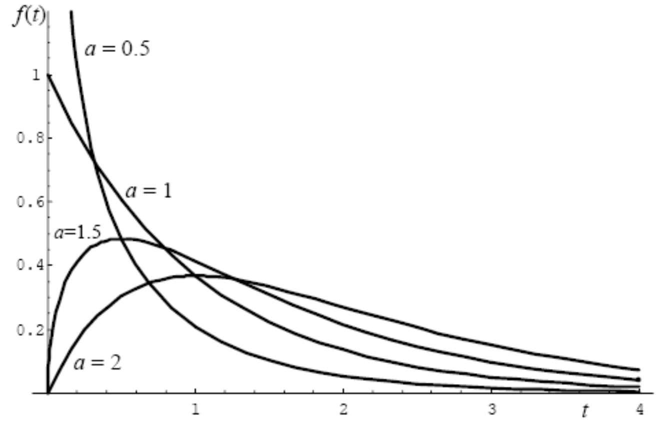
απ' όπου εύκολα προκύπτει ότι, (T ~ Γάμμα(λ,α))

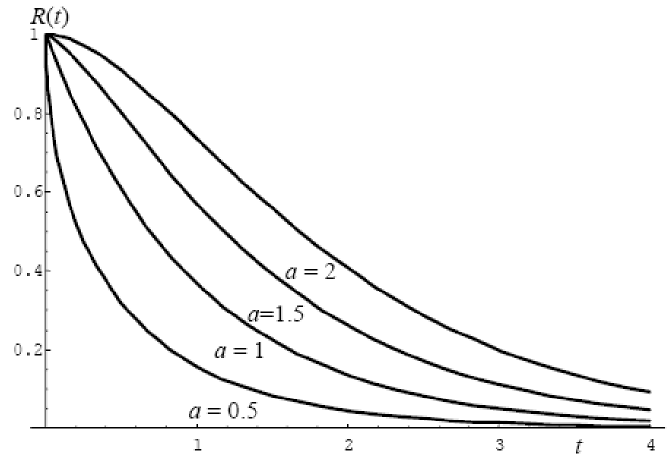
- αν α > 1 τότε T□IFR,
- αν α < 1 τότε T□DFR,
- αν α = 1 τότε η λ(t) είναι σταθερά.

Προφανώς, αν α = 1, τότε η Γάμμα (λ, α) συμπίπτει με την εκθετική (λ). Για λ=1, τα γραφήματα των f, λ και R θα έχουν τη μορφή :



Από το γράφημα παρατηρούμε ότι αν α > 1 τότε ο ρυθμός αποτυχίας είναι αύξουσα συνάρτηση , αν α < 1 τότε ο ρυθμός αποτυχίας είναι φθίνουσα συνάρτηση και για α = 1 είναι σταθερή.





Η συνάρτηση αξιοπιστίας είναι φθίνουσα για κάθε τιμή του α για το πόσο γρήγορα φθίνει εξετάζουμε το γράφημα του ρυθμού αποτυχίας.

Αν α∈{1,2,...}, η κατανομή Γάμμα (λ, α) είναι η κατανομή του αθροίσματος των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $S_a = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_a$, όπου Y_i ~ Εκθετική (λ) (διότι σε αυτή την περίπτωση η Γάμμα συμπίπτει με την Erlang) και επομένως η Γάμμα (λ,α), α∈{1,2,...}, θα έχει μέση τιμή και διασπορά : $E(S_a) = E(\sum_{i=1}^{a} Y_i) = \sum_{i=1}^{a} E(Y_i) = \frac{a}{l}$

$$V(S_a) = V(\sum_{i=1}^{a} Y_i) = \sum_{i=1}^{a} V(Y_i) = \frac{a}{l^2}$$

Άρα οι ίδιοι τύποι για την μέση τιμή και διασπορά ισχύουν και στην γενικότερη περίπτωση που το α∈(0,∞). Πράγματι, αν T ~ Γάμμα(α,λ) τότε :

$$E(T^r) = \frac{(a+r-1)(a+r-2)\cdot \ldots \cdot a}{l^r}$$

(ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΕΙΡΑ SCHAUM)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ

Στη στατιστική η αξιοπιστία είναι το αποτέλεσμα μιας σειράς μετρήσεων, που συχνά χρησιμοποιείται για να περιγράψει ένα πείραμα. Η αξιοπιστία είναι αντιστρόφως ανάλογη με το λεγόμενο τυχαίο σφάλμα(το σφάλμα το οποίο συμβαίνει κατά τη διάρκεια των μετρήσεων και οφείλεται σε τυχαίους παράγοντες). Μ’ αυτόν τον τρόπο, όσο πιο μικρό είναι το τυχαίο σφάλμα, τόσο πιο αξιόπιστο είναι το σύστημά μας.

Όταν η αξιοπιστία εξετάζεται από την προοπτική του καταναλωτή μιας τεχνολογίας ή μιας υπηρεσίας, τα πραγματικά μέτρα αξιοπιστίας μπορούν να διαφέρουν εντυπωσιακά από την αντιληπτή αξιοπιστία. Μια κακή εμπειρία μπορεί να ενισχυθεί στο μυαλό του πελάτη, που διογκώνει την αντιληπτή αναξιοπιστία του προϊόντος, για παράδειγμα σε μια αεροπορική εταιρεία μια συντριβή αεροπλάνου μπορεί να προκαλέσει μείωση των πελατών. Η περίοδος αξιοπιστίας οποιουδήποτε αντικειμένου μετριέται εντός της περιόδου διάρκειας εκείνου του αντικειμένου.

Στις πειραματικές επιστήμες, η αξιοπιστία είναι η έκταση στην οποία οι μετρήσεις της δοκιμής παραμένουν συνεπείς σε επαναλαμβανόμενες δοκιμές επί του ιδίου θέματος υπό τις ίδιες συνθήκες

Στη μηχανική, η αξιοπιστία είναι η ικανότητα ενός συστήματος ή κατασκευαστικού στοιχείου να ικανοποιεί όλες τις λειτουργίες που απαιτούνται σύμφωνα με τις προϋποθέσεις για μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο, μπορεί συχνά να αναφερθεί και από την άποψη της πιθανότητας. Οι αξιολογήσεις της αξιοπιστίας περιλαμβάνουν τη χρήση πολλών στατιστικών εργαλείων.

Η θεωρία αξιοπιστίας αποτελείται από ένα σύνολο ιδεών, μοντέλων, και μεθόδων που έχουν ως σκοπό την επίλυση προβλημάτων που σχετίζονται με τον υπολογισμό, την εκτίμηση, την βελτιστοποίηση της πιθανότητας λειτουργίας ή της αναμενόμενης ζωής ή γενικότερα της κατανομής της διάρκειας ζωής μίας μονάδας ή ενός συστήματος μονάδων. Ο όρος «αξιοπιστία» αναφέρεται στην ικανότητα ενός μηχανισμού (μιας μονάδας ή ενός συστήματος) να λειτουργεί χωρίς αποτυχία για ένα συγκεκριμένο χρόνο.

<u>Ορισμός 2.1:</u> Λειτουργία (χωρίς αποτυχία) μίας μονάδας καλείται η διατήρηση των χαρακτηριστικών της μέσα σε καθορισμένα όρια και κάτω από δεδομένες συνθήκες.

<u>Ορισμός 2.2:</u> Αποτυχία μίας μονάδας ή ενός συστήματος καλείται το ενδεχόμενο μετά την εμφάνιση του οποίου ορισμένα χαρακτηριστικά της μονάδας υπερβαίνουν τα επιτρεπόμενα προκαθορισμένα όρια.

Οι μονάδες ή τα συστήματα χωρίζονται σε: μη ανανεώσιμα ,αν μετά από μία αποτυχία αχρηστεύονται και δεν μπορούν να λειτουργήσουν ξανά και ανανεώσιμα, αν μετά από μία αποτυχία μπορούν να λειτουργήσουν ξανά π.χ. κατόπιν επισκευής ή αντικατάστασης.

Μερικά παραδείγματα αποτυχιών μονάδων ή συστημάτων μονάδων είναι:

- Η διακοπή της λειτουργίας («κάψιμο») ενός ηλεκτρικού λαμπτήρα ή μιας οθόνης ή γενικότερα μιας ηλεκτρικής συσκευής.

- Η θραύση ενός εμβόλου σε μία μηχανή.

- Ο θάνατος ενός έμβιου (π.χ. ανθρώπου).

- Ένα ατύχημα σε έναν πυρηνικό σταθμό παραγωγής ενέργειας.

- Η πτώχευση μιας εταιρίας (π.χ. ασφαλιστικής εταιρίας).

- Η διακοπή μιας παραγωγικής διαδικασίας (π.χ. σε ένα εργοστάσιο) λόγω βλάβης μιας μηχανής κ.ο.κ.

Όπως γίνεται φανερό, τα παραπάνω μοντέλα μπορούν να θεωρηθούν ως στοχαστικά μοντέλα δηλαδή, η «αποτυχία» μιας μονάδας θεωρείται ότι εξαρτάται από τον παράγοντα «τύχη». Στα πλαίσια αυτά, είναι επόμενο ότι για την μελέτη της αξιοπιστίας μονάδων ή συστημάτων θα βασιστούμε στη θεωρία πιθανοτήτων.

Αρχικά , θα αναφερθούμε στη δομή των συστημάτων.

2.1 Δομή συστημάτων

Θεωρούμε ότι, ένα σύστημα αποτελείται από μία δομή που έχει πλήθος μονάδων n. Κάθε μία από τις μονάδες είναι δυνατό να βρίσκεται σε κάποια προκαθορισμένη χρονική στιγμή t που εξετάζουμε το σύστημα σε μία από τις δυο καταστάσεις:

- Αποτυχία, μη λειτουργία (failed, not working component, off mode)

- Επιτυχία, λειτουργία (functioning, working component, on mode)

Για την καλύτερη περιγραφή της κατάστασης της i-μονάδας (i=1,2,...,n) χρησιμοποιούμε μία δείκτρια μεταβλητή (δηλαδή μεταβλητή με τιμές στο σύνολο

{0,1}): $X_i = \begin{cases} 1 \text{ , αν η i-οστή συνιστώσα λειτουργεί} \\ 0 \text{ , αν η i-οστή συνιστώσα δεν λειτουργεί} \end{cases}.$

Η μεταβλητή X_i δηλώνει τη λειτουργία ή μη μιας μονάδας και κατ΄ επέκταση του συστήματος.

Το διάνυσμα $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ καλείται διάνυσμα κατάστασης των μονάδων του συστήματος. Αν π.χ. x = (0,1,1,0,0) τότε η $1^η$, $4^η$, και $5^η$ μονάδα έχουν αποτύχει ενώ η $2^η$ και η $3^η$ λειτουργούν (το συγκεκριμένο διάνυσμα κατάστασης προέρχεται από σύστημα με n = 5 μονάδες). Όμοια, το σύστημα, ανάλογα με το ποιες μονάδες του λειτουργούν και ποιες όχι σύμφωνα με τη δομή του, δύναται και αυτό να βρεθεί σε δύο καταστάσεις: λειτουργία ή μη λειτουργία (αποτυχία). Για την περιγραφή της κατάστασης του συστήματος χρησιμοποιούμε και πάλι μία δείκτρια μεταβλητή:

$$\Phi(X) = \begin{cases} 1, \text{ αν το σύστημα X λειτουργεί} \\ 0, \text{ αν το σύστημα X δε λειτουργεί} \end{cases}$$

Θεωρούμε ότι η κατάσταση του συστήματος καθορίζεται πλήρως από τις καταστάσεις των n μονάδων που το αποτελούν, δηλαδή φ = φ(x) όπου $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ είναι το διάνυσμα κατάστασης των μονάδων του συστήματος.

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την έννοια της δομής ενός συστήματος:

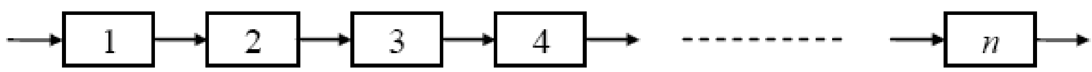
<u>Ορισμός 2.3 :</u> Έστω ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από n το πλήθος μονάδες. Η συνάρτηση $\varphi:\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ η οποία για κάθε διάνυσμα κατάστασης x των μονάδων του συστήματος δίνει την κατάσταση φ(x) του συστήματος, καλείται συνάρτηση δομής του συστήματος. Με άλλα λόγια η συνάρτηση δομής του συστήματος είναι μια συνάρτηση που εκφράζει τη λειτουργία ή αποτυχία ενός συστήματος (μέσω των τιμών 1 και 0) για οποιοδήποτε συνδυασμό λειτουργίας ή μη των επιμέρους μονάδων (συνιστωσών).

Μερικά παραδείγματα συστημάτων είναι τα εξής:

α. <u>Σειριακό σύστημα (SS - Serial System):</u>

Αποτελείται από n μονάδες συνδεδεμένες στη σειρά και αποτυγχάνει όταν τουλάχιστον μία μονάδα από τις n αποτύχει, ή ισοδύναμα λειτουργεί όταν όλες (και οι n) οι μονάδες λειτουργούν. Θεωρείται δηλαδή ότι για να περάσει ένα «σήμα» από αριστερά προς τα δεξιά θα πρέπει να περάσει από όλες τις μονάδες. Συνεπώς, το «σήμα» θα περάσει (δηλ. το σύστημα λειτουργεί, φ=1) όταν όλες οι μονάδες του λειτουργούν ($x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$). Αν κάποιο από τα x_i =0 τότε φ = 0. Επομένως, η συνάρτηση δομής του σειριακού συστήματος μπορεί να γραφεί ως εξής: $\varphi(x) = \min\{x_1, x_2, ..., x_n\} = \prod_{i=1}^{n} x_i$.

Πράγματι, είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι η παραπάνω συνάρτηση είναι ίση με 1 αν και μόνο αν όλα τα x_i είναι ίσα με 1.

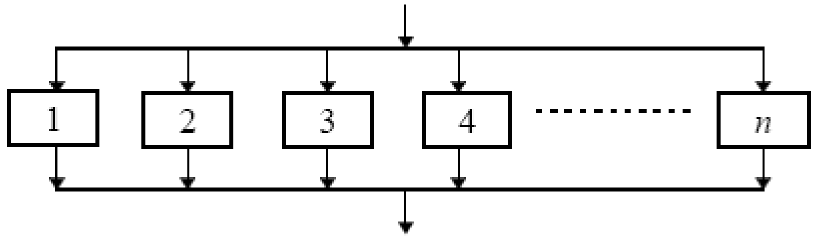


<u>Σχήμα 1: Σειριακό σύστημα</u>

(www.unipi.gr/faculty/mbouts/reliab/Reliability_Ch1(2008).pdf)

β. <u>Παράλληλο σύστημα (PS - Parallel system):</u>

Αποτελείται από n μονάδες και αποτυγχάνει όταν όλες οι μονάδες του αποτύχουν, ή ισοδύναμα λειτουργεί όταν τουλάχιστο μία μονάδα του λειτουργεί. Ένα «σήμα» μπορεί να περάσει από τα πάνω προς τα κάτω αν τουλάχιστον μία από τις μονάδες λειτουργεί και άρα φ=1 αν τουλάχιστον ένα x_i είναι 1. Επομένως, η συνάρτηση δομής του παράλληλου συστήματος μπορεί να γραφεί ως εξής: $\varphi(x) = \max\{x_1, x_2, ..., x_n\} = 1 - \prod_{i=1}^{n} x_i$



<u>Σχήμα 2: Παράλληλο σύστημα</u>

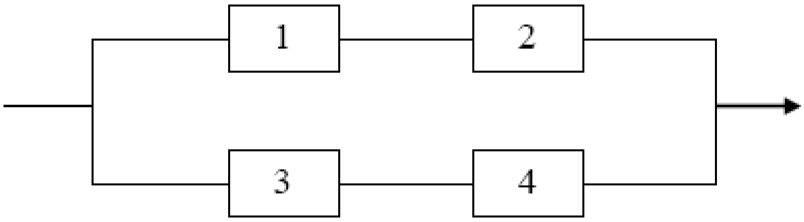
www.unipi.gr/faculty/mbouts/reliab/Reliability_Ch1(2008).pdf

γ. <u>Σύστημα k-από-τα-n:G (S(n,k):G, k-out-of-n:Good):</u>

Αποτελείται από n μονάδες και λειτουργεί όταν λειτουργούν τουλάχιστον k μονάδες από τις n. Επομένως, η συνάρτηση δομής του θα είναι: $\varphi(x) = \begin{cases} 1, \text{ αν} \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \\ 0, \text{ αν} \sum_{i=1}^{n} x_i < \kappa \end{cases}$ η οποία είναι ισοδύναμη και με τη φ(x) = x(k) (όπου x(1), x(2),... , x(n) είναι αντίστοιχα η μεγαλύτερη, η δεύτερη μεγαλύτερη, ..., η μικρότερη από τις x_1, x_2, ...,x_n). Για k = 1 και για k = n προκύπτει το παράλληλο και το σειριακό σύστημα αντίστοιχα.

δ. <u>Παράλληλο - Σειριακό σύστημα 4 μονάδων:</u>

Στο σύστημα αυτό έχουμε δύο σειριακά «υποσυστήματα» (αυτό που αποτελείται από τις μονάδες 1,2 και αυτό που αποτελείται από τις 3,4) τα οποία είναι συνδεδεμένα παράλληλα μεταξύ τους. Όμοια με παραπάνω, το σύστημα αυτό θεωρείται ότι λειτουργεί όταν μπορεί να περάσει ένα «σήμα» από τα αριστερά προς τα δεξιά. Ανάλογα μπορεί να οριστεί και το σειριακό – παράλληλο σύστημα.

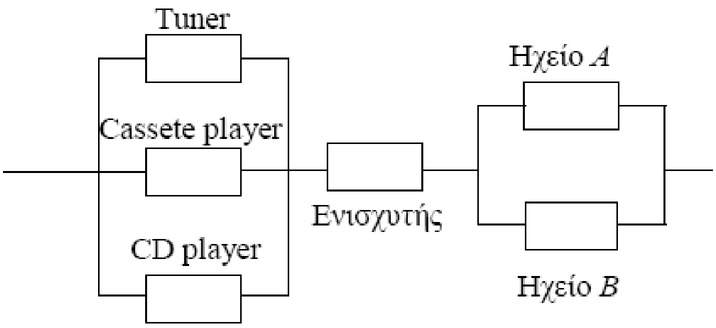


Σχήμα 3: Παράλληλο – Σειριακό σύστημα 4 μονάδων

(www.unipi.gr/faculty/mbouts/reliab/Reliability_Ch1(2008).pdf)

ε. Στερεοφωνικό συγκρότημα:

Ένα απλό παράδειγμα συστήματος συνδεσμολογίας ενός στερεοφωνικού συγκροτήματος είναι:



Σχήμα 4: Στερεοφωνικό συγκρότημα

Εδώ, π.χ. μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύστημα λειτουργεί αν μπορεί να παραχθεί ήχος (π.χ. CD player + Ενισχυτής + Ηχείο A)

(www.unipi.gr/faculty/mbouts/reliab/Reliability_Ch1(2008).pdf)

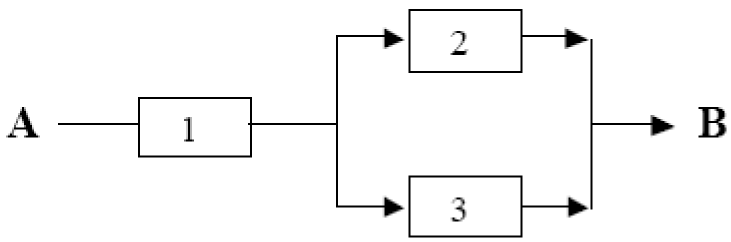
2.2 Αξιοπιστία συστημάτων ανεξάρτητων μονάδων:

Όπως συμβαίνει στις περισσότερες εφαρμογές, οι καταστάσεις των μονάδων του συστήματος π.χ. σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή t στο μέλλον, δεν είναι γνωστές. Συνήθως, η μόνη διαθέσιμη πληροφορία είναι οι πιθανότητες λειτουργίας τους. Στη συνέχεια θα υποθέτουμε λοιπόν ότι οι καταστάσεις κάθε μονάδας του συστήματος που μελετάμε, είναι τυχαίες μεταβλητές με τιμές 0, 1 (λειτουργία – αποτυχία). Εκείνο που μας ενδιαφέρει τώρα είναι η μελέτη της πιθανότητας λειτουργίας του συστήματος, η οποία ονομάζεται αξιοπιστία R (reliability) του συστήματος. Αντίστοιχα, η πιθανότητα λειτουργίας της i-μονάδας του συστήματος, ονομάζεται και αξιοπιστία της i-μονάδας και θα συμβολίζεται με p_i (i=1,2,...,n). Στόχος μας λοιπόν είναι να εκφράσουμε την αξιοπιστία R του συστήματος, η οποία προφανώς εξαρτάται από τη δομή του συστήματος (αν π.χ. αυτό είναι σειριακό), συναρτήσει των πιθανοτήτων p_i, i=1,2,...,n, δηλαδή να βρούμε τον τύπο της συνάρτησης: $R=R(p_1, p_2, ..., p_n)$ (παράλληλο, γέφυρα, κ.ο.κ)

Η πιθανότητα λειτουργίας p_i της i-μονάδας του συστήματος (δηλαδή η αξιοπιστία της i-μονάδας) θα είναι ίση με $p_i = P(X_i = 1)$ ενώ $q_i = P(X_i = 0) = 1 - p_i$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι για μία δείκτρια τ.μ. X (δηλ. με τιμές στο {0,1}) ισχύει ότι : $E(X) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) = P(X = 1)$. Έχουμε: $p_i = P(X_i = 1) = E(X_i)$

Στη συνέχεια, οι μονάδες του συστήματος θα θεωρούνται ανεξάρτητες, δηλαδή οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, ..., X_n$ θεωρούνται στοχαστικά ανεξάρτητες. Στην περίπτωση που ισχύει $p_i = p$, i = 1, 2, ..., n θα λέμε ότι έχουμε ένα σύστημα με iid μονάδες (ανεξάρτητες και διακριτές κατανομές). Στο εξής θα εννοείται, χωρίς πάντα αυτό να αναφέρεται, ότι το σύστημα των n μονάδων εξετάζεται σε μία δεδομένη χρονική στιγμή t. Το σύστημα λοιπόν (τη χρονική στιγμή t) θα βρίσκεται είτε σε κατάσταση λειτουργίας είτε σε κατάσταση μη λειτουργίας, ανάλογα με το ποιες μονάδες του λειτουργούν και ποιες όχι. Συνεπώς, η αξιοπιστία R του συστήματος (τη χρονική στιγμή t) θα είναι ίση με : $R = P(\varphi(X) = 1) = E(\varphi(X))$. Αντίθετα, αναξιοπιστία του συστήματος θα καλείται η πιθανότητα αποτυχίας του $F = 1 - R$.

Για παράδειγμα , αν έχουμε το σύστημα του οποίου η δομή καθορίζεται από το σχήμα :



Σχήμα 5 *(www.unipi.gr/faculty/mbouts/reliab/Reliability_Ch1(2008).pdf)*

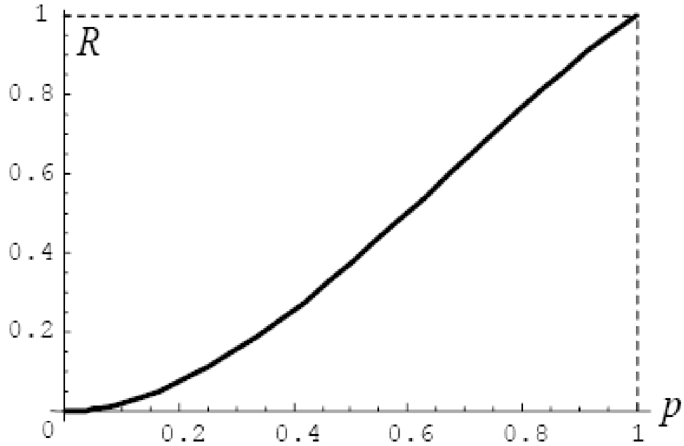
του οποίου η συνάρτηση δομής είναι :
$\varphi(x) = 1 - (1 - x_1x_2)(1 - x_1x_3) = x_1x_3 + x_1x_2 - x_1x_2x_3$
Οπότε , η αξιοπιστία θα δίνεται από τη μέση τιμή της συνάρτησης δομής :

$$\begin{aligned} R = E(\varphi(X)) &= E(X_1X_3 + X_1X_2 - X_1X_2X_3) = E(X_1X_3) + E(X_1X_2) - E(X_1X_2X_3) = \\ &= E(X_1)E(X_3) + E(X_1)E(X_2) - E(X_1)E(X_2)E(X_3) = \\ &= p_1p_3 + p_1p_2 - p_1p_2p_3 \end{aligned}$$

Στην iid περίπτωση, όπου $p_i = p$ έχουμε:

$R = p \cdot p + p \cdot p - p \cdot p \cdot p = p^2 + p^2 - p^3 = 2p^2 - p^3$ και η αναξιοπιστία είναι : $F = 1 - R = 1 - (2p^2 - p^3) = 1 - 2p^2 + p^3$

Η γραφική παράσταση της αξιοπιστίας είναι:



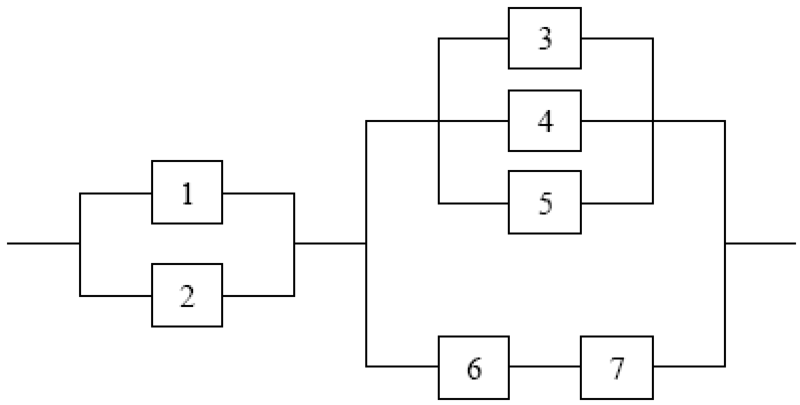
Σχήμα 6 *(www.unipi.gr/faculty/mbouts/reliab/Reliability_Ch1(2008).pdf)*

2.2.1 Διάσπαση σε υποσυστήματα:

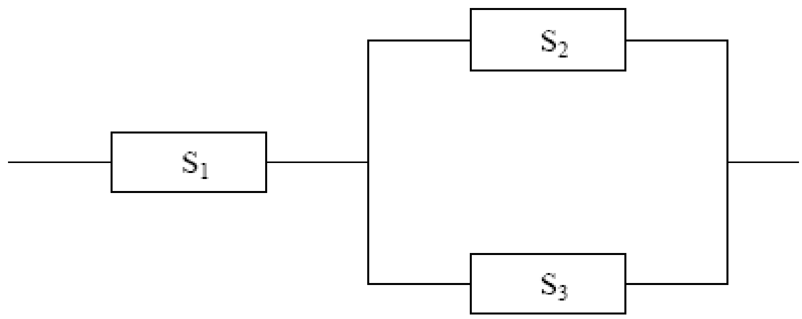
Σε μερικές περιπτώσεις συστημάτων, η συνάρτηση δομής είναι ευκολότερο να υπολογιστεί όταν το σύστημα μπορεί να χωριστεί σε μικρότερα υποσυστήματα (τα οποία ονομάζονται και modules) το καθένα από τα οποία αποτελείται από διαφορετικές μονάδες. Στις περιπτώσεις αυτές, αρχικά υπολογίζεται η συνάρτηση δομής των υποσυστημάτων, και στη συνέχεια θεωρώντας τα υποσυστήματα ως μονάδες υπολογίζεται η συνάρτηση δομής του αρχικού συστήματος. Δεν αποκλείεται η περίπτωση, όπου για την καλύτερη μελέτη ενός συστήματος, γίνεται περαιτέρω διάσπαση των modules σε μικρότερα modules κ.ο.κ.

Ο τρόπος αυτός μελέτης ενός συστήματος (όποτε είναι δυνατός), απαιτεί λιγότερους υπολογισμούς ιδιαίτερα π.χ. σε συστήματα που αποτελούνται από πολλά όμοια υποσυστήματα. Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένα ενδεικτικό παράδειγμα εφαρμογής αυτής της ιδέας:

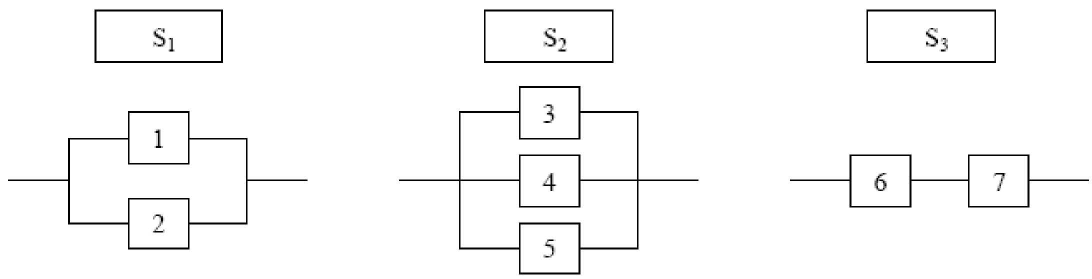
Έστω το παράδειγμα του οποίου η δομή καθορίζεται από το επόμενο σχήμα :



Το σύστημα αυτό μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από τρία υποσυστήματα S_1, S_2, S_3 συνδεδεμένα ως εξής :



Όπου τα S_1, S_2, S_3 είναι τα εξής :



με αντίστοιχες συναρτήσεις δομής (το S_1 είναι το παράλληλο σύστημα των μονάδων 1,2, το S_2 είναι το παράλληλο σύστημα των μονάδων 3,4,5, και το S_3 είναι το σειριακό σύστημα των μονάδων 6,7) :

$\varphi_1(x_1, x_2) = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2) = x_1 + x_2 - x_1 x_2$
$\varphi_2(x_3, x_4, x_5) = 1 - (1 - x_3)(1 - x_4)(1 - x_5) = x_2 + x_3 + x_5 - x_2 x_3 - x_2 x_5 - x_3 x_5 + x_2 x_3 x_5$ Η
$\varphi_3(x_6, x_7) = x_6 x_7$
συνάρτηση δομής του συστήματος που αποτελείται από τις μονάδες – υποσυστήματα S_1, S_2, S_3 είναι : $\Phi = \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3 - \varphi_1\varphi_2\varphi_3$.Οι αντίστοιχες αξιοπιστίες είναι :

$$R_1 = E(\varphi_1) = p_1 + p_2 - p_1p_2$$
$$R_2 = E(\varphi_2) = p_2 + p_3 + p_5 - p_2p_3 - p_2p_5 - p_3p_5 + p_2p_3p_5$$
$$R_3 = E(\varphi_3) = p_6p_7$$

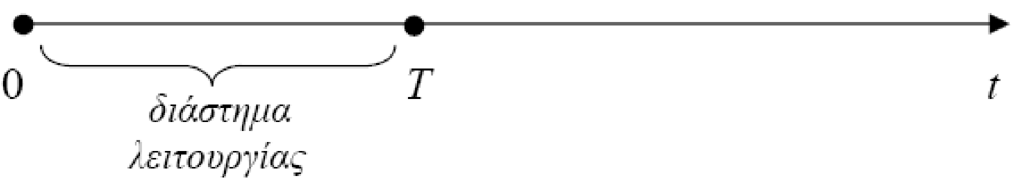
και η αξιοπιστία του συστήματος θα είναι: $R = R_1R_2 + R_1R_3 - R_1R_2R_3$. Βέβαια, αν βρισκόμαστε στην iid περίπτωση όπου $p_i = p$, οι αξιοπιστίες του συστήματος θα είναι : $R_1 = 2p - p^2$, $R_2 = 3\rho - 3\rho^2 + p^3$, $R_3 = p^2$.

2.3 Αξιοπιστία μονάδων - συστημάτων στο χρόνο

Στην προηγούμενη ενότητα εξετάσαμε την αξιοπιστία μονάδων ή συστημάτων στατικά, δηλαδή υποθέταμε ότι η μελέτη γίνονταν πάντα σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t. Μεγαλύτερο ίσως ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη της συμπεριφοράς μίας μονάδας ή ενός συστήματος στη διάρκεια του χρόνου . Στην ενότητα αυτή λοιπόν θα εξετάσουμε την δυναμική συμπεριφορά μιας μονάδας ή ενός συστήματος.

2.3.1 Αξιοπιστία συστημάτων στο χρόνο.

Θεωρούμε ότι κάθε μονάδα (ή σύστημα) έχει έναν χρόνο ζωής T ο οποίος δεν μπορεί να είναι γνωστός εκ των προτέρων και για αυτό θεωρείται ως μια τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0,\infty)$. Θεωρούμε λοιπόν ότι μία μονάδα ξεκινά να λειτουργεί στο χρόνο 0 και παραμένει στην κατάσταση λειτουργίας μέχρι και τον τυχαίο χρόνο T. Μετά από τη στιγμή αυτή θα θεωρούμε ότι η μονάδα παραμένει σε κατάσταση αποτυχίας, δηλαδή σταματάει να λειτουργεί (σε αυτή την περίπτωση λέγεται ότι έχουμε μη ανανεώσιμες μονάδες):



Αν εξετάσουμε την μονάδα αυτή σε συγκεκριμένο χρόνο t, τότε είτε αυτή θα λειτουργεί (αν $T \geq t$: η χρονική στιγμή t βρίσκεται στο διάστημα λειτουργίας) είτε θα έχει αποτύχει (αν $T < t$: η χρονική στιγμή t βρίσκεται στο διάστημα αποτυχίας). Επομένως, η αξιοπιστία R(t) της μονάδας αυτής στο χρόνο t θα πρέπει να είναι :

$R(t) = P($να λειτουργεί στο χρόνο $t) = P(T \geq t), t \geq 0$.

Είναι φανερό ότι ως χρόνο ζωής T μιας μονάδας θα πρέπει να θεωρήσουμε μια μη-αρνητική ($T \geq 0$) τυχαία μεταβλητή (διακριτή ή συνηθέστερα συνεχή). Όταν ο χρόνος ζωής της μονάδας είναι συνεχής, δηλαδή η T είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή, τότε είναι γνωστό ότι $P(T \geq t) = P(T > t)$ για κάθε $t \geq 0$. Επειδή στο εξής θα επικεντρωθούμε σε συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, για ευκολία θα θεωρούμε ότι: $R(t) = P(T > t), t \geq 0$.

Ανάλογα ορίζεται και η αναξιοπιστία μιας μονάδας:

$F(t)$ = P(να μην λειτουργεί στο χρόνο t) $= P(T \leq t) = 1 - R(t), t \geq 0$ δηλαδή η αναξιοπιστία της μονάδας σε χρόνο t θα είναι ίση με την συνάρτηση κατανομής του χρόνου ζωής της στο χρόνο t. Η αξιοπιστία $R(t) = 1 - F(t)$ μερικές φορές συμβολίζεται και με $\bar{F}(t)$.

Αν θεωρήσουμε ένα σύστημα n μονάδων και έστω T_i ο χρόνος ζωής της i μονάδας με συνάρτηση κατανομής F_i και T_s ο χρόνος ζωής του συστήματος με συνάρτηση κατανομής F_s. Οι αξιοπιστίες των μονάδων στο χρόνο t

θα είναι : $R_i(t) = P(T_i > t) = 1 - F_i(t) \quad , i = 1,2,...,n$

Οι αξιοπιστίες $R_i(t)$ των μονάδων μερικές φορές θα συμβολίζονται και με $p_i(t)$. Αντίστοιχα, η αξιοπιστία του συστήματος θα είναι: $R_s(t) = P(T_s > t) = 1 - F_s(t)$

Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, οι n μονάδες του συστήματος θεωρούνται ανεξάρτητες και επομένως οι χρόνοι ζωής τους $T_1, T_2, ..., T_n$ θα θεωρούνται στοχαστικά ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Βέβαια, η αξιοπιστία R_s ενός συστήματος είναι συνάρτηση των αξιοπιστιών $p_1, p_2, ..., p_n$ των μονάδων από τις οποίες αποτελείται. Δηλαδή, $R_s = R_s(p_1, p_2, ..., p_n)$ και η συνάρτηση αυτή καθορίζεται από τη δομή του συστήματος. Αν τώρα το σύστημα μελετάται στο χρόνο t, τότε $p_i = p_i(t) = R_i(t)$ και επομένως η αξιοπιστία του στο χρόνο αυτό θα δίνεται από τον τύπο: $R_s(t) = R_s(p_1(t), p_2(t), ..., p_n(t))$ ή $R_s(t) = R_s(R_1(t), R_2(t), ..., R_n(t))$

Παράδειγμα 2.3.1 :

Στο σειριακό σύστημα , η αξιοπιστία n μονάδων είναι ίση με $R_s = R_s(p_1, p_2, ..., p_n) = p_1 \cdot p_2 \cdot ... p_n$ και επομένως, συμπεριλαμβάνοντας και το χρόνο t, αυτή θα είναι $R_s(t) = P(T_s > t) = R_s(R_1(t), R_2(t), ..., R_n(t)) = R_1(t) R_2(t) \cdots R_n(t)$ όπου $R_i(t) = P(T_i > t)$ και $F_s(t) = P(T_s \leq t) = 1 - R_s(t) = 1 - (1 - F_1(t))(1 - F_2(t))...(1 - F_n(t))$

Προφανώς, $R_s(t) = R_1(t) R_2(t) ... R_n(t) \leq R_i(t), i = 1, 2, ..., n$, δηλαδή η αξιοπιστία είναι μικρότερη ή ίση από την αξιοπιστία οποιασδήποτε από τις μονάδες του. Επίσης παρατηρούμε ότι, όσο περισσότερες μονάδες βρίσκονται συνδεδεμένες σε σειρά, τόσο μικρότερη είναι και η αξιοπιστία του συστήματος αφού για να λειτουργήσει το σύστημα πρέπει να λειτουργούν όλες οι μονάδες. Στην iid περίπτωση θα είναι: $R_s(t) = [R(t)]^n$ και $F_s(t) = 1 - [1 - F(t)]^n$.

Παρατηρούμε ότι ο χρόνος ζωής ενός σειριακού συστήματος είναι ίσος με τον μικρότερο από τους χρόνους ζωής των μονάδων του (το σύστημα ξεκινά με n μονάδες σε λειτουργία και αποτυγχάνει μόλις αποτύχει η πρώτη από τις μονάδες).

Παράδειγμα 2.3.2:

Η αξιοπιστία ενός παράλληλου συστήματος n μονάδων είναι : $R_s = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \ldots (1 - p_n)$ και συνεπώς : $R_s(t) = R_s(R_1(t), R_2(t), \ldots, R_n(t)) = 1 - (1 - R_1(t))(1 - R_2(t)) \cdots (1 - R_n(t))$, όπου $R_i(t) = P(T_i > t)$ και : $F_s(t) = P(T_s \le t) = 1 - R_s(t) = F_1(t) F_2(t) \cdots F_n(t)$.

Προφανώς, $R_s(t) \ge 1 - (1 - R_i(t)) = R_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,n$. δηλαδή η αξιοπιστία είναι μεγαλύτερη ή ίση από την αξιοπιστία οποιασδήποτε από τις μονάδες του, αφού το σύστημα λειτουργεί μέχρι να αποτύχει και η τελευταία συνιστώσα. Επίσης παρατηρούμε ότι, όσο περισσότερες μονάδες βρίσκονται συνδεδεμένες παράλληλα, τόσο μεγαλύτερη είναι και η αξιοπιστία του συστήματος. Στην iid περίπτωση ($R_i(t) = R(t)$, $F_i(t) = F(t)$) θα είναι $R_s(t) = 1 - [1 - R(t)]^n$ και $F_s(t) = [F(t)]^n$.

Παρατηρούμε ότι ο χρόνος ζωής ενός παράλληλου συστήματος είναι ίσος με τον μεγαλύτερο από τους χρόνους ζωής των μονάδων του (το σύστημα ξεκινά με n μονάδες σε λειτουργία και αποτυγχάνει μόλις αποτύχει η τελευταία από τις μονάδες).

Βλέπουμε, λοιπόν ότι ένα σύστημα που αποτελείται από μονάδες παράλληλα συνδεδεμένες μεταξύ τους είναι πιο αξιόπιστο από ένα σύστημα με μονάδες συνδεδεμένες στη σειρά.

2.4 Ρυθμός (βαθμίδα) αποτυχίας μονάδος ή συστήματος

Το ποσοστό αποτυχίας είναι η συχνότητα με την οποία ένα σύστημα ή μια συνιστώσα του αποτυγχάνει. Το ποσοστό αποτυχίας ενός συστήματος εξαρτάται συνήθως με το ποσοστό του κύκλου ζωής του. Παραδείγματος χάριν, καθώς ένα αυτοκίνητο γίνεται παλαιότερο, το ποσοστό αποτυχίας στο πέμπτο έτος λειτουργίας του μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερο από το ποσοστό αποτυχίας του κατά τη διάρκεια του πρώτου έτους λειτουργίας του. Στην πράξη, ο χρόνος μεταξύ των αποτυχιών (MTBF, mean time between failure), χρησιμοποιείται συχνά αντί του ποσοστού αποτυχίας. Ο MTBF, είναι μια σημαντική παράμετρος συστημάτων στα συστήματα όπου το ποσοστό αποτυχίας πρέπει να ρυθμιστεί, ειδικότερα για τα συστήματα ασφάλειας. Ο MTBF εμφανίζεται συχνά σε απαιτήσεις σχεδίου εφαρμοσμένης μηχανικής και είναι ο παράγοντας που ρυθμίζει τη συχνότητα των απαραίτητων συντηρήσεων και επιθεώρησης συστημάτων. Στις ειδικές διαδικασίες οι οποίες αποκαλούνται διαδικασίες ανανέωσης, όπου ο χρόνος να ανακτήσει από την αποτυχία μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος και η πιθανότητα της αποτυχίας παραμένει σταθερή όσον αφορά το χρόνο, το ποσοστό αποτυχίας είναι απλά το πολλαπλασιαστικό αντίστροφο του MTBF (1/λ). Τα ποσοστά αποτυχίας και οι προβολικές εκδηλώσεις τους είναι σημαντικοί παράγοντες στην ασφάλεια, την επιχείρηση, και τις πρακτικές κανονισμού καθώς επίσης και θεμελιώδης στο σχέδιο των ασφαλών συστημάτων στη διεθνή οικονομία.

Παραπάνω υποθέσαμε ότι μια μονάδα ξεκινά να λειτουργεί στο χρόνο 0 και κάποια τυχαία χρονική στιγμή αποτυγχάνει. Για να είναι απλούστερη η μελέτη μας, αυτό που καταγράφουμε από την μονάδα είναι μόνο η κατάστασή της (αν λειτουργεί ή όχι). Όπως όμως είναι φυσικό υπάρχουν και πολλά άλλα χαρακτηριστικά που μπορεί να έχει μία μονάδα (ή το περιβάλλον στο οποίο λειτουργεί) και τα οποία είναι δυνατόν να επηρεάζουν την κατάσταση της μονάδας. Για παράδειγμα, μπορεί όσο περνά ο χρόνος τα χαρακτηριστικά αυτά να αλλοιώνονται και η μονάδα φθείρεται με αποτέλεσμα να γίνεται πιθανότερη η αποτυχία της (δεδομένου ότι λειτουργεί) ή και το αντίθετο. Είναι λοιπόν ενδιαφέρον να εξετάσουμε πως μπορούμε να εκφράσουμε ποσοτικά την φθορά αυτή. Αφετηρία για την μελέτη αυτή δίνεται από την παραπάνω παρατήρηση ότι η γήρανση μπορεί να οδηγήσει σε «πιθανότερη αποτυχία της μονάδας (δεδομένου ότι λειτουργεί)». Ξεκινάμε λοιπόν εξετάζοντας την πιθανότητα μία μονάδα που λειτουργεί στο χρόνο t να αποτύχει στο αμέσως επόμενο απειροστό χρονικό διάστημα ,δηλαδή στο (t, t+dt). Αν η συνεχής τυχαία μεταβλητή T με συνάρτηση κατανομής F εκφράζει το χρόνο ζωής της μονάδας, η πιθανότητα αυτή θα είναι:

$$P(T \in (t, t+dt) \setminus T > t) = \frac{P(T \in (t, t+dt), T > t)}{P(T > t)} = \frac{P(t < T < t+dt)}{P(T > t)} =$$

$$\frac{F(t+dt) - F(t)}{P(T > t)} = \frac{F(t+dt) - F(t)}{dt} \frac{dt}{R(t)} = \frac{F'(t)}{R(t)} dt$$

Επομένως βλέπουμε ότι ο δεσμευμένος ρυθμός αποτυχίας της μονάδας στο χρόνο t είναι : F΄(t)/R(t). Δίνουμε μια ιδιαίτερη ονομασία στη ποσότητα αυτή με τον επόμενο ορισμό:

<u>Ορισμός 2.4.1:</u> Έστω μία μη-αρνητική συνεχής τυχαία μεταβλητή T με συνάρτηση κατανομής F= 1−R και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f. Η ποσότητα:

$\lambda(t) = \dfrac{F'(t)}{1 - F(t)} = \dfrac{f(t)}{R(t)}$ για $t \geq 0$ ώστε $R(t) > 0$, καλείται (στιγμιαία) βαθμίδα αποτυχίας ή ένταση αποτυχίας ή ένταση θνησιμότητας (failure rate, intensity of failures, hazard rate, force of mortality). Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f του χρόνου ζωής T μιας μονάδας καλείται και συνάρτηση θνησιμότητας. Επειδή R΄(t) =(1−F(t))΄ = − f(t) θα ισχύει ότι: $\lambda(t) = \dfrac{-R'(t)}{R(t)} = -(\ln R(t))'$ και ολοκληρώνοντας κατά μέλη από α έως β (0 ≤ α< β) θα ισχύει ότι : $\int_a^b l(t)dt = -\int_a^b (\ln R(t))'dt = -(\ln R(b) - \ln R(a)) = -\ln \dfrac{R(b)}{R(a)}$ από όπου προκύπτει ότι : $R(b) = R(a)e^{-\int_a^b l(s)ds}$ και επομένως, αν είναι γνωστή η βαθμίδα αποτυχίας τότε μπορούμε να βρούμε και την συνάρτηση αξιοπιστίας μιας μονάδας από τον τύπο : $R(t) = e^{-\int_0^t l(s)ds}$ (διότι

R(0) = 1). Το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στον παραπάνω εκθέτη συμβολίζεται με Λ(t) και καλείται συνάρτηση κινδύνου (hazard function), δηλαδή : $\Lambda(t) = \int_0^t l(s)ds.$

Η παράγωγος της συνάρτησης κινδύνου θα είναι $\Lambda'(t) = \lambda(t)$, $t \geq 0$. Επομένως, η κατανομή του χρόνου ζωής Τ μιας μονάδας χαρακτηρίζεται από τις ποσότητες F(t) (συνάρτηση κατανομής ή αναξιοπιστία), R(t) (αξιοπιστία ή συνάρτηση επιβίωσης), f(t) (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή συνάρτηση θνησιμότητας), λ(t) (βαθμίδα αποτυχίας), Λ(t) (συνάρτηση κινδύνου). Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι αν κάποια από αυτές είναι γνωστή, τότε είναι και οι υπόλοιπες γνωστές. Μάλιστα οι σχέσεις που συνδέουν τις ποσότητες αυτές ανά δύο δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	$\boldsymbol{F(t)}$	$\boldsymbol{R(t)}$	$\boldsymbol{\lambda(t)}$	$\boldsymbol{f(t)}$	$\boldsymbol{\Lambda(t)}$
$\boldsymbol{F(t)}$		$1-R(t)$	$1-e^{-\int_0^t \lambda(s)ds}$	$\int_0^t f(s)ds$	$1-e^{-\Lambda(t)}$
$\boldsymbol{R(t)}$	$1-F(t)$		$e^{-\int_0^t \lambda(s)ds}$	$\int_t^\infty f(s)ds$	$e^{-\Lambda(t)}$
$\boldsymbol{\lambda(t)}$	$\dfrac{F'(t)}{1-F(t)}$	$-\dfrac{R'(t)}{R(t)}=(-\ln R(t))'$		$\dfrac{f(t)}{\int_t^\infty f(s)ds}$	$\Lambda'(t)$
$\boldsymbol{f(t)}$	$F'(t)$	$-R'(t)$	$\lambda(t)e^{-\int_0^t \lambda(s)ds}$		$\Lambda'(t)e^{-\Lambda(t)}$
$\boldsymbol{\Lambda(t)}$	$-\ln(1-F(t))$	$-\ln R(t)$	$\int_0^t \lambda(s)ds$	$-\ln\int_t^\infty f(s)ds$	

Πίνακας 2.4.1 (www.unipi.gr/faculty/mbouts/reliab/Reliability_Ch2(2008).pdf)

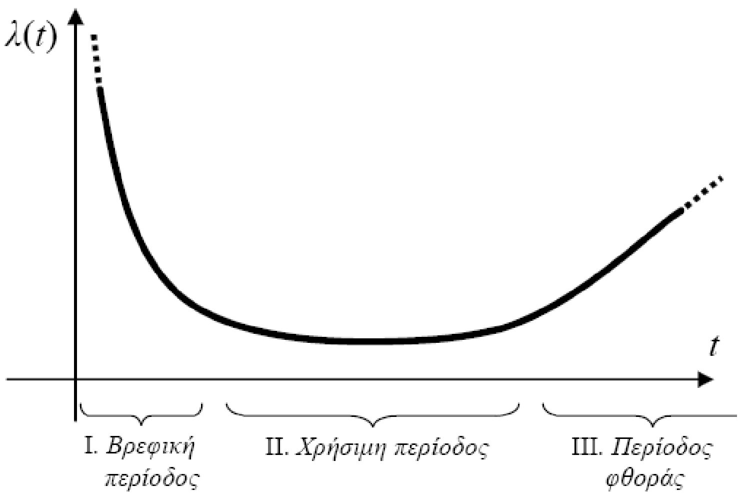
Είναι προφανές ότι όσα παραπάνω αναφέρονται σε μία μονάδα (βαθμίδα αποτυχία μονάδας κ.ο.κ) μπορούν να αφορούν και ένα ολόκληρο σύστημα (εξάλλου, μία μονάδα μπορεί σε ορισμένες περιπτώσεις να αποτελεί και αυτή ένα μικρότερο σύστημα). Η έννοια της βαθμίδας αποτυχίας εισήχθη για την μελέτη της «φθοράς» μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) με χρόνο ζωής Τ. Αν λ(t) είναι η βαθμίδα αποτυχίας που αντιστοιχεί στην κατανομή του χρόνου ζωής Τ, η ποσότητα λ(t) ∈ h είναι ίση με την πιθανότητα να αποτύχει η μονάδα στο διάστημα (t, t+h) δεδομένου ότι λειτουργεί στο χρόνο t (για h μικρό). Επομένως είναι φανερό ότι όταν το λ(t) αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου, τότε και η πιθανότητα αυτή αυξάνεται. Πιο περιγραφικά μπορούμε να πούμε ότι όταν η λ(t) είναι αύξουσα, η μονάδα φθείρεται με την πάροδο του χρόνου διότι όσο περνά ο χρόνος αυξάνεται η πιθανότητα να αποτύχει (λόγω π.χ. αλλοίωσης των χαρακτηριστικών της) δεδομένου ότι λειτουργεί. Το αντίθετο συμβαίνει όταν η λ(t) είναι φθίνουσα. Σε αυτή την δεύτερη περίπτωση, η δεσμευμένη πιθανότητα αποτυχίας της μειώνεται και επομένως η μονάδα κατά κάποιο τρόπο λειτουργεί καλύτερα όσο περνά ο χρόνος. Επομένως έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Όταν η λ(t) είναι αύξουσα (δηλ. η μονάδα φθείρεται με την πάροδο του χρόνου) θα λέγεται ότι ο χρόνος ζωής Τ έχει την ιδιότητα IFR (Increasing Failure Rate) (συμβολίζουμε Τ ∈ IFR).

- Όταν η λ(t) είναι φθίνουσα (δηλ. η μονάδα λειτουργεί ομαλότερα όσο περνά ο χρόνος) θα λέγεται ότι ο χρόνος ζωής T έχει την ιδιότητα DFR (Decreasing Failure Rate) (συμβολίζουμε $T \in$ DFR).

Υπάρχουν φυσικά περιπτώσεις όπου η βαθμίδα αποτυχίας δεν είναι ούτε αύξουσα ούτε φθίνουσα σε όλο το πεδίο τιμών της τυχαίας μεταβλητής T.

Μία αρκετά συνήθης τέτοια περίπτωση είναι η λ(t) να έχει την μορφή:



<u>Σχήμα 7</u> *<u>(www.unipi.gr/faculty/mbouts/reliab/Reliabillity_Ch2(2008).pdf)</u>*

1. Η πρώτη περίοδος καλείται πρώιμη ή βρεφική περίοδος (early life period). Σε αυτή την χρονική περίοδο η μονάδα ξεκινά με μεγάλη βαθμίδα αποτυχίας η οποία μειώνεται (όσο περνά ο χρόνος, η μονάδα λειτουργεί καλύτερα). Η αρχικά αυξημένη βαθμίδα αποτυχίας εδώ μπορεί να οφείλεται σε αδυναμίες σχεδίασης ή κατασκευής των μονάδων.

2. Αν η μονάδα έχει καταφέρει να επιζήσει στην επίφοβη βρεφική περίοδο, στην συνέχεια ακολουθεί η λεγόμενη χρήσιμη περίοδο (useful period) ζωής. Σε αυτή την χρονική περίοδο η βαθμίδα αποτυχίας παραμένει περίπου σταθερή και σχετικά χαμηλή (η κατάσταση της μονάδας παραμένει σταθερή). Εάν η μονάδα αποτύχει σε αυτή την περίοδο λέμε ότι υπέστη μία τυχαία ή καταστροφική αποτυχία.

3. Εάν περάσει τις δύο προηγούμενες περιόδους, η μονάδα εισέρχεται στην λεγόμενη περίοδο φθοράς (wear-out period). Η βαθμίδα αποτυχίας εδώ αυξάνεται συνεχώς όσο περνά ο χρόνος. Οι αποτυχίες σε αυτό το διάστημα συμβαίνουν λόγω φθοράς – γήρανσης της μονάδας.

Η παραπάνω μορφή της βαθμίδας αποτυχίας καλείται Bathtub curve («λεκανοειδής» καμπύλη). Η μορφή αυτή εμφανίζεται αρκετά συχνά κατά την μελέτη χρόνων ζωής μονάδων. Μάλιστα μπορεί να θεωρηθεί ότι περιλαμβάνει και την περίπτωση όπου η τυχαία μεταβλητή T εκφράζει το χρόνο ζωής ενός ανθρώπου ή γενικότερα ενός έμβιου όντος. Μία απλή αλλά σημαντική περίπτωση αποτελεί η σταθερή βαθμίδα αποτυχίας στο $[0,\infty)$, δηλαδή, $\lambda(t) = \lambda > 0$, $t \geq 0$. Όταν συμβαίνει αυτό, ο χρόνος ζωής μπορεί τετριμμένα να θεωρηθεί IFR και DFR ταυτόχρονα (διότι η σταθερή συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί και αύξουσα και φθίνουσα). Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να πούμε ότι η μονάδα παραμένει «αγέραστη» (άφθαρτη) διότι όσο και αν περνά ο χρόνος, η πιθανότητα να αποτύχει (δεδομένου ότι λειτουργεί) παραμένει σταθερή. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει καθόλου ότι η μονάδα είναι «αθάνατη» (αυτό θα συνέβαινε μόνο στην ιδιάζουσα περίπτωση που λ(t) = 0).

Π.χ. το να παραμένει κάποιος για πάντα «νέος» δεν σημαίνει ότι είναι και αθάνατος. Αξίζει λοιπόν να δούμε ποια είναι η κατανομή του χρόνου ζωής Τ που έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας. Αν λ(t)=λ, η αξιοπιστία της μονάδας θα είναι ίση με : $R(t) = e^{-\int_0^t l(s)ds} = e^{-\int_0^t l\,ds} = e^{-lt}$ και επομένως η τυχαία μεταβλητή Τ θα έχει συνάρτηση κατανομής : F(t) =1− R(t) =1 - $e^{-\lambda t}$, t ≥ 0.

Με άλλα λόγια, ο χρόνος ζωής Τ ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Υπενθυμίζεται ότι η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα είναι f(t) = λ$e^{-\lambda t}$,t ≥ 0. Άρα δείξαμε ότι ο χρόνος ζωής μιας «αγέραστης» μονάδας (με λ(t) = λ, t ≥ 0) ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Αντίστροφα, αν μία μονάδα έχει χρόνο ζωής που ακολουθεί εκθετική κατανομή, τότε η μονάδα αυτή μπορεί να θεωρηθεί «αγέραστη» δηλαδή η πιθανότητα αποτυχίας της (δεδομένου ότι λειτουργεί) παραμένει σταθερή όσος χρόνος και αν έχει περάσει από την έναρξη λειτουργίας της. Η εκθετική κατανομή τετριμμένα είναι IFR και DFR ταυτόχρονα (ακριβέστερα, ένας χρόνος ζωής Τ που ακολουθεί την εκθετική κατανομή είναι και IFR και DFR).

Παράδειγμα 2.4.1 (η κατανομή Weibull):

Είδαμε λοιπόν ότι αν ένας χρόνος ζωής Τ έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας, θα ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε την κατανομή του χρόνου ζωής Τ όταν η βαθμίδα αποτυχίας είναι της γενικότερης μορφής: $l(t) = c \cdot t^b$, $t \geq 0$. Αν υπάρχει μονάδα με τέτοια βαθμίδα αποτυχίας, θα έχει αξιοπιστία της μορφής: $R(t) = e^{(-\int_0^t l(s)ds)} = e^{(-\int_0^t cs^b ds)} = e^{(-\frac{ct^{b+1}}{b+1})}, t \geq 0$ και συνάρτηση κατανομής της μορφής: $F(t) = 1 - R(t) = 1 - \exp(-\frac{ct^{b+1}}{b+1})$. Η συνάρτηση αυτή μπορεί πράγματι να θεωρηθεί συνάρτηση κατανομής χρόνου ζωής όταν είναι c> 0 και b > −1 (ώστε F: αύξουσα με F(0) = 0 (η αρχική τιμή είναι 0), F(∞) = 1 (όσο κι αν αυξάνει ο χρόνος η τιμή θα είναι 1). Η συγκεκριμένη κατανομή, η οποία είναι γνωστή ως κατανομή Weibull, είναι αρκετά σημαντική στην θεωρία αξιοπιστίας διότι αντιστοιχεί σε βαθμίδα αποτυχίας με πολύ απλή και γενική μορφή που εμφανίζεται αρκετές φορές στην πράξη. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι όταν b > 0 τότε η Τ IFR ενώ όταν −1 < b < 0 τότε : Τ ∈ DFR. Αν b = 0 τότε προκύπτει και πάλι η εκθετική κατανομή η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως υποπερίπτωση της κατανομής Weibull.

Παράδειγμα 2.4.2 (Σειριακό σύστημα):

Έστω λ_1(t), λ_2(t), ..., λ_n(t) και $\lambda_{S(t)}$ οι βαθμίδες αποτυχίας των n μονάδων και του συστήματος αντίστοιχα στο χρόνο t. Η αξιοπιστία ενός σειριακού συστήματος n μονάδων στο χρόνο t θα είναι : $R_s(t) = R_1(t)R_2(t)...R_n(t)$

όπου $R_i(t)$ η αξιοπιστία της i μονάδας. Επομένως :

$$l_s(t) = (-\ln R_s(t))' = (-\ln R_1(t)R_2(t)....R_n(t))' = (-\sum_{i=1}^{n} \ln R_i(t))' = \sum_{i=1}^{n} (-\ln R_i(t))' = \sum_{i=1}^{n} l_i(t)$$

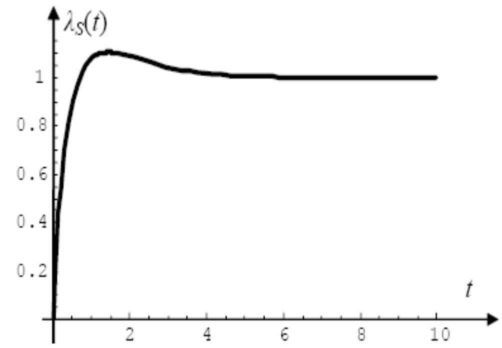
δηλαδή η βαθμίδα αποτυχίας ενός σειριακού συστήματος είναι ίση με το άθροισμα των βαθμίδων αποτυχίας των μονάδων του. Είναι προφανές ότι αν όλες οι μονάδες έχουν IFR χρόνους ζωής T_i □IFR) τότε και το σύστημα έχει IFR χρόνο ζωής, T_s □IFR (αν λ_i(t) αύξουσες τότε και Σλ_i(t) αύξουσα). Ανάλογα, αν οι όλες μονάδες έχουν DFR χρόνους ζωής τότε και το σύστημα έχει DFR χρόνο ζωής. Στην iid περίπτωση (λ_i(t) = λ(t)) θα είναι λS(t) = nλ(t) ενώ η συνάρτηση θνησιμότητας του συστήματος θα είναι: $f_s(t) = -R'_{s)}(t) = -(R(t)^n)' = nR(t)^{n-1} f(t)$ (f είναι η κοινή συνάρτηση θνησιμότητας των μονάδων).Τέλος, αν οι μονάδες είναι «αγέραστες», δηλαδή λ_i(t) = λ_i, η βαθμίδα αποτυχίας του συστήματος είναι: $l_s(t) = \sum_{i=1}^{n} l_i, t \geq 0$ και επομένως και το σύστημα θα έχει την ιδιότητα του «αγέραστου» (με πολύ μεγαλύτερη όμως βαθμίδα αποτυχίας από τις μονάδες). Ο χρόνος ζωής του σειριακού συστήματος θα ακολουθεί και αυτός (όπως και οι μονάδες) εκθετική κατανομή με παράμετρο, το άθροισμα των λ_i.

Παράδειγμα 2.4.3 (παράλληλο σύστημα):

Για ευκολία ας εξετάσουμε ένα παράλληλο σύστημα 2 μονάδων. Η αξιοπιστία και η συνάρτηση θνησιμότητας του συστήματος αυτού θα είναι (R_i είναι η αξιοπιστία της i-μονάδας) $R_s(t) = 1-(1-R_1(t))(1-R_2(t)) = 1-F_1(t)F_2(t)$ και $f_s(t) = -R_s'(t) = (F_1(t)F_2(t)-1)' = f_1(t)F_2(t) + F_1(t)f_2(t)$ αντίστοιχα. Επομένως το σύστημα θα έχει βαθμίδα αποτυχίας: $l_s(t) = \dfrac{f_s(t)}{R_s(t)} = \dfrac{f_1(t)F_2(t) + f_2(t)F_1(t)}{1-F_1(t)F_2(t)}$

Αν π.χ. οι 2 μονάδες είναι «αγέραστες» δηλαδή $\lambda_1(t) = \lambda_1$ και $\lambda_2(t) = \lambda_2$, τότε οι αξιοπιστίες και συναρτήσεις θνησιμότητας των μονάδων θα είναι: $R_i(t) = e^{-l_i t}$, $f_i(t) = l_i e^{-l_i(t)}$ από όπου προκύπτει ότι $l_s(t) = \dfrac{l_1 e^{-l_1 t}(1-e^{-l_2 t}) + l_2 e^{-l_2 t}(1-e^{-l_1 t})}{1-(1-e^{-l_1 t})(1-e^{-l_2 t})}$

Αν π.χ. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ τότε το γράφημα της παραπάνω συνάρτησης θα έχει τη μορφή:



Σχήμα 8 (www.unipi.gr/faculty/mbouts/reliab/Reliability_Ch2(2008).pdf)

η οποία δεν είναι ούτε IFR ούτε DFR. Επομένως, έχουμε μια περίπτωση συστήματος με IFR μονάδες το οποίο δεν έχει την ιδιότητα IFR. Τέλος, ας εξετάσουμε ένα παράλληλο σύστημα με n iid μονάδες. Η αξιοπιστία ενός τέτοιου συστήματος είναι: $R_s(t) = 1-(1-R(t))^n$ και επομένως θα έχει συνάρτηση θνησιμότητας : $f_s(t) = -R'_s(t) = n(1-R(t))^{n-1} f(t)$. Η βαθμίδα αποτυχίας του συστήματος θα είναι : $l_s(t) = \dfrac{f_s(t)}{R_s(t)} = \dfrac{nF(t)^{n-1} f(t)}{1-F(t)^n}$

2.5 Μέσος χρόνος ζωής μονάδας ή συστήματος

Αν T είναι ο χρόνος ζωής μιας μονάδας ή ενός συστήματος, τότε ο μέσος χρόνος ζωής E(T) του θα καλείται μέσος χρόνος μέχρι την αποτυχία της μονάδας και συμβολίζεται και με MTTF (Mean Time To Failure ή to Fail). Η επόμενη πρόταση είναι αρκετά χρήσιμη για τον απευθείας υπολογισμό του μέσου χρόνου ζωής E(T) από την αξιοπιστία R(t) = P(T > t).

Πρόταση 2.5.1:

Έστω T μια μη αρνητική συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f και συνάρτηση αξιοπιστίας R=1−F. Αν g είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με g(0) = 0 και υπάρχει η μέση τιμή E(g(T)), αυτή θα δίνεται από τον τύπο : $E(g(T)) = \int_0^\infty g(t)\, f(t)\, dt$. Από τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι :

Παράδειγμα 2.5.1 :

(Σύστημα αποθήκευσης δεδομένων). Τέλος ας εξετάσουμε και ένα ενδιαφέρον παράδειγμα συστήματος που προέρχεται από μια συγκεκριμένη πρακτική εφαρμογή που αφορά αποθήκευση δεδομένων Η/Υ. Είναι γνωστό ότι τα δεδομένα που χειρίζεται ένας Η/Υ αποθηκεύονται μόνιμα σε ένα σκληρό δίσκο (Hard Disk). Η ταχύτητα όμως ανάγνωσης/εγγραφής από/προς έναν σκληρό δίσκο είναι αρκετά μικρότερη από αυτήν που μπορεί να χειριστεί ο κεντρικός επεξεργαστής του Η/Υ και επίσης η αξιοπιστία ενός μόνο δίσκου πολλές φορές δεν είναι ικανοποιητική. Για τους λόγους αυτούς στην πράξη εφαρμόζονται διάφορες λύσεις που βασίζονται σε περισσότερους από έναν σκληρούς δίσκους που λειτουργούν ταυτόχρονα / παράλληλα.

Η απλούστερη μέθοδος για να επιταχύνουμε την ανάγνωση/εγγραφή είναι να χρησιμοποιήσουμε δύο δίσκους. Χωρίζουμε τα δεδομένα που πρόκειται να αποθηκευτούν (π.χ. δεδομένα Α,Β,Γ, …) σε δύο ίσα μέρη (π.χ. το Α χωρίζεται στα A_1, A_2, το Β στα B_1, B_2 κ.ο.κ.) και εγγράφουμε τα A_1, B_1,… στον 1ο δίσκο, ενώ τα A_2,B_2,…στον 2ο δίσκο. Έτσι επιτυγχάνεται υψηλότερη ταχύτητα εγγραφής/ ανάγνωσης διότι π.χ. τα δεδομένα A_1 και A_2 εγγράφονται/διαβάζονται παράλληλα προς/από τους 2 δίσκους (διότι ο επεξεργαστής επεξεργάζεται δεδομένα πολύ ταχύτερα από ότι οι δίσκοι) και επομένως (θεωρητικά) μπορούμε να επιτύχουμε διπλάσια ταχύτητα. Η διάταξη αυτή καλείται stripping (ή RAID 0). Το προφανές μειονέκτημα (εκτός από το υψηλότερο κόστος αγοράς και χρήσης 2 δίσκων) είναι ότι το σύστημα αποτυγχάνει πιο συχνά σε σχέση με την περίπτωση που θα είχαμε έναν μόνο δίσκο. Πράγματι, στη διάταξη RAID 0 αρκεί να αποτύχει ένας από τους 2 δίσκους για να αποτύχει το σύστημα αφού αν π.χ. αποτύχει ο δίσκος 1 δεν θα μπορούν να αναγνωστούν τα δεδομένα A_1, B_1, … και επομένως δεν θα μπορούν να ανασυσταθούν τα δεδομένα Α, Β,… μόνο από τα A_2, B_2, …. Το σύστημα RAID 0 μπορεί συνεπώς να θεωρηθεί ως ένα σειριακό σύστημα 2 μονάδων (δίσκων) που αυξάνει την ταχύτητα και μειώνει την αξιοπιστία.

Η απλούστερη τώρα μέθοδος για να αυξήσουμε την *αξιοπιστία* του αποθηκευτικού συστήματος είναι να χρησιμοποιήσουμε και πάλι δύο δίσκους αλλά αυτή τη φορά με διαφορετικό τρόπο. Εγγράφουμε τα δεδομένα που πρόκειται να αποθηκευτούν (π.χ. δεδομένα Α, Β, Γ, …) σε δύο δίσκους ταυτόχρονα (γράφονται τα ίδια δεδομένα και στους δύο δίσκους). Με αυτό τον τρόπο, το σύστημα αποτυγχάνει μόνο αν αποτύχουν και οι δύο δίσκοι (πρόκειται για παράλληλο σύστημα δύο μονάδων). Η διάταξη αυτή καλείται ***mirroring*** (ή RAID 1). Αυτή η διάταξη αυξάνει την αξιοπιστία του συστήματος αλλά δεν αυξάνει την ταχύτητα.

Θα μπορούσαμε όμως να συνδυάσουμε τις δύο παραπάνω διατάξεις χρησιμοποιώντας 4 δίσκους για να επιτύχουμε αύξηση της ταχύτητας χωρίς να μειώνεται η αξιοπιστία. Ένας απλός τρόπος για να γίνει αυτό είναι να χωρίσουμε και πάλι σε δύο μέρη τα δεδομένα που πρόκειται να αποθηκευτούν (π.χ. το Α χωρίζεται στα A_1, A_2, το Β στα B_1, B_2 κ.ο.κ.) και να εγγράφουμε τα A_1, B_1, … στον 1ο και 2ο δίσκο, ενώ τα A_2, B_2, … στον 3ο και 4ο δίσκο. Η διάταξη αυτή καλείται RAID 01. Προφανώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε περισσότερους από 2 mirroring δίσκους (για μεγαλύτερη αξιοπιστία) και περισσότερους από 2 stripping δίσκους (για μεγαλύτερη ταχύτητα). Στην πράξη χρησιμοποιούνται και πολλές άλλες διατάξεις RAID (Redundant Array of Independent Disks) που έχουν να κάνουν με τη χρήση εφεδρικών δίσκων με διαφόρους τρόπους (RAID 2, 3, 4, 5, 6).

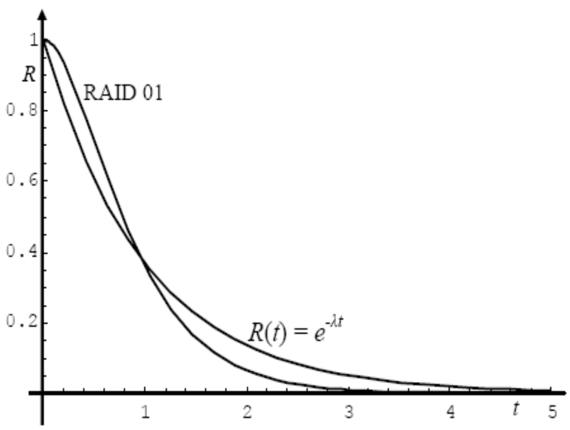
Είναι ενδιαφέρον τώρα να εξετάσουμε ως παράδειγμα την αξιοπιστία μιας RAID 01 διάταξης σε σχέση π.χ. με την αξιοπιστία ενός μόνο δίσκου. Αρχικά θα πρέπει να προσδιορίσουμε πότε αποτυγχάνει το σύστημα των 4 μονάδων – δίσκων διάταξης RAID 01. Προφανώς το σύστημα θα αποτυγχάνει (θα χάνονται δεδομένα) αν αποτύχουν οι δίσκοι 1 και 2 ή οι δίσκοι 3 και 4.Ισοδύναμα το σύστημα θα λειτουργεί αν λειτουργούν οι δίσκοι 1, 3 ή οι 1, 4 η οι 2, 3 ή οι 2, 4. Η συνάρτηση δομής του συστήματος από τα σύνολα που αποτυγχάνει θα είναι :

$\varphi(x) = (1 - (1 - x_1)(1-x_2)) (1 - (1 - x_3)(1 - x_4)) = (1 - x_1^{'}x_2^{'}) (1 - x_3^{'}x_4^{'})$, όπου : $x_i^{'} = 1 - x_i$ Η αξιοπιστία του θα είναι :

$$R = E(\Phi(X)) = E((1 - X_1^{'}X_2^{'})(1 - X_3^{'}X_4^{'})) = (1 - q_1q_2)(1 - q_3q_4) \quad \text{όπου } q_i = 1 - p_i$$

είναι η αναξιοπιστία της i-μονάδας. Αν θεωρήσουμε ότι οι δίσκοι έχουν εκθετικούς χρόνους ζωής με την ίδια παράμετρο λ, τότε η αξιοπιστία του συστήματος στο χρόνο t θα είναι : $R_S(t) = (1 - (1 - e^{-\lambda t})^2)^2 = e^{-2\lambda t}(2 - e^{-\lambda t})^2$ διότι τότε : $q_i(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Ένα συγκριτικό γράφημα (για λ = 1) της συνάρτησης αξιοπιστίας του συστήματος διάταξης RAID 01 και της συνάρτησης αξιοπιστίας ενός μόνο δίσκου ($R(t) = e^{-lt}$) είναι το ακόλουθο :



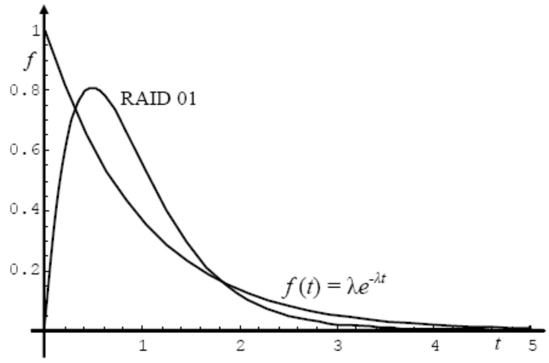
Σχήμα 9 (www.unipi.gr/faculty/mbouts/reliab/Reliability_Ch2(2008).pdf)

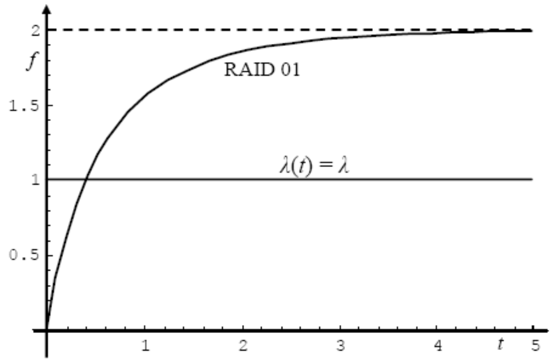
Παρατηρούμε ότι για μικρό t το σύστημα RAID 01 με τους 4 δίσκους είναι πιο αξιόπιστο από έναν δίσκο. Το αντίθετο συμβαίνει για μεγάλο t. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (είναι το αρνητικό της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης αξιοπιστίας) και η βαθμίδα αποτυχία του χρόνου ζωής του συστήματος των 4 δίσκων θα είναι αντίστοιχα,

$$f_s(t) = -\frac{d}{dt}R_s(t) = 2(1-(1 - e^{-\lambda t})^2)2(1 - e^{-\lambda t})\lambda e^{-\lambda t} = 4\lambda e^{-2\lambda t}(2 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\lambda t})$$

$$\lambda_s(t) = \frac{f_s(t)}{R_s(t)} = \frac{4\lambda e^{-2\lambda t}(2 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\lambda t})}{e^{-2\lambda t}(2 - e^{-\lambda t})^2} = \frac{4\lambda(1 - e^{-\lambda t})}{2 - e^{-\lambda t}}$$

Οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και της βαθμίδας αποτυχίας μεταξύ του συστήματος διάταξης RAID 01 και του συστήματος ενός μόνο δίσκου είναι (για λ=1) :





Σχήμα 10

Σχήμα 11

(www.unipi.gr/faculty/mbouts/reliab/Reliability_Ch2(2008).pdf)

Παρατηρούμε ότι το σύστημα των 4 δίσκων (με εκθετικούς χρόνους ζωής) έχει αρχικά μηδενική βαθμίδα αποτυχίας που αυξάνεται γρήγορα και γίνεται σχεδόν διπλάσια από την βαθμίδα αποτυχίας ενός μόνο δίσκου. Επομένως, όπως φαίνεται και από τα άλλα γραφήματα, το σύστημα με τους 4 δίσκους είναι αρχικά πιο αξιόπιστο (αφού έχει ρυθμό αποτυχίας μηδέν) σε σχέση με τον ένα δίσκο αλλά στη συνέχεια γίνεται λιγότερο αξιόπιστο (αφού αυξάνει κατά πολύ ο ρυθμός αποτυχίας).

Ας συγκρίνουμε τώρα το σύστημα των 4 δίσκων με το σύστημα του ενός δίσκου και με βάση τους μέσους χρόνους ζωής τους. Ο μέσος χρόνος ζωής του συστήματος των 4 δίσκων, επειδή είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή δίνεται από το ολοκλήρωμα :

$$E(T_s) = \int_0^\infty R_s(t)dt = \int_0^\infty e^{-2\lambda t}(4 + e^{-2\lambda t} - 4e^{-\lambda t})dt = 4\int_0^\infty e^{-2\lambda t}dt + \int_0^\infty e^{-4\lambda t}dt - 4\int_0^\infty e^{-3\lambda t}dt =$$

$$\frac{4}{2\lambda} + \frac{1}{4\lambda} - \frac{2}{3\lambda} = \frac{11}{12\lambda}$$

ενώ ένας δίσκος έχει μέσο χρόνο ζωής λ που είναι λίγο μεγαλύτερος από τον 11/(12λ).

Αξίζει να σημειώσουμε ότι στους παραπάνω υπολογισμούς δεν έχουμε συνυπολογίσει την πολύ χρήσιμη δυνατότητα αντικατάστασης που παρέχει το σύστημα των 4 μονάδων. Αν π.χ. κάποιος δίσκος αποτύχει τότε το σύστημα εξακολουθεί να λειτουργεί για ένα χρονικό διάστημα που σχεδόν πάντοτε επαρκεί για την αντικατάσταση του δίσκου που έχει αποτύχει με καινούριο. Η μελέτη αυτής της δυνατότητας του συστήματος εντάσσεται στη θεωρία των ανανεώσιμων συστημάτων, η οποία έχει πολλές πρακτικές εφαρμογές.

2.6 Ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής μονάδας ή συστήματος.

Μέχρι τώρα εξετάσαμε το συνολικό χρόνο ζωής T μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) με αξιοπιστία $R(t) = P(T > t)$ και συνάρτηση κατανομής $F(t) = P(T \leq t)$. Ο χρόνος αυτός «μετρά» από τη στιγμή που ξεκινά να λειτουργεί μία «καινούρια» μονάδα ($t = 0$) μέχρι τη στιγμή που αποτυγχάνει. Αρκετές όμως φορές γνωρίζουμε ότι η μονάδα (ή το σύστημα) έχει ήδη λειτουργήσει χρόνο x (δηλ. γνωρίζουμε ότι $T > x$) και επιθυμούμε να εξετάσουμε τον υπόλοιπο χρόνο ζωής της μονάδας από τη στιγμή x μέχρι τη στιγμή αποτυχίας της. Ο χρόνος αυτός, ο οποίος συμβολίζεται με T_x, έχει την δεσμευμένη κατανομή : $P(T\text{-}x \,/\, T>x)$ (ο χρόνος που απομένει είναι ο T-x δεδομένου ότι έχει λειτουργήσει κάποιο χρόνο x) και ονομάζεται υπολειπόμενος χρόνος ζωής της μονάδας ηλικίας x. Η συνάρτηση αξιοπιστίας μιας μονάδας ηλικίας $x \geq 0$ θα είναι :

$$R(T \setminus x) = P(T_x > t) = P(T - x > t \setminus T > x) = P(T > t + x) = \frac{P(T > t + x\,,\, T > x)}{P(T > x)}$$

$$= \frac{P(T > t + x)}{P(T > x)} = \frac{R(t + x)}{R(x)}\ , \ t \geq 0$$

Ενώ η συνάρτηση κατανομής του υπολειπόμενου χρόνου ζωής δίνεται ως μια δεσμευμένη πιθανότητα γιατί πρέπει να συνυπολογίσουμε τον προηγούμενο χρόνο, οπότε θα είναι :

$$F(t \setminus x) = P(T_x \leq t) = P(T - x \leq t \setminus T > x) = P(T \leq t + x \setminus T > x) = \frac{P(T \leq t + x\,,\, T > x)}{P(T > x)} =$$

$$\frac{R(x) - R(t + x)}{R(x)} = \frac{F(t + x) - F(x)}{1 - F(x)}\ , \ t \geq 0$$

Είναι προφανές ότι $T_0 = T$, $F(t \mid 0) = F(t)$, $R(t \mid 0) = R(t)$. Επίσης, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του υπολειπόμενου χρόνου ζωής T_x θα είναι :

$$f(t \setminus x) = -\frac{d}{dt}R(t \setminus x) = \frac{-\frac{d}{dt}R(x + t)}{R(x)} = \frac{f(t + x)}{R(x)}\ , \ t \geq 0$$ ενώ η αντίστοιχη βαθμίδα αποτυχίας του χρόνου ζωής T_x είναι : $\lambda(t/x) = \dfrac{f(t \setminus x)}{R(t \setminus x)} = \dfrac{f(t + x)}{R(t + x)} = \lambda(t + x)$

Τέλος, από τις δύο τελευταίες σχέσεις παρατηρούμε ότι : $f(0/x) = \lambda(0 \setminus x) = \dfrac{f(x)}{R(x)} = \lambda(x)$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο όρος «μονάδα» είναι αρκετά γενικός και μπορεί να περιγράφει αρκετές φυσικές οντότητες, όπως π.χ. ένα εξάρτημα μιας μηχανής ή και έναν άνθρωπο. Η ειδική περίπτωση που ο χρόνος T αφορά το χρόνο ζωής ενός ανθρώπου έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στα αναλογιστικά μαθηματικά. Στην περίπτωση αυτή π.χ. μας ενδιαφέρει η μελέτη του υπολειπόμενου χρόνου ζωής ενός ανθρώπου ηλικίας x (π.χ. x: χρόνος που συνάπτει ασφαλιστικό συμβόλαιο), δηλαδή ο χρόνος T_x. Μάλιστα στα αναλογιστικά μαθηματικά μερικές φορές χρησιμοποιούνται ιδιαίτεροι συμβολισμοί που αφορούν τον υπολειπόμενο χρόνο όπως :

• πιθανότητα άτομο ηλικίας x να ζήσει ακόμη χρόνο λιγότερο από

t : $_{t}q_{x} = P(T_x \leq t) = F(t/x)$

• πιθανότητα άτομο ηλικίας x να ζήσει ακόμη χρόνο περισσότερο από

t : $_{t}p_{x} = P(T_x > t) = R(t/x)$

• πιθανότητα άτομο ηλικίας x να ζήσει ακόμη χρόνο μεταξύ t και t+u :

$$_{t/u}q_x = P(t<T_x \leq t+u) = P(t+x < T \leq t+u+x\backslash T>x) = \frac{R(t+x) - R(t+u+x)}{R(x)} =$$

$$\frac{R(t+x) - R(t+x+u)}{R(t+x)} \cdot \frac{R(t+x)}{R(x)} = (1 - R(u\backslash t+x))R(t\backslash x) = {}_{u}q_{t+x} \cdot p_x$$

Παρατήρηση 2.6.1:

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία μονάδα με χρόνο ζωής T που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Αν γνωρίζουμε ότι η μονάδα αυτή έχει λειτουργήσει ήδη χρόνο x, ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής της T_x θα έχει συνάρτηση αξιοπιστίας :

$P(T_x > t) = R(t\backslash x) = \dfrac{R(x+t)}{R(x)} = \dfrac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ δηλαδή ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας τέτοιας μονάδας «ηλικίας» x θα ακολουθεί και πάλι την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, ανεξαρτήτως του x. Με αλλά λόγια, αν T ~ εκθετική κατανομή ισχύει ότι :

$$P(T_x > t) = P(T - x > t \backslash T > x) = P(T > t)\ ,\ t \geq 0\ ,\ x \geq 0.$$

Επομένως, δικαιολογημένα αποκαλούμε μονάδες με χρόνο ζωής που ακολουθεί εκθετική κατανομή ως «αγέραστες» ή «άφθαρτες» διότι τέτοιες μονάδες συμπεριφέρονται ως «καινούριες» ανεξαρτήτως του χρόνου που έχουν λειτουργήσει. Η παραπάνω ιδιότητα της εκθετικής κατανομής καλείται και « ιδιότητα της αμνησιας ». Είναι προφανές ότι η αντικατάσταση μιας τέτοιας μονάδας με καινούρια (ενώ αυτή λειτουργεί) δεν βελτιώνει τίποτα. Αντίστροφα τώρα, γεννάται το εξής ερώτημα: αν ισχύει ότι $P(T_x > t) = P(T > t)$ (δηλ. η κατανομή της T έχει την ιδιότητα της αμνησίας, τότε η T θα ακολουθεί οπωσδήποτε εκθετική κατανομή ή υπάρχουν και άλλες κατανομές που έχουν την ιδιότητα της αμνησίας; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται από την επόμενη πρόταση. Αρχικά παρατηρούμε ότι μία μονάδα έχει την την ιδιότητα της αμνησίας αν και μόνο αν

$$P(T_x > t) = P(T > t) \Leftrightarrow \frac{R(x+t)}{R(x)} = R(t) \Leftrightarrow R(x+t) = R(x)\,R(t) \text{ για κάθε } x,t \geq 0$$

Πρόταση 2.6.1:

Αν για την συνάρτηση αξιοπιστίας R μιας μη-αρνητικής, μη εκφυλισμένης τυχαίας μεταβλητής T [εκφυλισμένη καλείται μία τυχαία μεταβλητή T: $P(T = t) = 1$ για κάποιο t, ή $P(T > t) = 1$ για κάθε t (δηλ. $P(T = \infty) = 1$).]

ισχύει ότι $R(x+t) = R(x)R(t)$ για κάθε x, $t \geq 0$ τότε η T ακολουθεί εκθετική κατανομή.

Μ΄ αυτό τον τρόπο, μία μονάδα που έχει λειτουργήσει ήδη χρόνο x συμπεριφέρεται ως καινούρια(ανεξαρτήτως του x) αν και μόνο αν ο χρόνος ζωής της ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Έστω τώρα μία μονάδα με χρόνο ζωής T η οποία έχει λειτουργήσει ήδη χρόνο x. Είδαμε ότι ο (υπολειπόμενος) χρόνος ζωής της από τη στιγμή x και μετά είναι ο T_x. Είδαμε επίσης ότι, στην περίπτωση που T~εκθετική κατανομή, οι χρόνοι ζωής T, T_x έχουν την ίδια κατανομή ανεξαρτήτως του x, δηλαδή $P(T_x > t) = P(T > t)$, t, $x \geq 0$. Επομένως, για κάθε $x \geq y \geq 0$, $P(T_x > t) = P(T_y > t)$, $t \geq 0$ δηλαδή η συνάρτηση $R(t \mid x) = P(T_x > t)$ είναι σταθερή ως προς x. Είναι τώρα ενδιαφέρον να εξετάσουμε πότε η συνάρτηση $R(t \mid x)$ είναι φθίνουσα ως προς x, δηλαδή, $P(T_x > t) \leq P(T_y > t)$, $t \geq 0$ για $x \geq y \geq 0$. Σε αυτή την περίπτωση, η πιθανότητα να επιζήσει η μονάδα ακόμη χρόνο t, μειώνεται με την πάροδο του χρόνου. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ότι συμβαίνει όταν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της μονάδας αλλοιώνονται όσο περισσότερο αυτή λειτουργεί (η μονάδα «φθείρεται»). Το ίδιο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η περίπτωση όπου ισχύει το αντίθετο, δηλαδή η συνάρτηση $R(t \mid x)$ είναι αύξουσα ως προς x. Οι παραπάνω δύο περιπτώσεις ($R(t \mid x)$ αύξουσα - φθίνουσα ως προς x) είναι εύκολο να δειχθεί ότι είναι ισοδύναμες με τις περιπτώσεις όπου ο χρόνος ζωής T είναι IFR και DFR αντίστοιχα. Ειδικότερα έχουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.6.2:

Έστω T μία συνεχής μη αρνητική τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο ζωής μιας μονάδας (ή ενός συστήματος). Αν $R(t \mid x) = P(T_x > t)$ όπου T_x είναι ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής της μονάδας ηλικίας x, τότε, για κάθε $t > 0$, η συνάρτηση $R(t \mid x)$ είναι:

• αύξουσα ως προς x αν και μόνο αν T□DFR.

• φθίνουσα ως προς x αν και μόνο αν T□IFR

• σταθερή ως προς x αν και μόνο αν T ~ εκθετική κατανομή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΑ: ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΚΤΙΚΗ

Η σταθερότητα είναι μια ιδιότητα που είναι αναγκαία για τους χειριστές και ερευνητές σε όλο τον κόσμο και ήταν γνωστή από καιρό ως μια από τις πιο σημαντικές ιδιότητες ενός συστήματος ή μιας συνιστώσας που συνδέεται με την επέκταση και τη χρήση του εξοπλισμού κάθε εξαρτήματος : "ποιότητα, υποστήριξη, σταθερότητα, αξιοπιστία και λειτουργικότητα". Τα συστήματα που κατέχουν αυτές τις ιδιότητες έχουν τις πιο αποτελεσματικές και οικονομικές διαδικασίες για τον αρχικό εξοπλισμό τους.

Στις ιδιότητες της σταθερότητας , της αξιοπιστίας και του εξοπλισμού έχουν εστιαστεί πολλά «καλά» συστήματα. Ο εξοπλισμός τέτοιων συστημάτων σπάνια αποτύγχανε κι όταν συνέβαινε αυτό, μπορούσε να επισκευαστεί εύκολα (γρήγορος χρόνος επιδιόρθωσης). Είναι αναγκαίο, λοιπόν, ακόμα κι αν υπάρχει η σταθερότητα της αξιοπιστίας, πρέπει να αναπτύσσεται και η δυνατότητα γρήγορης αποκατάστασης.

Ας ορίσουμε τώρα της έννοια της σταθερότητας .

Η σταθερότητα θεωρείται ως ο δίδυμος της αξιοπιστίας (και μερικοί τον αναφέρουν ως «κακό δίδυμο») και είναι πιο δύσκολο να περιγραφεί συνοπτικά.

Αρχικά η σταθερότητα ορίζεται ως εξής :

Η σχετική άνεση και οικονομία του χρόνου και των πηγών με τις οποίες μια συνιστώσα ενός μηχανήματος ή συστήματος μπορεί να διατηρηθεί ή να αποθηκευτεί σε μια συγκεκριμένη συνθήκη όταν για την διατήρησή του παρουσιάζονται τα επίπεδα χαρακτηριστικών γνωρισμάτων χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες μεθόδους και πηγές για την συντήρηση και διόρθωση.

Η σταθερότητα μπορεί να αποτελεί ένα χαρακτηριστικό σχεδιασμού και εγκατάστασης , εκφράζεται μέσω της πιθανότητας μια συνιστώσα να διατηρείται ή να φυλάσσεται σε μια συγκεκριμένη συνθήκη σε κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Με άλλα λόγια , αποτελεί την άνεση με την οποία μια θεμελιώδης μονάδα συντηρείται σε συγκεκριμένες συνθήκες.

Έτσι , καθώς η αξιοπιστία μετρά την ικανότητα μιας συνιστώσας να λειτουργεί σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα , η σταθερότητα προσπαθεί να «μετρήσει» πόσο γρήγορα μια συνιστώσα μπορεί να διορθωθεί ή να παραμείνει σε μια σταθερή κατάσταση πριν από μια αποτυχία. Η σταθερότητα είναι μια συνάρτηση πιθανότητας που μπορεί να θεωρηθεί και ως συνάρτηση του χρόνου.

3.1 Διαθεσιμότητα

Ενώ η αξιοπιστία και η σταθερότητα είναι σημαντικές στον στρατιωτικό κι εμπορικό τομέα το αποτέλεσμα ενός αξιόπιστου και σταθερού συστήματος είναι ο πρωταρχικός στόχος. Αυτός ο στόχος (που είναι γνωστός ως διαθεσιμότητα) είναι πραγματικά ένα μέτρο της ικανότητας για να χειριστεί ένα πλήρες θεμελιώδες σύστημα. Η διαθεσιμότητα εκφράζεται ως η αναλογία του ποσού του χρόνου που ένα σύστημα «λειτουργεί» προς τον συνολικό χρόνο. Μια τυπική απεικόνιση της διαθεσιμότητας είναι:

$$A = \frac{\text{χρόνος λειτουργίας}}{\text{χρόνος λειτουργίας} + \text{χρόνος αποτυχίας}}$$

όπου ο χρόνος αποτυχίας συμπεριλαμβάνει όλες τις καθυστερήσεις, τις προετοιμασίες και τον σχεδιασμό του συστήματος ή μηχανήματος. Έτσι, η διαθεσιμότητα είναι ένα μέτρο των συνδυασμένων αποτελεσμάτων της αξιοπιστίας και της σταθερότητας. Υπάρχουν όμως άλλες παραλλαγές αυτής της ισότητας που συντελούν σε άλλη διάσταση του χρόνου λειτουργίας και αποτυχίας, όπως ο μέσος χρόνος συντήρησης MTBM (Mean Time Between Maintenance) για τον χρόνο λειτουργίας και ο μέσος χρόνος επιδιόρθωσης MTTR (Mean Time To Repair) για τον χρόνο αποτυχίας (μιας συνιστώσας).

Η διαθεσιμότητα ενός όρο έχει τις ακόλουθες έννοιες:

1. το ποσοστό του χρόνου που ένα σύστημα είναι σε έναν λειτουργούντα όρο.

2. Η αναλογία του συνολικού χρόνου που μια λειτουργική μονάδα είναι σε θέση χρησιμοποίησης κατά τη διάρκεια ενός δεδομένου διαστήματος στο μήκος του διαστήματος.

Ένα παράδειγμα της διαθεσιμότητας είναι 100/168 εάν η μονάδα είναι σε θέση της χρησιμοποίησης για 100 ώρες σε μια εβδομάδα (η εβδομάδα έχει 168 ώρες).

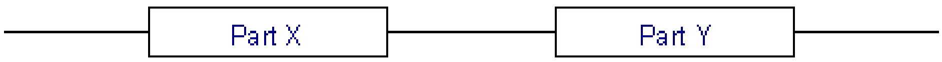
Μερικοί καθορίζουν τη διαθεσιμότητα ενός συστήματος ως την «πιθανότητα που το σύστημα λειτουργεί σε έναν καθορισμένο χρόνο t». Ενώ άλλοι δίνουν έναν ποιοτικό καθορισμό της διαθεσιμότητας ως «μέτρο του βαθμού ενός συστήματος που είναι σε λειτουργία όταν αυτό απαιτείται σε μια άγνωστη τυχαία χρονική στιγμή».

Τα μέτρα διαθεσιμότητας ταξινομούνται είτε από το χρονικό διάστημα ενδιαφέροντος είτε τους μηχανισμούς για το σύστημα στον χρόνο διακοπής (ο χρόνος στον οποίο το σύστημα δεν είναι διαθέσιμο).

Η υψηλή διαθεσιμότητα είναι μια συνθήκη για ένα βέλτιστο σχέδιο και εξασφαλίζει τον βαθμό λειτουργικής συνοχής κατά τη διάρκεια μιας δεδομένης περιόδου μέτρησης.

Οι χρήστες θέλουν τα συστήματά τους, παραδείγματος χάριν ρολόγια καρπών, νοσοκομεία, αεροπλάνα ή υπολογιστές, για να είναι έτοιμα να εξυπηρετήσουν πάντα. Η διαθεσιμότητα αναφέρεται στη δυνατότητα της κοινότητας χρηστών να έχει πρόσβαση στο σύστημα, είτε για να υποβάλει τη νέα εργασία, αναπροσαρμογή είτε να αλλάξει την υπάρχουσα εργασία, είτε να συλλέξει τα αποτελέσματα της προηγούμενης εργασίας. Εάν ένας χρήστης δεν μπορεί να έχει πρόσβαση στο σύστημα, λέγεται ότι είναι μη διαθέσιμο. Γενικά, ο όρος χρόνος διακοπής χρησιμοποιείται για να αναφερθεί στις περιόδους όταν ένα σύστημα είναι μη διαθέσιμο.

- Ας εξετάσουμε τη διαθεσιμότητα ενός συστήματος με δύο συνιστώσες συνδεδεμένες στη σειρά :



Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, δύο μέρη X και Y θεωρούνται στη σειρά εάν αποτύχει το σύστημα με την αποτυχία τουλάχιστον ενός απ’ αυτά. Το συνδυασμένο σύστημα είναι λειτουργικό μόνο εάν και το μέρος X και το μέρος Y είναι διαθέσιμα. Από αυτό ακολουθεί ότι η συνδυασμένη διαθεσιμότητα είναι ένα προϊόν της διαθεσιμότητας των δύο μερών. Η συνδυασμένη διαθεσιμότητα παρουσιάζεται από την εξίσωση κατωτέρω:

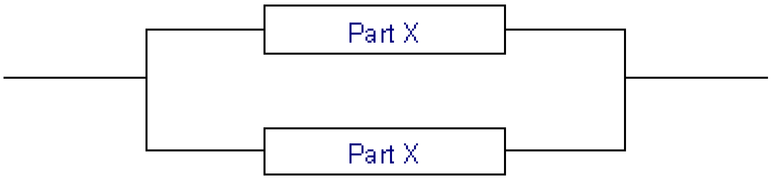
$$A = A_x \cdot A_Y$$

Οι επιπτώσεις της ανωτέρω εξίσωσης είναι ότι η συνδυασμένη διαθεσιμότητα δύο συστατικών στη σειρά είναι πάντα χαμηλότερη από τη διαθεσιμότητα των επιμέρους συστατικών της. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τη διαθεσιμότητα και το χρόνο διακοπής για τα επιμέρους συστατικά και το συνδυασμό τους σε ένα συγκεκριμένο σύστημα:

Συνιστώσα	Διαθεσιμότητα
X	99%
Y	99.99%
Συνδυασμός των X και Y	98.99%

Από τον ανωτέρω πίνακα είναι σαφές ότι ακόμα κι αν ένα πολύ υψηλό μέρος Y διαθεσιμότητας χρησιμοποιήθηκε, η γενική διαθεσιμότητα του συστήματος προσαρμόστηκε κάτω από τη χαμηλή διαθεσιμότητα (X). Αυτό αποδεικνύει ακριβώς το ρητό ότι : «μια αλυσίδα είναι τόσο ισχυρή όσο η πιο αδύνατη σύνδεσή της». Πιο συγκεκριμένα, μια αλυσίδα είναι πιο αδύνατη από την πιο αδύνατη σύνδεση.

- Ας εξετάσουμε τη διαθεσιμότητα δύο συνιστωσών συνδεδεμένων παράλληλα.



Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ένα σύστημα που αποτελείται από δύο μέρη συνδεδεμένα παράλληλα αποτυγχάνει αν δε λειτουργούν και οι δύο συνιστώσες ταυτόχρονα. Το συνδυασμένο σύστημα είναι λειτουργικό εάν είναι διαθέσιμη (λειτουργεί) τουλάχιστον μία συνιστώσα. Από αυτό ακολουθεί ότι η συνδυασμένη διαθεσιμότητα είναι 1 - (και τα δύο μέρη είναι μη διαθέσιμα). Η συνδυασμένη διαθεσιμότητα παρουσιάζεται από την εξίσωση κατωτέρω:

$$A = 1 - (1 - A_x)(1 - A_y)$$

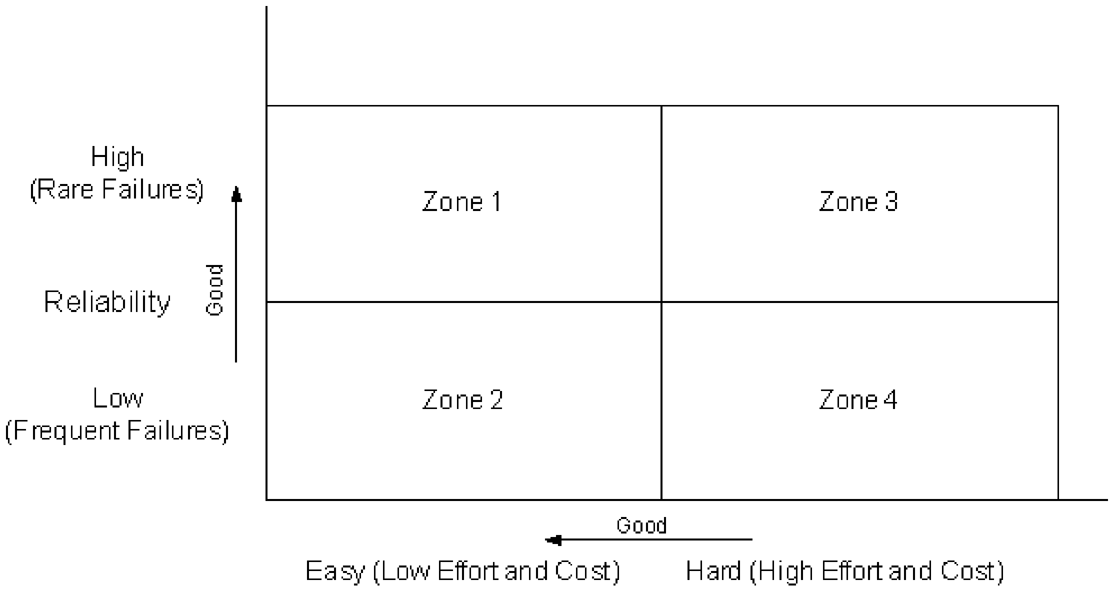
Οι επιπτώσεις της ανωτέρω εξίσωσης είναι ότι η συνδυασμένη διαθεσιμότητα δύο συστατικών που είναι συνδεδεμένα παράλληλα είναι πάντα πολύ υψηλότερη από τη διαθεσιμότητα των επιμέρους συστατικών της. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τη διαθεσιμότητα και το χρόνο διακοπής για τα επιμέρους συστατικά και τον παράλληλο συνδυασμό τους.

Συνιστώσα	Διαθεσιμότητα
X	99%
Δύο συνιστώσες X συνδεδεμένες παράλληλα	99.99%
Τρεις συνιστώσες συνδεδεμένες παράλληλα	99.9999%

3.2 Η θεωρία της σταθερότητας

Αρχικά , αναφέρουμε έναν πίνακα σταθερότητας και αξιοπιστίας :

Πίνακας σταθερότητας και αξιοπιστίας



Για τα περισσότερα συστατικά ενός συστήματος σε ένα σχέδιο, η ιδανική κατάσταση για να κρατήσει τις δαπάνες των κύκλων ζωής σε ένα ελάχιστο ποσοστό ,είναι να υπάρξει η υψηλή αξιοπιστία και η εύκολη σταθερότητα (ζώνη 1) – δηλαδή, είναι ένα συστατικό που αποτυγχάνει σπάνια, απαιτεί λίγη προσοχή και δεν προκαλεί καμία σημαντική προσπάθεια όταν αποτυγχάνει (διακόπτες, κ.λ.π.). Ένα συστατικό στη ζώνη 2 αποτυγχάνει συχνά, αλλά απαιτεί λίγη προσοχή κατά τη λειτουργία και αντικαθίσταται εύκολα (ελαφριοί βολβοί, φίλτρα αέρα, κ.λ.π.). Ένα αξιόπιστο συστατικό που αποτυγχάνει σπάνια, αλλά θα μπορούσε να απαιτήσει τη σημαντική προσοχή κατά τη διάρκεια της λειτουργίας και σημαντική προσπάθεια να αντικατασταθεί θα οριζόταν στη ζώνη 3 (μηχανές, οι γεννήτριες, οι αντλίες, το τμήμα κ.λπ.). Κάποιο που αποτυγχάνει συχνά, απαιτώντας σημαντική προσπάθεια σε λειτουργία και σημαντικές προσπάθειες για να το αντικαταστήσουν θα ήταν μέσα στη Ζώνη 4. Τα συστήματα με τα συστατικά στη ζώνη 4 δεν είναι χαρακτηριστικά επιτυχή. Η εργασία της ομάδας σχεδίου είναι να εξασφαλίσει ότι τα συστατικά αντιστοιχούνται τη σωστή ζώνη και για το σωστό σκοπό, έτσι ώστε οι πόροι να χρησιμοποιούνται με τον αποτελεσματικότερο δυνατό τρόπο.

Οι σχεδιαστές προσπαθούν να αναπτύξουν στοιχεία, στα περισσότερα προϊόντα, που να είναι αξιόπιστα και που να απαιτείται λίγη προσπάθεια για να γίνεται η συντήρησή τους, με χαμηλό κόστος βέβαια. Αν όμως υπάρχει υψηλό ποσοστό αποτυχίας η συντήρηση πρέπει να γίνεται συχνά, τότε είναι αναγκαίο να γίνουν κάποιες διορθώσεις στη σταθερότητα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η εξέλιξη των αυτοκινήτων ανά τις δεκαετίες.

Πίνακας 1 : Μετρικές συντηρησιμότητας

Μέτρο	Περιγραφή
Σημάνετε το χρόνο να επισκευάσει (mttr)	Ο αναμενόμενος χρόνος επισκευής κάθε συνιστώσας.
Σημάνετε τον προληπτικό χρόνο συντήρησης	Ο αριθμητικός μέσος όρος των κύκλων ζωής συντήρησης για το μεμονωμένο προληπτικό φάρμακο συντήρησης ενός συστήματος (επιθεώρηση, βαθμολόγηση, προγραμματισμένη αντικατάσταση, κ.λπ...)
Μεσαίος ενεργός διορθωτικός χρόνος συντήρησης	Η αξία του διορθωτικού χρόνου συντήρησης που διαιρεί όλες τις τιμές χρόνου διακοπής για διορθωτική συντήρηση έτσι ώστε 50% είναι ίσα ή μεγαλύτερα από τη διάμεσο
Σημάνετε τον ενεργό χρόνο συντήρησης	Η μέση παρερχόμενη περίοδος έπρεπε να εκτελέσει συντήρηση (και προληπτικώς και διορθωτικώς) αποκλείοντας τις λογιστικές και διοικητικές καθυστερήσεις
Μέγιστος ενεργός διορθωτικός χρόνος συντήρησης	Εκείνη η αξία του χρόνου διακοπής κάτω από την οποία κάποιος μπορεί να αναμείνει ένα διευκρινισμένο τοις εκατό διορθωτική συντήρηση που ολοκληρώνεται. Πρέπει να δηλωθεί ένα δεδομένο εκατοστημόριο, συνήθως 90 ή 95· πρώτιστα σχετικός με μια λογαριθμική κανονικός διανομή.
Σημάνετε το χρόνο να αποκατασταθεί το σύστημα	Για τα ιδιαίτερα περιττά συστήματα, αυτό είναι η χρονική ανάγκη να μεταπηδήσει στο α περιττή εφεδρική μονάδα
Σημάνετε κάτω από το χρόνο	Ο μέσος χρόνος ότι ένα σύστημα δεν

	οφείλεται λειτουργικά στην επισκευή ή το προληπτικό φάρμακο συντήρηση. Αυτό περιλαμβάνει τις διοικητικές μέριμνες και διοικητικές καθυστερήσεις.

Η πρόβλεψη της συντηρησιμότητας νωρίς στη φάση σχεδίου είναι ουσιαστική για τον έλεγχο του κόστους κύκλων ζωής του εξοπλισμού, ο οποίος είναι ιδιαίτερα σημαντικός στα συστήματα. Η πρόβλεψη της συντηρησιμότητας δίνει έμφαση στις περιοχές που απαιτούν τη βελτίωση πριν από την αναπτυξιακή δοκιμή ή τη λειτουργική εμπειρία, και επομένως επιτρέπει τις αλλαγές σχεδίου για να γίνει η διαδικασία ενώ είναι προσιτός και χαμηλότερος ο κίνδυνος για το γενικό πρόγραμμα. Οι προβλέψεις συντηρησιμότητας παρέχουν επίσης τη βάση για τον προσδιορισμό του προσωπικού συντήρησης ενός συστήματος.

Η πρόβλεψη συντηρησιμότητας διαμορφώνεται από το συγκεκριμένο σύστημα, τις απαραίτητες μετρήσεις (που καθορίζονται κανονικά από τον πελάτη), το βαθμό από τις πληροφορίες που είναι διαθέσιμες και τη φάση σχεδίου, έτσι υπάρχουν διάφορες τεχνικές που στηρίζονται σε ποικίλες δειγματοληψίες και στατιστικές μεθόδους. Δεδομένου ότι το σχέδιο ωριμάζει και περισσότερη λεπτομέρεια καθορίζεται, η μέθοδος πρόβλεψης γίνεται περισσότερο μια διαδικασία στα στοιχεία του αριθμού των μερών και το λεπτομερή υπολογισμό με λογιστικό φύλλο (spreadsheet).

3.2 <u>Η πρακτική της συντηρησιμότητας</u>

Δεδομένου ότι τα επιχειρηματικά συστήματα γίνονται αυτοματοποιημένα και ικανά να ελέγξουν το λάθος, αυτή η αδυναμία μπορεί να ελαχιστοποιηθεί. Τα συστήματα συντήρησης που είναι σε χρήση από το στρατιωτικό τομέα έχουν συχνά τις αδυναμίες στην απόδοση των αποτυχιών στα συγκεκριμένα στοιχεία ή συστατικά, και ενώ μπορούν να προσδιορίζονται μεμονωμένα από τον αύξοντα αριθμό, το στοιχείο δεν συνδέεται χαρακτηριστικά πλήρως με το τμηματικό αριθμημένο στοιχείο. Αυτή η ανεπάρκεια κινείται προς την αποβολή, δεδομένου ότι οι στρατιωτικοί εφαρμόζουν την καταδίωξη αύξοντος αριθμού μέσω των λογιστικών πρωτοβουλιών μετασχηματισμού που είναι εν εξελίξει.

Λίγα από τα τρέχοντα συστήματα συντήρησης είναι επίσης δομημένα για να παρέχουν τον εύκολο υπολογισμό των μέτρων συντηρησιμότητας που περιγράφονται ανωτέρω. Αν υπάρχει μια αλλαγή mttr μέχρι την ώρα 1, με βάση 5.000 ενέργειες επισκευής για ένα δεδομένο έτος, ο καθορισμός της πρωταρχικής αιτίας για την αύξηση ή του αντίκτυπου στις λειτουργικές δυνάμεις μπορεί να είναι δύσκολος , ιδιαίτερα όταν ο εξοπλισμός εγκαθιστά τα στοιχεία που έχουν ένα ευρύ φάσμα των πηγών ηλικίας και επισκευής. Επίσης, τα νεώτερα στρατιωτικά συστήματα στοιχείων κινούνται για να διορθώσουν αυτήν την πρόκληση, και κάθε στοιχείο κινείται προς τα πρότυπα που καθορίζονται στον εμπορικό τομέα της αεροπορίας. Αυτός ο μετασχηματισμός πρέπει να βελτιώσει τον προσδιορισμό των πρωταρχικών αιτιών και να οδηγήσει στη βελτιωμένες συντηρησιμότητα και την αξιοπιστία.

Η αξιοπιστία και η συντηρησιμότητα αποτελούν ένα μέρος του σχεδίου ενός συστήματος και είναι ιδιαίτερα σημαντικές. Από την μία πλευρά, η συντηρησιμότητα είναι μια απαίτηση των πελατών και πολλές φορές εκφράζεται στους όρους του σχεδιαστή (όπως η εγγύηση σε κάποια προϊόντα), ενώ η αξιοπιστία είναι πάντα βασική ανάγκη των πελατών. Είναι λοιπόν αναγκαίο σε μία δομή να είναι αλληλένδετες οι αξιοπιστία και η συντηρησιμότητα για να ανταπεξέλθει το συγκεκριμένο προϊόν τον ανταγωνισμό.

Η συντηρησιμότητα είναι "η σχετική ευκολία και η οικονομία του χρόνου και των πόρων με τις οποίες ένα στοιχείο μπορεί να διατηρηθεί ή να αποκατασταθεί σε έναν διευκρινισμένο όρο". Ενώ μπορεί να εκφραστεί από μαθηματική άποψη ή με τις μετρικές όπως συζητείται ανωτέρω, είναι ουσιαστικά μια συλλογή των διαδικασιών, που εκτελείται από το προσωπικό ή άλλες μηχανές

Είναι λογικό να ειπωθεί ότι η προσπάθεια να διατηρηθεί το στοιχείο σε έναν διευκρινισμένο όρο πρέπει να βελτιστοποιηθεί για να επιτύχει τη "ευκολία των πόρων." Η διατήρηση ενός στοιχείου σε έναν διευκρινισμένο όρο συνεπάγεται χαρακτηριστικά μια επιθεώρηση (χαρακτηριστικά οπτική), δοκιμή και συντήρηση / διατήρηση του στοιχείου, συμπεριλαμβανομένων οποιονδήποτε ενεργειών να αποκτήσει πρόσβαση στο στοιχείο και να αποκατασταθούν τα στοιχεία διαταραγμένα για την πρόσβαση. Επομένως, τα στοιχεία που, από το σχέδιο, απαιτούν την εύκολη πρόσβαση για τη συχνή επιθεώρηση / συντήρηση πρέπει να τοποθετηθούν και να διαμορφωθούν για να επιτρέψουν την ελάχιστη προσπάθεια. Επιπλέον, τα διαστήματα επιθεώρησης πρέπει να βελτιστοποιηθούν.

Η αποκατάσταση ενός στοιχείου σε έναν διευκρινισμένο όρο είναι συνώνυμη με την επισκευή του στοιχείου. Η επισκευή ενός στοιχείου αποτελείται από:

- Επιβεβαίωση της δυσλειτουργίας.
- Εντοπίζοντας το ελάττωμα αρμόδιο για τη δυσλειτουργία.
- Αφαίρεση του ελαττωματικού στοιχείου ή του συστατικού (συμπεριλαμβανομένου του χρόνου να αποκτήσει πρόσβαση στο σύστημα).
- Εγκατάσταση του νέου στοιχείου (συμπεριλαμβανομένου του χρόνου να εξεταστεί σε ισχύ και να αποκατασταθούν τα διαταραγμένα στοιχεία για την πρόσβαση).
- Η εκτέλεση ενός ελέγχου συστημάτων που καθορίζεται για να ελέγξει τη δυσλειτουργία.
- Τεκμηρίωση της δράσης.

Τα μέσα ώστε να ολοκληρωθούν αυτοί οι στόχοι με ελάχιστη προσπάθεια πρέπει να σχεδιαστούν κατά την έναρξη του συστήματος. Εντούτοις, η δραστηριότητα σχεδίου και ανάπτυξης στις πρόωρες φάσεις αποκτήσεων τείνει να εκτελεί κάτω την ανάλυση και ανάπτυξη απαραίτητη να αναπτύξει τις αποτελεσματικές λύσεις για κάθε έναν από αυτούς τους στόχους επειδή δεν υπάρχει αρκετός χρόνος και πόροι για να καθοριστούν και να μετρηθούν όλα τα πιθανά ελαττώματα και οι αποτυχίες.

3.4 Αφαίρεση και επανεγκατάσταση στοιχείων:

Οι ανθρώπινοι παράγοντες και το σχέδιο απόδοσης επηρεάζουν την τοποθέτηση, σύνδεση και μορφή συστατικών για να διευκολύνει τους στόχους συντήρησης.

Έλεγχος συστημάτων: Η ίδια υποδομή που χρησιμοποιείται για να προσδιορίσει τις δυσλειτουργίες και να απομονώσει τα ελαττώματα υιοθετείται για να ελέγξει τη λειτουργία συστημάτων. Αυτό ελαχιστοποιεί επίσης την ανάγκη για τον ειδικό εξοπλισμό υποστήριξης, που μειώνει την προσπάθεια και το λογιστικό "ίχνος."

Τεκμηρίωση: αποτελεί την ικανότητα για γρήγορες ενέργειες συντήρησης εγγράφων και το στοιχείο απόδοσης συστημάτων βασικών γραμμών ενσωματώνεται στα συστήματα υποστήριξης απόδοσης για το προσωπικό συντήρησης.

Αν και η στρατιωτική πρακτική έχει θεωρήσει την ενσωματωμένη υποστήριξη διοικητικών μεριμνών ως αλληλένδετο σύστημα για να υποστηρίξει τους στόχους επισκευής, στην πράξη αυτά τα στοιχεία της επισκευής ήταν συχνά τεμαχισμένα και υπό βελτιστοποιημένα κατά τη διάρκεια του σχεδίου ή της ανάπτυξης λόγω του αντίστοιχου τεμαχισμού των προϋπολογισμών προγράμματος και της διασκορπισμένης ευθύνης για την εκτέλεση των στόχων.

3.5 Στρατηγικές αντικατάστασης λόγω «ηλικίας»

Για μια συνιστώσα που λειτουργεί και δεν έχει εκθετικό ρυθμό αποτυχίας, υπάρχουν πολλά πλεονεκτήματα στο να την αντικαταστήσουμε πριν αυτή σταματήσει να λειτουργεί. Αυτό συμβαίνει όταν το κόστος αντικατάστασης είναι χαμηλότερο από το κόστος επιδιόρθωσης της αποτυχημένης συνιστώσας. Σε ορισμένες περιπτώσεις, μια συνιστώσα είναι αδύνατο να επιδιορθωθεί και μπορεί να οδηγήσει σε καταστρεπτικά αποτελέσματα.

Σε αυτή την ενότητα θα αναφερθούμε σε μοντέλα που δεν βασίζονται πλήρως στην αβεβαιότητα της διαδικασίας της αποτυχίας. Ενώ ο μηχανισμός της ηλικίας συνυπολογίζεται στο κόστος της δομής, στην πραγματικότητα, υποθέτουμε ότι το κόστος να συντηρήσουμε μια συσκευή αυξάνει με την πάροδο του χρόνου λειτουργίας. Στην επόμενη ενότητα, θεωρούμε μοντέλα στα οποία είναι σχεδιασμένη η αντικατάσταση επειδή είναι αναμενόμενη η φθορά τους.

Ας υποθέσουμε ότι το κόστος αντικατάστασης μιας συνιστώσας είναι K. Επίσης, ας υποθέσουμε ότι ο άμεσος ρυθμός του κόστους μιας συνιστώσας που λειτουργεί είναι $C(u)$. Μπορούμε να θεωρήσουμε διάφορους τύπους για το $C(u)$ αλλά αρχικά θεωρούμε : $C(u) = au$.

Βασιζόμενοι στις τιμές των διαφόρων ειδών κόστους , μπορούμε να ισχυριστούμε ότι υπάρχει ένα βέλτιστο σημείο στο οποίο μπορούμε να αντικαταστήσουμε την συνιστώσα , έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος ανά μονάδα του χρόνου. Η συνάρτηση του συνολικού κόστους είναι το άθροισμα από δύο συνιστώσες : Συντήρηση και Αντικατάσταση. Το κόστος της διατήρησης αυξάνει ενώ το κόστος της αντικατάστασης μειώνεται με την πάροδο του χρόνου. Η βέλτιστη «ηλικία» αντικατάστασης ελαχιστοποιεί τη μέση συνάρτηση κόστους, δηλαδή αν αντικαταστήσουμε κάποιο εξάρτημα στον καλύτερο δυνατό χρόνο (λίγο πριν ξεκινήσουν οι φθορές και ίσως προκαλέσει κάποια μείωση στη λειτουργία όλου του συστήματος) τότε θα μειωθεί στο ελάχιστο το κόστος συντήρησης.

Η στρατηγική είναι η εξής :

- Η συνιστώσα που χρησιμοποιείται λειτουργεί συνεχώς.
- Αγνοούμε τον χρόνο διόρθωσης και διατήρησης.
- Το σχέδιό μας είναι άπειρο.
- Κάθε νέα συνιστώσα στο σύστημα θεωρούμε ότι έχει τα ίδια χαρακτηριστικά.
- Λαμβάνονται υπ' όψιν μόνο τα κόστη διατήρησης και αντικατάστασης.
- Το αντικείμενό μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε το μακροπρόθεσμο κόστος αντικατάστασης και διατήρησης.
- Το ποσοστό του κόστους να διατηρήσουμε μια συνιστώσα «ηλικίας» u είναι αu και το κόστος αντικατάστασης είναι K .

Η αποφασιστική μεταβλητή είναι η ποσότητα του χρόνου που μεσολαβεί από το σημείο όπου μια συνιστώσα είναι σε αναμονή μέχρι τη χρονική στιγμή που θα αντικατασταθεί από μια νέα .

Το αντικείμενό μας είναι η ανάλυση που κάνουμε έτσι ώστε να αποφασίσουμε την τιμή του χρόνου t που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος διατήρησης και αντικατάστασης. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι ένας κύκλος αντικατάστασης είναι ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο αντικαταστάσεις. Επειδή όλοι οι κύκλοι αντικατάστασης είναι ίδιοι , αρκεί να εξετάσουμε τι γίνεται σε έναν κύκλο αντικατάστασης.

Έχουμε λοιπόν ,

- Συνολικό κόστος αντικατάστασης για κάθε κύκλο : K
- Συνολικό κόστος διατήρησης για κάθε κύκλο : $\int_0^1 C(u)du = \int_0^1 \alpha u \, du = \frac{\alpha t^2}{2}$

Ο μέσος όρος του κόστους για κάθε μονάδα είναι το συνολικό κόστος ενός κύκλου διαιρεμένο με το μήκος του κύκλου. Ας ορίσουμε G(t) τον μέσο όρο του κόστους για κάθε μονάδα αν ο χρόνος αντικατάστασης είναι t. Τότε έχουμε : $G(t) = \frac{1}{t}(K + \frac{a\,t^2}{2}) = \frac{K}{t} + \frac{a\,t}{2}$

Καθώς υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο , έχουμε : $G''(t) = \frac{K}{t^3} > 0$,

απ' όπου έχουμε ότι είναι μια κυρτή συνάρτηση της μεταβλητής t. Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε την βέλτιστη τιμή του t , την οποία ονομάζουμε t* , η οποία ελαχιστοποιεί την G(t) . Αφού η G(t) είναι κυρτή , τότε η βέλτιστη λύση προκύπτει : $G'(t) = -\frac{K}{t^2} + \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2K}{a}}$

3.6 Ένα γενικό μοντέλο αντικατάστασης λόγω «ηλικίας»

Αν θεωρήσουμε στο μοντέλο μας και μια μεταβλητή «διάσωσης» τότε γίνεται πιο σύνθετο . Αν θεωρήσουμε ότι C(u) είναι μια συνάρτηση που παρουσιάζει το ποσοστό του κόστους διατήρησης μιας συνιστώσας «ηλικίας» u , S(u) την τιμή «διάσωσης» μιας συνιστώσας «ηλικίας» u . Τότε , το συνολικό κόστος που συμπεριλαμβάνεται σε έναν κύκλο είναι το εξής : $K + \int_0^1 C(u)du - S(t)$. Το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου είναι : $G(t) = \frac{K}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t C(u)du - \frac{S(t)}{t}$. Η βέλτιστη λύση του t , t* είναι η λύση της παρακάτω εξίσωσης : $G'(t) = -\frac{K}{t^2} + \frac{H(t)}{t^2} + \frac{C(t)}{t} + \frac{S(t)}{t^2} - \frac{S'(t)}{t} = 0$ η οποία γίνεται : $tC(t) + S(t) = K + H(t) + tS'(t)$ απ' όπου : $H(t) = \int_0^t C(u)du$. Είναι πολύ δύσκολο να βρούμε το t* . Σε ορισμένα πραγματικά προβλήματα η εκθετική κατανομή παρέχει μια ακριβή περιγραφή αύξησης του κόστους διατήρησης και μείωσης στην επαναλειτουργία της συνιστώσας. Αν ορίσουμε ως : $C(u) = a\,e^{bu}, a, b > 0$ και : $S(u) = ce^{-du}, c, d > 0$

τότε η βέλτιστη τιμή του t ικανοποιεί την ισότητα : $ae^{bt}(t - \frac{1}{b}) + ce^{-dt}(1 + dt) + \frac{a}{b} = K$. Σκοπός μας είναι η αριστερή πλευρά της ισότητας να τείνει στο Κ.

3.7 Προκαθορισμένη αντικατάσταση λόγω αβεβαιότητας

Ο σκοπός της προληπτικής συντήρησης είναι να μειώσει την πιθανότητα μία συνιστώσα να χρειάζεται αντικατάσταση λόγω αποτυχίας. Στην κορυφή αυτής της στρατηγικής είναι η υπόθεση ότι κοστίζει περισσότερο μια διόρθωση ή αντικατάσταση τη στιγμή της αποτυχίας από μια προηγούμενη προκαθορισμένη στιγμή. Για παράδειγμα, αν η αποτυχία σημαίνει ότι πρέπει να σταματήσει η γραμμή παραγωγής για να ελέγξει την αποτυχία και να διορθώσει το πρόβλημα, στην προκαθορισμένη συντήρηση μπορεί να γίνει η αντικατάσταση σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή που το σύστημα δε λειτουργεί κι έτσι έχουμε λιγότερο κόστος.

Λόγω της ιδιότητας της αμνησίας που έχει η εκθετική κατανομή, αν μια συνιστώσα ή αν ένα υποσύστημα συνιστωσών που έχει ρυθμό αποτυχίας που ακολουθεί εκθετική κατανομή , τότε δεν υπάρχει κάποιο πλεονέκτημα να κάνουμε την αντικατάσταση πριν την αποτυχία. Στην εκθετική περίπτωση, η πιθανότητα μια αποτυχία να συμβεί στο χρονικό διάστημα Δt είναι η ίδια αμέσως μετά από μια προκαθορισμένη αντικατάσταση καθώς πρόκειται για μια συνιστώσα που λειτουργεί για ένα αυθαίρετο χρονικό διάστημα. Μ' αυτόν τον τρόπο είναι αξιοσημείωτο να πούμε ότι οι στρατηγικές προκαθορισμένης αντικατάστασης έχουν αξία μόνο στην περίπτωση που οι συνιστώσες παρουσιάζουν «γήρανση», γιατί έτσι έχουμε αυξανόμενο ρυθμό αποτυχίας. Αυτό σημαίνει ότι σε κατανομές των οποίων η αποτυχία σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα δεν εξαρτάται από το τι συνέβη στο αμέσως προηγούμενο δεν είναι χρήσιμη η προκαθορισμένη αντικατάσταση. Τέλος, αν κάνουμε αντικατάσταση σε τέτοιες περιπτώσεις θα έχουμε αυξημένο κόστος και καμία βελτίωση του συστήματός μας.

3.7.1 Προκαθορισμένη αντικατάσταση για μια συνιστώσα

Ας θεωρήσουμε μια συνιστώσα η οποία αποτελείται από ένα σύστημα συνεχώς συνδεδεμένων συνιστωσών , των οποίων ο χρόνος ζωής είναι μια τυχαία μεταβλητή T με γνωστή συνάρτηση κατανομής F(t). Υποθέτουμε ότι T είναι μια συνεχής κατανομή. Υποθέτουμε ότι κοστίζει c_1 να αντικαταστήσουμε μια συνιστώσα όταν αποτύχει και κοστίζει $c_2 < c_1$ να αντικαταστήσουμε τη συνιστώσα πριν την αποτυχία. Υποθέτουμε ότι οι προκαθορισμένες αντικαταστάσεις γίνονται σε t μονάδες του χρόνου ,μετά την τελευταία αντικατάσταση. Σκοπός μας είναι να βρούμε τη βέλτιστη τιμή του t ώστε να ελαχιστοποιήσουμε τον μέσο όρο του κόστους ανά μονάδα χρόνου και για τις προγραμματισμένες ή μη αντικαταστάσεις.

Ένας κύκλος είναι ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικές αντικαταστάσεις. Επειδή η διαδικασία ξανά – αρχίζει από μόνη της μετά από κάθε αντικατάσταση ανεξάρτητα από το γεγονός αν η αντικατάσταση είναι προσχεδιασμένη ή όχι., μπορούμε να δημιουργήσουμε μια έκφραση που δηλώνει το κόστος ανά μονάδα χρόνου :

$$E(\text{ κόστους ανά μονάδα χρόνου}) = \frac{E(\text{κόστος ανά κύκλο})}{E(\text{μήκος κύκλου})} \text{ όπου :}$$

$$E(\text{κόστος ανά κύκλο}) = c_1 \cdot P\begin{Bmatrix}\text{η αντικατάσταση είναι}\\ \text{αποτέλεσμα αποτυχίας}\end{Bmatrix} + c_2 \cdot P\begin{Bmatrix}\text{η αντικατάσταση είναι}\\ \text{προσχεδιασμένη}\end{Bmatrix}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι : $P\begin{Bmatrix}\text{η αντικατάσταση είναι}\\ \text{αποτέλεσμα αποτυχίας}\end{Bmatrix} = P(T \le t) = F(t)$ και :

$P\begin{Bmatrix}\text{η αντικατάσταση είναι}\\ \text{προσχεδιασμένη}\end{Bmatrix} = P\{T > t\}\ 1 - F(t)$ όπου T ο χρόνος ζωής μιας συνιστώσας που τίθεται σε διατήρηση κατά το τέλος του προηγούμενου κύκλου. Συνεπώς, έχουμε : $E(\text{κόστος ανά κύκλο}) = c_1F(t) + c_2(1 - F(t))$

Ας ορίσουμε ως T το χρόνο της αποτυχίας μιας συνιστώσας που τίθεται σε διατήρηση κατά το τέλος του προηγούμενου κύκλου, τότε είναι προφανές ότι η επόμενη αντικατάσταση θα γίνει σε χρόνο $\min\{T,t\}$.

Συνεπώς

$$\begin{aligned} E(\text{μήκος ενός κύκλου}) &= E[\min(T,t)] \\ &= \int_0^t \min(x,t)\, f(x)\, dx \\ &= \int_0^t x f(x)\, dx + t\int_0^t f(x) dx \\ &= \int_0^t x f(x)\, dx + t[1 - F(t)] \end{aligned}$$

Οπότε ,το αναμενόμενο κόστος ανά μονάδα χρόνου (G(t)) δίνεται από την ισότητα :

$$G(t) = \frac{c_1F(t) + c_2[1 - F(t)]}{\int_0^t x f(x) dx + t[1 - F(t)]}$$

Σκοπός μας είναι να βρούμε την τιμή του t που ελαχιστοποιεί την G(t) .Η βελτιστοποίηση μπορεί να είναι δύσκολη αλλά εξαρτάται από τον τύπο του χρόνου ζωής της κατανομής F(t) .

Ας κάνουμε ένα παράδειγμα για την συνάρτηση κόστους, αν θεωρήσουμε ως $c_1 = 0{,}3$ και $c_2 = 0{,}1$,

$F(t) = t$, $f(t) = 1$,

$$\text{τότε: } P\left\{\begin{matrix}\text{η αντικατάσταση είναι} \\ \text{αποτέλεσμα αποτυχίας}\end{matrix}\right\} = P(T \leq t) = F(t) = t$$

$$P\left\{\begin{matrix}\text{η αντικατάσταση είναι} \\ \text{προσχεδιασμένη}\end{matrix}\right\} = P\{T > t\}\ 1 - F(t) = 1 - t$$

$$E(\text{μήκος κύκλου}) = \int_0^t x \cdot 1\, dx + t[1 - t] = t - \frac{t^2}{2}$$

$$P(\text{κόστος ανά κύκλο}) = 0{,}3 \cdot t + 0{,}1\ (1 - t) = 0{,}2t + 0{,}1$$

$$\text{Άρα , } G(t) = \frac{0{,}2t + 0{,}1}{t - \frac{t^2}{2}} = \frac{0{,}4t + 0{,}2}{2t - t^2}$$

Σκοπός μας είναι να βρούμε την τιμή του t που ελαχιστοποιεί την G(t).

Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο και την μηδενίζουμε :

$$G'(t) = \frac{0{,}4\ (2t - t^2) - (0{,}4t + 0{,}2)\ (2 - 2t)}{(2t - t^2)^2} = 0 \Rightarrow 0{,}4\ (2t - t^2) - (0{,}4t + 0{,}2)\ (2 - 2t) = 0 \Rightarrow$$

$$0{,}4\ t^2 + 0{,}4\ t - 0{,}4 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\ (\text{απορρίπτεται}) \quad t_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ (\text{δεκτή})$$

Άρα η τιμή t_2 είναι αυτή που μηδενίζει το κόστος.

Θα δείξουμε τώρα ότι δεν υπάρχει κάποιο πλεονέκτημα σε προκαθορισμένη αντικατάσταση όταν ο χρόνος ζωής ακολουθεί εκθετική κατανομή. Υποθέτουμε ότι : $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, τότε το αναμενόμενο μήκος κάθε κύκλου είναι :

$$\int_0^t xe^{-\lambda x} dx + te^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda}[1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)] + te^{-\lambda t}$$

$$= \frac{1}{\lambda}(\ 1 - e^{-\lambda t}\ )$$

Οπότε έχουμε :

$$G(t) = \frac{c_1 - (c_1 - c_2)e^{-\lambda t}}{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}}$$

Καθώς το t τείνει στο άπειρο, ο όρος $e^{-\lambda t}$ τείνει στο μηδέν και το G(t) στο λc_1, επίσης $G(0) = \infty$ και η συνάρτηση G(t) είναι γνησίως φθίνουσα. Μ' αυτόν τον τρόπο η βέλτιστη λύση είναι όταν $t = \infty$ που σημαίνει ότι μια προκαθορισμένη αντικατάσταση δεν μπορεί να συμβεί.

Έχουμε δείξει ότι αν ο χρόνος ζωής έχει κατανομή που ακολουθεί εκθετική κατανομή (με σταθερό ρυθμό αποτυχίας) δεν υπάρχει όφελος στην αντικατάσταση μιας συνιστώσας πριν αυτή αποτύχει. Αυτό συμβαίνει και όταν ο ρυθμός αποτυχίας μειώνεται.

3.7.2 Αντικατάσταση για μια υποομάδα συνιστωσών

Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι πιο οικονομικό να αντικαθιστούμε υποομάδες συνιστωσών ταυτόχρονα παρά μία προς μία. Σε αυτή την ενότητα θεωρούμε ένα μοντέλο που αποφασίζουμε το βέλτιστο χρόνο για να αντικαταστήσουμε ένα συγκεκριμένο σύνολο συνιστωσών. Για να αποφύγουμε δύσκολους μαθηματικούς τύπους, υποθέτουμε ότι ο χρόνος ζωής κάθε μονάδας είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συγκεκριμένη κατανομή. Έτσι λοιπόν, υποθέτουμε ότι p_k είναι η πιθανότητα μια συνιστώσα να αποτύχει όταν t=k όταν γνωρίζουμε ότι έχει ήδη αντικατασταθεί όταν t=0. Υποθέτουμε επίσης ότι n_0 συνιστώσες τίθενται σε συντήρηση τη χρονική στιγμή t=0. Επίσης θεωρούμε ότι δεν γίνεται καμία αντικατάσταση και όσες συνιστώσες αποτυγχάνουν σε μία περίοδο αντικαθιστώνται στο τέλος της περιόδου. Ας ορίσουμε ως p_k την πραγματική αναλογία των συνιστωσών, «ηλικίας» κ περιόδων, που αποτυγχάνουν. Μ' αυτόν τον τρόπο, το πλήθος των αποτυχιών που συμβαίνουν στην πρώτη περίοδο είναι : $n_1 = n_0 \cdot p_1$. Στην δεύτερη περίοδο, η αναλογία της ομάδας των συνιστωσών που αποτυγχάνουν είναι : $n_0 \cdot p_2$ και η αναλογία των συνιστωσών που θέτονται σε συντήρηση είναι : $n_1 \cdot p_1$. Μ' αυτόν τον τρόπο, το αναμενόμενο πλήθος των αποτυχιών κατά την δεύτερη περίοδο είναι : $n_0 \cdot p_2 + n_1 \cdot p_1$. Συνεχίζοντας με αυτή την διαδικασία, έχουμε : $n_k = n_0 \cdot p_k + n_1 \cdot p_{k-1} + ... + n_{k-1} \cdot p_1$.

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι κάθε αντικατάσταση μόνη της κοστίζει α_1, και κάθε ομάδα που αποτελείται από n_0 συνιστώσες κοστίζει α_2 για να αντικατασταθεί. Αν όλες οι n_0 συνιστώσες αντικατασταθούν στο τέλος κάθε άλλης περιόδου, το κόστος που συμπεριλαμβάνεται σε κάθε δύο περιόδους θα είναι : $\alpha_2 + \alpha_1(n_1 + n_2)$ ή ένας μέσος όρος για κάθε περίοδο $\frac{\alpha_2 + \alpha_1(n_1 + n_2)}{2}$. Με τον ίδιο τρόπο, προκύπτει ότι ο μέσος όρος του κόστους για κάθε περίοδο αν αντικαταστήσουμε τις n_0 συνιστώσες μετά από κ περιόδους είναι :

$$G(k) = \frac{\alpha_2 + \alpha_1 \sum_{j=1}^{k} n_j}{k} .$$

Το βέλτιστο πλήθος των περιόδων για να αντικαταστήσουμε τις n_0 συνιστώσες είναι η τιμή του κ που ελαχιστοποιεί την G(k). Η ελάχιστη τιμή του G(k) θα συγκριθεί με το αναμενόμενο κόστος ανά περίοδο υποθέτοντας ότι οι συνιστώσες αντικαθιστώνται καθώς αποτυγχάνουν. Ας ορίσουμε ως $E(T) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k$ τον αναμενόμενο χρόνο ζωής μιας συνιστώσας. Τότε, $\lambda = \frac{1}{T}$ είναι ο ρυθμός αποτυχίας της συνιστώσας. Συνεπώς, το κόστος να κάνουμε αντικαταστάσεις για κάθε συνιστώσα είναι : $\alpha_1 \cdot \lambda$ και για κάθε ομάδα συνιστωσών : $\alpha_1 \cdot \lambda \cdot n_0$. Αυτό πρέπει να συγκριθεί με τη βέλτιστη τιμή του G(k) για να αποφασιστεί αν μια αντικατάσταση μιας ομάδας είναι οικονομική.

Συνοψίζοντας, με την προληπτική συντήρηση καταφέρνουμε να μειώσουμε την πιθανότητα να κάνουμε αντικατάσταση πριν την αποτυχία. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι η αντικατάσταση αποτυχίας κοστίζει περισσότερο γιατί ίσως χρειάζεται να σταματήσει η λειτουργία του συστήματος (π.χ. σειριακό σύστημα). Από την άλλη μεριά όμως σε κατανομές που έχουν την ιδιότητα της αμνησίας όπως η εκθετική κατανομή δε χρειάζονται αντικατάσταση πριν την αποτυχία. Βέβαια , πολλές φορές , για εξοικονόμηση χρημάτων , κόπου και χρόνου αντικαθιστούμε ταυτόχρονα ένα υποσύνολο συνιστωσών. Όλα αυτά μπορούν να εφαρμοστούν σε κάθε σύστημα λαμβάνοντας υπ΄ όψιν τη μείωση του κόστους, γι αυτό και προτιμούν την αντικατάσταση μιας υποομάδας συνιστωσών.

Συνοψίζοντας, από τα παραπάνω είναι σαφές ότι για τη σωστή λειτουργία ενός συστήματος είναι αναγκαία η σταθερότητα όσο και η αξιοπιστία. Η ικανότητα ενός συστήματος να μειώσει το τυχαίο σφάλμα και να αυξήσει την πιθανότητα λειτουργίας του είναι πολύ σημαντική για την παραγωγή κάποιου προϊόντος. Επίσης, ο γρήγορος χρόνος επιδιόρθωσης μιας συνιστώσας καθώς και η έγκαιρη αποκατάσταση μιας συνιστώσας ή ομάδας αυτών μειώνει στο ελάχιστο το κόστος.

<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

1. Maintainability : Theory and Practice. Gary O' Neill. Georgia Tech Research Institute. Logistics and Maintenance Applied Research Center.
2. Maintenance , replacement , and reliability : theory and applications. AKS Jardine , AHC Tsang – 2006 – books.
3. Optimal design of a condition – based maintenance model. SV Amari , L Mc Laudhlin – Reliability and Maintainability , 2004 .
4. www. Unipi.gr/…/stat_asfal_ps_math6.html
5. www.plant-maintenance.com/maintenance_articles_maintainability.shtml
6. www.availability.com
7. Στατιστική Πιθανότητες. Π.Κικιλιας Δ.Παλαμουρδας Α. Πετράκης Δ. Τσουκαλάς
8. Στατιστική . Σειρά Schaum. Murray R. Spiegel Larry J. Stephens . 3η έκδοση.
9. Στατιστική. Φ Κολυβά – Μαχαιρα Ε. Μπορα – Σεντα .