**ΤΕΙ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ**
ΣΧΟΛΗ: ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ: ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

# «ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΙ ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ»

**ΣΠΟΥΔΑΣΤΕΣ:**

**ΜΠΟΥΡΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ**

**ΚΟΤΙΝΗ ΜΑΡΙΑ**

**ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:**
Βάσιου Γεωργία

**ΠΑΤΡΑ – 2015**

**ΑΝΩΤΑΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΩΝ**

ΣΧΟΛΗ: ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ: ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

# «ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΙ ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ »

**ΣΠΟΥΔΑΣΤΕΣ:**

**ΜΠΟΥΡΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ**
Α.Μ.: **12117**
nikosmpouro@gmail.com

**ΚΟΤΙΝΗ ΜΑΡΙΑ**
Α.Μ.: **12297**
kmairoula8@hotmail.com

**ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:**
Βάσιου Γεωργία

**ΠΑΤΡΑ -ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2014**

## Ευχαριστίες

Θα θέλαμε να εκφράσουμε τις ευχαριστίες μας στην επιβλέπουσα καθηγήτρια της πτυχιακής μας εργασίας, κα Βάσιου Γεωργία, η οποία μας έδωσε την ευκαιρία να εργασθούμε πάνω σε ένα θέμα με αρκετά μεγάλο ερευνητικό έδαφος και πολλές προοπτικές εργασιακού ενδιαφέροντος στο μέλλον.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

# Εισαγωγή

Οι έλεγχοι υποθέσεων είναι ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία του κλάδου της Στατιστικής Συμπερασματολογίας. Ο κλάδος αυτός ασχολείται με την εξαγωγή συμπερασμάτων τα οποία προκύπτουν έπειτα από τον έλεγχο ισχυρισμών, υποθέσεων για την τιμή των άγνωστων παραμέτρων κάποιας κατανομής που αναφέρονται σε ένα μόνο δείγμα. Συνήθως όταν ένας ερευνητής πραγματοποιεί κάποια έρευνα έχει κάποια θεωρία που θέλει να επαληθεύσει, και επομένως κάποια ένδειξη για τα τελικά αποτελέσματα. Αυτή η πρόβλεψη του ερευνητή για το τελικό αποτέλεσμα ονομάζεται στην στατιστική, υπόθεση (hypothesis). Ουσιαστικά μία υπόθεση αποτελεί την πρόβλεψη του ερευνητή για την επίδραση της αλλαγής της ανεξάρτητης μεταβλητής στην εξαρτημένη. Ο έλεγχος υποθέσεων (hypothesis testing) είναι πολύ χρήσιμο εργαλείο για τον ερευνητή, καθώς του επιτρέπει να ελέγξει την εγκυρότητα της υπόθεσής του.

Σκοπός της ανάλυσης είναι η αποδοχή ή η απόρριψη της υπόθεσης χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που παρέχει το δείγμα του πληθυσμού, εξετάζοντας το ερώτημα για το ποια είναι η σχέση που έχει η παράμετρος αυτή με τη συγκεκριμένη τιμή.

# 1. Στατιστικές Υποθέσεις.

Στη στατιστική το είδος των υποθέσεων που ελέγχουμε είναι περισσότερο περιορισμένο από τις γενικές επιστημονικές υποθέσεις. Είναι αδύνατον τις επιστημονικές υποθέσεις να τις ελέγξουμε με στατιστικές μεθόδους. Μερικά παραδείγματα επιστημονικών υποθέσεων είναι τα εξής:

- Υπάρχει νερό στη Σελήνη.
- Κάθε σωματίδιο ύλης έλκει κάθε άλλο σωματίδιο.

Οι στατιστικές υποθέσεις αναφέρονται στη συμπεριφορά τυχαίων μεταβλητών για τις οποίες μπορούμε να έχουμε παρατηρήσεις. Μερικά παραδείγματα στατιστικών υποθέσεων είναι τα εξής:

- Η κανονική κατανομή έχει μία συγκεκριμένη μέση τιμή και μία γνωστή διασπορά.
- Η κανονική κατανομή έχει μία συγκεκριμένη μέση τιμή αλλά άγνωστη διασπορά.
- Η κατανομή είναι κάποιας κανονικής μορφής, με άγνωστη μέση τιμή και άγνωστη διασπορά.
- Δύο άγνωστες κατανομές ταυτίζονται.

Στατιστική Υπόθεση:
είναι ένας ισχυρισμός που αναφέρεται στην κατανομή μίας ή περισσότερων τυχαίων μεταβλητών.

Προκειμένου να πραγματοποιήσουμε έλεγχο σε μία υπόθεση την οποία συνηθίζεται να ονομάζουμε **μηδενική υπόθεση** (null hypothesis) χρειαζόμαστε μία **εναλλακτική υπόθεση** (alternative hypothesis) σε αντιπαράθεση προς την οποία ελέγχεται η μηδενική υπόθεση. Η μηδενική υπόθεση συμβολίζεται μα το $H_0$ και η εναλλακτική υπόθεση συμβολίζεται με το $H_1$ ή το $H_A$.

# 2. Τα Στοιχεία του Ελέγχου μίας Υπόθεσης.

## 2.1. Στατιστική Συνάρτηση Ελέγχου (Test Statistic).

Θα χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα προκειμένου να κατανοήσουμε καλύτερα τη λογική που περιγράφει και αναφέρεται σε ένα στατιστικό μίας υπόθεσης. Στο παράδειγμα μας υποθέτουμε ότι σε μία τηλεφωνική έρευνα έχουμε λόγους να πιστεύουμε ότι περισσότεροι από το 50% των τηλεθεατών παρακολουθούν την πρωινή εκπομπή Α. Θα πραγματοποιήσουμε ένα πείραμα για να διαπιστώσουμε την εγκυρότητα της υπόθεσης μας. Σε ένα τυχαίο δείγμα από 100 τηλεθεατές, αν οι 99 απαντήσουν ότι παρακολουθούν την πρωινή εκπομπή Α, τότε εύκολα οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι περισσότεροι από το 50% του συνόλου των τηλεθεατών παρακολουθούν την πρωινή εκπομπή Α. Υπάρχει πιθανότητα από το επιλεγμένο δείγμα των τηλεθεατών της έρευνας μας να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι 99 από τους 100 παρακολουθούν την πρωινή εκπομπή Α. ενώ στην πραγματικότητα το συνολικό πλήθος των ατόμων που παρακολουθούν είναι λιγότερο από το 50%, ένα τέτοιο συμπέρασμα είναι σχεδόν αδύνατο.

Οι πληροφορίες που μας παρέχουν οι παραχωρηθείσες τιμές μίας τυχαίας μεταβλητής καθορίζουν την απόφαση μας για το αν θα απορρίψουμε ή δεν θα απορρίψουμε την μηδενική μας υπόθεση ($H_0$). Στη διαδικασία της λήψης της απόφασης χρησιμοποιούμε μία στατιστική συνάρτηση τη οποία ονομάζουμε ελεγχοσυνάρτηση η Στατιστική Συνάρτηση Ελέγχου (Test Statistic) και η διαδικασία που ακολουθείται ονομάζετε έλεγχος της στατιστικής υπόθεσης (test of the statistical hypothesis). Στο προηγούμενο παράδειγμα οδηγηθήκαμε σε μία απόφαση χρησιμοποιώντας μία μέθοδο η οποία περιγράφετε μέσα από μία τυπική διαδικασία στατιστικής συμπερασματολογίας.

Στο παράδειγμα θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση ότι η παράμετρος p ξεπερνά το 0,05. Η υπόθεση αυτή μπορεί να θεωρηθεί η εναλλακτική υπόθεση $H_1$. Θα οδηγηθούμε σε αυτό το συμπέρασμα δείχνοντας ότι μία άλλη υπόθεση η p=0,5 , συμπληρωματική αυτής, είναι λανθασμένη. Αυτή την υπόθεση την ορίζουμε ως η μηδενική υπόθεση $H_0$. Δηλαδή θα πρέπει να ελέγξουμε την υπόθεση:

$$H_0: p = 0,5$$
$$H_1: p > 0,5$$

Προκειμένου η εναλλακτική υπόθεση ($H_1$) να ισχύει θα πρέπει να καταλήξουμε στου συμπέρασμα ότι υπάρχουν ενδείξεις ότι η μηδενική υπόθεση $H_0$ δεν ισχύει και πρέπει να απορριφθεί.

Στο συμπέρασμα ότι ισχύει η εναλλακτική υπόθεση ($H_1$) και δεν ισχύει η μηδενική υπόθεση ($H_0$) βασίζεται σε πληροφορίες που μας παρέχει ένα επιλεγμένο δείγμα n από τον πληθυσμό, στο συγκεκριμένο παράδειγμα το δείγμα μας είναι n=100. Οι τιμές του δείγματος χρησιμοποιούνται για να αποφασίσουμε αν θα απορρίψουμε ή θα δεχτούμε τη μηδενική υπόθεση ($H_0$).

Η στατιστική συνάρτηση ελέγχου χρησιμοποιείται για την μέτρηση της διαφοράς των δεδομένων από αυτό που αναμένεται να συμβαίνει αν η μηδενική υπόθεση ($H_0$) είναι ακριβής.

## 2.2. Περιοχή Απόρριψης και Κρίσιμο Σημείο.

Οι τιμές του δείγματος που στατιστική συνάρτηση ελέγχου μπορεί να πάρει χωρίζεται σε δύο περιοχές,

α) στη **περιοχή απόρριψης** (rejection region) και
β) στη **περιοχή αποδοχής** της μηδενικής υπόθεσης (acceptance region)

Αν η τιμή βρίσκεται στην περιοχή απόρριψης τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση και δεχόμαστε την εναλλακτική υπόθεση. Αν η τιμή βρίσκεται στη περιοχή αποδοχής τότε δεχόμαστε την μηδενική υπόθεση.

Η τιμή της παραμέτρου που διαχωρίζει την περιοχή απόρριψης από τη περιοχή αποδοχής ονομάζεται **κρίσιμο σημείο** (critical point) και συμβολίζεται με **c**.

Στο παράδειγμά μας ορίζουμε αυθαίρετα κρίσιμο σημείο την τιμή 55 (C=55). Αν οι τιμές είναι από 55 έως 100 τότε απορρίπτω την $H_0$ και δέχομαι την $H_1$. Άρα αν 99 στους 100 προτιμούν την πρωινή εκπομπή Α τότε απορρίπτω την $H_0$ άρα $p>0,5$.

## 2.3. Τα Πιθανά Σφάλματα Αποφάσεων στους Ελέγχους Υποθέσεων.

Ο καθαρισμός του τρόπου με τον οποίο αποφασίζουμε αν μία ενδεχόμενη τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου θα πρέπει να τοποθετηθεί στην περιοχή αποδοχής ή στην περιοχή απόρριψης εξαρτάται από τους κινδύνους (ρίσκα) που είμαστε διατεθειμένοι να πάρουμε αν καταλήξουμε σε μία εσφαλμένη απόφαση. Τέτοιες εσφαλμένες αποφάσεις είναι:

α) Αν απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση, ενώ αυτή ισχύει στη πραγματικότητα (Σφάλμα τύπου Ι -type I error).
β) Αν απορρίψουμε τη εναλλακτική υπόθεση, ενώ αυτή ισχύει στη πραγματικότητα (Σφάλμα τύπου ΙΙ -type II error).

Ο έλεγχος υπόθεσης καταλήγει στην απόφαση επιλογής της μίας από τις δύο υποθέσεις, της μηδενικής $H_0$ ή της εναλλακτικής $H_1$. Κάθε μία από τις δύο υποθέσεις μπορεί να είναι σωστή η λανθασμένη. Συνδυάζοντας τις δύο δυνατές αποφάσεις του ελέγχου με τις δύο δυνατές πραγματικές καταστάσεις για τη στατιστική υπόθεση έχουμε τέσσερις περιπτώσεις.

| ΑΠΟΦΑΣΗ | ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ | |
|---|---|---|
| | Η $H_0$ είναι σωστή | Η $H_1$ είναι σωστή |
| Αποδοχή την $H_0$ | Σωστή απόφαση | Σφάλμα τύπου ΙΙ |
| Απορρίπτω την $H_0$ | Σφάλμα τύπου Ι | Σωστή απόφαση |

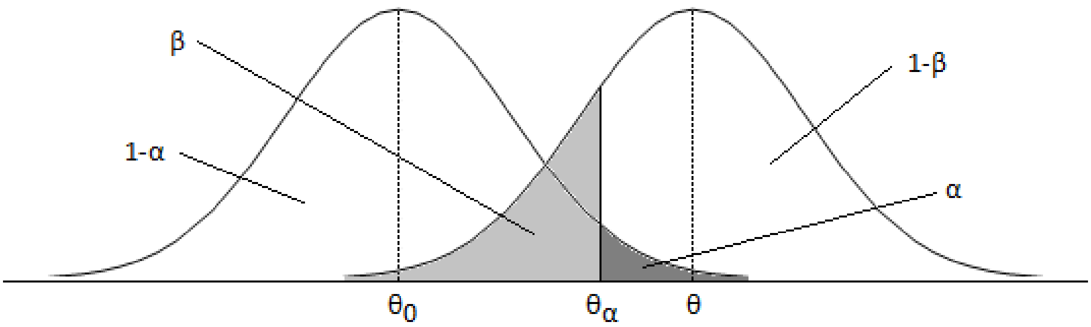
Οι πιθανότητες αυτών των τεσσάρων περιπτώσεων είναι:

1. **Σωστή απόφαση**: Αποδέχομαι την $H_0$ όταν η $H_0$ είναι σωστή. Η πιθανότητα αυτής της απόφασης είναι:
   $P(\text{αποδοχή της } H_0 \mid H_0 \text{ σωστή}) = 1\text{-}\alpha$

2. **Σφάλμα τύπου ΙΙ** (type II error): Αποδέχομαι την $H_0$ όταν η $H_0$ είναι λανθασμένη. Η πιθανότητα αυτού του σφάλματος είναι:
   $P(\text{αποδοχή της } H_0 \mid H_0 \text{ λανθασμένη}) = \beta$

3. **Σφάλμα τύπου Ι** (type I error): Απορρίπτουμε την $H_0$ όταν η $H_0$ είναι σωστή. Η πιθανότητα αυτού του σφάλματος είναι το επίπεδο σημαντικότητας (level of significance):
   $P(\text{απόρριψη της } H_0 \mid H_0 \text{ σωστή}) = \alpha$

4. **Σωστή απόφαση**: Απορρίπτουμε την $H_0$ όταν η $H_0$ είναι λανθασμένη. Η πιθανότητα αυτής της απόφασης είναι:
   P(απόρριψη της $H_0 \,|\, H_0$ λανθασμένη) = 1-β
   και δηλώνει την ισχύς ελέγχου (power of the test).




*Σχηματικά δίνονται οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας τις εκτιμήτριας της παραμέτρου θ όταν η $H_0$ είναι σωστή (με κέντρο $\theta_0$) και λανθασμένη (με κέντρο κάποια άλλη τιμή θ) και η πιθανότητες για κάθε περιοχή ανάλογα με την απόφαση ελέγχου.*

Σε ένα στατιστικό έλεγχο υπόθεσης οι ποσότητες που καθορίζουν το πλαίσιο της απόφασης είναι τρεις: α) η πιθανότητα σφάλματος τύπου Ι, β) η πιθανότητα σφάλματος τύπου ΙΙ, γ) το κρίσιμο σημείο, δηλαδή, α, β, c αντίστοιχα. Συνηθίζεται ο ερευνητής να καθορίζει το επίπεδο σημαντικότητας α, έπειτα να υπολογίζει το κρίσιμο σημείο c και έπειτα να μελετά το β.

<u>Παραδείγματα Σφάλματος τύπου Ι:</u>

1. Εάν η επίδοση των μαθητών δεν διαφέρει ως προς το φύλλο, αλλά εμείς μετά από τους στατιστικούς ελέγχους που κάναμε απορρίψαμε την υπόθεση ότι η επίδοση δεν διαφέρει ως προς το φύλλο τότε κάναμε σφάλμα τύπου Ι.
2. Εάν έχουμε ένα κανονικό νόμισμα και μετά από διάφορους στατιστικούς ελέγχους που κάναμε απορρίψαμε την υπόθεση ότι το νόμισμα είναι κανονικό τότε έχουμε κάνει σφάλμα τύπου Ι.

Παραδείγματα Σφάλματος τύπου ΙΙ:

1. Εάν η επίδοση των μαθητών δεν διαφέρει ως προς το φύλλο, αλλά εμείς μετά από τους στατιστικούς ελέγχους που κάναμε δεχθήκαμε ότι η επίδοση διαφέρει ως προς το φύλλο τότε κάναμε σφάλμα τύπου ΙΙ.
2. Εάν έχουμε ένα κανονικό νόμισμα και μετά από διάφορους στατιστικούς ελέγχους δεχθήκαμε ότι το νόμισμα δεν είναι κανονικό, τότε έχουμε διαπράξει σφάλμα τύπου ΙΙ.

Προφανώς πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί ώστε να μην κάνουμε σφάλματα στην λήψη των αποφάσεων μας. Αυτό θα το πετύχουμε παίρνοντας δείγματα και σωστά επιλεγμένα.

## 2.4. Πιθανότητες Σωστής Απόφασης: Η Ισχύς Ενός Ελέγχου.

Η πιθανότητα να απορριφθεί η μηδενική υπόθεση όταν πράγματι αυτή δεν ισχύει είναι το συμπλήρωμα του β, δηλαδή είναι 1-β. Αυτή η συνάρτηση ονομάζεται ισχύς (power) του στατιστικού ελέγχου.

| |
|---|
| Ισχύς ελέγχου (power of the test) ορίζεται η συνάρτηση:<br>P(απόρριψη της $H_0 \mid H_1$ σωστή) = 1-β |

Επειδή, συνήθως, η εναλλακτική υπόθεση είναι σύνθετη, δηλαδή περιέχει περισσότερες από μία πιθανές παραμέτρους, δεν είναι δυνατόν να υπολογισθεί μόνο ένα β το οποίο θα αντιστοιχεί σε κάθε α, αντίθετα υπάρχει μία τιμή του β, η οποία αντιστοιχεί σε κάθε μία από τις ενδεχόμενες τιμές τις παραμέτρου που μελετάμε κάτω από την εναλλακτική υπόθεση. Για αυτό το λόγο, μελετάμε τη γραφική παράσταση του β, δηλαδή της πιθανότητας του σφάλματος τύπου ΙΙ, ως συνάρτηση τις πραγματικής τιμής της παραμέτρου. Αυτή η γραφική παράσταση ονομάζεται **καμπύλη λειτουργικών χαρακτηριστικών** του στατιστικού ελέγχου (operating characteristic curve).

Η γραφική παράσταση της ισχύος ενός στατιστικού ελέγχου, δηλαδή το 1-β ονομάζεται καμπύλη ισχύος (power curve) του στατιστικού ελέγχου. Η ισχύς ενός στατιστικού αυξάνεται όσο μεγαλώνει η απόσταση της υποθετικής τιμής από τη πραγματική τιμή της παραμέτρου, όταν το α και η τιμή του δείγματος n είναι σταθερά. Η τιμή του α θα διατηρείται σταθερή, εφόσον η περιοχή απόρριψης καθορίζεται και διατηρείτε σταθερή για έναν δεδομένο έλεγχο που πραγματοποιούμε. Όταν οι τιμές του δείγματος n αυξάνονται, τότε η τιμή του β θα μειώνεται και θα ελαττώνει την τιμή του για όλες τις εναλλακτικές τιμές της παραμέτρου η οποία βρίσκεται υπό έλεγχο. Συνεπώς διαπιστώνουμε ότι για κάθε μέγεθος δείγματος υπάρχει μία καμπύλη λειτουργικών χαρακτηριστικών του δείγματος.

## 2.5. Σχέση των α και β.

1. Όταν καθορίσουμε την περιοχή απόρριψης τότε αποφασίζουμε το α τι τιμή θα πάρει.

2. Σύμφωνα με την εναλλακτική υπόθεση που θα επιλέξουμε, εξαρτάται και τι τιμή θα πάρει το β. Αν θέλουμε να διακρίνουμε μικρές αποκλίσεις από τη μηδενική τιμή της παραμέτρου, θα πρέπει το β να είναι μεγάλο. Ενώ αν θέλουμε να διακρίνουμε μεγάλες αποκλίσεις, θα πρέπει το β να είναι μικρό.

3. Όταν το μέγεθος του δείγματος είναι καθορισμένο, αν ελαττώσουμε την περιοχή απόρριψης, δηλαδή και το α, τότε το β θα μεγαλώσει. Αντίθετα αν αυξήσουμε την περιοχή απόρριψης (και το α), τότε το β θα ελαττωθεί.

4. Όταν το α είναι καθορισμένο και αυξηθεί το μέγεθος του δείγματος, δηλαδή το n, η τιμή του β μπορεί να μειωθεί.

Ο ερευνητής θα πρέπει να καθορίσει τα α και β, οι οποίες θα ορίσουν το μέγεθος το σφαλμάτων που μπορεί αυτός να αντιμετωπίσει. Ταυτόχρονα θα ορίσει μία απόκλιση από τη μηδενική τιμή της παραμέτρου την οποία θα θέλει να διαγνώσει, την οποία θεωρεί ως σημαντική. Η καθορισμένη τιμή του α θα ορίσει την περιοχή απόρριψης. Προκειμένου να βρει μία αποδεκτή τιμή για το β, για τη απόκλιση που θέλει να διαγνώσει, θα διαλέξει το μέγεθος του δείγματος που αυτός θέλει. Σημαντικό εργαλείο για να μπορέσει να πραγματοποιηθεί αυτή η αλλαγή είναι η καμπύλη των λειτουργικών χαρακτηριστικών, η οποία αντιστοιχεί σε διάφορα μεγέθη δείγματος για τον έλεγχο που πραγματοποιείται.

Όλα αυτά όμως δεν είναι εύκολο να εφαρμοστούν. Στη πλειοψηφία των στατιστικών ελέγχων ο καθορισμός της τιμής του α, για κάποια προκαθορισμένη περιοχή απόρριψης είναι εύκολη διαδικασία. Αντίθετα, είναι δύσκολη η διαδικασία του υπολογισμού της τιμής του β για διαφορετικές τιμές της εναλλακτικής υπόθεσης για την παράμετρο που θέλουμε να ελέγξουμε. Για αυτό καθορίζουμε το ρίσκο που είμαστε σε θέση να αποδεχτούμε και έπειτα καθορίζουμε την περιοχή απόρριψης.

Αν η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου βρεθεί μέσα στην περιοχή απόρριψης, θα γνωρίζουμε το ρίσκο που παίρνουμε άμα κάνουμε σφάλμα τύπου I. Αν η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου βρεθεί στην περιοχή αποδοχής δεν θα πρέπει να αποδεχθούμε αβίαστα τη μηδενική υπόθεση εφόσον δεν γνωρίζουμε την πιθανότητα ν κάνουμε σφάλμα τύπου ΙΙ. Θα πρέπει να συγκεντρώσουμε όσα πιο πολλά στοιχεία μπορούμε και μετά να αποφασίσουμε.

Ο ερευνητής θα πρέπει να εξισορροπήσει το σφάλμα τύπου Ι και το σφάλμα τύπου ΙΙ , για ένα καθορισμένο δείγμα. Οι τιμές των α και β εξαρτώνται από το μέγεθος της σημασίας που θα δώσουμε σε κάθε ένα από τα δύο είδη των πιθανών σφαλμάτων στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Αν το α αυξηθεί το β θα ελαττωθεί. Αν το α ελαττωθεί το β θα αυξηθεί.

Στις περισσότερες έρευνες στηριζόμαστε στον καθορισμό και στον έλεγχο του επιπέδου σημαντικότητας α. Για να γίνει κατανοητή αυτή η πρόταση θα χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα. Κατά τη διαδικασία εκδίκασης από το δικαστήριο μίας υπόθεσης, το δικαστήριο ορίζει ως μηδενική υπόθεση $H_0$: ο κατηγορούμενος είναι αθώος και ως εναλλακτική υπόθεση $H_1$: ότι ο κατηγορούμενος είναι ένοχος. Από αυτό το παράδειγμα προκύπτει ότι το σφάλμα τύπου Ι είναι ότι καταδικάζουμε τον κατηγορούμενο ενώ είναι αθώος, ενώ σφάλμα τύπου ΙΙ είναι να τον απαλλάξει από τις κατηγορίες ενώ είναι ένοχος.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι σοβαρότερο σφάλμα να καταδικαστεί ένας αθώος, παρά να αθωωθεί ένας ένοχος. Για αυτό το λόγο το σφάλμα τύπου Ι είναι σοβαρότερο και θα πρέπει να καθορίζεται και να ελέγχεται από τη αρχή.

## 2.6. Είδη Στατιστικών Υποθέσεων.

- Μία στατιστική υπόθεση ονομάζεται απλή (simple) αν η μηδενική υπόθεση αναφέρεται σε μία μόνο συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου θ.

  Δηλαδή, $H_0$: $\theta = \theta_0$

- Μία στατιστική υπόθεση θα ονομάζεται σύνθετη (composite) αν αναφέρεται σε περισσότερες από μία τιμή της παραμέτρου.

  Δηλαδή, $H_0$: $\theta \geq \theta_0$ ή $H_0$: $\theta \leq \theta_0$

- Ο έλεγχος μίας στατιστικής υπόθεσης θα ονομάζεται μονόπλευρος (one sided) αν η εναλλακτική είναι:

  $H_1$: $\theta < \theta_0$ (αριστερόπλευρος έλεγχος)

  $H_1$: $\theta > \theta_0$ (δεξιόπλευρος έλεγχος)

- Ο έλεγχος μίας απλής στατιστικής υπόθεσης θα ονομάζεται αμφίπλευρος ή δίπλευρος (two sided) αν η εναλλακτική είναι:

  $H_1$: $\theta \neq \theta_0$

## 2.7. Παρατηρούμενο Επίπεδο Σημαντικότητας (p-τιμή).

Οι ερευνητές δυσκολεύονται να οδηγηθούν στην επιλογή του επιπέδου σημαντικότητας α, στα προβλήματα ελέγχου στατιστικών υποθέσεων. Για αυτό όρισαν ένα μέγεθος που τους βοηθάει την περιγραφή της κατάστασης που επικρατεί στον έλεγχο στατιστικών υποθέσεων. Αυτό το μέγεθος ορίστηκε ως **παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας ή αλλιώς τιμή πιθανότητας ή p-τιμή** (observed level of significance ή probability value ή p-value).

Ορίζουμε ως παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας ή τιμή πιθανότητας ή p-τιμή (observed level of significance ή probability value ή p-value) την πιθανότητα η στατιστική συνάρτηση ελέγχου να πάρει μία τιμή τόσο ακραία ή περισσότερο ακραία από αυτήν που πήρε για το συγκεκριμένο δείγμα, κάτω από τη μηδενική υπόθεση.

Υπολογίζοντας την τιμή p-τιμή μπορούμε άμεσα να τη συγκρίνουμε με οποιοδήποτε α αν επιλέξουμε, και να αποφασίσουμε για την απόρριψη ή όχι της $H_0$. Ο **κανόνας απόφασης** διαμορφώνεται ως εξής:

- αν α $\geq$ p-τιμή, τότε, σε επίπεδο σημαντικότητας α, η $H_0$ απορρίπτεται.

- αν α $<$ p-τιμή, τότε, σε επίπεδο σημαντικότητας α, η $H_0$ δεν απορρίπτεται

Συνοψίζοντας έχουμε:

1. Η p-τιμή μπορεί να ορισθεί και ως εξής: p-τιμή είναι η ελάχιστη τιμή του επιπέδου σημαντικότητας για την οποία απορρίπτεται η $H_0$.

2. Η p-τιμή είναι ένα μέτρο το οποίο εκφράζει πόσο ισχυρές είναι οι αποδείξεις που προκύπτουν από το δείγμα, εναντίον της $H_0$.

# 3. Έλεγχοι Υποθέσεων για τη Μέση Τιμή.

Αρχικά μας ενδιαφέρει να ορίσουμε ως μέση τιμή του πληθυσμού έναν συγκεκριμένο αριθμό $\mu_0$. Άρα σαν μηδενική υπόθεση ορίζουμε ότι η μέση τιμή ισούται με τον συγκεκριμένο αυτό αριθμό ($H_0$: $\mu = \mu_0$). Ως εναλλακτική ορίζουμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις:

1. Η τιμή της μέσης τιμής να είναι διαφορετική από τη $\mu_0$. Άρα ο αμφίπλευρος έλεγχος γράφετε:

   $H_0$: $\mu = \mu_0$
   $H_1$: $\mu \neq \mu_0$

2. Η τιμή της μέσης τιμής να είναι μεγαλύτερη από το $\mu_0$. Άρα ο δεξιόπλευρος έλεγχος γράφετε:

   $H_0$: $\mu = \mu_0$
   $H_1$: $\mu > \mu_0$

3. Η τιμή της μέσης τιμής να είναι μικρότερη από το $\mu_0$. Άρα ο αριστερόπλευρος έλεγχος γράφετε:

   $H_0$: $\mu = \mu_0$
   $H_1$: $\mu < \mu_0$

## 3.1. Έλεγχος Μέσης Τιμής ενός κανονικού πληθυσμού με διακύμανση $\sigma^2$ γνωστή.

Η κατανομή της δειγματικής μέσης τιμής είναι η κατανομή με μέση τιμή πληθυσμού και διακύμανση τη $\frac{s^2}{n}$. Επομένως ο έλεγχος για τη μέση τιμή θα γίνεται ως εξής:

α. Δεχόμαστε ότι έχουμε κανονική κατανομή και $\sigma^2$ γνωστή.

β. Ορίζουμε τη μηδενική και την εναλλακτική υπόθεση

$H_0$: $\mu = \mu_0$
$H_1$: i) $\mu \neq \mu_0$
ii) $\mu > \mu_0$
iii) $\mu < \mu_0$

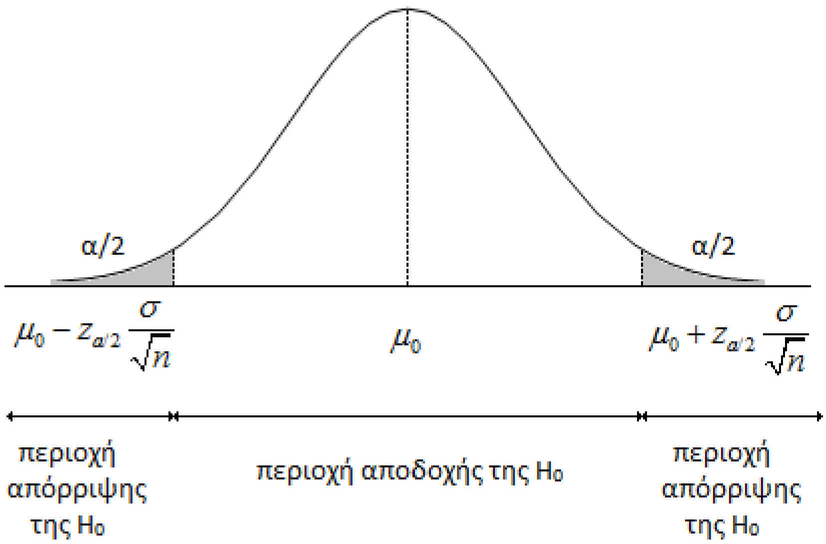
γ. Το κριτήριο απόφασης είναι: $Z = \frac{\overline{X} - m_0}{s / \sqrt{n}}$

ακολουθεί κανονική κατανομή N(0,1).
Συμβολίζουμε με $z_{\alpha/2}$ και $z_\alpha$ τις τιμές της Z για τις οποίες ισχύει
$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$
$P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$
$P(Z \leq -z_\alpha) = \alpha$
Έστω το στατιστικό $z = \frac{\overline{x} - m_0}{s / \sqrt{n}}$

δ. Η απόφαση:

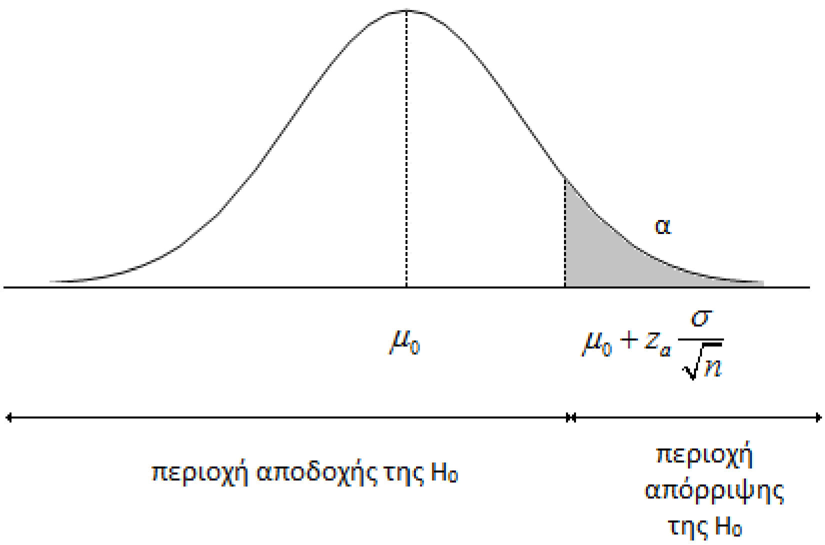
i. $H_0$: $\mu = \mu_0$
$H_1$: $\mu \neq \mu_0$

Αν $|z| > z_{\alpha/2}$, τότε η $H_0$ απορρίπτεται



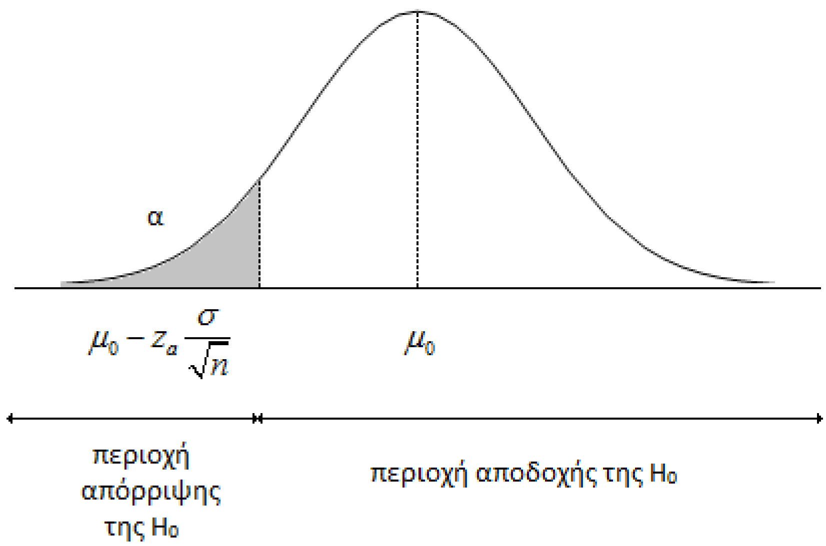

ii. $H_0$: $\mu = \mu_0$
$H_1$: $\mu > \mu_0$

Αν $z > z_\alpha$, τότε η $H_0$ απορρίπτεται




iii. $H_0$: $\mu = \mu_0$
$H_1$: $\mu < \mu_0$

Αν $z < -z_\alpha$, τότε η $H_0$ απορρίπτεται




- Έλεγχος με την p-τιμή

Αν $z_0$ είναι η παρατηρούμενη τιμή της Z, η p-τιμή του ελέγχου είναι η πιθανότητα να παρατηρήσουμε για τη Z μία τιμή τουλάχιστον, τόσο ακραία, όσο αυτή που παρατηρήσαμε όταν ισχύει η $H_0$. Για τα τρία είδη ελέγχου έχουμε αντίστοιχα:

i. $p = 2P(Z > |z_0|)$

ii. $p = P(Z > z_0)$

iii. $p = P(Z < z_0)$

Όταν η p-τιμή του ελέγχου είναι μικρότερη από το α έχουμε μεγαλύτερη εμπιστοσύνη για τη στατιστική σημαντικότητα της παρατηρούμενης διαφοράς, και συνεπώς για την ισχύ της $H_1$.
Δηλαδή:

Αν p-τιμή $\leq$ α τότε η $H_0$ απορρίπτεται.

Αν p-τιμή > α τότε η $H_0$ δεν απορρίπτεται.

**Παράδειγμα**

Σε εκτεταμένη εμπειρική έρευνα που έγινε το 1960 βρέθηκε ότι το βάρος γεννήσεως των μη πρόωρων βρεφών προσεγγίζει πολύ καλά την N(3.300,900). Σε τυχαίο δείγμα n = 20 βρεφών που γεννήθηκαν το 1985 βρέθηκε μέσο βάρος 3.380. Με βάση το αποτέλεσμα αυτό, να ελεγχθεί η υπόθεση ότι το μέσο βάρος γεννήσεως δεν α0υξήθηκε στο χρονικό διάστημα μεταξύ 1960-1985 σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0,05.

Έχουμε κανονική κατανομή με $s = \sqrt{900} = 30$

$H_0$: μ = 3.300
$H_1$: μ > 3.300

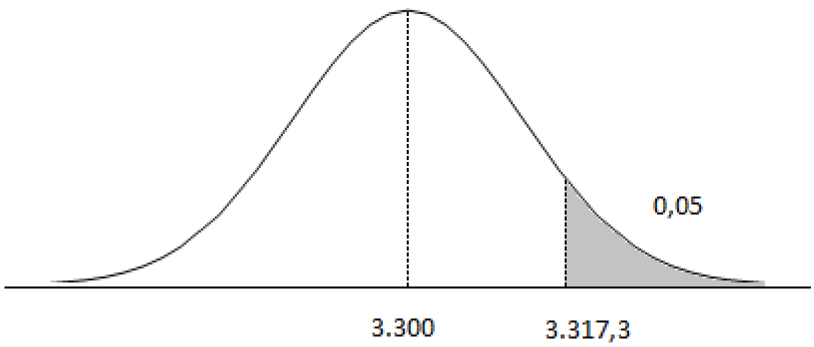
$$z = \frac{\overline{x} - m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{3.380 - 3.300}{\frac{30}{\sqrt{20}}} = 11,92 > 1,65$$

$z_\alpha = 1,65$ (από πίνακα 1)

$z > z_\alpha$ Άρα απορρίπτουμε την $H_0$

- Η τιμή πιθανότητας του ελέγχου ισούται με:
  p-τιμή = P(Z > 11,92) = 0,00002

Δηλαδή, η $H_0$ θα απορριφθεί για οποιαδήποτε επίπεδα σημαντικότητας μεγαλύτερο από 0,00002



## 3.2. Έλεγχος Μέσης Τιμής ενός κανονικού πληθυσμού με διακύμανση $\sigma^2$ άγνωστη.

Αφού η διακύμανση $\sigma^2$ είναι άγνωστη θα κάνουμε εκτίμηση με τη δειγματική διακύμανση $s^2$. Αν έχουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n, τότε η τυχαία μεταβλητή $t = \dfrac{\overline{X} - m}{S/\sqrt{n}}$ ακολουθεί την κατανομή student με ν = n-1 βαθμούς ελευθερίας. Επομένως ο έλεγχος για τη μέση τιμή θα γίνεται ως εξής:

α. Δεχόμαστε ότι η κατανομή είναι κανονική.

β. Ορίζουμε τη μηδενική και την εναλλακτική υπόθεση:

$H_0$: $\mu = \mu_0$
$H_1$: i) $\mu \neq \mu_0$
ii) $\mu > \mu_0$
iii) $\mu < \mu_0$

γ. Το κριτήριο απόφασης είναι:

Συμβολίζουμε με $t_{n-1,\alpha}$, $t_{n-1,\alpha/2}$ τις τιμές της κατανομής student (n-1) βαθμούς ελευθερίας και ισχύει:

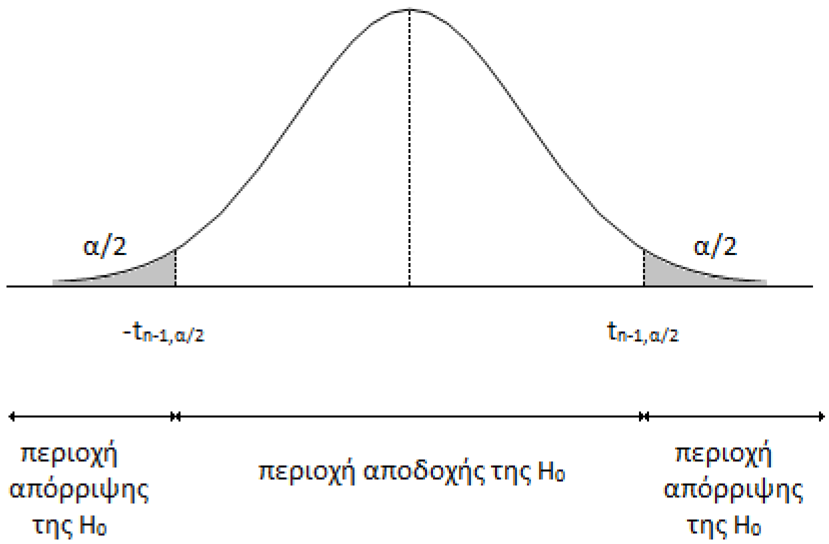
$P(t_{n-1} > t_{n-1,\alpha}) = P(t_{n-1} < -t_{n-1,\alpha}) = \alpha$
$P(t_{n-1} > t_{n-1,\alpha/2}) + P(t_{n-1} < t_{n-1,\alpha/2}) = \alpha/2 + \alpha/2 = \alpha$

Έστω το στατιστικό: $t = \dfrac{\overline{x} - m}{s/\sqrt{n}}$

δ. Η Απόφαση:

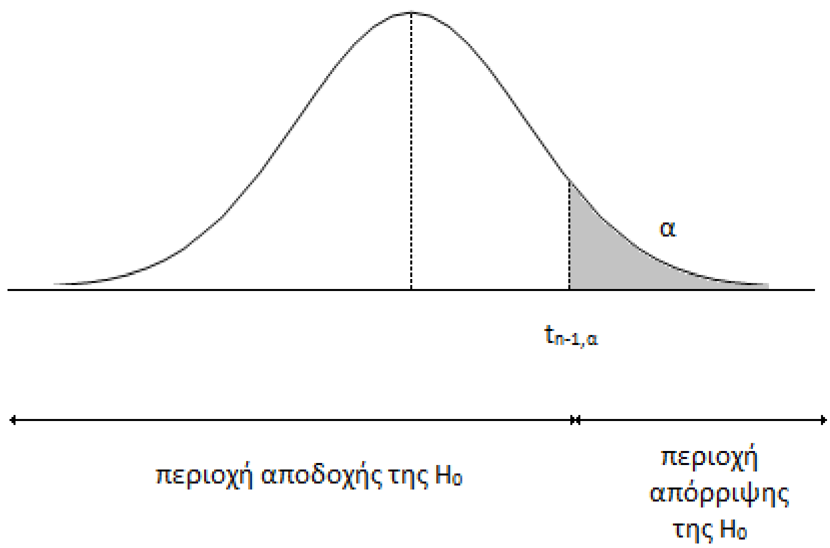
i. $H_0$: $\mu = \mu_0$
$H_1$: $\mu \neq \mu_0$

Αν $|t| > t_{n-1,\alpha/2}$, τότε η $H_0$ απορρίπτεται.



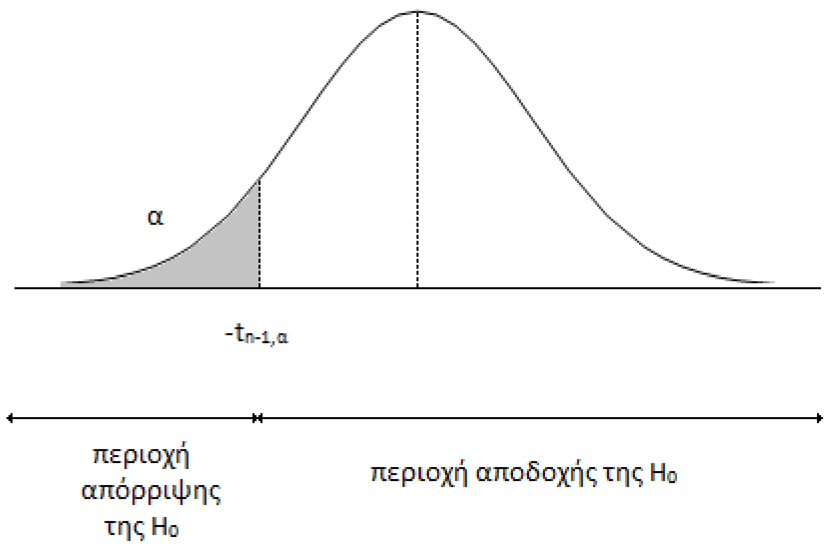

ii. $H_0$: $\mu = \mu_0$
$H_1$: $\mu > \mu_0$

Αν $t > t_{n-1,\alpha}$, τότε η $H_0$ απορρίπτεται.



iii. $H_0: \mu = \mu_0$
$H_1: \mu < \mu_0$

Αν $t < -t_{n-1,\alpha}$, τότε η $H_0$ απορρίπτεται.



## Παράδειγμα

Αυτόματο μηχάνημα κόβει μεταλλικά ελάσματα των οποίων το μήκος X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μ = 5 cm. Ένα περίπου εικοσιτετράωρο πριν την εμφάνιση βλάβης, το μήκος των ελασμάτων μειώνεται οπότε, εκτός από την τακτική συντήρηση του μηχανήματος, καθημερινά μετριέται το μήκος σε τυχαίο δείγμα n=20 ελασμάτων. Αν στο δείγμα μίας μέρας υπολογίσαμε μέσο μήκος 4,5 cm και s = 1 cm, να ελεγχθεί η υπόθεση ότι το μέσο μήκος στο σύνολο της παραγωγής δεν μειώθηκε σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0,01.

Έχουμε κανονική κατανομή

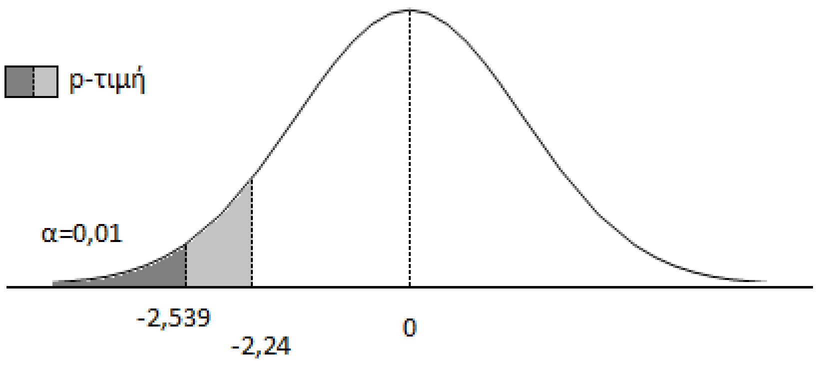
$H_0$: μ = 5
$H_1$: μ < 5

v = n-1 = 19 βαθμούς ελευθερίας.

Από πίνακα t-κατανομής βρίσκουμε $t_{19,0.01} = 2{,}539$

Έχουμε $t = \dfrac{\bar{x} - m}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{4{,}5-5}{1/\sqrt{20}} = -2{,}24 > -2{,}539$

δεν απορρίπτουμε την $H_0$



## 3.3. Έλεγχος Μέσης Τιμής ενός μη κανονικού πληθυσμού Μεγάλα δείγματα.

Όταν η κατανομή του πληθυσμού δεν είναι κανονική και έχουμε μεγάλα δείγματα (n > 30). Τότε από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα μπορούμε να προσεγγίσουμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $\frac{\overline{X}-m}{s/\sqrt{n}}$ με την N(0,1). Οπότε εργαζόμαστε όπως στο 3.1 όταν η διακύμανση είναι γνωστή και όταν η διακύμανση είναι άγνωστη αντικαθιστούμε την σ με την εκτίμηση της s στο δείγμα (δηλαδή σ = s).

**<u>Παράδειγμα</u>**

Μεγάλη κατασκευαστική εταιρεία χρειάζεται καρφιά με διάμετρο 50 χιλιοστά. Για να ελέγξει μία μεγάλη παραγγελία πήρε τυχαίο δείγμα από n = 100 καρφιά και βγήκε μέση διάμετρο 49 χιλιοστά και s = 40 χιλιοστά. Να ελέγχει αν με βάση τα αποτελέσματα αυτά μπορεί να γίνει δεκτή η παραγγελία όταν είναι γνωστό ότι η επιχείρηση δέχεται πιθανότητα να απορρίψει την παραγγελία, παρόλο που είναι σύμφωνη με τις προδιαγραφές, ίση με α = 0,05.

Το μέγεθος του δείγματος είναι n = 100 είναι μεγάλο οπότε σ = s = 40

$H_0$: μ = 50
$H_1$: μ ≠ 50

Από πίνακα 1 $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

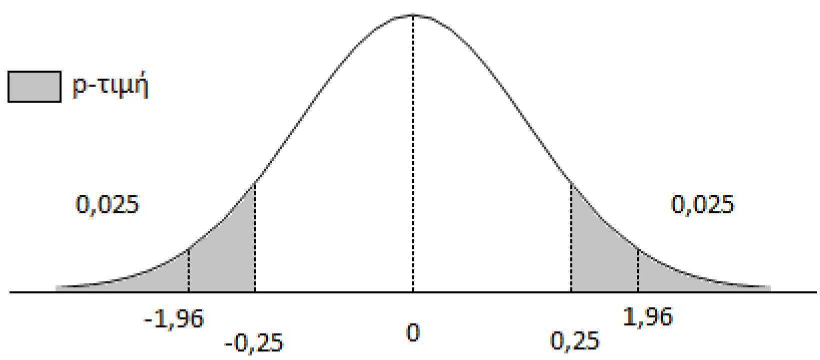
$$|z| = \left|\frac{x-m}{s/\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{49-50}{40/\sqrt{100}}\right| = 0{,}25 < 1{,}96$$

Δεν απορρίπτουμε την $H_0$.

Η p-τιμή είναι

$$p = 2P(Z > 0.25)$$
$$p = 2(1 - j\ (0.25))$$
$$p = 2(1 - 0.59871)$$
$$p = 0.80258 > 0.05$$

η $H_0$ δεν απορρίπτεται



# 4. Έλεγχος για τη διακύμανση.

Οι στατιστικοί έλεγχοι για τη διακύμανση ενός πληθυσμού είναι χρήσιμοι στον έλεγχο της ποιότητας ενός προϊόντος στο οποίο η μεταβλητότητα των χαρακτηριστικών τους δεν πρέπει να υπερβαίνουν ορισμένα όρια (π.χ. βάρος, ύψος, αντοχή κ.τ.λ.). Στις περισσότερες περιπτώσεις μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κατανομή είναι κανονική. Αν σε δείγμα n στοιχείων με $s^2$ η διακύμανση του δείγματος και $\sigma^2$ η διακύμανση του πληθυσμού, τότε η τυχαία μεταβλητή: $c^2 = \frac{(n-1)S^2}{s^2}$ ακολουθεί την κατανομή $\chi^2$ με ν = n-1 βαθμούς ελευθερίας. Επομένως ο έλεγχος για τη διακύμανση γίνεται ως εξής:

α. Δεχόμαστε ότι έχουμε κανονική κατανομή και το δείγμα τυχαίο.

β. Ορίζουμε τη μηδενική και την εναλλακτική υπόθεση:

$H_0$: $\sigma^2 = s_0^2$
$H_1$: i) $\sigma^2 \neq s_0^2$
ii) $\sigma^2 > s_0^2$
iii) $\sigma^2 < s_0^2$

γ. Το κριτήριο απόφασης είναι:
Συμβολίζουμε με $c^2_{n,a}$, $c^2_{n,1-a}$ τις τιμές της κατανομής $\chi^2$ με ν = n-1 βαθμούς ελευθερίας.

Ισχύει:

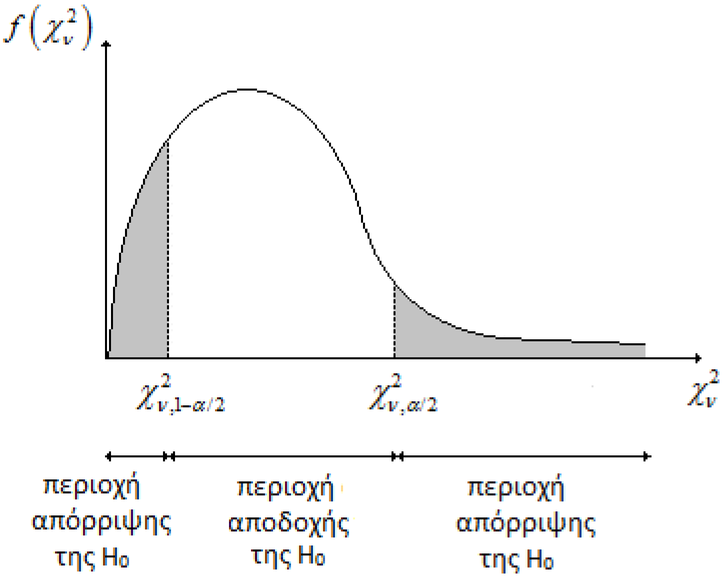
$P(c_n^2 > c^2_{n,a}) = \alpha$
$P(c_n^2 > c^2_{n,1-a}) = 1-\alpha$

Αν $s^2$ η διακύμανση σε n δείγμα τότε: $c^2 = \frac{(n-1)s^2}{s_0^2}$

δ. Η απόφαση:

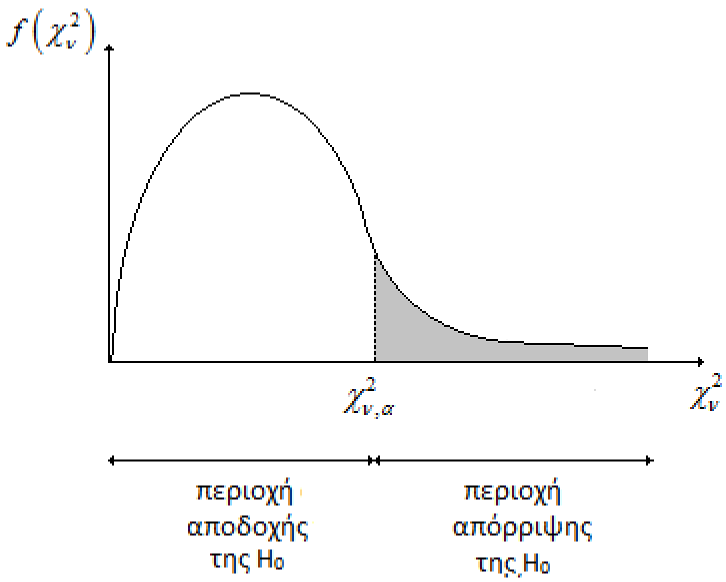
i. $H_0$: $\sigma^2 = s_0^2$
$H_1$: $\sigma^2 \neq s_0^2$

Αν $\chi^2 < c^2_{n,1-a/2}$ ή $\chi^2 > c^2_{n,a/2}$, τότε η $H_0$ απορρίπτεται.




ii. $H_0$: $\sigma^2 = s_0^2$
$H_1$: $\sigma^2 > s_0^2$

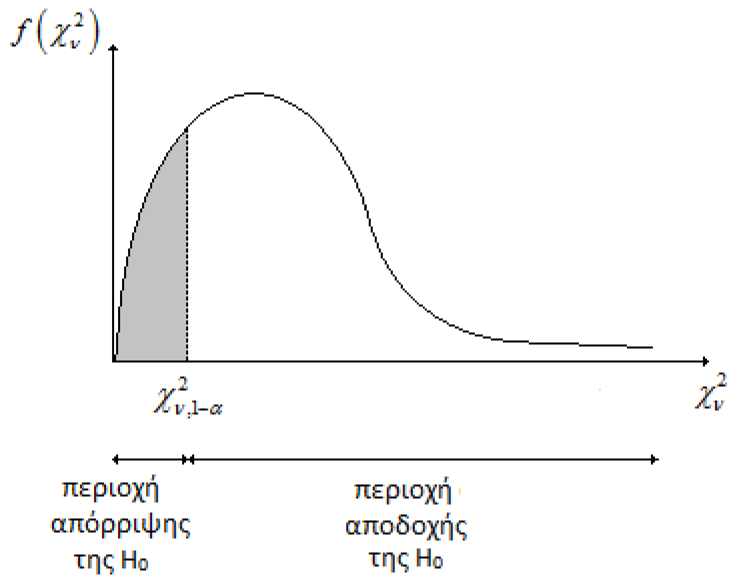
Αν $\chi^2 > c^2_{n,a}$, τότε η $H_0$ απορρίπτεται.



iii. $H_0$: $\sigma^2 = s_0^2$

$H_1$: $\sigma^2 < s_0^2$

Αν $\chi^2 < c_{n,1-a}^2$, τότε η $H_0$ απορρίπτεται.



**Παράδειγμα**

Αυτόματο μηχάνημα παράγει ατσάλινο σύρμα στο οποίο σύμφωνα με τις προδιαγραφές του μηχανήματος η τυπική απόκλιση της αντοχής του δεν υπερβαίνει τα 5 κιλά. Αν σε 16 δοκιμές σε τυχαία σημεία του παραγόμενου σύρματος μετρήσαμε την αντοχή και υπολογίσαμε s = 5,6 κιλά να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0.01 αν το μηχάνημα ικανοποιεί τις προδιαγραφές αγοράς του. Η κατανομή της αντοχής του ατσάλινου σύρματος μπορεί να υποτεθεί κανονική.

Δεχόμαστε ότι η κατανομή του πληθυσμού είναι κανονική και το δείγμα είναι τυχαίο.

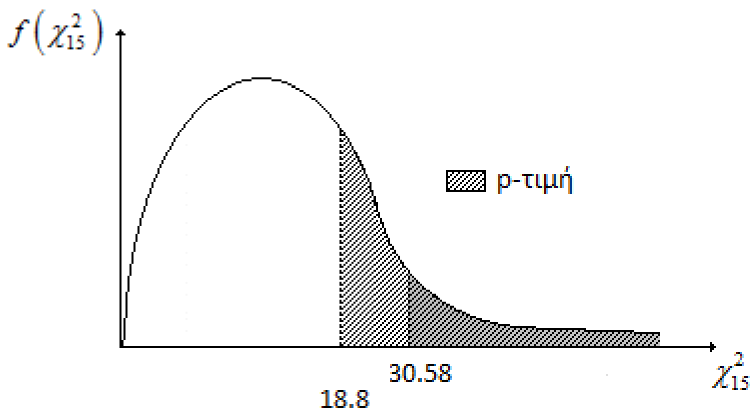
$H_0$: $\sigma^2 = 25$
$H_1$: $\sigma^2 > 25$

Για α = 0.01 και ν = n-1 = 15 βαθμούς ελευθερίας.

Από τον πίνακα 4 έχουμε: $c^2_{15,001} = 30.58$

$$c^2 = \frac{(n-1)s^2}{s_0^2} = \frac{15 \cdot (5.6)^2}{25} = 18.8 < 30.58$$

Άρα η $H_0$ δεν απορρίπτεται



# 5. Έλεγχος της διαφορές δύο μέσων. Ανεξάρτητα δείγματα.

## 5.1. Γνωστές διακυμάνσεις.

Έστω $X_1$ και $X_2$ δύο τυχαίες μεταβλητές, που θέλουμε να ελέγξουμε την ισότητα των μέσων τους με βάση τη διαφορά των δειγματικών μέσων δύο τυχαίων και ανεξάρτητων δειγμάτων μεγέθους $n_1$ και $n_2$, αντίστοιχα.

Αν $X_1 \sim \mathrm{N}(m_1, s_1^2)$ και $X_2 \sim \mathrm{N}(m_2, s_2^2)$

τότε η τυχαία μεταβλητή $Z = \dfrac{\left(\overline{X_1} - \overline{X_2}\right) - \left(m_1 - m_2\right)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$

ακολουθεί N(0,1).

Αν $X_1$, $X_2$ δεν ακολουθούν κανονική κατανομή και $n_1$, $n_2$ >30 τότε η κατανομή της Z προσεγγίζει την κανονική κατανομή. Ο έλεγχος της διαφοράς των δύο μέσων (ισότητας των 2 μέσων) γίνεται ως εξής:

α. Δεχόμαστε ότι:

i. Οι δύο κατανομές του πληθυσμού είναι κανονικές κατανομές ή το μέγεθος των δειγμάτων $n_1$, $n_2$ >30.

ii. Τα δείγματα είναι τυχαία και ανεξάρτητα.

iii. Οι διακυμάνσεις γνωστές $s_1^2$ και $s_2^2$.

β. Ορίζουμε τη μηδενική και την εναλλακτική υπόθεση.

$H_0$: $\mu_1 = \mu_2$
$H_1$: i) $\mu_1 \neq \mu_2$
ii) $\mu_1 > \mu_2$
iii) $\mu_1 < \mu_2$

γ. Το κριτήριο απόφασης.

Υπολογίζουμε το στατιστικό $z = \dfrac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$

δ. Η απόφαση.

i. $H_0$: $\mu_1 = \mu_2$
$H_1$: $\mu_1 \neq \mu_2$

Αν $|z| > z_{\alpha/2}$, τότε η $H_0$ απορρίπτεται.

ii. $H_0$: $\mu_1 = \mu_2$
$H_1$: $\mu_1 > \mu_2$

Αν $z > z_\alpha$, τότε η $H_0$ απορρίπτεται.

iii. $H_0$: $\mu_1 = \mu_2$
$H_1$: $\mu_1 < \mu_2$

Αν $z < -z_\alpha$, τότε η $H_0$ απορρίπτεται.

**Παράδειγμα**

Πολυεθνική εταιρεία θέλει να ελέγξει αν η απόδοση των εργατών της στο εργοστάσιο είναι ίδια με την απόδοση των εργατών στο εργοστάσιο Β. Σε τυχαίο δείγμα $n_1$ = 30 εργατών του εργοστασίου Α υπολόγισε μέσο χρόνο εκτέλεσης ορισμένου έργου 54 min ενώ σε τυχαίο δείγμα $n_2$ = 20 εργατών του εργοστασίου Β ο μέσος χρόνος εκτέλεσης του ίδιου έργου ήταν 57 min. Να ελεγχθεί η υπόθεση της ισότητας του μέσου χρόνου για το σύνολο των εργατών στα δύο εργοστάσια σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0.05 αν είναι γνωστό ότι ο χρόνος εκτέλεσης του έργου αυτού ακολουθεί την κανονική κατανομή και οι διακυμάνσεις είναι αντίστοιχα ίσες με $s_1^2 = 36$ και $s_2^2 = 64$.

Ξέρουμε ότι $X_1 \sim \mathrm{N}(m_1, 36)$ και $X_2 \sim \mathrm{N}(m_2, 64)$

$H_0$: $\mu_1 = \mu_2$
$H_1$: $\mu_1 \neq \mu_2$
Από πίνακα 1 για α = 0.05 το $z_{\alpha/2} = 1.96$

$$|z| = \left| \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \right| = \left| \frac{54-57}{\sqrt{\frac{36}{30} + \frac{64}{20}}} \right| = 1.43 < 1.96$$

$|z| < z_{\alpha/2}$

Άρα δεν απορρίπτουμε την $H_0$.

## 5.2. Άγνωστες διακυμάνσεις πληθυσμού. Μεγάλα Δείγματα.

Όταν οι διακυμάνσεις $\sigma_1$, $\sigma_2$ είναι άγνωστες και τα δείγματα $n_1$, $n_2 > 30$, τότε αντικαθιστώ τα $\sigma_1$, $\sigma_2$ με $s_1$, $s_2$ αντίστοιχα και δουλεύω όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο 5.1.

## 5.3. Άγνωστες διακυμάνσεις κανονικών πληθυσμών. Μικρά δείγματα. Ισότητα διασπορών.

Έχουμε ότι οι κατανομές είναι κανονικές και υποθέτουμε ότι $s_1^2 = s_2^2 = s^2$

Ορίζουμε:
$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2}{n_1+n_2-2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow S^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

Η $S^2$ ως συνάρτηση των $S_1^2$ και $S_2^2$ είναι τυχαία μεταβλητή. Επίσης έχουμε $\nu = (n_1+n_2-2)$ βαθμούς ελευθερίας. Άρα η τυχαία μεταβλητή:

$$t = \frac{\left(\overline{X_1}-\overline{X_2}\right)-(m_1-m_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

ακολουθεί την κατανομή student με $\nu = n_1+n_2-2$ βαθμούς ελευθερίας. Ο έλεγχος της διαφοράς των δύο μέσων (ισότητα δύο μέσων) γίνεται ως εξής:

α. Δεχόμαστε ότι:

i. Οι δύο κατανομές του πληθυσμού είναι κανονικές και έχουν ίδια διακύμανση.

ii. Τα δείγματα είναι τυχαία και ανεξάρτητα.

β. Ορίζουμε τη μηδενική και την εναλλακτική υπόθεση.

$H_0$: $\mu_1 = \mu_2$
$H_1$: i) $\mu_1 \neq \mu_2$
ii) $\mu_1 > \mu_2$
iii) $\mu_1 < \mu_2$

γ. Το κριτήριο απόφασης:

Υπολογίζουμε τα στατιστικά

$$s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

δ. Η απόφαση:

i. $H_0$: $\mu_1 = \mu_2$
$H_1$: $\mu_1 \neq \mu_2$

Αν $|t| > t_{v,\alpha/2}$, τότε η $H_0$ απορρίπτεται.

ii. $H_0$: $\mu_1 = \mu_2$
$H_1$: $\mu_1 > \mu_2$

Αν $t > t_{v,\alpha}$, τότε η $H_0$ απορρίπτεται.

iii. $H_0$: $\mu_1 = \mu_2$
$H_1$: $\mu_1 < \mu_2$

Αν $t < -t_{v,\alpha}$, τότε η $H_0$ απορρίπτεται.

## **Παράδειγμα**

Για να ελέγξουμε αν η παραγωγικότητα του ανειδίκευτου εργάτη είναι διαφορετική στα δύο φύλα, πήραμε τυχαίο δείγμα $n_1$ = 5 ανδρών και τυχαίο δείγμα $n_2$ = 5 γυναικών και υπολογίσαμε τον αριθμό των προϊόντων χ που παράγουν σε μία ημέρα. Αν τα αποτελέσματα των μετρήσεων ήταν τα ακόλουθα:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Γυναίκες | 14 | 17 | 12 | 13 | 14 |
| Άνδρες | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

και μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι κατανομές των $X_1$ και $X_2$ είναι κανονικές με ίδια διακύμανση, να ελέγχει η υπόθεση της ίσης παραγωγικότητας σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0.10.

Ξέρουμε ότι $X_1 \sim N(m_1, s_1^2)$ και $X_2 \sim N(m_2, s_2^2)$. Επίσης $s_1^2 = s_2^2 = s^2$

$H_0$: $\mu_1 = \mu_2$
$H_1$: $\mu_1 \neq \mu_2$

Από πίνακα 3 για α = 0.01 α/2 = 0.05 και ν = $n_1+n_2-2=8$ έχουμε $t_{8,0.05} = 1.86$

$$|t| = \left| \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right| = \left| \frac{14-8}{1.73 \cdot \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}} \right| = 5.5$$

$$\overline{x_1} = \frac{\sum_{i=1}^{5} X_{1i}}{5} = \frac{14+17+12+13+14}{5} = \frac{70}{5} = 14$$

$$\overline{x_2} = \frac{\sum_{i=1}^{5} X_{2i}}{5} = \frac{6+7+8+9+10}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(X_{1i} - \overline{X}_1)^2}{5-1} =$$

$$= \frac{(14-14)^2 + (17-14)^2 + (12-14)^2 + (13-14)^2 + (14+14)^2}{4} =$$

$$= \frac{9+4+1}{4} = \frac{14}{4} = 3.5$$

$$s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(X_{2i} - \overline{X}_1)^2}{5-1} = \frac{(6-8)^2 + (7-8)^2 + (8-8)^2 + (9-8)^2 + (10-8)^2}{4} =$$

$$= \frac{4+1+1+4}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$$

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{4 \cdot 3.5 + 4 \cdot 2.5}{8} = \frac{14+10}{8} = 3$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{3} = 1.73$$

$|t| > t_{8,0.05}$ Άρα απορρίπτουμε την $H_0$.

Άρα οι γυναίκες και οι άντρες δεν έχουν ίση απόδοση.

# 6. Έλεγχος της διαφοράς δύο μέσων. Ζευγαρωτές παρατηρήσεις.

Σε πολλές έρευνες μας ενδιαφέρει η σύγκριση ενός χαρακτηριστικού του πληθυσμού πριν και μετά την μεταβολή ενός εξωτερικού παράγοντα (πριν και μετά την εισαγωγή μιας μεταβλητής ελέγχου). Σε μία τέτοια περίπτωση παίρνουμε με απλή τυχαία δειγματοληψία n ζεύγη στοιχείων τα οποία να είναι όμοια και στο δεύτερο στοιχείο κάθε ζεύγους εισάγουμε τη μεταβολή ελέγχου. Προκύπτουν n ζεύγη παρατηρήσεων η οποίες ανά δύο δεν είναι ανεξάρτητες αφού γίνονται στο ίδιο στοιχείο σε δύο ομοιογενή στοιχεία του πληθυσμού.

Η τυχαία μεταβλητή D = X-Y ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu_1$-$\mu_2$. Άρα η τυχαία μεταβλητή $t = \frac{\overline{D} - (m_1 - m_2)}{S_D / \sqrt{n}}$ ακολουθεί την κατανομή student με ν = n-1 βαθμούς ελευθερίας.

Ο έλεγχος της διαφοράς των δύο μέσων (ισότητας των δυο μέσων) γίνεται ως εξής:

α. Δεχόμαστε ότι: Οι δύο κατανομές πληθυσμού είναι κανονικές και το δείγμα των διαφορών τυχαίο.

β. Ορίζουμε τη μηδενική και την εναλλακτική υπόθεση.

$H_0$: $\mu_1 = \mu_2$
$H_1$: i) $\mu_1 \neq \mu_2$
ii) $\mu_1 > \mu_2$
iii) $\mu_1 < \mu_2$

γ. Το κριτήριο Απόφασης: Υπολογίζουμε:

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$s_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(d_i - \overline{d}\right)^2}{n-1}$$

$$t = \frac{\overline{d}}{s_d / n}$$

δ. Η Απόφαση:

i. $H_0: \mu_1 = \mu_2$
$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

Αν $|t| > t_{n-1,\alpha/2}$, τότε η $H_0$ απορρίπτεται.

ii. $H_0: \mu_1 = \mu_2$
$H_1: \mu_1 > \mu_2$

Αν $t > t_{n-1,\alpha}$, τότε η $H_0$ απορρίπτεται.

iii. $H_0: \mu_1 = \mu_2$
$H_1: \mu_1 < \mu_2$

Αν $t < t_{n-1,\alpha}$, τότε η $H_0$ απορρίπτεται.

**Παράδειγμα**

Ο υπεύθυνος μεγάλης επιχείρησης παραγωγής μεταλλικών προϊόντων θέλει να αγοράσει καινούρια μηχανήματα κοπής φύλλων μετάλλου. Για να ελέγξει αν η απόδοση των μηχανημάτων Α και της Β μάρκας διαφέρουν, πήρε τυχαίο δείγμα από 12 εργάτες οι οποίοι την πρώτη μέρα χειρίζονται τα μηχανήματα της Α μάρκας και τη δεύτερη της Β μάρκας. Για κάθε ένα από τους εργάτες κατέγραψε τον αριθμό των φύλλων που έκοψε ημερησίως και πήρε τα εξής αποτελέσματα.

| Εργάτης | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Μηχά-νημα Α | 80 | 95 | 104 | 117 | 79 | 95 | 100 | 83 | 79 | 80 | 98 | 104 |
| Μηχά-νημα Β | 88 | 105 | 102 | 107 | 80 | 98 | 110 | 74 | 86 | 84 | 90 | 108 |

Αν μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο αριθμός των μεταλλικών φύλων που κόβει μία μηχανή ακολουθεί την κανονική κατανομή, να ελεγχθεί η υπόθεση ότι η απόδοση των δύο μηχανημάτων είναι ίδια για τις δύο μάρκες σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$.
Πρέπει να βρούμε τις διαφορές.

| Εργάτης | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 80 | 95 | 104 | 117 | 79 | 95 | 100 | 83 | 79 | 80 | 98 | 104 |
| Y | 88 | 105 | 102 | 107 | 80 | 98 | 110 | 74 | 86 | 84 | 90 | 108 |
| D = X-Y | -8 | -10 | 2 | 10 | -1 | -3 | -10 | 9 | -7 | -4 | 8 | -4 |

Η κατανομή είναι κανονική και για τις 2 μηχανές, το δείγμα των διαφορών είναι τυχαίο.

$H_0: \mu_1 = \mu_2$
$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

Από τον πίνακα 3 για $\alpha = 0.05$, $\alpha/2 = 0.025$ και $\nu = n-1 = 11$βαθμούς ελευθερίας. Έχουμε $t_{11,0.025} = 2.201$

$$|t| = \left|\frac{\bar{d}}{s_d / n}\right| = \left|\frac{-1.8}{7.52/12}\right| = 0.83$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{12} d_i}{12} = \frac{-8-10+2+10-1-3-10+9-7-4+8-4}{12} = -1.8$$

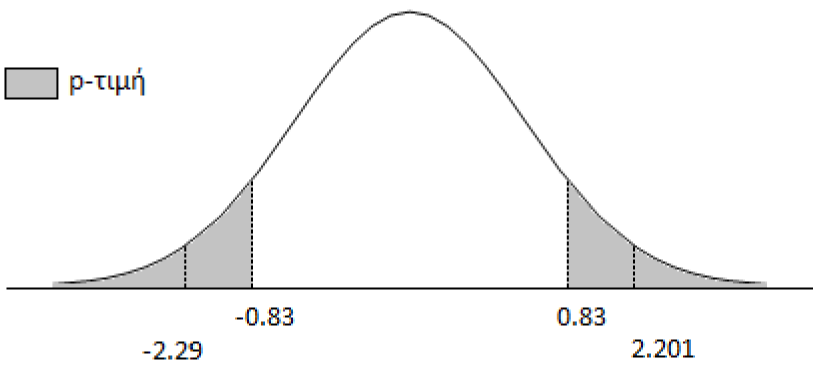
$$s_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{12}\left(d_i - \bar{d}\right)^2}{12-1} = \frac{(-8+1.8)^2 + (-10+1.8)^2 + (2+1.8)^2 + \ldots + (-1+1.8)^2}{11} = 56.87$$

$$S_d = \sqrt{56.87} = 7.54$$

$$|t| < t_{11,0.025}$$

Δεν απορρίπτουμε την $H_0$

Η τιμή πιθανότητας του ελέγχου δίνεται ως σκιασμένη επιφάνεια στο σχήμα που ακολουθεί.



# 7. Έλεγχος της Ισότητας δύο Διακυμάνσεων.

Σε πολλές εφαρμογές προκύπτει η ανάγκη σύγκρισης των διακυμάνσεων δύο πληθυσμών.

Αν $s_1^2$ είναι η διακύμανση τυχαίου δείγματος $n_1$ στοιχείων από έναν κανονικό πληθυσμό με διακύμανση $s_1^2$ και $s_2^2$ η διακύμανση τυχαίου δείγματος $n_2$ στοιχείων από έναν κανονικό πληθυσμό με διακύμανση $s_2^2$ και τα δύο δείγματα είναι ανεξάρτητα τότε, η τυχαία μεταβλητή

$$F = \frac{S_1^2 / s_1^2}{S_2^2 / s_2^2}$$

ακολουθεί την κατανομή F με $v_1 = n_1-1$ και $v_2 = n_2-1$ βαθμούς ελευθερίας. Ο έλεγχος της ισότητας των δύο διακυμάνσεων γίνεται ως εξής:

α. Δεχόμαστε ότι: Οι κατανομές του πληθυσμού είναι κανονικές και τα δείγματα είναι τυχαία και ανεξάρτητα.

β. Ορίζουμε τη μηδενική και την εναλλακτική υπόθεση.

$H_0$: $\frac{s_1^2}{s_2^2} = 1$

$H_1$: i) $\frac{s_1^2}{s_2^2} \neq 1$

ii) $\frac{s_1^2}{s_2^2} > 1$

iii) $\frac{s_1^2}{s_2^2} < 1$

γ. Το κριτήριο Απόφασης.

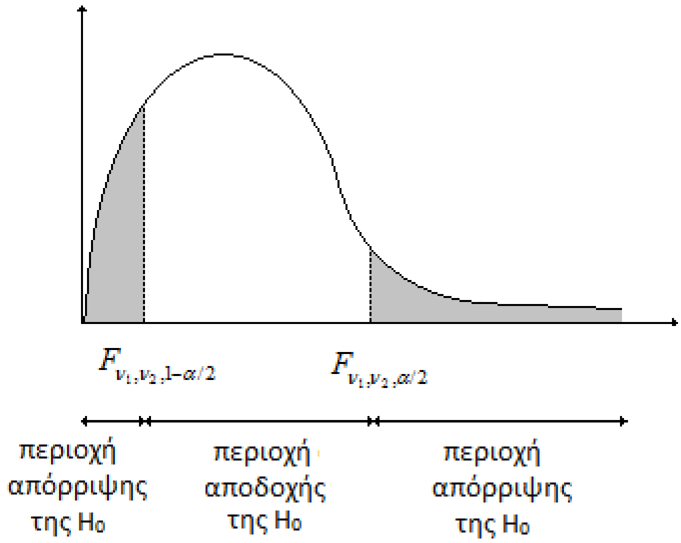
Υπολογίζουμε: $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$

δ. Η Απόφαση:

i. H$_0$: $\frac{s_1^2}{s_2^2} = 1$

H$_1$: $\frac{s_1^2}{s_2^2} \neq 1$

Αν $F > F_{n_1, n_2, a/2}$ ή $F < F_{n_1, n_2, 1-a/2}$, τότε η H$_0$ απορρίπτεται.




ii. H$_0$: $\frac{s_1^2}{s_2^2} = 1$

H$_1$: $\frac{s_1^2}{s_2^2} < 1$

Αν $F > F_{n_1, n_2, a}$, τότε η H$_0$ απορρίπτεται.

iii. H$_0$: $\frac{s_1^2}{s_2^2} = 1$

H$_1$: $\frac{s_1^2}{s_2^2} < 1$

Αν $F < F_{n_1, n_2, a}$, τότε η H$_0$ απορρίπτεται.

## **Παράδειγμα**

Ένα τυχαίο δείγμα $n_1$ = 9 λαμπτήρων της μάρκας Α, υπολογίσαμε τη διακύμανση της διάρκειας ζωής $s_1^2$ = 66 και σε τυχαίο δείγμα ίσου μεγέθους από τη μάρκα Β υπολογίσαμε $s_2^2$ = 44. Να ελέγχει η υπόθεση της ισότητας των διακυμάνσεων στη διάρκεια ζωής $X_1$ και $X_2$ των λαμπτήρων της Α και Β μάρκας, αντίστοιχα, σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0,10 αν η κατανομή των $X_1$ και $X_2$ μπορεί να υποτεθεί κανονική.

Ξέρουμε ότι οι κατανομές είναι κανονικές και τα δείγματα τυχαία και ανεξάρτητα.

$$H_0: \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1$$

$$H_1: \frac{s_1^2}{s_2^2} \neq 1$$

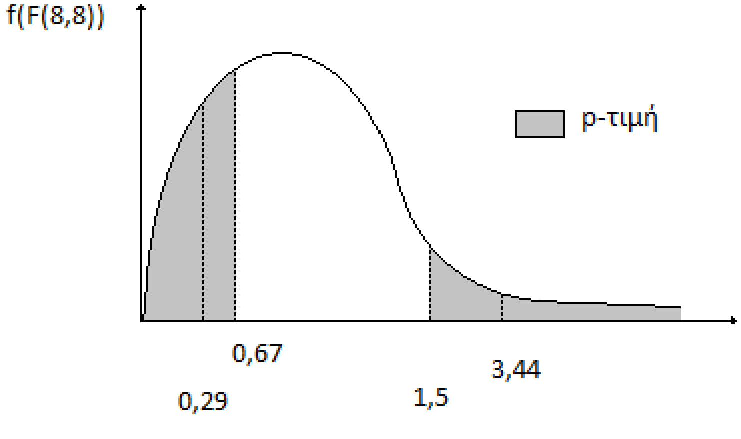
Για $\alpha = 0.10$ , $\alpha/2 = 0.05$ και $\nu_1 = \nu_2 = 9\text{-}1 = 8$

Από πίνακα 5Α έχουμε: $F_{8,8,0.05} = 3.44$ και $F_{8,8,0.95} = \dfrac{1}{3.44} = 0.29$

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{66}{44} = 1.5$$

$$0.29 < 1.5 < 3.44$$

Άρα η $H_0$ δεν απορρίπτεται



# 8. Έλεγχος για την αναλογία.

Ο έλεγχος για την αναλογία p γίνεται με βάση τη δειγματική αναλογία $p_0$. Όταν το δείγμα είναι μεγάλο, τότε η κατανομή της δειγματικής αναλογίας προσεγγίζει την κανονική κατανομή. Άρα αν έχουμε μεγάλο δείγμα, ο έλεγχος γίνεται ως εξής:

α. Δεχόμαστε ότι: Το δείγμα είναι τυχαίο.

β. Ορίζουμε τη μηδενική και την εναλλακτική υπόθεση.

$H_0$: $p = p_0$
$H_1$: i) $p \neq p_0$
ii) $p > p_0$
iii) $p < p_0$

γ. Το κριτήριο Απόφασης:

Υπολογίζουμε: $$z = \frac{\hat{p}_x - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Αν έχουμε n επαναλαμβανόμενα πειράματα στα οποία έχουμε ως αποτέλεσμα «επιτυχία» ή «αποτυχία». Αν x το πλήθος των επιτυχιών, και n οι επαναλήψεις, τότε $\hat{p}_x$ είναι η αναλογία επιτυχιών στο δείγμα.
Δηλαδή $\hat{p}_x = \frac{c}{n}$

δ. Η Απόφαση:

i. $H_0$: $p = p_0$
$H_1$: $p \neq p_0$

Αν $|z| > z_{\alpha/2}$, τότε η $H_0$ απορρίπτεται.

ii. $H_0$: $p = p_0$
$H_1$: $p > p_0$

Αν $z > z_\alpha$, τότε η $H_0$ απορρίπτεται.

iii. $H_0$: $p = p_0$
$H_1$: $p < p_0$

Αν $z < -z_\alpha$, τότε η $H_0$ απορρίπτεται.

**Παράδειγμα**

Διαφημιστική εταιρεία ετοίμασε ένα τηλεοπτικό πρόγραμμα και όρισε την τιμή του με βάση την υπόθεση ότι το 50% των θεατών του προγράμματος ήταν ηλικίας μέχρι 18 χρονών. Να ελεγχθεί η υπόθεση αυτή σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0.05 αν σε τυχαίο δείγμα n = 250 τηλεθεατών οι 118 ανήκουν σε αυτή τη κατηγορία.

Ξέρουμε ότι το δείγμα είναι τυχαίο.

$H_0$: p = 0.50
$H_1$: p ≠ 0.50

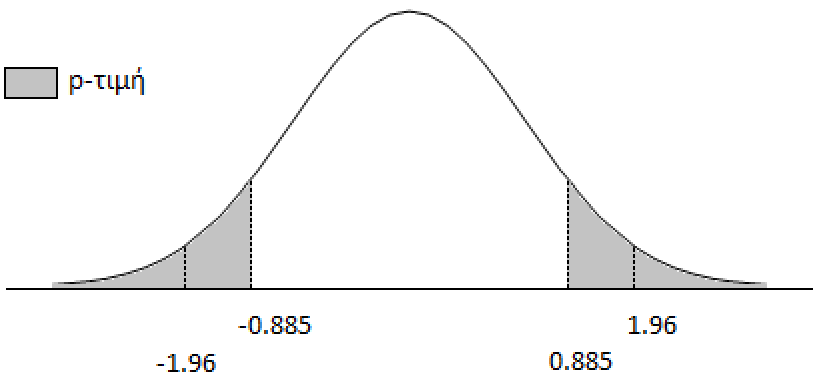
$$|z| = \left| \frac{\hat{p}_x - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \right| = \left| \frac{0.472 - 0.50}{\sqrt{\frac{0.50 \cdot 0.50}{250}}} \right| = 0.885$$

$$\hat{p}_x = \frac{118}{250} = 0.472$$

Από πίνακα 1 για α = 0.05 $z_{\alpha/2} = 1.96$

0.885 < 1.96 $|z| < z_{\alpha/2}$ , η $H_0$ δεν απορρίπτεται

p-τιμή = 2P(Z> 0.885) = 2 (1-P(z < 0.885)) = 2(1-0.8120) = 0.376



# 9. Έλεγχος της διαφοράς δύο αναλογιών.

Έχουμε 2 πληθυσμούς με αναλογία $p_1$ και $p_2$ αντίστοιχα. Έστω $\hat{p}_1$ η αναλογία σε τυχαίο και ανεξάρτητο δείγμα $n_1$ στοιχείων, και $\hat{p}_2$ η αναλογία σε τυχαίο και ανεξάρτητο δείγμα $n_2$ στοιχείων. Όταν είναι μεγάλα τότε η τυχαία μεταβλητή.

$$Z = \frac{\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2\right) - \left(p_1 - p_2\right)}{\sqrt{\frac{p_1\left(1-p_1\right)}{n_1} + \frac{p_2\left(1-p_2\right)}{n_2}}}$$

Ακολουθεί την N(0,1)

Αν $p_1 = p_2 = p$ τότε

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{p\left(1-p\right)\cdot\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Επομένως ο έλεγχος της ισότητας δύο αναλογιών πληθυσμού γίνεται ως εξής:

α. Δεχόμαστε ότι: Τα δείγματα είναι τυχαία και ανεξάρτητα.

β. Ορίζουμε τη μηδενική και την εναλλακτική υπόθεση.

$H_0$: $p_1 = p_2 = p$
$H_1$: i) $p_1 \neq p_2$
ii) $p_1 > p_2$
iii) $p_1 < p_2$

γ. Το κριτήριο Απόφασης:

Ορίζουμε: $\hat{p} = \dfrac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2}$

Υπολογίζουμε: $z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)\cdot\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$

δ. Η Απόφαση:

i. $H_0$: $p_1 = p_2 = p$
$H_1$: $p_1 \neq p_2$

Αν $|z| > z_{\alpha/2}$ , τότε η $H_0$ απορρίπτεται.

ii. $H_0$: $p_1 = p_2 = p$
$H_1$: $p_1 > p_2$

Αν $z > z_{\alpha}$ , τότε η $H_0$ απορρίπτεται.

iii. $H_0$: $p_1 = p_2 = p$
$H_1$: $p_1 < p_2$

Αν $z < -z_{\alpha}$ , τότε η $H_0$ απορρίπτεται.

**Παράδειγμα**

Ένας επιχειρηματίας θέλει να δει αν το διαφημιστικό μήνυμα για το προϊόν του προκαλεί το ενδιαφέρον εξίσου στους άνδρες και τις γυναίκες. Σε δύο τυχαία και ανεξάρτητα δείγματα από άνδρες και γυναίκες, δέκτες του μηνύματος, πήρε τα εξής αποτελέσματα. Σε δείγμα $n_1 = 200$ ανδρών, ενδιαφέρθηκαν για το μήνυμα οι 50, ενώ σε δείγμα $n_2 = 200$ γυναικών ενδιαφέρθηκαν για το μήνυμα οι 70. Να ελεγχθεί η υπόθεση της ισότητας των δύο αναλογιών πληθυσμού σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0.05.

Ξέρουμε ότι τα δείγματα είναι τυχαία και ανεξάρτητα $n_1 = n_2 = 200 > 30$

$H_0$: $p_1 = p_2 = p$
$H_1$: $p_1 \neq p_2$

Για α = 0.05 από πίνακα 1 έχουμε: $z_{\alpha/2} = 1.96$

$$z = \left| \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)\cdot\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \right| = \left| \frac{0.25-0.35}{0.3\cdot 0.7\cdot \frac{2}{200}} \right| = 2.18 > 1.96$$

$$\hat{p}_1 = \frac{50}{200} = 0.25$$

$$\hat{p}_2 = \frac{70}{200} = 0.35$$

$$\hat{p} = \frac{200\cdot 0.25 + 200\cdot 0.35}{200+200} = \frac{50+70}{400} = \frac{120}{400} = 0.3$$

$|z| > z_{\alpha/2}$ , άρα απορρίπτεται την $H_0$

Η p-τιμή του ελέγχου ισούται:

p-τιμή = 2P(z > 2.18) = 2(1-P(z < 2.18)) =
= 2(1-φ(2.18)) = 2(1-0.98537) = 0.02926

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

## ΠΙΝΑΚΑΣ 1

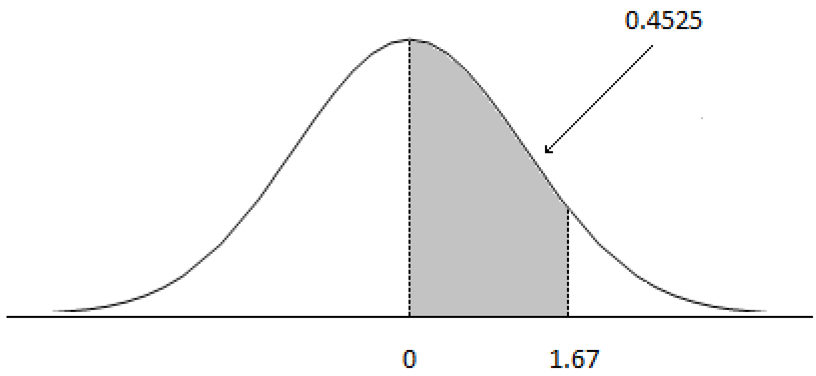
| **Επίπεδο σημαντικότητας α** | **0.01** | **0.05** | **0.01** |
|---|---|---|---|
| **Κρίσιμες τιμές για μονόπλευρο έλεγχο** | -2.33<br>+2.33 | -1.645<br>+1,645 | -1.28<br>+1.28 |
| **Κρίσιμες τιμές για δίπλευρο έλεγχο** | -2.58<br>+2.58 | -1.96<br>+1.96 | -1.645<br>+1.645 |

## ΠΙΝΑΚΑΣ 2: Η τυποποιημένη κανονική κατανομή

| Z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0.0** | 0.0000 | 0.0040 | 0.0080 | 0.0120 | 0.0160 | 0.0199 | 0.0239 | 0.0279 | 0.0319 | 0.0359 |
| **0.1** | 0.0398 | 0.0438 | 0.0478 | 0.0517 | 0.0557 | 0.0596 | 0.0636 | 0.0675 | 0.0714 | 0.0753 |
| **0.2** | 0.0793 | 0.0832 | 0.0871 | 0.0910 | 0.0948 | 0.0987 | 0.1026 | 0.1064 | 0.1103 | 0.1141 |
| **0.3** | 0.1179 | 0.1217 | 0.1255 | 0.1293 | 0.1331 | 0.1368 | 0.1406 | 0.1443 | 0.1480 | 0.1517 |
| **0.4** | 0.1554 | 0.1591 | 0.1628 | 0.1664 | 0.1700 | 0.1736 | 0.1772 | 0.1808 | 0.1844 | 0.1879 |
| **0.5** | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2224 |
| **0.6** | 0.2257 | 0.2291 | 0.2324 | 0.2357 | 0.2389 | 0.2422 | 0.2454 | 0.2486 | 0.2517 | 0.2549 |
| **0.7** | 0.2580 | 0.2611 | 0.2642 | 0.2673 | 0.2704 | 0.2734 | 0.2764 | 0.2794 | 0.2823 | 0.2852 |
| **0.8** | 0.2881 | 0.2910 | 0.2939 | 0.2967 | 0.2995 | 0.3023 | 0.3051 | 0.3078 | 0.3106 | 0.3133 |
| **0.9** | 0.3159 | 0.3186 | 0.3212 | 0.3238 | 0.3264 | 0.3289 | 0.3315 | 0.3340 | 0.3365 | 0.3389 |
| **1.0** | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |
| **1.1** | 0.3643 | 0.3665 | 0.3686 | 0.3708 | 0.3729 | 0.3749 | 0.3770 | 0.3790 | 0.3810 | 0.3830 |
| **1.2** | 0.3849 | 0.3869 | 0.3888 | 0.3907 | 0.3925 | 0.3944 | 0.3962 | 0.3980 | 0.3997 | 0.4015 |
| **1.3** | 0.4032 | 0.4049 | 0.4066 | 0.4082 | 0.4099 | 0.4115 | 0.4131 | 0.4147 | 0.4162 | 0.4177 |
| **1.4** | 0.4192 | 0.4207 | 0.4222 | 0.4236 | 0.4251 | 0.4265 | 0.4279 | 0.4292 | 0.4306 | 0.4319 |
| **1.5** | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4406 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |
| **1.6** | 0.4452 | 0.4463 | 0.4474 | 0.4484 | 0.4495 | 0.4505 | 0.4515 | 0.4525 | 0.4535 | 0.4545 |
| **1.7** | 0.4554 | 0.4564 | 0.4573 | 0.4582 | 0.4591 | 0.4599 | 0.4608 | 0.4616 | 0.4625 | 0.4633 |
| **1.8** | 0.4641 | 0.4649 | 0.4656 | 0.4664 | 0.4671 | 0.4678 | 0.4686 | 0.4693 | 0.4699 | 0.4706 |
| **1.9** | 0.4713 | 0.4719 | 0.4726 | 0.4732 | 0.4738 | 0.4744 | 0.4750 | 0.4756 | 0.4761 | 0.4767 |
| **2.0** | 0.4772 | 0.4778 | 0.4783 | 0.4788 | 0.4793 | 0.4798 | 0.4803 | 0.4808 | 0.4812 | 0.4817 |
| **2.1** | 0.4821 | 0.4826 | 0.4830 | 0.4834 | 0.4838 | 0.4842 | 0.4846 | 0.4850 | 0.4854 | 0.4857 |
| **2.2** | 0.4861 | 0.4864 | 0.4868 | 0.4871 | 0.4875 | 0.4878 | 0.4881 | 0.4884 | 0.4887 | 0.4890 |
| **2.3** | 0.4893 | 0.4896 | 0.4898 | 0.4901 | 0.4904 | 0.4906 | 0.4909 | 0.4911 | 0.4913 | 0.4916 |
| **2.4** | 0.4918 | 0.4920 | 0.4922 | 0.4925 | 0.4927 | 0.4929 | 0.4931 | 0.4932 | 0.4934 | 0.4936 |
| **2.5** | 0.4938 | 0.4940 | 0.4941 | 0.4943 | 0.4945 | 0.4946 | 0.4948 | 0.4949 | 0.4951 | 0.4952 |
| **2.6** | 0.4953 | 0.4955 | 0.4956 | 0.4957 | 0.4959 | 0.4960 | 0.4961 | 0.4962 | 0.4963 | 0.4964 |
| **2.7** | 0.4965 | 0.4966 | 0.4967 | 0.4968 | 0.4969 | 0.4970 | 0.4971 | 0.4972 | 0.4973 | 0.4974 |
| **2.8** | 0.4974 | 0.4975 | 0.4976 | 0.4977 | 0.4977 | 0.4978 | 0.4979 | 0.4979 | 0.4980 | 0.4981 |
| **2.9** | 0.4981 | 0.4982 | 0.4982 | 0.4983 | 0.4984 | 0.4984 | 0.4985 | 0.4985 | 0.4986 | 0.4986 |
| **3.0** | 0.4987 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4988 | 0.4988 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4990 | 0.4990 |

Ο πίνακας δίνει την πιθανότητα: $P(0 \le Z \le z) = \int_0^z f(z)\,dz$

Παράδειγμα: $P(0 \le Z \le 1.67) = 0.4525$



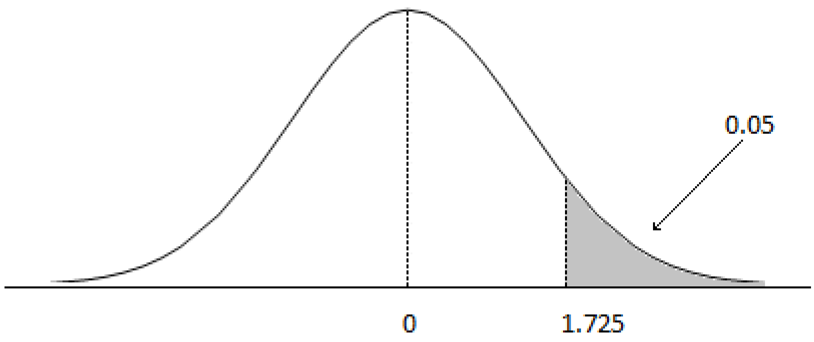
**ΠΙΝΑΚΑΣ 3: Τιμές της $t_{\alpha,\nu}$**

| n | α = 0.1 | α = 0.05 | α = 0.025 | α = 0.01 | α = 0.005 | α = 0.001 | α = 0.0005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 3.078 | 6.314 | 12.076 | 31.821 | 63.657 | 318.310 | 636.620 |
| **2** | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 22.326 | 31.598 |
| **3** | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 10.213 | 12.924 |
| **4** | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 7.173 | 8.610 |
| **5** | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 5.893 | 6.869 |
| | | | | | | | |
| **6** | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 5.208 | 5.959 |
| **7** | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 4.785 | 5.408 |
| **8** | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 4.501 | 5.041 |
| **9** | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 4.297 | 4.781 |
| **10** | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 4.144 | 4.587 |
| **11** | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 4.025 | 4.437 |
| **12** | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 3.930 | 4.318 |
| **13** | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 3.852 | 4.221 |
| **14** | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 3.787 | 4.140 |
| **15** | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 3.733 | 4.073 |
| **16** | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 3.686 | 4.015 |
| **17** | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.646 | 3.965 |
| **18** | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.610 | 3.922 |
| **19** | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.579 | 3.883 |
| **20** | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.552 | 3.850 |
| **21** | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.527 | 3.819 |
| **22** | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.505 | 3.792 |
| **23** | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.485 | 3.767 |
| **24** | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.467 | 3.745 |
| **25** | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.450 | 3.725 |
| **26** | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.435 | 3.707 |
| **27** | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.421 | 3.690 |
| **28** | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.408 | 3.674 |
| **29** | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.396 | 3.659 |
| **30** | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.385 | 3.646 |
| | | | | | | | |
| **40** | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 3.307 | 3.551 |
| **60** | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 | 3.232 | 3.460 |
| **120** | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 | 3.160 | 3.373 |
| **¥** | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 3.090 | 3.291 |

Ο Πίνακας δίνει τις τιμές $t_{\alpha,\nu}$ τέτοιες ώστε: $\int_{t_{a,n}}^{\infty} f(t)\,dt = a$

Παράδειγμα:

Για ν = 20 βαθμούς ελευθερίας και α = 0.05 , $t_{(0.05),20} = 1.725$



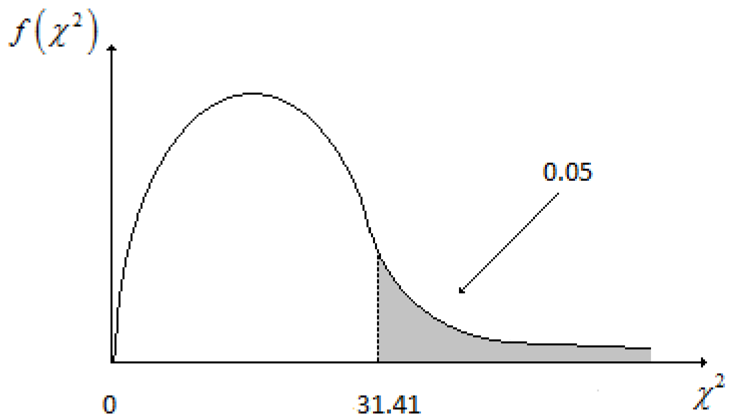
# ΠΙΝΑΚΑΣ 4: Τιμές της $X^2_{a,n}$

| ν | α = 0.995 | α = 0.99 | α = 0.975 | α = 0.95 | α = 0.05 | α = 0.05 | α = 0.01 | α = 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0000393 | 0.000157 | 0.000982 | 0.00393 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 |
| 2 | 0.0100 | 0.0201 | 0.0506 | 0.103 | 5.991 | 7.378 | 9.210 | 10.597 |
| 3 | 0.0717 | 0.115 | 0.216 | 0.352 | 7.815 | 9.348 | 11.345 | 12.838 |
| 4 | 0.207 | 0.297 | 0.484 | 0.711 | 9.488 | 11.143 | 13.277 | 14.860 |
| 5 | 0.412 | 0.554 | 0.831 | 1.145 | 11.070 | 12.832 | 15.086 | 16.750 |
| 6 | 0.676 | 0.872 | 1.237 | 1.635 | 12.592 | 14.449 | 16.812 | 18.548 |
| 7 | 0.989 | 1.239 | 1.690 | 2.167 | 14.067 | 16.013 | 18.475 | 20.278 |
| 8 | 1.344 | 1.646 | 2.180 | 2.733 | 15.507 | 17.535 | 20.090 | 21.955 |
| 9 | 1.735 | 2.088 | 2.700 | 3.325 | 16.919 | 19.023 | 21.666 | 23.589 |
| 10 | 2.156 | 2.558 | 3.247 | 3.940 | 18.307 | 20.483 | 23.209 | 25.188 |
| 11 | 2.603 | 3.053 | 3.816 | 4.575 | 19.675 | 21.920 | 24.725 | 26.757 |
| 12 | 3.074 | 3.571 | 4.404 | 5.226 | 21.026 | 23.337 | 26.217 | 28.300 |
| 13 | 3.565 | 4.107 | 5.009 | 5.892 | 22.362 | 24.736 | 27.688 | 29.819 |
| 14 | 4.075 | 4.660 | 5.629 | 6.571 | 23.685 | 26.119 | 29.141 | 31.319 |
| 15 | 4.601 | 5.229 | 6.262 | 7.261 | 24.996 | 27.488 | 30.578 | 32.801 |
| 16 | 5.142 | 5.812 | 6.908 | 7.962 | 26.296 | 28.845 | 32.000 | 34.267 |
| 17 | 5.697 | 6.408 | 7.564 | 8.672 | 27.587 | 30.191 | 33.409 | 35.718 |
| 18 | 6.265 | 7.015 | 8.231 | 9.390 | 28.869 | 31.526 | 34.805 | 37.156 |
| 19 | 6.844 | 7.633 | 8.907 | 10.117 | 30.144 | 32.852 | 36.191 | 38.582 |
| 20 | 7.434 | 8.260 | 9.591 | 10.851 | 31.410 | 34.170 | 37.566 | 39.997 |
| 21 | 8.034 | 8.897 | 10.283 | 11.591 | 32.671 | 35.479 | 38.932 | 41.401 |
| 22 | 8.643 | 9.542 | 10.982 | 12.338 | 33.924 | 36.781 | 40.289 | 42.796 |
| 23 | 9.260 | 10.196 | 11.689 | 13.091 | 35.712 | 38.076 | 41.638 | 44.181 |
| 24 | 9.886 | 10.856 | 12.401 | 13.848 | 36.415 | 39.364 | 42.980 | 45.558 |
| 25 | 10.520 | 11.524 | 13.120 | 14.611 | 37.652 | 40.646 | 44.314 | 46.928 |
| 26 | 11.160 | 12.198 | 13.844 | 15.379 | 38.885 | 41.923 | 45.642 | 48.290 |
| 27 | 11.808 | 12.879 | 14.573 | 16.151 | 40.113 | 43.194 | 46.963 | 49.645 |
| 28 | 12.461 | 13.565 | 15.308 | 16.928 | 41.337 | 44.461 | 48.278 | 50.993 |
| 29 | 13.121 | 14.256 | 16.047 | 17.708 | 42.557 | 45.722 | 49.588 | 52.336 |
| 30 | 13.787 | 14.953 | 16.791 | 18.493 | 43.773 | 46.979 | 50.892 | 53.672 |

Ο Πίνακας δίνει τις τιμές $X^2_{a,n}$ τέτοιες ώστε: $\int_{X^2_{a,n}}^{\infty} f(x)\,dx = a$

Παράδειγμα:

Για ν = 20 βαθμούς ελευθερίας και α = 0.05 , $X^2_{(0.05),20}$ = 3.41



# ΠΙΝΑΚΑΣ 5Α: Τιμές της $F_{a,n_1,n_2}$ για α = 0.05

| | $\nu_1$ = βαθμοί ελευθερίας του αριθμητή | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **$\nu_2$ = βαθμοί ελευθερίας του παρανομαστή** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **12** | **15** | **20** | **24** | **30** | **40** | **60** | **120** | **∞** |
| **1** | 161 | 200 | 216 | 225 | 230 | 234 | 237 | 239 | 241 | 242 | 244 | 246 | 248 | 249 | 250 | 251 | 252 | 253 | 254 |
| **2** | 18.5 | 19.0 | 19.2 | 19.2 | 19.3 | 19.3 | 19.4 | 19.4 | 19.4 | 19.4 | 19.4 | 19.4 | 19.4 | 19.5 | 19.5 | 19.5 | 19.5 | 19.5 | 19.5 |
| **3** | 10.1 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 | 8.79 | 8.74 | 8.70 | 8.66 | 8.64 | 8.62 | 8.59 | 8.57 | 8.55 | 8.53 |
| **4** | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 | 5.96 | 5.91 | 5.86 | 5.80 | 5.77 | 5.75 | 5.72 | 5.69 | 5.66 | 5.63 |
| **5** | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 | 4.74 | 4.68 | 4.62 | 4.56 | 4.53 | 4.50 | 4.46 | 4.43 | 4.41 | 4.37 |
| **6** | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 | 4.06 | 4.00 | 3.94 | 3.87 | 3.84 | 3.81 | 3.77 | 3.74 | 3.71 | 3.67 |
| **7** | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 | 3.64 | 3.57 | 3.51 | 3.44 | 3.41 | 3.38 | 3.34 | 3.30 | 3.27 | 3.23 |
| **8** | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 | 3.35 | 3.28 | 3.22 | 3.15 | 3.12 | 3.08 | 3.04 | 3.01 | 2.97 | 2.93 |
| **9** | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 | 3.14 | 3.07 | 3.01 | 2.94 | 2.90 | 2.86 | 2.83 | 2.79 | 2.76 | 2.71 |
| **10** | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 | 2.98 | 2.91 | 2.85 | 2.77 | 2.74 | 2.70 | 2.66 | 2.62 | 2.59 | 2.54 |
| **11** | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.20 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.90 | 2.85 | 2.79 | 2.72 | 2.65 | 2.61 | 2.57 | 2.53 | 2.49 | 2.46 | 2.40 |
| **12** | 4.75 | 3.89 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.85 | 2.80 | 2.75 | 2.69 | 2.62 | 2.54 | 2.51 | 2.47 | 2.43 | 2.38 | 2.35 | 2.30 |
| **13** | 4.67 | 3.81 | 3.41 | 3.18 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.71 | 2.67 | 2.60 | 2.53 | 2.46 | 2.42 | 2.38 | 2.34 | 2.30 | 2.26 | 2.21 |
| **14** | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.76 | 2.70 | 2.65 | 2.60 | 2.53 | 2.46 | 2.39 | 2.35 | 2.31 | 2.27 | 2.22 | 2.19 | 2.13 |
| **15** | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 | 2.54 | 2.48 | 2.40 | 2.33 | 2.29 | 2.25 | 2.20 | 2.16 | 2.12 | 2.07 |
| **16** | 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 | 2.49 | 2.42 | 2.35 | 2.28 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.07 | 2.01 |
| **17** | 4.45 | 3.59 | 3.20 | 2.96 | 2.81 | 2.70 | 2.61 | 2.55 | 2.49 | 2.45 | 2.38 | 2.31 | 2.23 | 2.19 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.02 | 1.96 |
| **18** | 4.41 | 3.55 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 | 2.41 | 2.34 | 2.27 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.98 | 1.92 |
| **19** | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.63 | 2.54 | 2.48 | 2.42 | 2.38 | 2.31 | 2.23 | 2.16 | 2.11 | 2.07 | 2.03 | 1.98 | 1.94 | 1.88 |
| **20** | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.35 | 2.28 | 2.20 | 2.12 | 2.08 | 2.04 | 1.99 | 1.95 | 1.91 | 1.84 |
| **21** | 4.32 | 3.47 | 3.07 | 2.84 | 2.68 | 2.57 | 2.49 | 2.42 | 2.37 | 2.32 | 2.25 | 2.18 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.88 | 1.81 |
| **22** | 4.30 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.46 | 2.40 | 2.34 | 2.30 | 2.23 | 2.15 | 2.07 | 2.03 | 1.98 | 1.94 | 1.89 | 1.85 | 1.78 |
| **23** | 4.28 | 3.42 | 3.03 | 2.80 | 2.64 | 2.53 | 2.44 | 2.37 | 2.32 | 2.27 | 2.20 | 2.13 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.91 | 1.86 | 1.82 | 1.76 |
| **24** | 4.26 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.42 | 2.36 | 2.30 | 2.25 | 2.18 | 2.11 | 2.03 | 1.98 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.80 | 1.73 |
| **25** | 4.24 | 3.39 | 2.99 | 2.76 | 2.60 | 2.49 | 2.40 | 2.34 | 2.28 | 2.24 | 2.16 | 2.09 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.87 | 1.82 | 1.78 | 1.71 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **30** | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.09 | 2.01 | 1.93 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.70 | 1.62 |
| **40** | 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 | 2.08 | 2.00 | 1.92 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.69 | 1.64 | 1.58 | 1.51 |
| **60** | 4.00 | 3.15 | 2.76 | 2.53 | 2.37 | 2.25 | 2.17 | 2.10 | 2.04 | 1.99 | 1.92 | 1.84 | 1.75 | 1.70 | 1.65 | 1.59 | 1.53 | 1.48 | 1.39 |
| **120** | 3.92 | 3.07 | 2.68 | 2.45 | 2.29 | 2.18 | 2.09 | 2.02 | 1.96 | 1.91 | 1.83 | 1.75 | 1.66 | 1.61 | 1.55 | 1.50 | 1.43 | 1.35 | 1.25 |
| **∞** | 3.84 | 3.00 | 2.60 | 2.37 | 2.21 | 2.10 | 2.01 | 1.94 | 1.88 | 1.83 | 1.75 | 1.67 | 1.57 | 1.52 | 1.46 | 1.39 | 1.32 | 1.22 | 1.00 |

# ΠΙΝΑΚΑΣ 5Β: Τιμές της $F_{a,n_1 n_2}$ για α = 0.01

| | $\nu_1$ = βαθμοί ελευθερίας του αριθμητή | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\nu_2$ = βαθμοί ελευθερίας του παρανομαστή | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **12** | **15** | **20** | **24** | **30** | **40** | **60** | **120** | **∞** |
| **1** | 4052 | 5000 | 5403 | 5625 | 5764 | 5859 | 5928 | 5982 | 6023 | 6056 | 6106 | 6157 | 6209 | 6235 | 6261 | 6287 | 6313 | 6339 | 6366 |
| **2** | 98,5 | 99,0 | 99,2 | 99,2 | 99,3 | 99,3 | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,5 | 99,5 | 99,5 | 99,5 | 99,5 | 99,5 |
| **3** | 34,1 | 30,8 | 29,5 | 28,7 | 28,2 | 27,9 | 27,7 | 27,5 | 27,3 | 27,2 | 27,1 | 26,9 | 26,7 | 26,6 | 26,5 | 26,4 | 26,3 | 26,2 | 26,1 |
| **4** | 21,2 | 18,0 | 16,7 | 16,0 | 15,5 | 15,2 | 15,0 | 14,8 | 14,7 | 14,5 | 14,4 | 14,2 | 14,0 | 13,9 | 13,8 | 13,7 | 13,7 | 13,6 | 13,5 |
| **5** | 16,3 | 13,3 | 12,1 | 11,4 | 11,0 | 10,7 | 10,5 | 10,3 | 10,2 | 10,1 | 9,89 | 9,72 | 9,55 | 9,47 | 9,38 | 9,29 | 9,20 | 9,11 | 9,02 |
| **6** | 13,7 | 10,9 | 9,78 | 9,15 | 8,75 | 8,47 | 8,26 | 8,10 | 7,98 | 7,87 | 7,72 | 7,56 | 7,40 | 7,31 | 7,23 | 7,14 | 7,06 | 6,97 | 6,88 |
| **7** | 12,2 | 9,55 | 8,45 | 7,85 | 7,46 | 7,19 | 6,99 | 6,84 | 6,72 | 6,62 | 6,47 | 6,31 | 6,16 | 6,07 | 5,99 | 5,91 | 5,82 | 5,74 | 5,65 |
| **8** | 11,3 | 8,65 | 7,59 | 7,01 | 6,63 | 6,37 | 6,18 | 6,03 | 5,91 | 5,81 | 5,67 | 5,52 | 5,36 | 5,28 | 5,20 | 5,12 | 5,03 | 4,95 | 4,86 |
| **9** | 10,6 | 8,02 | 6,99 | 6,42 | 6,08 | 5,80 | 5,61 | 5,47 | 5,35 | 5,26 | 5,11 | 4,96 | 4,81 | 4,73 | 4,65 | 4,57 | 4,48 | 4,40 | 4,31 |
| **10** | 10,0 | 7,56 | 6,55 | 5,99 | 5,64 | 5,39 | 5,20 | 5,06 | 4,94 | 4,85 | 4,71 | 4,56 | 4,41 | 4,33 | 4,25 | 4,17 | 4,08 | 4,00 | 3,91 |
| **11** | 9,65 | 7,21 | 6,22 | 5,67 | 5,32 | 5,07 | 4,89 | 4,74 | 4,63 | 4,54 | 4,40 | 4,25 | 4,10 | 4,02 | 3,94 | 3,86 | 3,78 | 3,69 | 3,60 |
| **12** | 9,33 | 6,93 | 5,95 | 5,41 | 5,06 | 4,82 | 4,64 | 4,50 | 4,39 | 4,30 | 4,16 | 4,01 | 3,86 | 3,78 | 3,70 | 3,62 | 3,54 | 3,45 | 3,36 |
| **13** | 9,07 | 6,70 | 5,74 | 5,21 | 4,86 | 4,62 | 4,44 | 4,30 | 4,19 | 4,10 | 3,96 | 3,82 | 3,66 | 3,59 | 3,51 | 3,43 | 3,34 | 3,25 | 3,17 |
| **14** | 8,86 | 6,51 | 5,56 | 5,04 | 4,70 | 4,46 | 4,28 | 4,14 | 4,03 | 3,94 | 3,80 | 3,66 | 3,51 | 3,43 | 3,35 | 3,27 | 3,18 | 3,09 | 3,00 |
| **15** | 8,68 | 6,36 | 5,42 | 4,89 | 4,56 | 4,32 | 4,14 | 4,00 | 3,89 | 3,80 | 3,67 | 3,52 | 337 | 3,29 | 3,31 | 3,13 | 3,05 | 2,96 | 2,87 |
| **16** | 8,53 | 6,23 | 5,29 | 4,77 | 4,44 | 4,20 | 4,03 | 3,89 | 3,78 | 3,69 | 3,55 | 3,41 | 3,26 | 3,18 | 3,10 | 3,02 | 2,93 | 2,84 | 2,75 |
| **17** | 8,40 | 6,11 | 5,19 | 4,67 | 4,34 | 4,10 | 3,93 | 3,79 | 3,68 | 3,59 | 3,46 | 3,31 | 3,16 | 3,08 | 3,00 | 2,92 | 2,83 | 2,75 | 2,65 |
| **18** | 8,29 | 6,01 | 5,09 | 4,58 | 4,25 | 4,01 | 3,84 | 3,71 | 3,60 | 3,51 | 3,37 | 3,23 | 3,08 | 3,00 | 2,92 | 2,84 | 2,75 | 2,66 | 2,57 |
| **19** | 8,19 | 5,93 | 5,01 | 4,50 | 4,17 | 3,94 | 3,77 | 3,63 | 3,52 | 3,43 | 3,30 | 3,15 | 3,00 | 2,92 | 2,84 | 2,76 | 2,67 | 2,58 | 2,49 |
| **20** | 8,10 | 5,85 | 4,94 | 4,43 | 4,10 | 3,87 | 3,70 | 3,56 | 3,46 | 3,37 | 3,23 | 3,09 | 2,94 | 2,86 | 2,78 | 2,69 | 2,61 | 2,52 | 2,42 |
| **21** | 8,02 | 5,78 | 4,87 | 4,37 | 4,04 | 3,81 | 3,64 | 3,51 | 3,40 | 3,31 | 3,17 | 3,03 | 2,88 | 2,80 | 2,72 | 2,64 | 2,55 | 2,46 | 2,36 |
| **22** | 7,95 | 5,72 | 4,82 | 4,31 | 3,99 | 3,76 | 3,59 | 3,45 | 3,35 | 3,26 | 3,12 | 2,98 | 2,83 | 2,75 | 2,67 | 2,58 | 250 | 2,40 | 2,31 |
| **23** | 7,88 | 5,66 | 4,76 | 4,26 | 3,94 | 3,71 | 3,54 | 3,41 | 3,30 | 3,21 | 3,07 | 2,93 | 2,78 | 2,70 | 2,62 | 2,54 | 2,45 | 2,35 | 2,26 |
| **24** | 7,82 | 5,61 | 4,72 | 4,22 | 3,90 | 3,67 | 3,50 | 3,36 | 3,26 | 3,17 | 3,03 | 2,89 | 2,74 | 2,66 | 2,58 | 2,49 | 2,40 | 2,31 | 2,21 |
| **25** | 7,77 | 5,57 | 4,68 | 4,18 | 3,86 | 3,63 | 3,46 | 3,32 | 3,22 | 3,13 | 2,99 | 2,85 | 2,70 | 2,62 | 2,53 | 2,45 | 2,36 | 2,27 | 2,17 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **30** | 7,56 | 5,39 | 4,51 | 4,02 | 3,70 | 3,47 | 3,30 | 3,17 | 3,07 | 2,98 | 2,84 | 2,70 | 2,55 | 247 | 2,39 | 2,30 | 2,21 | 2,11 | 2,01 |
| **40** | 7,31 | 5,18 | 4,31 | 3,83 | 3,51 | 3,29 | 3,12 | 2,99 | 2,89 | 2,80 | 2,66 | 2,52 | 2,37 | 2,29 | 2,20 | 2,11 | 2,02 | 1,92 | 1,80 |
| **60** | 7,08 | 4,98 | 4,13 | 3,65 | 3,34 | 3,12 | 2,95 | 2,82 | 2,72 | 2,63 | 2,50 | 2,35 | 2,20 | 2,12 | 2,03 | 1,94 | 1,84 | 1,73 | 1,60 |
| **120** | 6,85 | 4,79 | 3,95 | 3,48 | 3,17 | 2,96 | 2,79 | 2,66 | 2,56 | 2,47 | 2,34 | 2,19 | 2,03 | 1,95 | 1,86 | 1,76 | 1,66 | 1,53 | 1,38 |
| **∞** | 6,63 | 4,61 | 3,78 | 3,32 | 3,02 | 2,80 | 2,64 | 2,51 | 2,41 | 2,32 | 2,18 | 2,04 | 1,88 | 1,79 | 1,70 | 1,59 | 1,47 | 1,32 | 1,00 |

# **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

Κατά τη συγγραφή του παρόντος τόμου χρησιμοποιήθηκε η βιβλιογραφία που ακολουθεί :


- "ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ"
  ΧΡΗΣΤΟΣ Ν. ΑΓΙΑΚΟΓΛΟΥ, ΘΕΟΦΑΝΗΣ Ε. ΜΠΕΝΟΣ
  ΕΚΔΟΣΕΙΣ Ε. ΜΠΕΝΟΥ, ΑΘΗΝΑ, 2002

- "ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ ΤΟΜΟΣ Α"
  ΓΕΩΡΓΙΟΥ Κ. ΧΡΗΣΤΟΥ
  GUTENBERG, 2007

- "ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ"
  ΓΕΩΡΓΙΟΥ Κ. ΧΡΗΣΤΟΥ
  GUTENBERG, 2005

- "ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ"
  Π. ΠΙΚΙΛΙΑΣ, Δ. ΠΑΛΑΜΟΥΡΔΑΣ, Α. ΠΕΤΡΑΚΗΣ, Δ. ΤΣΟΥΚΑΛΑΣ
  ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΔΗΡΟΣ, ΑΘΗΝΑ, 2001

- "ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑΣ"
  ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ, ΕΞΑΜΗΝΟ Δ
  ΠΑΤΡΑ, 2012

- "ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ"
  Χ. ΑΤΣΑΝΟΣ, Ν. ΑΒΟΥΡΗΣ
  ΠΑΝΕΠΙΣΤΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ, ΠΑΤΡΑ

- "STATICAL ANALYSIS FOR DECISION MAKING"
  HAMBURG, M.
  HARCOURT BRACE JOVANOVITXH, USA

- "ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ"
  Γ. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ
  ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ, ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΑΘΗΝΑ

- “AN INTRODUCTION TO MATHEMATICAL STATISTICS AND ITS APPLICATIONS”
  LARSEN, R. J. AND MARX, M. R.
  PEARSON PRENTICE HALL, FOURTH EDITION, 2006

- “ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΓΙΑ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ – ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΘΕΣΕΩΝ”
  Δ. ΚΟΥΓΙΟΥΜΤΖΗΣ
  ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ, 2012

- “ΕΚΤΙΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ”
  ΕΙΡ. ΜΟΥΣΤΑΚΗ
  ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ, ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Ο.Π.Α.

- “ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΙΙ”, ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΔΟΣΕΩΝ
  Μ. ΚΟΥΤΡΑΣ, Μ. ΜΠΟΥΤΣΙΚΑΣ
  ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ, ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ & ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ, 2011-2012

- “ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΙΙΙ”
  Μ. ΜΠΟΥΤΣΙΚΑΣ
  ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ, ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

- “ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ”, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ
  ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ, ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΙΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

- “ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ”, ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ – ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ
  Α.Τ.Ε.Ι ΠΑΤΡΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΣΤΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ, ΠΑΤΡΑ