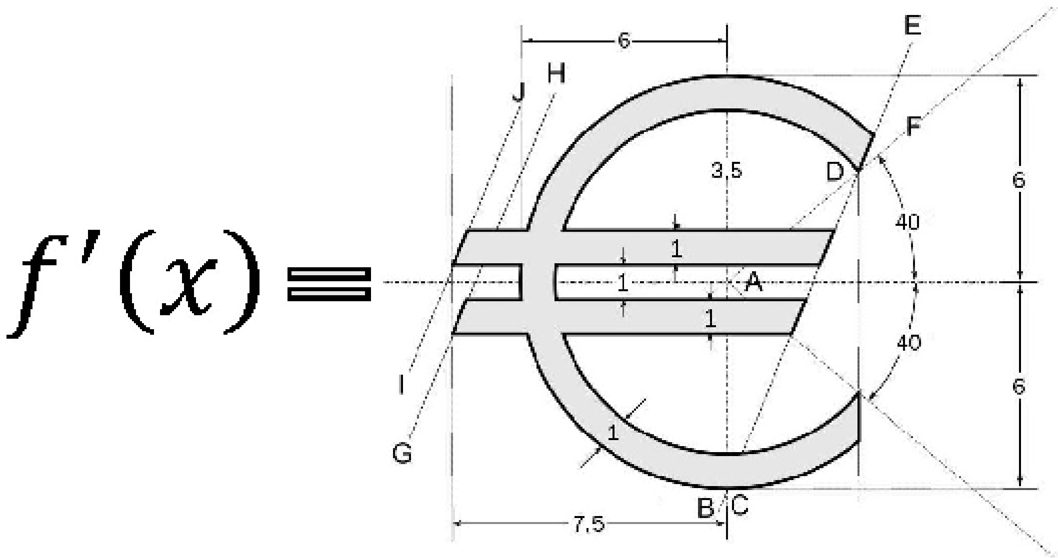
Τ.Ε.Ι. ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ & ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΜΑ: ''ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ''



ΠΟΥΛΟΣ ΘΕΜΙΣΤΟΚΛΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΨΗ: ΒΑΣΙΟΥ ΓΕΩΡΓΙΑ

Πάτρα, Μάρτιος 2015

Περιεχόμενα:

<u>Περίληψη</u>:

Η κάτωθι εργασία που θα εκπονήσουμε αφορά την μελέτη της παραγώγου μιας συνάρτησης . την εφαρμογή της σε οικονομικά προβλήματα και τον ρόλο της στην επέκταση των οικονομικών μαθηματικών. Αρχικά στο πρώτο κεφάλαιο θα δούμε το μαθηματικό υπόβαθρο που χρειαζόμαστε ώστε να κατανοήσουμε τι είναι η συνάρτηση , το όριο της και κατ' επέκταση η παράγωγος ώστε να μπορέσουμε να ορίσουμε τις έννοιες και τις μεθόδους που θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια.

Αφότου ορίσουμε τις έννοιες θα μπορέσουμε στο δεύτερο κεφάλαιο να δούμε την χρήση της παραγώγου στα οικονομικά προβλήματα και θα δούμε εκτεταμένα παραδείγματα με την εφαρμογή των ιδιοτήτων (μονοτονία, ακρότατα κτλ.)

Κλείνοντας της εργασία μας θα καταλήξουμε στο τρίτο κεφάλαιο με τα συμπεράσματα μας ως προς την χρήση της παραγώγου ,θα εξάρουμε τον μέγιστο ρόλο της και την διευκόλυνση που μας παρέχει στην επίλυση των προβλημάτων οικονομικής φύσης .

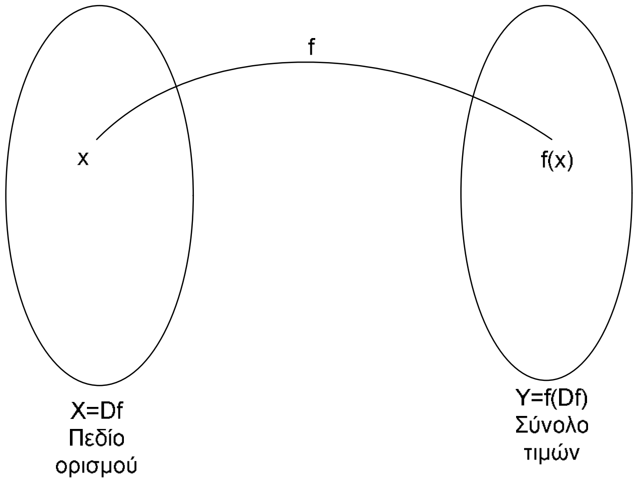
Κεφάλαιο 1ο

Μαθηματικό υπόβαθρο :

Όπως είναι λογικό αφού θα μιλήσουμε για την παράγωγο μιας συνάρτησης και τις ιδιότητες της θα πρέπει να ορίσουμε καταρχήν το τι είναι μια συνάρτηση, τι το όριο της και κατ' επέκταση η ίδια η παράγωγος . Θα δούμε λοιπόν μόνο τα βασικά χαρακτηριστικά που μας χρειάζονται ώστε κάθε παράδειγμα που θα χρησιμοποιούμε στην συνέχεια να γίνεται πλήρως κατανοητό και για κάποιον δεν είναι εξοικειωμένος με το αντικείμενο.

Συναρτήσεις

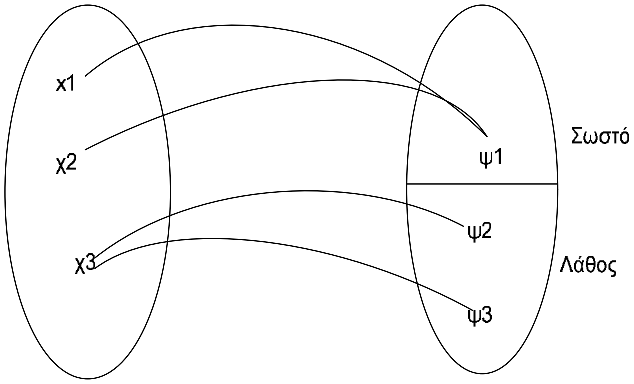
Ορίζουμε την **συνάρτηση f (function) ως μια διαδικασία – κανόνα που θα αντιστοιχίζει τα στοιχεία του συνόλου X στο σύνολο Y**.



Το έχουμε στο μυαλό μας ως έναν υπολογιστή όπου πατώντας κάποιο κουμπί γίνεται κάτι. Η εντολή-μεσάζοντας είναι η συνάρτηση.

Το σύνολο **X με τα δυνατά χ που μπορώ να πάρω** λέγεται **πεδίο ορισμού** και συμβολίζεται ως **Df,** ενώ το **Y είναι όλα τα αποτελέσματα** που θα πάρω αν περάσω τα χ από την συνάρτηση και λέγεται **σύνολο τιμών** συμβολιζόμενο με **Y ή f(X) ή f(Df).**

Κάθε χ αντιστοιχίζεται μοναδικά σε ένα ψ=f(x) , όπως στον υπολογιστή κάθε πλήκτρο κάνει μια δουλεία αν το πατήσω (πατώντας enter δεν γίνεται να αλλάζω παράγραφο και να ανοίγει η μουσική ταυτόχρονα)



Διαφορετικά χ όμως μπορούν να μας δώσουν το ίδιο ψ=f(x)

(Ένα παράθυρο στον υπολογιστή κλείνει πατώντας και το χ-κλείσιμο αλλά και με τα πλήκτρα Alt+F4)

Πχ. f(1)=1 αλλά και f(-1)=1 για την συνάρτηση $f(x)=x^2$

<u>Πεδίο Ορισμού</u>

Η πρώτη μου δουλειά όταν μου δώσουν μια συνάρτηση είναι να βρω το πεδίο ορισμού εφόσον δεν αναφέρεται. Να επιλέξω τα χ που μπορώ να χρησιμοποιήσω. Άρα θα χρειαστώ όλους τους λογικούς περιορισμούς που γνωρίζω ήδη για τα μαθηματικά Δηλαδή:

1) $\frac{A}{B} \rightarrow B \neq 0$

2) $\sqrt[n]{A} \rightarrow A \geq 0$

3) $\log(D) \rightarrow D > 0$ και

4) $\varepsilon\varphi A = \frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A} \rightarrow \sigma\upsilon\nu A \neq 0$

αλλά και κάθε συνδυασμό τους όπως πχ $\frac{A}{\sqrt{B}} \rightarrow B>0$, $\log(\sqrt{D}) \rightarrow D>0$,

$\frac{A}{\sqrt{\log(B)}} \rightarrow \log(B)>0 \rightarrow B>1$ κτλ.

Αν δεν έχω περιορισμούς από τις ανωτέρω συνθήκες **το πεδίο ορισμού είναι το** $\mathbb{R}$

($D_f = \mathbb{R}$)

Για παράδειγμα : Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(\chi)=\frac{\chi\eta\mu\sqrt{\chi}}{\ln\chi-1}$

<u>Λύση:</u>

Βλέπω $\sqrt{\chi}$ οπότε πρέπει $\chi \geq 0$.

Έπειτα υπάρχει μέσα lnχ οπότε θέλω χ>0 και τέλος αφού έχω κλάσμα πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδέν δηλαδή $\ln\chi-1 \neq 0 \Leftrightarrow \ln\chi \neq 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \ln\chi \neq \ln e \Leftrightarrow \chi \neq e$. Οι τρείς συνθήκες **πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα**.

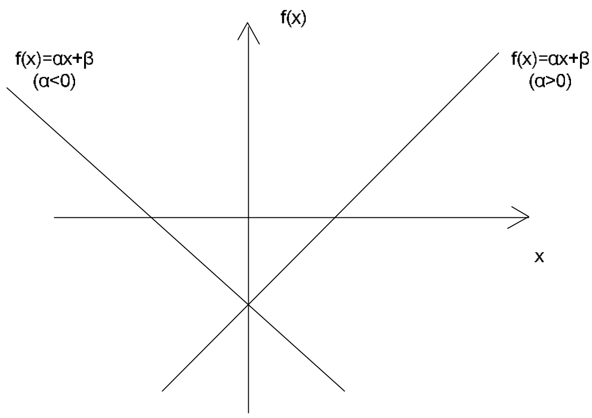
Οι δύο πρώτες μου δίνουν $\chi \geq 0$ και σε συνδυασμό με την τρίτη πρέπει

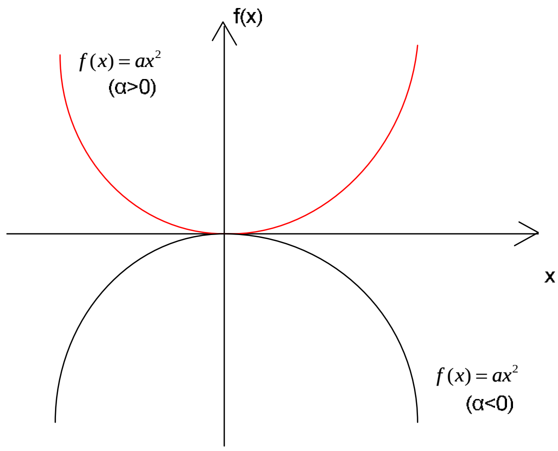
$\chi \in (0,e) \cup (e,+\infty)$ ή αλλιώς $D_f = (0,e) \cup (e,+\infty)$

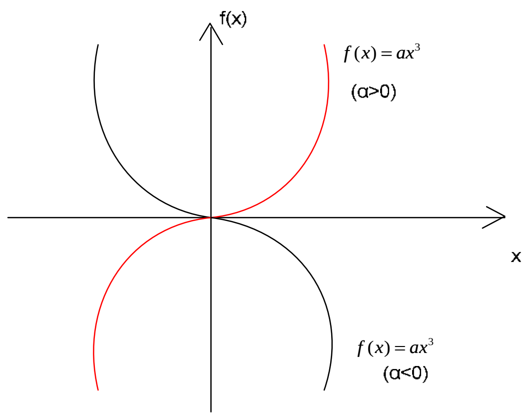
<u>Γραφικές παραστάσεις</u>

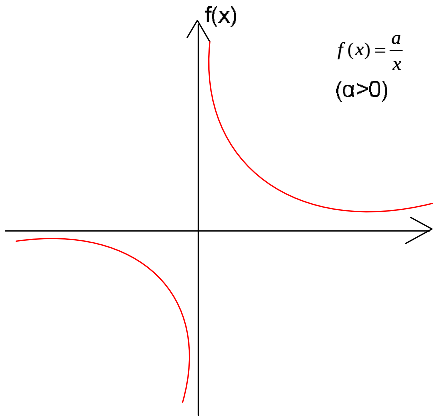
Κάθε συνάρτηση είδαμε πως αντιστοιχίζει τα χ στα ψ μοναδικά, δημιουργώντας ζεύγη (χ, ψ) που μπορώ να τα αναπαραστήσω στο καρτεσιανό επίπεδο φτιάχνοντας την γραφική παράσταση. **Μεγάλη προσοχή στο Df.** Αφού δεν μπορώ να τα χρησιμοποιήσω δεν μπορώ και να τα ζωγραφίσω.

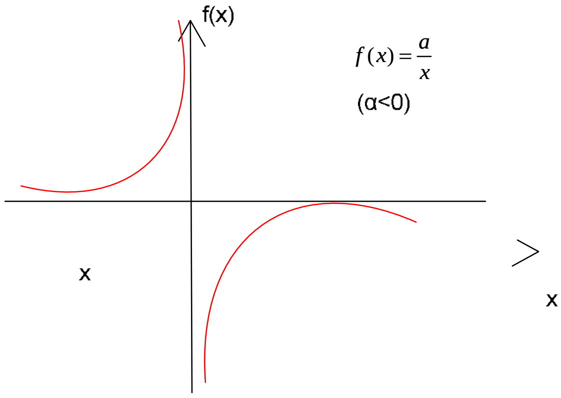
Βασικό όμως είναι **να μπορώ βλέποντας τον τύπο της συνάρτησης να αναγνωρίσω την γενική της μορφή**. Και αυτό γιατί θα ξέρω πως «κινείται» γενικά πράγμα που θα μου χρειαστεί ιδιαίτερα (αν είναι ευθεία η καμπύλη, αν έχει κοιλιά, αν ανεβαίνει ή κατεβαίνει , αν σταματά κάπου κτλ.) Έτσι πρέπει να θυμάμαι τα παρακάτω σχήματα γενικά:

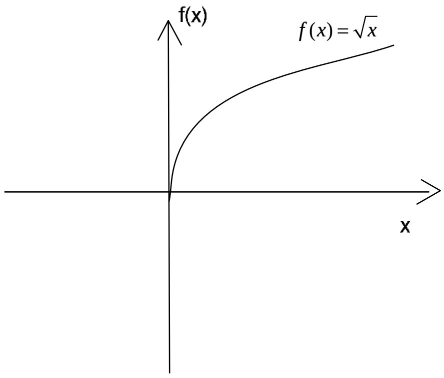


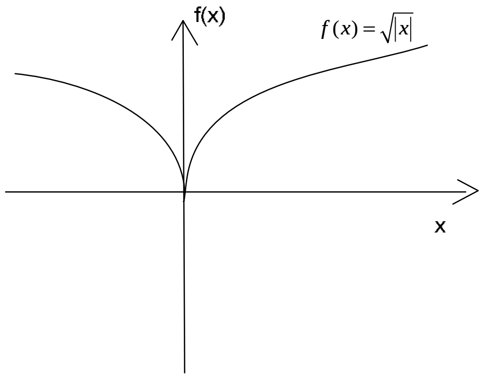


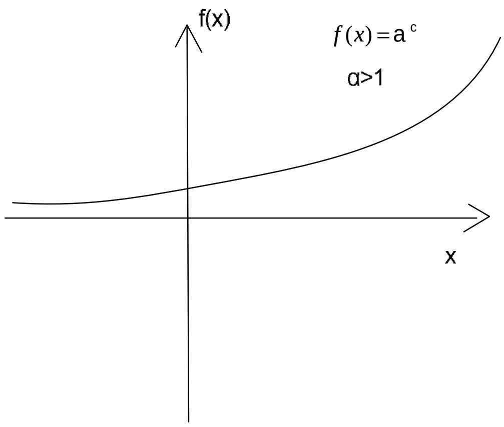


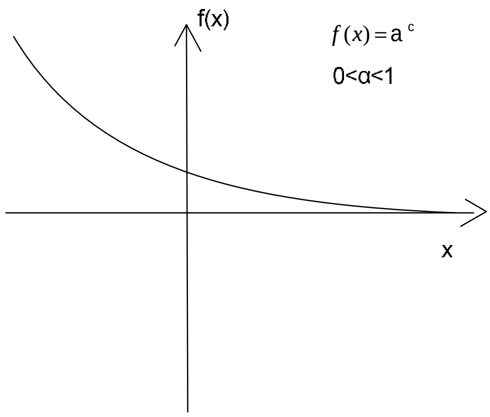

f(x)
$f(x)=\frac{a}{x}$
(α>0)

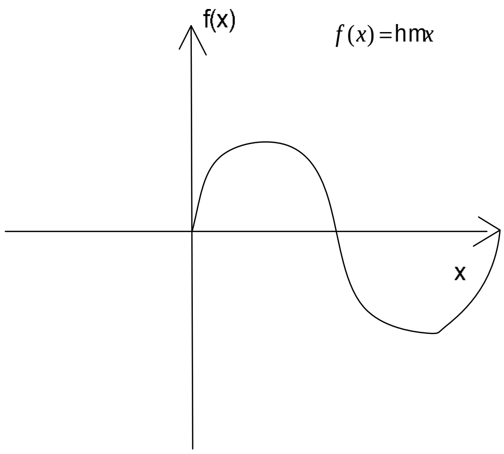

f(x)
$f(x)=\frac{a}{x}$
(α<0)
x
x

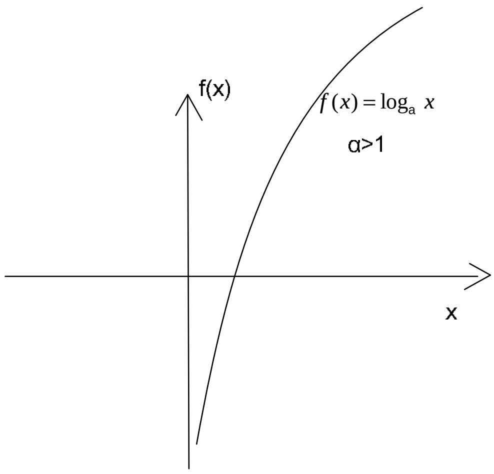

f(x)
$f(x)=\sqrt{x}$
x

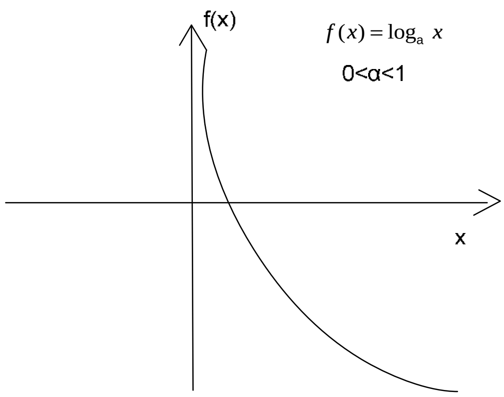

f(x)
$f(x)=\sqrt{|x|}$
x

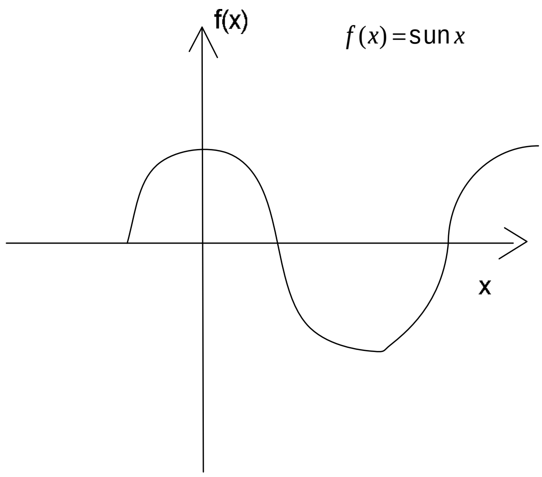

f(x)
$f(x)=a^{c}$
α>1
x

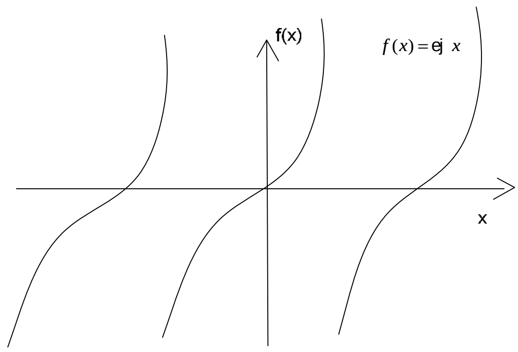

f(x)
$f(x)=a^{c}$
0<α<1
x


f(x)
$f(x) = \text{hm}x$
x


f(x)
$f(x) = \log_a x$
α>1
x


f(x)
$f(x) = \log_a x$
0<α<1
x


f(x)
$f(x) = \text{sun}\, x$
x



Τέλος να θυμίσουμε από τα σχολικά χρόνια ότι αν προσθέσω έναν αριθμό[f(x)+c] στον τύπο της συνάρτησης σημαίνει μετατόπιση προς τα επάνω, αν αφαιρέσω [f(x)-c] μετατόπιση προς τα κάτω, , ενώ αν προσθέσω μέσα στην συνάρτηση

[f(x+c)] σημαίνει μετατόπιση αριστερά και αν αφαιρέσω μέσα στην συνάρτηση

[f(x-c)] μετατόπιση δεξιά.

Ισότητα - Πράξεις - Σύνθεση

Þ Δύο συναρτήσεις για να είναι ίσες δεν αρκεί να μοιάζουν έχοντας ίδιο τύπο αλλά να έχουν και το ίδιο πεδίο ορισμού.

Þ Όλες οι πράξεις μεταξύ συναρτήσεων γίνονται κανονικά αρκεί να ορίζονται. Έχουμε f+g, f-g, f*g και $\frac{f}{g}$ με g ¹ 0. Πεδίο ορισμού στις νέες συναρτήσεις βρίσκω μετά τις πράξεις.

Þ Σύνθεση δύο συναρτήσεων λέμε αν η μία συνάρτηση περάσει μέσα από την άλλη. Δηλαδή ως gof , σύνθεση της f με την g ορίζεται η g(f(x)). Όπου δηλαδή στην g(x) έχω χ θα βάλω στην θέση του το f(x)

Πχ. Αν g(x)=ln(x+5) και f(x)=x^2+9 τότε gof=g(f(x))=ln[(x^2+9)+5]=ln(x^2+14)
Υπάρχει φυσικά και η fog αντίστοιχα χωρίς να είναι απαραίτητα ίσες.

Το πεδίο ορισμού είναι **Dgof={x ∈ Df / f(x) ∈ Dg}**

Για παράδειγμα **:**

Να υπολογίσετε τις gof και fog με τα πεδία ορισμού τους, αν f(x)=χ+4 και g(x)=lnx

<u>Λύση:</u>

Έχουμε fog=f(g(x))=lnx+4 και για το πεδίο ορισμού της πρέπει

Dfog={x ∈ Dg / g(x) ∈ Df} όπου Dg=(0,+ ¥) και D_f= ℝ με βάση τους κανόνες πριν. Άρα πρέπει χ ∈ (0,+ ¥) και ταυτόχρονα lnx∈ ℝ ή ισοδύναμα χ ∈ (0,+ ¥) και ταυτόχρονα x ∈ (0,+ ¥). Δηλαδή Dfog=(0,+ ¥).

Αντίστοιχα παίρνω gof=g(f(x))=ln(x+4) με πεδίο ορισμού τέτοιο ώστε

Dgof={x î Df / f(x) î Dg}. Άρα πρέπει χ ∈ ℝ και επίσης χ+4î (0,+ ¥) που ισχύει αν το χ είναι μεγαλύτερο του -4. Και επειδή η πρώτη συνθήκη δεν μας δίνει κάτι έχουμε Dgof=(-4,+ ¥)

<u>Χαρακτηρισμός Συνάρτησης</u>

<u>Μονοτονία:</u>

Αναφέραμε πριν την έκφραση «ανεβαίνει η συνάρτηση» . Στα μαθηματικά αυτό λέγεται αύξουσα. Αναλυτικά ορίζουμε:

Μια συνάρτηση f σε διάστημα Δ είναι

- **Γνησίως αύξουσα** αν $\forall \chi_1, \chi_2 \in \Delta$, $\chi_1 < \chi_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$
- **Αύξουσα** αν $\forall \chi_1, \chi_2 \in \Delta$, $\chi_1 < \chi_2$ ισχύει $f(x_1)\leq f(x_2)$
- **Γνησίως φθίνουσα** αν $\forall \chi_1, \chi_2 \in \Delta$,$\chi_1 < \chi_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$
- **Φθίνουσα** αν $\forall \chi_1, \chi_2 \in \Delta$, $\chi_1 < \chi_2$ ισχύει $f(x_1)\geq f(x_2)$

Πρακτικά σαρώνοντας από αριστερά προς δεξιά το σχήμα, η γνησίως αύξουσα ανεβαίνει συνέχεια, η αύξουσα ανεβαίνει αλλά μπορεί και να σταματά , και αντίστοιχα η γνησίως φθίνουσα κατεβαίνει συνέχεια ενώ η φθίνουσα κατεβαίνει έχοντας την δυνατότητα να παραμένει και σταθερή.

Αν έχω γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται και **γνησίως μονότονη**, ενώ στην περίπτωση να έχω αύξουσα ή φθίνουσα λέγεται και **μονότονη**.

<u>Ακρότατα:</u>

Μια συνάρτηση f με Df=A λέμε ότι παρουσιάζει :

Μέγιστο το $f(x_0)$ αν " c Î Aισχύει f(x) £$f(x_0)$

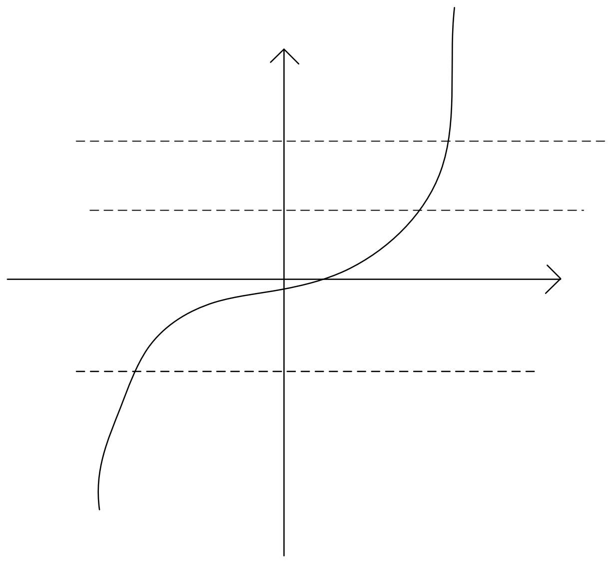
Ελάχιστο το $f(x_0)$ αν " c Î Aισχύει f(x) ³ $f(x_0)$

Τα μέγιστα και ελάχιστα μιας συνάρτησης λέγονται και **ακρότατα.**

<u>1-1</u>

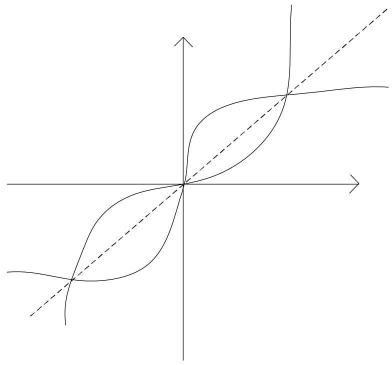
Συνάρτηση 1-1 (ένα προς ένα) έχω αν $\forall \chi_1, \chi_2 \in$ A ισχύει: **αν** $\chi_1 \neq \chi_2$ **τότε** $\boldsymbol{f}_{(\chi_1)} \neq \boldsymbol{f}_{(\chi_2)}$ η αντίστροφα και ίσως πιο πρακτικά με προσοχή όμως γιατί ακολουθώ αντίστροφη πορεία : **αν** $\boldsymbol{f}_{(\chi_1)} =$
$\boldsymbol{f}_{(\chi_2)}$ **τότε** $\chi_1 = \chi_2$.

Γραφικά η 1-1 σημαίνει ότι αν φέρω μια οποιαδήποτε παράλληλη στον άξονα χ΄χ θα κόβει την γραφική παράσταση σε ένα σημείο μόνο.



Συμπέρασμα… Κάθε γνησίως μονότονη είναι 1-1 όχι όμως και οι μονότονες αφού μπορούν να σταματούν.

<u>Αντίστροφη f^{-1}</u>



Μια συνάρτηση <u>έχει αντίστροφη μόνο αν είναι 1-1.</u>

Είναι η f^{-1}=f(A) →R όπου κάθε ψ Î $f(A)$ αντιστοιχίζεται σε μοναδικό χ Î A ώστε f(x)=ψ, με Df^{-1} το σύνολο τιμών της f,

σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της f και **f(x)=ψ ⟺f^{-1}(ψ)=χ.**

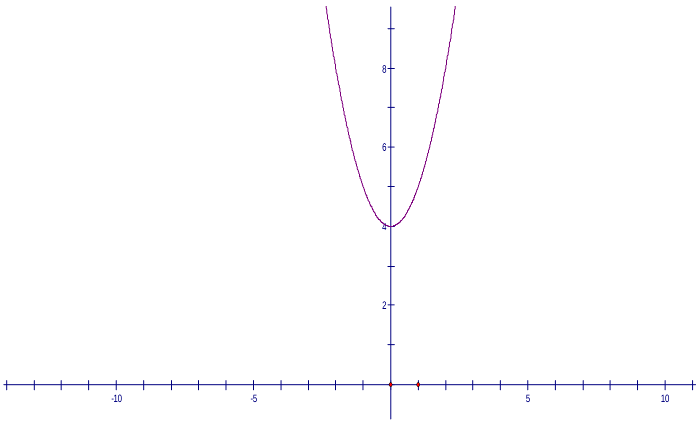
Η f^{-1}είναι συμμετρική όπως βλέπουμε στο σχήμα της f ως προς την διχοτόμο ψ=χ

<u>Άρτια – Περιττή :</u>

Άρτια συνάρτηση λέγεται η f για την οποία ισχύει

f(-x)=f(x) για κάθε πραγματικό χ.

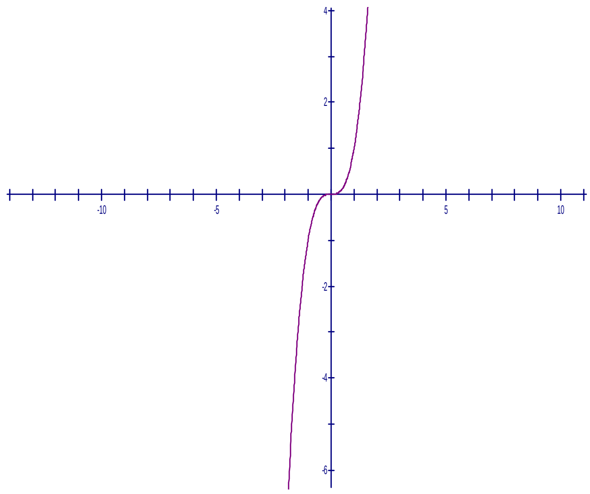
Πρακτικά αυτό σημαίνει να έχει άξονα συμμετρίας το ψ΄ψ όπως η $f(x)=x^2+4$



Περιττή συνάρτηση λέγεται η f για την οποία ισχύει

f(-x)=-f(x) για κάθε πραγματικό χ.

Πρακτικά αυτό σημαίνει να έχει συμμετρία ως προς το Ο(0,0) όπως η $f(x)=x^3$



Όριο στο χ_0

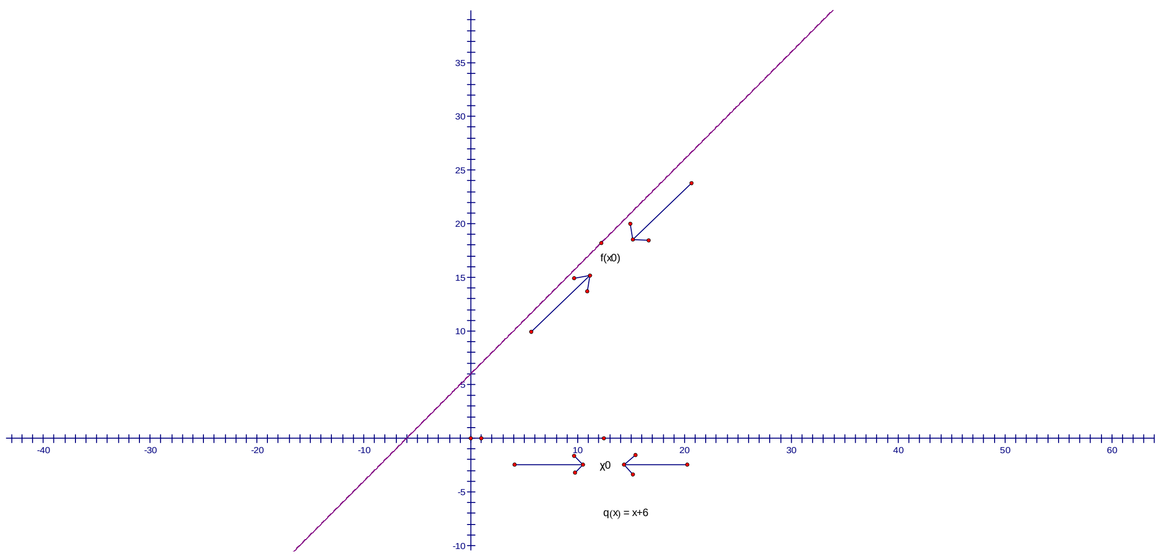
Όριο μιας συνάρτησης f(x) σε ένα σημείο χ_0 θα λέμε την τιμή που πάει να πάρει η f όταν **πλησιάζω το χ_0** πολύ κοντά.

Συμβολίζουμε με $\lim_{\chi \to \chi_0} f(x)$

Το χ μπορώ να το πλησιάσω από όποια πλευρά θέλω. Αν **πλησιάζω από δεξιά γράφω** $\lim_{\chi \to \chi_0^+} f(x)$**,** ενώ **από τα αριστερά** $\lim_{\chi \to \chi_0^-} f(x)$.

Αν όμως υπάρχουν αυτά τα δύο **πλευρικά όρια** , για να υπάρχει γενικά το όριο θα πρέπει

$$\lim_{\chi \to \chi_0^+} f(x) = \lim_{\chi \to \chi_0^-} f(x)$$



Ιδιότητες:

Το όριο μας δίνει και πληροφορίες για «εκεί κοντά»

- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$ αναγκαστικά f(x)>0 κοντά στο χ_0
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$ αναγκαστικά f(x)<0 κοντά στο χ_0
- Αν f(x) $\le$ g(x) κοντά στο χ_0 τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$ αν υπάρχουν.

Πράξεις:

- Αν υπάρχουν τα όρια των f και g ισχύουν όλες οι πράξεις μεταξύ τους

Πχ $\lim_{x\to x_0}[f(x)*g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) * \lim_{x\to x_0} g(x)$ ή

$\lim_{x\to x_0}|f(x)| = \left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|$ ή

$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^\nu = [\lim_{x\to x_0} f(x)]^\nu$

Δεν ισχύουν όμως και αντίστροφα απαραίτητα

- Αν P(x) και Q(x) πολυώνυμα τότε $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$, $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ (αρκεί όμως $Q(x_0) \ne 0$) αφού γενικά πρέπει να θυμάμαι $\lim_{x\to x_0} x^\nu = x_0^\nu$

Τριγωνομετρία

- $\lim_{x\to x_0}(\eta\mu x) = \eta\mu x_0$, $\lim_{x\to x_0}(\sigma\upsilon\nu x) = \sigma\upsilon\nu x_0$, $\lim_{x\to x_0}(\varepsilon\varphi x) = \varepsilon\varphi x_0$ αν $\chi_0 \ne \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ $\kappa \in Z$
- $\forall x \in R$ ισχύει $|\eta\mu x| \le |x|$, $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$ και $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

Σύνθεση

Αν ζητάμε $\lim_{x\to x_0} f(g(x))$ θέτω u=g(x) ,άρα $u_0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$ και έχω $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u)$

<u>Κριτήριο Παρεμβολής</u>

Αν

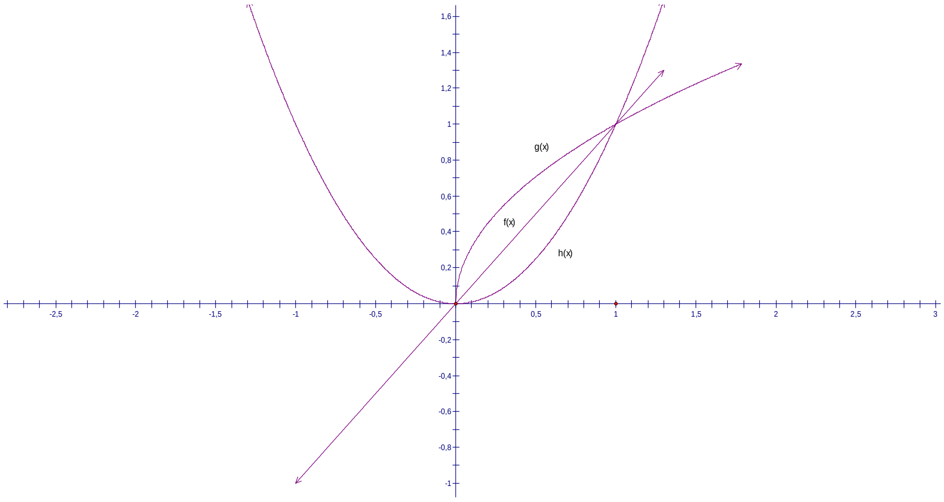
$h(\chi) \le f(x) \le g(x)$

κοντά στο χ_0 και

$\lim_{x \to \chi_0} h(x) = \alpha$

$\lim_{x \to \chi_0} g(x) = a$ τότε

και $\lim_{x \to \chi_0} f(x) = a$



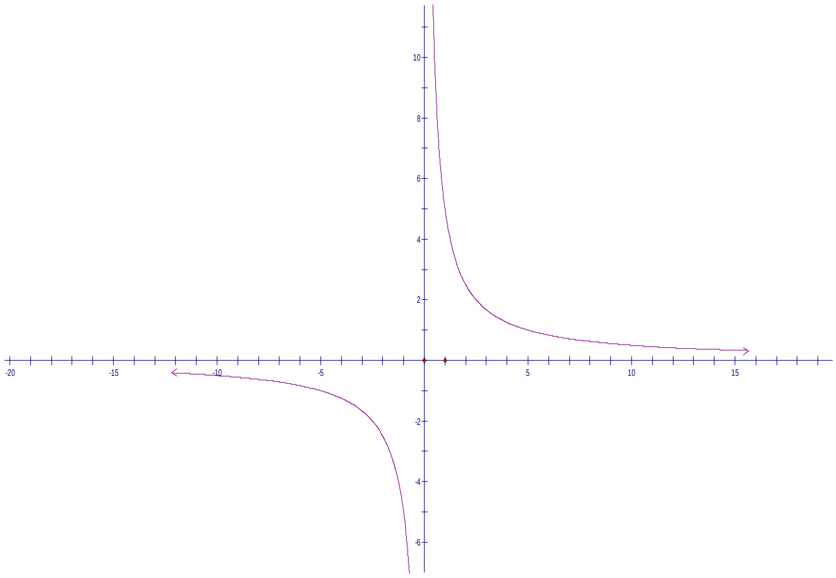
<u>Άπειρο</u>

Πλησιάζοντας ένα χ μπορεί η συνάρτηση να πηγαίνει στο άπειρο

Πχ. $\lim_{x \to 0^-} \frac{5}{\chi} = -\infty$

ενώ $\lim_{x \to 0^+} \frac{5}{\chi} = +\infty$

(άρα $\lim_{x \to 0} \frac{5}{\chi}$ δεν υπάρχει)



Έχουμε όμως «καλές» ιδιότητες για το άπειρο:

- Αν $\lim_{x \to \chi_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \to \chi_0} [-f(x)] = -\infty$ και αντίστροφα.
- Αν $\lim_{x \to \chi_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \to \chi_0} \frac{1}{f(x)} = 0$
- Αν $\lim_{x \to \chi_0} f(x) = 0$ και f(x)>0 κοντά στο χ_0 τότε $\lim_{x \to \chi_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, ενώ αν f(x)<0 κοντά στο χ_0 τότε $\lim_{x \to \chi_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2n}}=+\infty$ ενώ για τα περιττά δεν υπάρχει όπως είδαμε όριο, παρά μόνο τα πλευρικά όπου $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^{2n+1}}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{2n+1}}=+\infty$
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=+\infty$
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=+\infty$

<u>Πράξεις</u>

Οι πράξεις μεταξύ απείρων κάποιες επιτρέπονται και άλλες όχι. Αυτές που δεν γίνονται λέγονται <u>**απροσδιόριστες μορφές**</u> (απροσδιοριστίες) και είναι :

$$(+\infty)+(-\infty),\ 0*(\pm\infty),\ (+\infty)-(+\infty),(-\infty)-(-\infty),\ \frac{0}{0},\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Οι υπόλοιπες είναι επιτρεπτές και το αποτέλεσμα το βρίσκω με λογική

Πχ. $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$, $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$, $(-\infty)+0=-\infty$, $a*(-\infty)=\begin{cases}-\infty & a>0\\ +\infty & a<0\end{cases}$,

$a*(+\infty)=\begin{cases}+\infty & a>0\\ -\infty & a<0\end{cases}$, κτλ.…

Ας δούμε δυο παραδείγματα που θα μας βοηθήσουν παρακάτω στην παράγωγο αφού όπως θα δούμε και η παράγωγος ένα όριο είναι στην πραγματικότητα:

1) Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 0}\left(\eta\mu\chi\,\eta\mu\frac{\pi}{\chi}\right)=0$$

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\chi\neq 0$ ισχύει $\left|\eta\mu\left(\frac{\pi}{\chi}\right)\right|\le 1$ άρα $\left|\eta\mu\chi\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{\chi}\right)\right|\le\left|\eta\mu\chi\right|$ ή

$$-\left|\eta\mu\chi\right|\le\eta\mu\chi\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{\chi}\right)\le\left|\eta\mu\chi\right|$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0}\left|\eta\mu\chi\right|=\lim\limits_{x\to 0}-\left|\eta\mu\chi\right|=0$ και από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu\chi\,\eta\mu\frac{\pi}{\chi}\right)=0$

2) Να υπολογίσετε το:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{1+x^3}-1}$$

Λύση:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{1+x^3}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x(\sqrt{1+x^3}+1)}{(\sqrt{1+x^3}-1)(\sqrt{1+x^3}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x(\sqrt{1+x^3}+1)}{\sqrt{1+x^3}^2-1^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x(\sqrt{1+x^3}+1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\frac{\eta\mu 2x}{2x}(\sqrt{1+x^3}+1)}{x^3}=$$

$$2\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{2x}\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x^3}+1)\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=2*1*2*(+\infty)=+\infty$$

Όριο στο άπειρο

Μια συνάρτηση f που ορίζεται σε ένα διάστημα $(-\infty,\alpha)$ ή $(\alpha,+\infty)$ ή το R κτλ. Μπορεί να φτάσει και στο άπειρο. Άρα και εμείς μπορούμε να πάρουμε το όριο της εκεί. Στην πραγματικότητα αφού το άπειρο δεν πιάνεται είναι σαν να υπολογίζουμε σε έναν απείρως μεγάλο αριθμό.

Για τις βασικές συναρτήσεις οφείλω να ξέρω «απ' έξω» ότι :

- $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$, $\lim_{x\to+\infty}x^n=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}x^n=\begin{cases}+\infty & n \text{ άρτιος}\\ -\infty & n \text{ περιττός}\end{cases}$

Αλλά και από τις γραφικές παραστάσεις βλέπουμε:

- Αν α>1 $\lim_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$ και $\lim_{x\to-\infty}\alpha^x=0$ [Άρα $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ και $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$
- Αν 0<α<1 τότε $\lim_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\alpha^x=0$
- Αν α>1 $\lim_{x\to 0^+}\log_\alpha x=-\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\log_\alpha x=+\infty$ [Άρα $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$]
- Αν 0<α<1 τότε $\lim_{x\to 0^+}\log_\alpha x=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\log_\alpha x=-\infty$

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν έχουν όρια σε $\pm\infty$, αφού δεν μπορώ να σταθεροποιήσω αυτόν τον απείρως μεγάλο αριθμό (λόγω περιοδικότητας)

<u>Συνέχεια</u>

Στα μαθηματικά γενικά όσες έννοιες ορίζουμε όπου λεκτικά σημαίνουν κάτι και στα μαθηματικά έχουν ίδια ή σχεδόν όμοια σημασία. Έτσι όταν μου μιλούν για συνεχή συνάρτηση , σκέφτομαι συνάρτηση που δεν σταματά, κάνοντας κενά αλλά «προχωρά» συνέχεια. Με αυστηρό ορισμό που συνδέει και τα όρια έχω:

Έστω f και $x_0 \in D_f$. <u>Η f είναι συνεχής στο χ_0 αν</u> $\lim_{x \to x_0} f(\chi) = f(x_0)$. Προφανώς αφού η συνέχεια αφορά ένα σημείο, για να μιλήσω για ένα διάστημα Α θα πρέπει να είναι συνεχής για κάθε χ που ανήκει στο Α.

Αντιθέτως σε ένα σημείο χ_0 δεν είναι συνεχής αν

α) δεν υπάρχει το όριο

β) υπάρχει το όριο και είναι διάφορο του $f(x_0)$

<u>Βασικές συναρτήσεις</u> :

Με βάση τα όρια σε ένα σημείο χ_0 που είδαμε, οι συναρτήσεις ημχ , συνχ , α^χ, $\log_a x$, lnx αλλά και οι πράξεις μεταξύ συνεχών είναι συνεχής συνάρτηση $(+,-,*,:,|\ |,\sqrt{\ })$ όπως και η σύνθεση συνεχών είναι συνεχής.

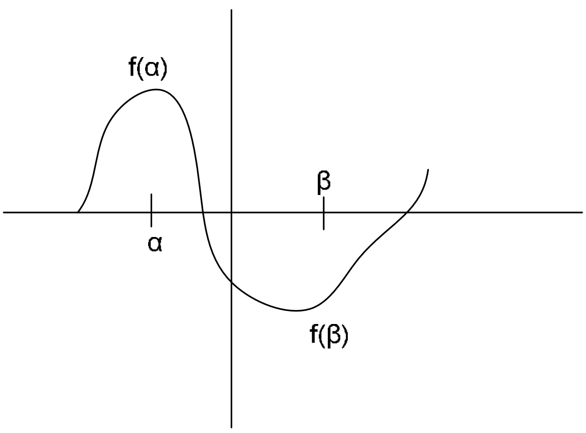
<u>Θεωρήματα:</u>

<u>Bolzano</u>:

Αν $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$

- f συνεχή στο [α,β]
- $f(\alpha)\, f(\beta) < 0$

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\chi_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$



<u>Σημείωση:</u> Συχνά βλέπουμε παράφραση όπου έχουμε $f(\alpha)\, f(\beta) \le 0$. Τότε έχω $\chi_0 \in [\alpha,\beta]$.

<u>Παρατήρηση:</u>

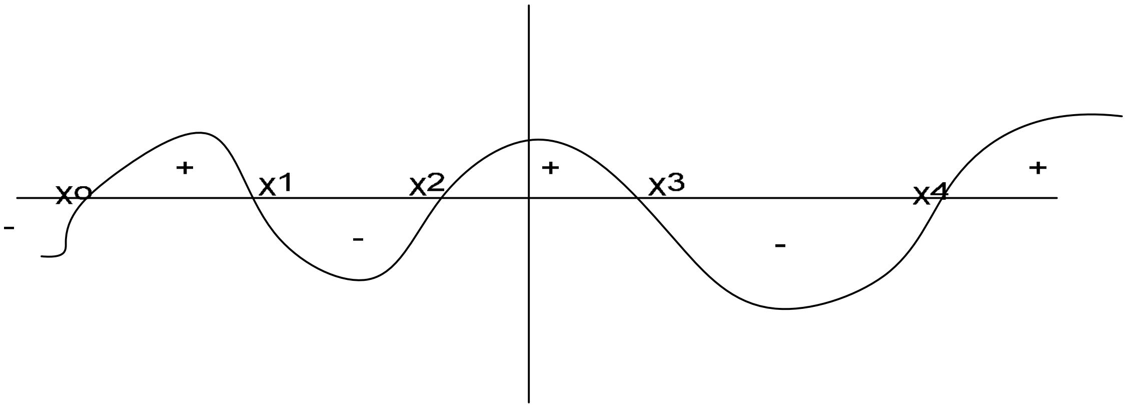
Το Bolzano μου δίνει αν μηδενίζει κάπου η συνάρτηση στο διάστημα μου. Αν ξέρω ότι δεν μηδενίζει τότε προφανώς είτε είναι όλη θετική είτε όλη αρνητική, **διατηρεί όπως λέμε πρόσημο.**

Άρα για να βρω το πρόσημο της f γενικά :

α) Βρίσκω τα σημεία μηδενισμού $\chi_o,\chi_1,\chi_2,\chi_3,\dots$

β) Σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\chi_\nu,\chi_{\nu+1})$ διατηρεί το πρόσημο οπότε αρκεί να

το βρω υπολογίζοντας την τιμή της για ένα τυχαίο $\xi \in (\chi_\nu,\chi_{\nu+1})$

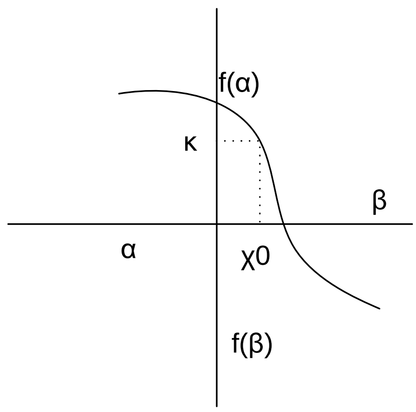


<u>Ενδιαμέσων Τιμών :</u>

Έστω f:[α,β] →A με

- f συνεχή στο [α,β]
- $f(a) \neq f(b)$

τότε $\forall \kappa \in \mathbb{R}$ με $f(a) < k < f(b)$ υπάρχει <u>τουλάχιστον ένα</u> $\chi_0 \in (\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f(x_0)=\kappa$



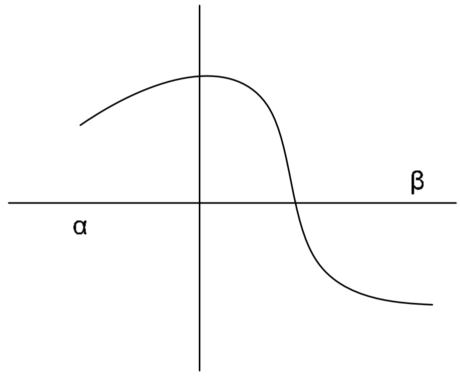
<u>Συμπέρασμα:</u>

Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ της συνεχούς και μη σταθερής f είναι διάστημα.

Ελάχιστης και μέγιστης τιμής :

Αν f συνεχής στο Δ=[α,β] , τότε η f παίρνει στο Δ μέγιστη τιμή Μ και ελάχιστη τιμή μ.

Υπάρχουν δηλαδή χ_1,χ_2 î Δ ώστε μ=f(x_1) και Μ=f(x_2) με m£ $f(x)$ £ M για κάθε χ στο Δ.



Η έννοια της παραγώγου

Και αφού ορίσαμε όλα τα προ απαιτούμενα μπορούμε πλέον να ορίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης σε σημείο αλλά και την παράγωγο συνάρτηση

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο χ_0 ∈Df αν υπάρχει το όριο $\lim_{\chi\to\chi_0}\frac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός . Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο χ_0 και συμβολίζεται με f΄(χ_0).

Άρα **f΄(χ₀)**= $\lim_{\chi\to\chi_0}\frac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$

- Αν θέσω χ-χ_0=h τότε ο τύπος μετασχηματίζεται σε

  $\mathbf{f'(\chi_0)}= \lim_{h\to 0}\frac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0)}{h}$

- Εφόσον η παράγωγος είναι όριο πρέπει να υπάρχουν τα πλευρικά όρια και να είναι ίσα. Προφανώς για τα άκρα διαστήματος ελέγχω μόνο το ένα πλευρικό όριο.

- Αν για ένα κινητό ορίζω συνάρτηση χ= S(t) να μου δίνει την θέση του τότε η

  παράγωγος S΄(t)= $\lim_{t\to t_0}\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$ ονομάζεται στιγμιαία ταχύτητα .

Στην οικονομική επιστήμη οι νεοκλασικοί οικονομολόγοι θεμελιώνουν τις αναλύσεις τους στις τεχνικές της οριακής ανάλυσης. Ειδικότερα η σχολή της οριακής οικονομικής ανάλυσης μελετά τους οριακούς ρυθμούς μεταβολής των οικονομικών μεγεθών όπου η παράγωγος μιας οικονομικής συνάρτησης εκφράζει το οριακό μέγεθος. Π.χ. η συνάρτηση του οριακού κόστους είναι η παράγωγος της συνάρτησης του ολικού κόστους και ούτω καθ' εξής. Έτσι με την ανάπτυξη της νεοκλασικής θεωρίας οι μαθηματικές τεχνικές του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού αποτελούν βασικό εργαλείο για την ανάλυση, μελέτη και επίλυση οικονομικών και διοικητικών προβλημάτων.

Ιστορικά ο απειροστικός λογισμός αναπτύχθηκε τον 17^{o} αιώνα σχεδόν ταυτόχρονα αλλά ανεξάρτητα από τους Gottfried Leibnitz και Isaac Newton . Ο Leibnitz ανακάλυψε τον απειροστικό λογισμό στην προσπάθεια του να λύσει γεωμετρικά κυρίως προβλήματα όπως ο προσδιορισμός μήκους, εφαπτομένης μιας καμπύλης, εμβαδό μεταξύ δύων η περισσοτέρων καμπυλών, όγκο ενός στερεού . Ο Newton ανακάλυψε τον απειροστικό λογισμό στην προσπάθεια του να επιλύσει προβλήματα φυσικής και αστρονομίας, όπως ο προσδιορισμός της ταχύτητας και τροχιάς ενός κινούμενου σώματος, προσδιορισμός του έργου που δημιουργείτε όταν επιδρά μια δύναμη πάνω σε ένα σώμα κ.λ.π[5]

Θεώρημα:

Έστω f συνάρτηση και $A(\chi_0,f(\chi_0))$ ένα σημείο της . Αν υπάρχει το $\lim_{\chi\to\chi_0}\frac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο Α την ευθεία ε που περνά από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης (κλίση) $\lambda=\lim_{\chi\to\chi_0}\frac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$.

Η εξίσωση της ε θα είναι $\boldsymbol{\psi-f(x_0)=f'(\chi_0)(\chi-\chi_0)}$

Αν το όριο τείνει στο άπειρο η εφαπτομένη θα είναι η $\boldsymbol{\chi=\chi_0}$

5. Μαθηματικά Οικονομικών επιστημών Τόμος Α, Μανώλη Λουκάκη , Εκδόσεις Σοφία

Θεώρημα:

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 είναι και συνεχής σε αυτό

Το αντίστροφο δεν ισχύει . Αν είναι συνεχής δεν είναι απαραίτητα και παραγωγίσιμη αλλά αν δεν είναι συνεχής δεν είναι και παραγωγίσιμη.

Ας δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού της παραγώγου με βάση τον ορισμό:

Να βρείτε την f΄(0) αν $f(\chi)=\begin{cases} 2\chi - \eta\mu\chi & \chi \leq 0 \\ \chi^2 + \eta\mu\chi & \chi > 0 \end{cases}$

Λύση:

Έχω ότι $\lim_{\chi\to 0^-} \frac{f(\chi)-f(0)}{\chi-0} = \lim_{\chi\to 0^-} \frac{2\chi-\eta\mu\chi}{\chi} = \lim_{\chi\to 0^-} \left(2 - \frac{\eta\mu\chi}{\chi}\right) = 2-1=1$

και $\lim_{\chi\to 0^+} \frac{f(\chi)-f(0)}{\chi-0} = \lim_{\chi\to 0^+} \frac{\chi^2+\eta\mu\chi}{\chi} = \lim_{\chi\to 0^+} \left(\chi + \frac{\eta\mu\chi}{\chi}\right)=0+1=1$

Άρα τα πλευρικά όρια είναι ίσα , η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο 0 και βρήκα f΄(0)=1

Γεωμετρική ερμηνεία [6]

Η παράγωγος μιας συναρτήσεως σε ένα σημείο Μ(χ0,ψ0) παριστά γεωμετρικά τον συντελεστή κατευθύνσεως της εφαπτομένης στο σημείο Μ

Παράγωγος Συνάρτηση

Μια συνάρτηση f με Df=A **θα είναι παραγωγίσιμη στο A αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε χ που ανήκει στο A.** Αν το A είναι κλειστό διάστημα τότε πρέπει και στα άκρα να υπάρχουν τα όρια.

Έτσι ορίζεται μια καινούργια συνάρτηση **f΄(χ):A→ ℝ η λεγόμενη πρώτη παράγωγος της f .**

Συμβολίζουμε και ως $\frac{dy}{dx}$ ή $\frac{df}{dx}$. Επαγωγικά ορίζονται και οι f΄΄, f΄΄΄,$f^{(\nu)}$.

6. Ανώτερα μαθηματικά δια τους πρωτοετής φοιτητάς– Δ. Ι. Χατζόπουλου –Θεσσαλονίκη 1988

Κανόνες Παραγώγισης:

- Αν f,g παραγωγίσιμες στο χ_0 τότε και η (f+g) είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 και έχω

$$\mathbf{(f+g)'(\chi_0)=f'(\chi_0)+g'(\chi_0)}$$

- Αν f,g παραγωγίσιμες στο χ_0 τότε και η (f*g) είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 και έχω

$$\mathbf{(f*g)'(\chi_0)=f'(\chi_0)g(x_0)+g'(\chi_0)f(x_0)}$$

Ιδιαίτερα πρέπει να θυμάμαι ότι $\mathbf{(\alpha f(\chi))'=\alpha f'(\chi)}$ και $\mathbf{[f^{\nu}(\chi)]'=\nu f^{\nu-1}(\chi)f'(x)}$

- Αν f,g παραγωγίσιμες στο χ_0 και g(x_0) ≠ 0 τότε και η $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 και έχω

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\chi_0)=\frac{f'(\chi_0)g(x_0)-g'(\chi_0)f(x_0)}{g^2(x)}$$

- Αν g παραγωγίσιμες στο χ_0 και f παραγωγίσιμη στο g(x_0) τότε και η (fog) είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 και έχω

$$\mathbf{(fog)'(\chi_0)=f'(g(x_0))*g'(\chi_0)}$$

Βασικές συναρτήσεις :

$(c)' = 0$	$\left(\frac{1}{c}\right)' = -\frac{1}{c^2}$
$(\chi)' = 1$	$(\ln\|c\|)' = \frac{1}{c}$
$(\chi^{\nu})' = \nu\chi^{\nu-1}$	$(\eta\mu\chi)'=\sigma\upsilon\nu\chi$
$(\sqrt{c})' = \frac{1}{2\sqrt{c}}$	$(\sigma\upsilon\nu\chi)'=-\eta\mu\chi$
$(e^x)' = e^x$	$(\varepsilon\varphi\chi)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} = 1+\varepsilon\varphi^2\chi$
$(a^x) = a^x \ln a$	$(\sigma\varphi\chi)'=-\frac{1}{\eta\mu^2\chi} = -(1+\sigma\varphi^2\chi)$

Αν η συνάρτηση υ=f(x) είναι παραγωγίσιμη τότε :

$(u^{\nu})' = \nu u^{\nu-1} u'$ $(e^{u})' = e^{u} u'$ $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u'$ κτλ.…

Ρυθμός μεταβολής

Αν δυο μεγέθη συνδέονται από την σχέση ψ= f(x) όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο χ_0, ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του ψ ως προς χ για $\chi=\chi_0$ την παράγωγο $f'(\chi_0)$

Ο ρυθμός παραγωγής χρησιμοποιείται στις εφαρμοσμένες επιστήμες Για παράδειγμα

- Η ταχύτητα $u(t_0)=S'(t_0)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της θέσης , ενώ η επιτάχυνση $a(t_0)=u'(t_0)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ενός κινητού σε σχέση με τον χρόνο.
- Στα οικονομικά οι συναρτήσεις $K'(\chi_0)$, $P'(\chi_0)$ και $E'(\chi_0)$ είναι οι ρυθμοί μεταβολής του κόστους , κέρδους και εισπράξεων αντίστοιχα. Ονομάζονται οριακό κόστος, οριακό κέρδος και οριακή είσπραξη.

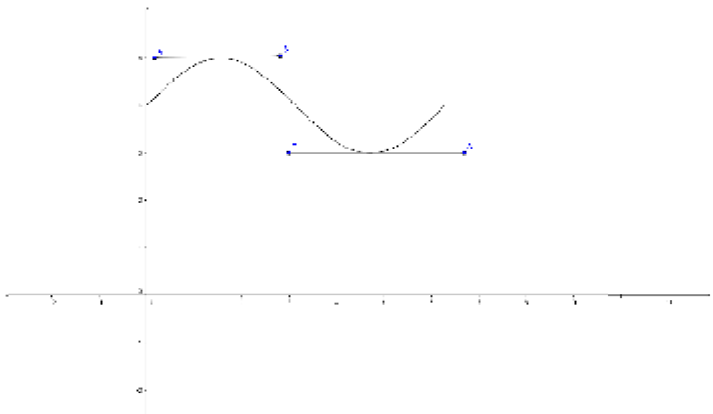
Θεμελιώδη Θεωρήματα

Θεώρημα Rolle:

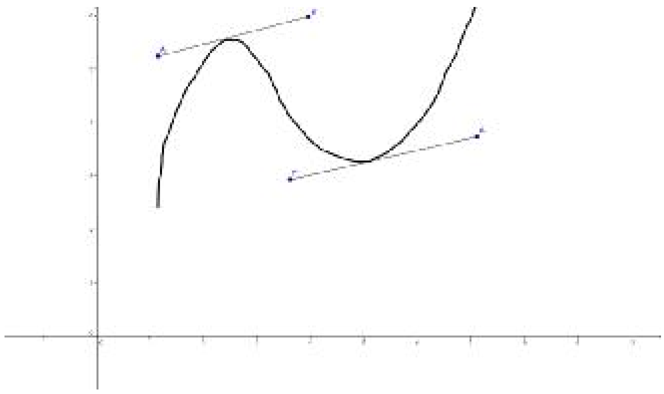
Αν η f είναι :

- Συνεχής στο [α,β] (Κλειστό !!!)
- Παραγωγίσιμη στο (α,β) (Ανοιχτό!!!)
- f(a)=f(b)

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\chi_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\chi_0)=0$



Γεωμετρικά σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\chi_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της f στο χ_0 να είναι παράλληλη στον χ΄χ.



Θεώρημα μέσης τιμής:

Αν η f είναι :

- Συνεχής στο [α,β] (Κλειστό !!!)
- Παραγωγίσιμη στο (α,β) (Ανοιχτό!!!)

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα

ξ∈ (α,β) ώστε

f΄(ξ)= $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Γεωμετρικά σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\chi_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της f στο χ_0 να είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ αφού είναι λ_ε=f΄(ξ) και $\lambda_{AB}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Συνέπειες του θεωρήματος μέσης τιμής :

- Έστω f ορισμένη σε διάστημα Δ. Αν :
  - f συνεχής στο Δ και
  - f΄(χ)=0 για κάθε χ εσωτερικό του Δ

  Τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

- Έστω f,g συναρτήσεις ορισμένες σε διάστημα Δ. Αν:
  - f,g συνεχείς στο Δ
  - f΄(χ)=g΄(χ) για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

  Τότε υπάρχει σταθερά c πραγματική τέτοια ώστε για κάθε χ του Δ να ισχύει f(x)=g(x)+c

Τα θεωρήματα εφαρμόζονται σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων !!!

Μονοτονία συναρτήσεων

Έστω f συνεχής σε διάστημα Δ:

- Αν **f΄(x)>0** για κάθε χ εσωτερικό του Δ , τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα στο Δ.**
- Αν **f΄(x)<0** για κάθε χ εσωτερικό του Δ , τότε η f είναι **γνησίως φθίνουσα στο Δ.**

Ισχύει μόνο για διάστημα και όχι για ένωση διαστημάτων! Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Μεθοδολογία

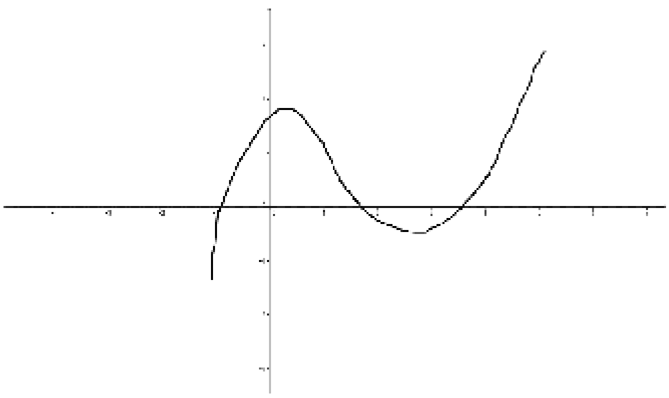
- Για να μελετήσω την μονοτονία, παραγωγίζω την συνάρτηση και μελετώ το πρόσημο της f΄(χ) με πίνακα προσήμου
- Προσοχή! Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο Δ έχει μία το πολύ ρίζα στο Δ. Συγκεκριμένα αν f(α)f(β)<0 έχει ακριβώς μία , ενώ αν f(α)f(β)>0 δεν έχει ρίζα.

Ακρότατα Συνάρτησης

Έστω συνάρτηση f με Df= A.
Λέμε ότι παρουσιάζει :

- **Τοπικό μέγιστο** αν υπάρχει δ>0 ώστε $f(\chi) \leq f(\chi_0)$ $\forall \chi \in (\chi_0 - \delta, \chi_0 + \delta)$

- **Τοπικό ελάχιστο** αν υπάρχει δ>0 ώστε $f(\chi) \geq f(\chi_0)$ $\forall \chi \in (\chi_0 - \delta, \chi_0 + \delta)$



Αν ισχύει για κάθε χ που ανήκει στο Α χαρακτηρίζονται ολικά ακρότατα.

Θεώρημα Fermat:

Έστω f ορισμένη σε Δ και χ_0 ένα εσωτερικό του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο χ_0 και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό το σημείο τότε **$f'(\chi_0)=0$**

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Αν $f'(\chi_0)=0$ δεν σημαίνει ότι είναι ακρότατο απαραίτητα αλλά είναι πιθανό ακρότατο.

Σημεία στα οποία μηδενίζονται η παράγωγος ονομάζονται και στάσιμα. Γεωμετρικά τα στάσιμα σημεία χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα ότι η εφαπτόμενη ευθεία είναι οριζόντια. Σε ένα στάσιμο σημείο ο χαρακτήρας μονοτονίας της συνάρτησης μπορεί να αλλάξει, αλλά όχι απαραίτητα. Αν αλλάζει τότε οι τιμές της f εμφανίζουν εκεί τοπικό ακρότατο. Τοπικά ακρότατα μπορούν επίσης να εμφανιστούν στο σημείο όπου η παράγωγος δεν είναι συνεχής(η καμπύλη έχει γωνίες) όπως είναι συχνά τα σημεία όπου ενώνονται τα διάφορα τμήματα μιας συνάρτησης η οποία ορίζεται τμηματικά . [1]

Άρα:

Πιθανές θέσεις ακροτάτων:

Αν η f είναι συνεχής στο Δ πιθανές θέσεις ακροτάτων είναι:

- Τα εσωτερικά σημεία του Δ όπου $f'(\chi)=0$
- Τα άκρα του Δ αν ανήκουν στο Df

Κρίσιμα σημεία:

Ονομάζουμε έτσι τα σημεία της συνεχούς συνάρτησης f σε διάστημα Δ όταν:

- Το χ_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ
- $f'(\chi_0)=0$ ή η f δεν παραγωγίζεται.

Εύρεση συνόλου τιμών :

Έστω f συνεχής στο Δ=[α,β] Τότε η f έχει μέγιστο και ελάχιστο στο Δ. Για να τα βρω:

- Βρίσκω τα κρίσιμα σημεία
- Υπολογίζω τις τιμές της f στα κρίσιμα σημεία και στα άκρα α και β
- Η μεγαλύτερη από αυτές τις τιμές είναι το μέγιστο Μ και η μικρότερη το ελάχιστο μ.

Έτσι το σύνολο τιμών είναι f (Δ)=[μ,Μ]

1. Ανώτερα μαθηματικά Μαθηματικά Ηλίας Φλυτζάνης Εκδόσεις Α. Σταμούλης 1993

Κριτήριο μονοτονίας:

Έστω f παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\chi_0) \cup (\chi_0,\beta)$ και συνεχής στο χ_0

- Αν $f'(\chi)>0$ στο (α,χ_0) και $f'(\chi)<0$ στο (χ_0,β) τότε το $f(\chi_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f
- Αν $f'(\chi)< 0$στο (α,χ_0) και $f'(\chi)>0$ στο (χ_0,β) τότε το $f(\chi_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f
- Αν η $f'(\chi)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,\chi_0) \cup (\chi_0,\beta)$ τότε το $f(\chi_0)$ δεν είναι ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β)

Κριτήριο $2^{ης}$ παραγώγου:

Έστω f παραγωγίσιμη στο (α,β) και χ_0 ένα σημείο του στο οποίο η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

- Αν $f'(\chi_0)=0$ και $f''(\chi_0)>0$ τότε το $f(\chi_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο
- Αν $f'(\chi_0)=0$ και $f''(\chi_0)<0$ τότε το $f(\chi_0)$ είναι τοπικό μέγιστο

Πλέον έχουμε όλες τις γνώσεις ώστε να βρούμε μια συνάρτηση (οικονομικού ενδιαφέροντος στην περίπτωση μας) , που ορίζεται , πότε ανεβαίνει , πότε κατεβαίνει, που κάνει τα μέγιστα και τα ελάχιστα της κτλ.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε πως θα αξιοποιήσουμε αυτές τις γνώσεις σε εφαρμοσμένα παραδείγματα.

Κεφάλαιο 2

Αναφορά σε απλά παραδείγματα εφαρμογής παραγώγων στην οικονομία

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε παραδείγματα όπου επιλύονται με την βοήθεια των παραγώγων καθώς το σύνηθες ερώτημα μας στα οικονομικά είναι, για ποια τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητή μας (ποσότητα ,τιμή κτλ.) εμφανίζει ακρότατο η συνάρτηση που μελετούμε (μέγιστο η συνάρτηση κέρδους, ελάχιστο η συνάρτηση κόστους κτλ.)

Απαραίτητη προϋπόθεση είναι να ορίσουμε τις έννοιες και τους συμβολισμούς που χρησιμοποιούμε στα οικονομικά καθώς άλλες φορές θα μας δίνονται παραδείγματα όπου θα είναι συνήθης συνάρτηση (f(x)) και άλλα όπου θα χρησιμοποιούμε οικονομικούς συμβολισμούς (C(q)). Ορίζουμε λοιπόν ότι :

Η συνάρτηση ολικού κόστους ή απλώς συνάρτηση κόστους εκφράζει την εξάρτηση του ολικού κόστους C από την παραγόμενη ποσότητα q ενός προϊόντος. Δηλαδή C(q).

Από την συνάρτηση κόστους C(q) παράγονται οι ακόλουθες συναρτήσεις :

- Οριακό κόστος **MC= C΄(q).**
- Μέσο ολικό κόστος **ATC=** $\frac{C(q)}{q}$
- Ολικό μεταβλητό κόστος **TVC=C-TFC** όπου TFC το ολικό σταθερό κόστος
- Οριακό μεταβλητό κόστος **MVC=** $\frac{d(TVC)}{dq}$
- Μέσο μεταβλητό κόστος **AVC=TFC/q**
- Μέσο σταθερό κόστος **AFC=TFC/q**

Αναλογικά μπορούμε να ορίζουμε συναρτήσεις που αφορούν τα έσοδα, την ζήτηση κτλ. Επίσης πιθανόν αναλόγως την βιβλιογραφία ενδέχεται να διαφέρουν κάποιοι συμβολισμοί .[5]

Τέλος θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι :

p ορίζουμε την τιμή του προϊόντος,

η συνάρτηση των εσόδων μας δίνεται από το γινόμενο των πωληθέντων προϊόντων επί της τιμής τους **(R=qp)**

αλλά και ότι τα κέρδη μας θα πρέπει να ορίζονται ως η διαφορά του κόστους από τα έσοδα **(Π=R-C)**

---

5. Μαθηματικά Οικονομικών επιστημών Τόμος Α, Μανώλη Λουκάκη , Εκδόσεις Σοφία

Ας μελετήσουμε τώρα μερικά παραδείγματα οικονομικών θεμάτων που θα δούμε αρχικά που μπορεί να μας χρειαστούν οι συναρτήσεις αλλά ακόμα και τα όρια και θα περάσουμε να δούμε παραδείγματα με χρήση παραγώγων.

Εφαρμοσμένα παραδείγματα με τις λύσεις τους.

Παράδειγμα 1ο : (Χρήση συνάρτησης στα οικονομικά)

Να χαρακτηρίσετε τις καμπύλες αδιαφορίας χψ=c και να ελέγξετε αν τα σημεία χ=1,ψ=5 και χ=2.5, ψ=2 βρίσκονται στην ίδια καμπύλη [3]

Λύση:

Βλέπουμε εδώ την χρήση της συνάρτησης στα οικονομικά. Ως καμπύλη αδιαφορίας ορίσουμε το σύνολο των συνδυασμών των σημείων (χ, ψ) όπου ο καταναλωτής παίρνει την ίδια ικανοποίηση από την χρήση αυτών των συνδυασμών για κάθε ζεύγος συντεταγμένων της καμπύλης.

Απομονώνοντας τον ψ έχουμε ψ=c/χ. Άρα σύμφωνα με την θεωρία μου του πρώτου κεφαλαίου πρόκειται για υπερβολές. Επειδή το c μπορεί να αλλάζει αναλόγως το παράδειγμα μας βλέπουμε ότι πρόκειται για οικογένεια υπερβολών.

Δεν πρέπει να ξεχάσουμε το πεδίο ορισμού που παρότι υπάρχει μόνο περιορισμός κλάσματος από όσους ορίσαμε στην αρχή (άρα χ δεν πρέπει να είναι μηδέν) δεν μπορούμε να ορίσουμε το R-{0} ως πεδίο ορισμού.

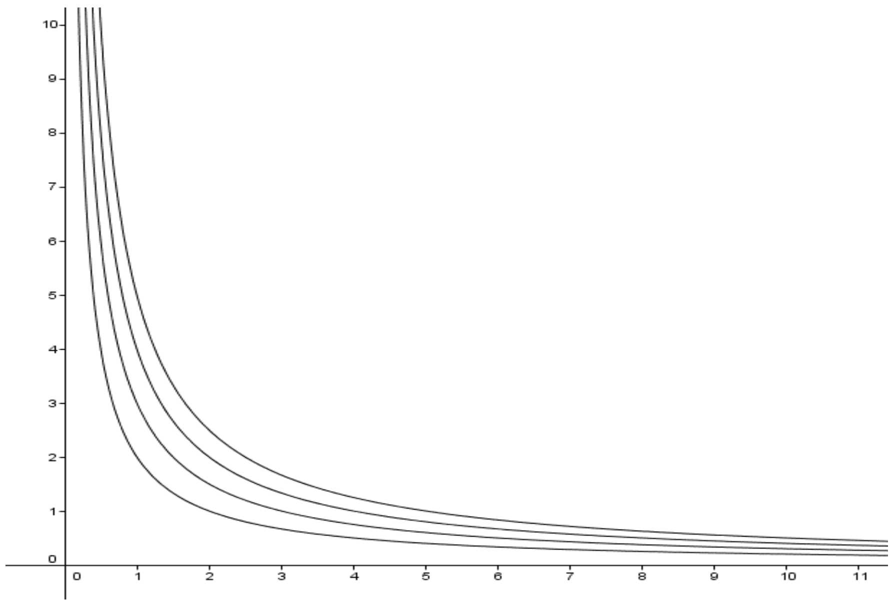
Και αυτό γιατί στις οικονομικές εφαρμογές έχουμε και τους λογικούς περιορισμούς . Τα χ και ψ είναι οι ποσότητες προϊόντων που αγοράζει ο καταναλωτής οπότε θα πρέπει αναγκαστικά να είναι θετικά .

Οπότε σχεδιαστικά θα δουλέψω μόνο στο 1ο τεταρτημόριο όπως θα δούμε στο σχήμα παρακάτω.

---

3. Μικροοικονομική θεωρία Τόμος Α Δρανδάκης Ε, Μπήτρος Γ. Μπαλτάς Ν. Εκδόσεις Μπένου

Όσον αφορά τους συνδυασμούς που μου ζητήθηκαν βλέπω ότι αντικαθιστώντας τον πρώτο συνδυασμό στην συνάρτηση μου παίρνω c=5 όπως όμως το ίδιο παίρνω και αν αντικαθιστώ και το άλλο ζεύγος. Οπότε τα δύο ζεύγη βρίσκονται στην ίδια καμπύλη ψ=5/χ.



Παράδειγμα 2ο : (Χρήση ορίων στα οικονομικά)

Η κυβέρνηση φορολογεί το εισόδημα κάθε φορολογούμενου με συντελεστή 30% για ετήσιο εισόδημα μεγαλύτερο των 25000 Ευρώ. Για να αυξήσει τα έσοδα από τη φορολογία χωρίς να επιβαρύνει τους οικονομικά ασθενέστερους, η κυβέρνηση σκέπτεται να επιβάλει πρόσθετη φορολογία ίση με 2000 Ευρώ για όσους έχουν ετήσιο εισόδημα τουλάχιστον 40000 Ευρώ.

Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση από την οποία προκύπτει το καθαρό εισόδημα κάθε φορολογούμενου, μετά την καταβολή του φόρου. Τι επιπτώσεις αναμένεται να έχει η επιβολή της πρόσθετης φορολογίας σε όσους έχουν υψηλά εισοδήματα;[8]

Λύση :

Έστω Ν(χ) το εισόδημα, μετά τη φορολογία, ενός φορολογούμενου με ετήσιο εισόδημα χ Ευρώ.

Αν χ<25000, ο φορολογούμενος απαλλάσσεται του φόρου, οπότε Ν(χ)=χ.

Αν 25000≤χ<40000, το εισόδημα πάνω από τα 25000 Ευρώ φορολογείται με συντελεστή 30%, οπότε Ν(χ)=25000+0,7(χ−25000).

Τέλος, αν χ≥40000, τότε επιβάλλεται πρόσθετη φορολογία 2000 Ευρώ, οπότε Ν(χ)= 25000+0,7(χ−25000)−2000.

Έτσι, η συνάρτηση του καθαρού εισοδήματος είναι:

$$N(\chi)=\begin{cases} \chi & \alpha\nu\ 0 \leq \chi < 25000 \\ 7500 + 0{,}7\chi & \alpha\nu\ 25000 \leq \chi < 40000 \\ 5500 + 0{,}7\chi & \alpha\nu\ \chi \geq 40000 \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι η συνάρτηση παρουσιάζει ασυνέχεια στο χ=40000 γιατί

$\lim_{\chi\to 40000^-} N(\chi) = 35500$ ενώ $\lim_{\chi\to 40000^+} N(\chi) = 33500$

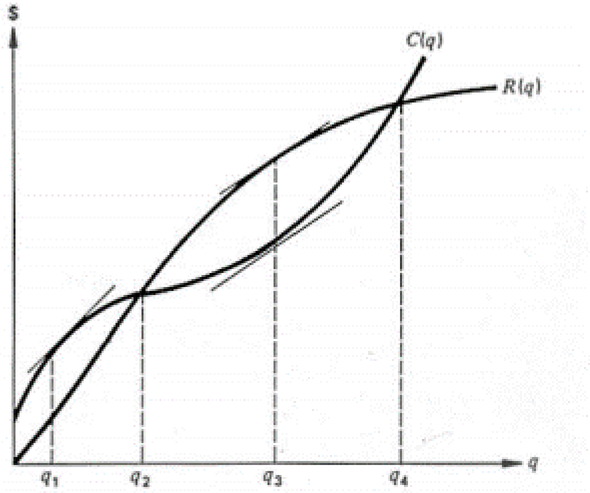
Αποτέλεσμα αυτής της ασυνέχειας είναι ότι οι φορολογούμενοι με ετήσιο εισόδημα που πλησιάζει τα 40000 Ευρώ δεν έχουν ουσιαστικό κίνητρο να προσπαθήσουν να αυξήσουν το εισόδημά τους πάνω από τα 40000 Ευρώ γιατί αυτό θα συνεπάγεται μείωση του καθαρού εισοδήματός τους κατά 2000 Ευρώ.

---

8. Ξεπαπαδέας – Γιαννίκος –Μαθηματικές μέθοδοι στα οικονομικά

<u>Παράδειγμα 3 : (Χρήση γραφημάτων και παραγώγου στα οικονομικά)</u>

Το παρακάτω σχήμα παρουσιάζει τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων κόστους C(q) και εσόδων R(q). Τι οικονομική σημασία έχει η επιλογή για παραγωγή στα 4 διαφορετικά επίπεδα q;



<u>Λύση :</u>

Στα επίπεδα παραγωγής q_1 και q_3 το οριακό έσοδο ισούται με το οριακό κόστος γιατί οι εφαπτόμενες στις καμπύλες R(q) και C(q) έχουν την ίδια κλίση.

Στο σημείο q_1 είναι $\frac{d^2p}{d^2q} = \frac{d^2}{d^2q}[R(q) - C(q)] = R''(q) - C''(q) > 0$

γιατί η συνάρτηση R(q) είναι κυρτή και η C(q) κοίλη. Επομένως, το κέρδος ελαχιστοποιείται.

Στο σημείο q_3 είναι $\frac{d^2p}{d^2q} = \frac{d^2}{d^2q}[R(q) - C(q)] = R''(q) - C''(q) < 0$ γιατί η συνάρτηση R(q) είναι κοίλη και η C(q) κυρτή.

Επομένως, το κέρδος μεγιστοποιείται.

Τέλος, στα επίπεδα q_2 και q_4 το κέρδος είναι μηδέν.

Παράδειγμα 4ο (Χρήση της παραγώγου για εύρεση ακροτάτων)

Μια μονοπωλιακή επιχείρηση έχει καμπύλη (συνάρτηση) ζήτησης q=250-2p .Το μέσο κόστος της είναι σταθερό και ίσο με 20 δρχ. Να βρεθούν η τιμή, η πωλούμενη ποσότητα και τα κέρδη της επιχειρήσεως σε καταστάσεις ισορροπίας.[2]

Λύση:

Η συνάρτηση κέρδους της επιχειρήσεως είναι Π=R-C.

Αν λύσουμε την συνάρτηση ζητήσεως ως προς την τιμή p θα βρούμε την καμπύλη ζητήσεως της επιχείρησης σε αντίστροφη μορφή , δηλαδή 2p=250-q και p=125-0,5q

Τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης R είναι το γινόμενο της τιμής επι την ποσότητα . Πολλαπλασιάζοντας την σχέση επί q έχουμε $R= pq= 125q-0,5q^2$

Το συνολικό κόστος της επιχείρησης θα είναι το γινόμενο της ποσότητας q επί το μέσο κόστος της επιχείρησης που είναι 20 δρχ. δηλαδή C=20q

Αντικαθιστώντας στην αρχική συνάρτηση κέρδους θα έχουμε:

$\Pi=125q-0,5q^2-20q= 105q-0,5q^2$

Οι συνθήκες πρώτης τάξεως απαιτούν η πρώτη παράγωγος να είναι μηδέν για να έχουμε μεγιστοποίηση άρα :

$$\frac{d\mathrm{P}}{dq} = 0$$

ή 105-q=0

ή q=105

Άρα η ποσότητα που θα παράγει η μονοπωλιακή επιχείρηση σε κατάσταση ισορροπίας θα είναι 105 μονάδες. Από τη συνάρτηση ζητήσεως προκύπτει στην συνέχεια η τιμή , που θα καθορίσει η επιχείρηση και θα είναι

P=125-0,5*105= 72,5 δρχ.

Τέλος το κέρδος της επιχείρησης θα προκύψει από την σχέση :

$\Pi= 125*105-0,5*105^2-20*105= 5512,5$ δρχ.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αφού η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική όντως η ποσότητα q μας δίνει μέγιστο

2. Ασκήσεις οικονομικής θεωρίας Τόμος Β , Νικόλαου Κ. Μπαλτά Αθήνα 2003

Παράδειγμα 5ο :(Μελέτη οικονομικής συνάρτησης με χρήση παραγώγου)

Αν η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης είναι η $q = \frac{x^2}{25}(3- \frac{x}{12})$ όπου q το παραγόμενο προϊόν και χ οι μονάδες εργασίας , να την μελετήσετε και να βγάλετε τα κατάλληλα συμπεράσματα. [4]

Λύση:

Αρχικά θα πάρουμε το πεδίο ορισμού . Προφανώς θα πρέπει να έχουμε χ>0 αφού μιλάμε για ώρες εργασίας. Επίσης θα πρέπει τα εξαγόμενα να μας δίνουν θετικές ποσότητες q.

Για να μπορέσουμε να δουλέψουμε καλύτερα την συνάρτηση αξίζει πρώτα να κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα ώστε να είναι σε πιο εύκολη μορφή. Ἑτσι έχουμε:

$$q = -\frac{x^3}{300} + 3\frac{x^2}{25}$$

Θα πάρουμε αρχικά την παράγωγο της ώστε να δούμε την κλίση της και να την μελετήσουμε :

$$q' = -\frac{x^2}{100} + 6\frac{x}{25}$$

Από το θεώρημα Fermat θα πρέπει να δω που μηδενίζεται ώστε να πάρω τα πιθανά ακρότατα και να μελετήσω με πίνακα το πρόσημο της παραγώγου . Έχουμε λοιπόν:

$$-\frac{x^2}{100} + 6\frac{x}{25} = 0 \quad ή$$

-χ2+24χ=0 ή

χ(-χ+24)=0 όπου μου δίνει χ=0 ή χ=24.

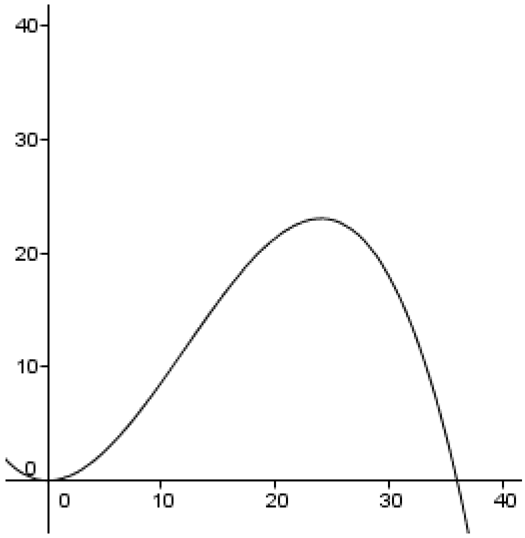
Ας δούμε τώρα τον πίνακα πρόσημου της q΄ και μονοτονίας της q

χ	0	24
q΄	+	-
q	$\nearrow$	$\searrow$

4. Ασκήσεις Μικροοικονομικής θεωρίας Τόμος Α Δρανδάκης Ε, Δημάκου Δ. Εκδόσεις Σταμούλης Αθήνα –Πειραιάς 1993

Βλέπουμε ότι το χ=24 είναι το μέγιστο λόγω της αλλαγής της μονοτονίας.

Ας το δούμε και γραφικά .



Βλέπουμε και από το σχήμα μας ότι μετά το χ=36 το q περνά στα αρνητικά όπου δεν αφορά από εκεί και πέρα (Η τιμή υπολογίζεται και από την q=0)

Ως εξαγόμενα συμπεράσματα έχουμε ότι αφού η συνάρτηση στο (0,24) είναι αύξουσα σημαίνει ότι όσες περισσότερες οι ώρες εργασίες τόσο περισσότερο το παραγόμενο προϊόν.

Για 24 ώρες έχουμε το μέγιστο όπου και το επιθυμητό .

Έπειτα το 24 η συνάρτηση φθίνει άρα με περισσότερες ώρες παράγουμε λιγότερο προϊόν έως και το χ=36.

Έπειτα από αυτό η ποσότητα q περνά στα αρνητικά όπου δεν μας αφορά ως οικονομικό παράδειγμα.

Παράδειγμα 6ο : (Εύρεση συνάρτησης ποσότητας με χρήση παραγώγου)

Έστω η συνάρτηση $Q(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ όπου Q είναι η παραγόμενη ποσότητα ενός προϊόντος και x η χρησιμοποιούμενη ποσότητα ενός παραγωγικού συντελεστή. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι σταθερές α, β, γ και δ προκειμένου η συνάρτηση να είναι συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης; [8]

Λύση:

Κατ' αρχήν πρέπει δ=0, γιατί δεν μπορεί να υπάρξει παραγωγή, χωρίς χρήση του παραγωγικού συντελεστή.

Η συνάρτηση οριακού προϊόντος είναι $MP(x)=Q'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$.

Από την οικονομική θεωρία είναι γνωστό ότι το οριακό προϊόν μεγιστοποιείται όταν το συνολικό προϊόν παρουσιάζει σημείο καμπής.

Στο σημείο αυτό είναι $\frac{dMP}{dx} = 0$ ή $6\alpha x+2\beta=0$, απ΄ όπου προκύπτει $x = -\frac{b}{2a}$.

Για να έχουμε μέγιστο στο σημείο αυτό πρέπει $\frac{d^2MP}{d^2x} = -6a < 0$ ή α<0 οπότε για να είναι $x = -\frac{b}{2a}$ >0 πρέπει β>0.

Τέλος, το οριακό προϊόν για x=0 πρέπει να είναι μη αρνητικό, δηλαδή $MP(0)=\gamma\geq 0$.

Επομένως, οι συνθήκες είναι α<0, β>0 και γ≥0.

---

8. Ξεπαπαδέας – Γιαννίκος –Μαθηματικές μέθοδοι στα οικονομικά

Παράδειγμα 7ο : (Εύρεση βέλτιστης παραγωγής με χρήση παραγώγου και μελέτη)

Μια εταιρεία παράγει τον μήνα q μονάδες ενός προϊόντος με κόστος $C(q)=10000q+10^6$ δρχ. . Τις q μονάδες τις πουλάει με τιμή

$p(q)= 50000-20q$ δρχ./ μονάδα. Να βρείτε:

Α. Πόσες μονάδες πρέπει να παράγει, ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος και ποια είναι τότε η τιμή πώλησης κάθε μονάδας.

Β. Ποιο το μηνιαίο κέρδος στο παραπάνω επίπεδο παραγωγής

Γ. Ποια πρέπει να είναι η τιμή πώλησης για να προκύψει μέγιστο κέρδος όταν επιπλέον έχουμε επιβολή φόρου 4000 δρχ./ μονάδα

Λύση:

Α. Αρχικά σύμφωνα με την θεωρία μας στην αρχή του κεφαλαίου θα πρέπει να ορίσουμε μια συνάρτηση κέρδους ως Π=R-C.

Έχουμε λοιπόν ότι

$Π=R-C= pq-C=(50000-20q\ \ )*q-10000q+10^6= -20q^2+40000q+10^6$

Αυτήν λοιπόν την συνάρτηση θα μελετήσουμε με σκοπό να βρούμε τα μέγιστα της.

$Π΄(q)= -40q+40000$

Από θεώρημα Fermat θέλουμε $Π΄(q)=0$

$-40q+40000=0$

$q=1000$

Για να εξασφαλίσουμε ότι πρόκειται για μέγιστο θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο δεύτερης παράγωγου

Έχουμε $Π΄΄(q)=-40 <0$ άρα πρόκειται όντως για το μέγιστο

Άρα η ποσότητα που μας μεγιστοποιεί τα έσοδα είναι q= 1000 μονάδες προϊόντος και η τιμή πώλησης τους είναι $p(1000)= 50000-20*1000=30000$ δρχ. ανά μονάδα.

Β. Ας υπολογίσουμε τώρα το κέρδος για q=1000 μονάδες .

$\Pi(1000)= -20(1000)^2+40000(1000)+10^6=(-20+40+1)10^6= 21 *10^6$ δρχ.

Γ. Θα πρέπει να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση κέρδους ως Π=R-C – 4000q.

Έχουμε λοιπόν ότι

$\Pi= -20q^2+36000q+10^6$

Αυτήν λοιπόν την συνάρτηση θα μελετήσουμε τώρα για να βρούμε τα μέγιστα της.

$\Pi'(q)= -40q+36000$

Από θεώρημα Fermat θέλουμε πάλι $\Pi'(q)=0$

$-40q+36000=0$

$q=900$

Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο δεύτερης παράγωγου για να δούμε αν είναι μέγιστο

$\Pi''(q)=-40 <0$ άρα πρόκειται όντως για το μέγιστο

Άρα η τιμή του προϊόντος θα διαμορφωθεί πλέον ως

p(900)= 50000-20*900= 32000 δρχ. ανά μονάδα.

<u>Παράδειγμα 8</u>

<u>Παράδειγμα 8^o : (Υπολογισμός τιμής βέλτιστης απόδοσης αλλά και οριακή τιμή για άπειρο χρόνο)</u>

Η τιμή P (σε χιλιάδες δραχμές) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνεται από τον τύπο

$$P(t) = 4 + \frac{t-6}{t^2 + \frac{25}{4}} .$$

α. Να βρείτε την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

β. Να βρείτε το χρονικό διάστημα, στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται.

γ. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη.

δ. Να δείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται, χωρίς όμως να μπορεί να γίνει μικρότερη από την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

<u>Λύση:</u>

α. Έχουμε την συνάρτηση που μας δίνει για κάθε χρονική στιγμή t την τιμή. Προφανώς η στιγμή της εισαγωγής του προϊόντος στην αγορά αντιστοιχεί στο t=0. Άρα έχουμε

$$P(0)= 4+ \frac{0-6}{0^2 + \frac{25}{4}} =4-\frac{24}{25} = \frac{76}{25} \text{ χιλιάδες δρχ.}$$

β. Για όλα τα επόμενα παραδείγματα πρέπει να μελετήσουμε την συνάρτηση πλήρως ώστε να απαντήσουμε σε αυτά . Σύμφωνα με την θεωρία μας πρέπει να υπολογίσουμε αρχικά παράγωγο

$$P'(t)= \left(4 + \frac{t-6}{t^2 + \frac{25}{4}}\right)' = \frac{(t-6)'(t^2 + \frac{25}{4}) - (t-6)(t^2 + \frac{25}{4})'}{(t^2 + \frac{25}{4})^2} =$$

$$\frac{t^2 + \frac{25}{4} - (t-6)2t}{(t^2 + \frac{25}{4})^2} = \frac{-t^2 + 12t + \frac{25}{4}}{(t^2 + \frac{25}{4})^2}$$

Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα Fermat θα πρέπει να μηδενίσουμε την παράγωγο για να βρούμε τα πιθανά ακρότατα.

P΄(t)=0

$$\frac{-t^2 + 12t + \frac{25}{4}}{(t^2 + \frac{25}{4})^2} = 0$$

$$-t^2 + 12t + \frac{25}{4} = 0$$

$$-4t^2 + 48t + 25 = 0$$

Υπολογίζουμε διακρίνουσα και τις λύσεις :

Δ= 48^2+4*4*25=2704

$$t_{1,2} = \frac{-48 \pm 52}{-8} = \begin{cases} t_1 = \frac{-100}{-8} = 12.5 \\ t_2 = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

όπου προφανώς από τις λογικές συνθήκες του προβλήματος δεν μπορούμε να δεχτούμε αρνητικές λύσεις (t μήνες) άρα η δεύτερη λύση μας απορρίπτεται.

Ας μελετήσουμε πίνακα προσήμων της παραγώγου και την μονοτονία της συνάρτησης

t	0	12.5
P΄	+	-
P	↗	↘

Απατώντας στο ερώτημα που μας δόθηκε η τιμή θα ανεβαίνει συνεχώς στο διάστημα (0, 12.5) γ. Από την προηγούμενη μελέτη βλέπουμε ότι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η συνάρτηση βρίσκεται στην τιμή 12,5 .

Η ακριβής τιμή του προϊόντος θα είναι

$$P(12.5)= 4 + \frac{12.5-6}{12.5^2 + \frac{25}{4}} =4+ \frac{\frac{25}{2}-6}{(\frac{25}{2})^2 + \frac{25}{4}} = 4+ \frac{\frac{25}{2}-\frac{12}{2}}{\frac{625}{4}+\frac{25}{4}} =$$

$$4+ \frac{\frac{13}{2}}{\frac{650}{4}} = 4+ \frac{52}{1300} = 4+ \frac{26}{650} = \frac{2626}{650} \text{ χιλιάδες δρχ.}$$

δ. Βλέπουμε από τον προηγούμενο πίνακα ότι η συνάρτηση της τιμής μειώνεται συνεχώς μετά το t=12.5 .

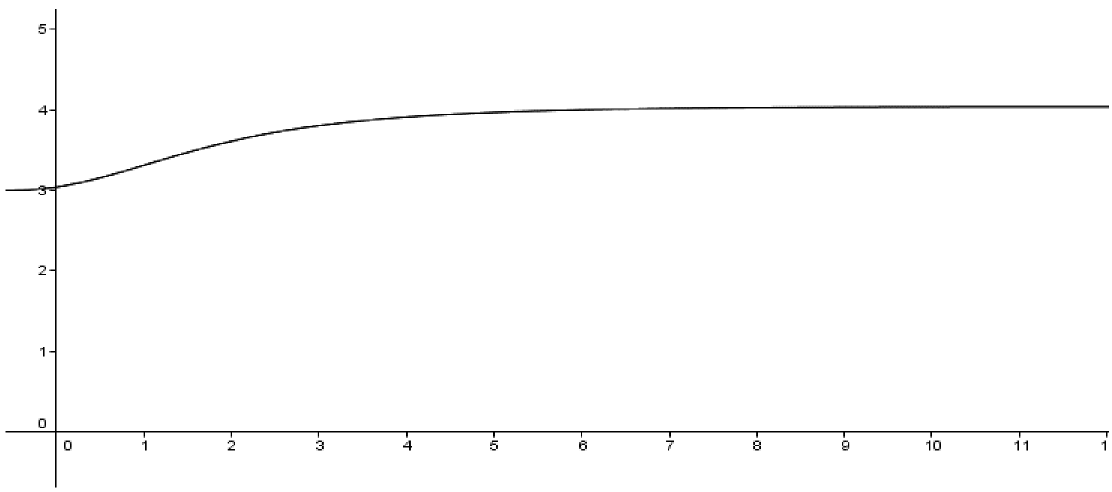
Αρκεί να δούμε ποια είναι η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει. Για τον λόγο αυτό θα πάρουμε το όριο της συνάρτησης στο άπειρο . Έχουμε :

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} 4 + \frac{t-6}{t^2+\frac{25}{4}} = \lim_{t\to+\infty} 4 + \frac{t\left(1-\frac{6}{t}\right)}{t^2\left(1+\frac{25}{4t^2}\right)} =$$

$$\lim_{t\to+\infty} 4 + \frac{\left(t-\frac{6}{t}\right)}{t\left(1+\frac{25}{4t^2}\right)} = 4 + \frac{1}{\infty} = 4 + 0 = 4$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι όσο και αν αυξάνονται οι μήνες ποτέ δεν θα πέσει κάτω από $P(0) = 76/25=3{,}04$ αφού η ελάχιστη τιμή που παίρνουμε είναι 4 χιλιάδες μονάδες.

Ας δούμε όσα εξαγάγαμε και σε γράφημα.



Παράδειγμα 9^o :(Βελτιστοποίηση συνάρτησης κόστους με χρήση παραγώγου)

Το συνολικό κόστος παραγωγής q μονάδων από ένα προϊόν περιγράφεται από την συνάρτηση: $C = 5000000 + 250q + 0{,}002q^2$
όπου C είναι το συνολικό κόστος σε χρηματικές μονάδες.

(α) Πόσες μονάδες πρέπει να παραχθούν για να ελαχιστοποιηθεί το μέσο κόστος;

(β) Ποιο είναι το ελάχιστο μέσο κόστος;

(γ) Ποιο είναι τα συνολικό κόστος σ' αυτό το επίπεδο παραγωγής;[8]

Λύση:

Το μέσο κόστος είναι $AC = C/q = \dfrac{5*10^6}{q} + 250 + 0.002q$

(α) Είναι $\dfrac{dAC}{dq} = -\dfrac{5*10^6}{q^2} + 0.002$ που μηδενίζεται όταν $q=5\cdot 10^4$.

Επειδή είναι $\dfrac{d^2AC}{dq^2} = \dfrac{10^7}{q^3} > 0$ το μέσο κόστος είναι ελάχιστο όταν $q=5\cdot 10^4$.

(β) Το ελάχιστο μέσο κόστος είναι $AC(q_0)=450$ χρηματικές μονάδες.

(γ) Το αντίστοιχο συνολικό κόστος είναι $C(q_0)=AC(q_0)\cdot q_0=2{,}25\cdot 10^7$ χρηματικές μονάδες.

8. Ξεπαπαδέας – Γιαννίκος –Μαθηματικές μέθοδοι στα οικονομικά

<u>Παράδειγμα 10ο : (Επιλογή βέλτιστου σημείου πώλησης προϊόντος)</u>

Έστω ότι κατέχετε μια αντίκα της οποίας η σημερινή αξία είναι 800 Ευρώ.

Κάποιος ειδικός εκτιμά ότι η αξία της αντίκας αυξάνεται με ρυθμό 100 Ευρώ ανά έτος. Αν το τραπεζικό επιτόκιο είναι 4% ανά έτος με συνεχή ανατοκισμό, να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία συμφέρει να πουλήσετε την αντίκα. [8]

<u>Λύση:</u>

Η αξία της αντίκας τη χρονική στιγμή t θα είναι V (t) = 800 +100t .

Η παρούσα αξία της, αν πουληθεί τη χρονική στιγμή t, θα είναι:

$$PV(t) = V(t)e^{-0,04t} = (800 + 100t)e^{-0,04t}$$

Η παράγωγος της PV(t) είναι:

$\dfrac{dPV(t)}{dt} = (68 - 4t)e^{-0,04t}$ και μηδενίζεται για t=17.

Η δεύτερη παράγωγος για t=17 είναι:

$$\frac{d^2PV(17)}{dt^2} = (0.16*17 - 6.72)e^{-0,04*17} < 0$$

Επομένως, η παρούσα αξία μεγιστοποιείται αν η αντίκα πουληθεί σε t=17 έτη.

8. Ξεπαπαδέας – Γιαννίκος –Μαθηματικές μέθοδοι στα οικονομικά

Κεφάλαιο 3

Χρησιμότητα της παραγώγου στην οικονομία

Είναι γνωστό ότι οι οικονομικές και διοικητικές επιστήμες είναι κατά βάση επιστήμες βέλτιστης επιλογής (optimal choice) . Και αυτό γιατί εκείνο που μας ενδιαφέρει σχεδόν αποκλειστικά είναι να προσδιορίσουμε επίπεδα οικονομικής δραστηριότητας , στα οποία μεγιστοποιείται η απόδοση ή το αποτέλεσμα κλπ., ή ελαχιστοποιείται το κόστος , η θυσία κλπ. Αυτό σημαίνει ότι όταν μας δίνεται μια οικονομική συνάρτηση αυτό που μας ενδιαφέρει πρωτίστως είναι η μελέτη της, δηλαδή το πώς συμπεριφέρεται , έτσι ώστε να μπορέσουμε , μεταξύ άλλων , να εντοπίσουμε και τα τυχόν βέλτιστα σημεία της.[7]

Ας σκεφτούμε όμως λίγο την πραγματική οικονομία. Είναι προφανές ότι τα πράγματα δεν είναι τόσο απόλυτα. Και αυτό αφορά κυρίως δύο παράγοντες. Αν τελικά οι επιχειρήσεις επιδιώκουν πάντα το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα και κατά πόσο αυτό εξαρτάται από ένα παράγοντα που αναλύσαμε νωρίτερα.

Ας τα δούμε λίγο αναλυτικότερα. Τι εννοούμε με το ότι η επιχείρηση δεν πρέπει να κοιτάζει πάντα το βέλτιστο αποτέλεσμα. Καταρχήν η επιχείρηση δεν είναι ένα αυτοτελές σύστημα, ανεξάρτητο της κοινωνίας και κατ' επέκταση των ανθρώπων. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε σε ένα παράδειγμα νωρίτερα να αναλύσουμε μια συνάρτηση που θα μας δίνει το πλήθος εργαζομένων. Αν λοιπόν η βελτιστοποίηση της συνάδει την απόλυση μεγάλου πλήθους από τους εργαζόμενους που ήδη υπάρχουν στην επιχείρηση (πχ λόγω προβλημάτων στην επιχείρηση: φορολογία, ζημίες κτλ.) είναι ορθό να επιλέξει ο διευθύνων να μειώσει τόσο το πλήθος των εργαζομένων; Η απάντηση προφανώς και δεν θα δοθεί από εμάς. Προφανώς είναι στην διακριτική ευχέρεια του εκάστοτε διευθύνων να αποφασίσει.

Το υπόδειγμα μιας επιχείρησης που επιδιώκει να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της είναι προφανώς μια απλούστευση της πραγματικότητας. Αγνοεί τα προσωπικά κίνητρα των διευθυντών της επιχείρησης και δεν λαμβάνει υπόψη της συγκρούσεις μεταξύ τους . Θεωρεί ότι τα κέρδη των είναι ο μόνος στόχος της επιχείρησης. Άλλοι στόχοι όπως πχ η απόκτηση κύρους ή δύναμης, θεωρούνται ασήμαντοι.

Το υπόδειγμα αυτό υποθέτει επίσης ότι η επιχείρηση διαθέτει επαρκείς πληροφορίες σχετικά με τα κόστη και την φύση της αγοράς στην οποία πουλάει το προϊόν της, ώστε να ξέρει ποιες πραγματικά είναι οι ευκαιρίες που μεγιστοποιούν τα κέρδη της. Σε πραγματικές συνθήκες, βέβαια, οι επιχειρήσεις δεν διαθέτουν αυτού του είδους την πληροφόρηση. Παρόλα αυτά τέτοιες αδυναμίες του υποδείγματος δεν είναι σημαντικές.

---

7. Πρόσκληση στα Μαθηματικά Οικονομικών και Διοικητικών επιστημών- Λουκάκης Μανώλης – Εκδόσεις Σοφία 2012

Κανένα υπόδειγμα δεν μπορεί να περιγράψει την πραγματικότητα επακριβώς. Η ουσιαστική ερώτηση είναι αν και κατά πόσο αυτό το απλό υπόδειγμα μπορεί α χαρακτηριστεί καλό ή όχι . [9]

Επί της ουσίας ήδη αναφέραμε και το δεύτερο σημείο που πρέπει να αναφερθούμε ως προς τις παραδοχές που έχουμε κάνει. Ήδη επισημάναμε ότι η κάθε επιχείρηση είναι αδύνατο να έχει πλήρη γνώση των συνθηκών της αγοράς ώστε να επιτύχει την βέλτιστη επιλογή της. Ας δεχτούμε λοιπόν ότι μια χρονική στιγμή t έχουμε αυτήν την πληροφόρηση.

Προφανώς όμως η οικονομία είναι ένας ζωντανός οργανισμός που επηρεάζεται από δεκάδες παράγοντες οι οποίοι μάλιστα αλλάζουν ταχύτατα αλλά όχι μόνο. Η αλλαγή του ενός παράγοντα επηρεάζει και τους υπόλοιπους. Άρα η επίλυση των παραδειγμάτων νωρίτερα που αφορά την βέλτιστη επιλογή μελετώντας έναν παράγοντα (τιμή, ποσότητα, χρόνος κτλ.) είναι μια απλοποίηση της πραγματικότητας.

Είναι λοιπόν σημαντικό να τονίσουμε ότι οι οικονομολόγοι δεν υποθέτουν πως οι άλλοι παράγοντες δεν επηρεάζουν τον μελετώμενο παράγοντα, αλλά ότι αυτοί οι άλλοι παράγοντες θεωρούνται αμετάβλητοι κατά την διάρκεια της περιόδου που μελετάμε. Με τον τρόπο αυτόν μπορεί να μελετηθεί η επίδραση λίγων μόνο δυνάμεων σε ένα απλοποιημένο πλαίσιο. Τέτοιες υποθέσεις ceteris paribus (οι λοιποί παράγοντες σταθεροί) χρησιμοποιούνται σε όλα τα οικονομικά υποδείγματα.

Η χρήση της υπόθεσης ceteris paribus δημιουργεί ,ωστόσο, κάποια προβλήματα στην επαλήθευση των οικονομικών υποδειγμάτων από δεδομένα του πραγματικού κόσμου. Σε άλλες επιστήμες τέτοιου είδους προβλήματα μπορεί να μην είναι τόσο σοβαρά επειδή μπορούν να κάνουν ελεγχόμενα πειράματα. Για παράδειγμα ένας φυσικός που επιθυμεί να ελέγξει ένα υπόδειγμα του νόμου της βαρύτητας, μάλλον δεν θα το κάνει πετώντας αντικείμενα από έναν ουρανοξύστη. Και αυτό γιατί πειράματα που πραγματοποιούνται σε τέτοιες συνθήκες που επηρεάζονται από πολλές εξωτερικές δυνάμεις (ρεύματα αέρα, διαφορές της θερμοκρασίας κτλ.) που δεν θα επέτρεπαν τον ακριβή έλεγχο της θεωρίας. Αντίθετα ο φυσικός θα προτιμήσει το εργαστήριο και θα χρησιμοποιήσει ένα δοκιμαστικό σωλήνα όπου οι άλλες δυνάμεις θα μπορούν να ελεγχθούν ή να περιοριστούν. Με αυτό τον τρόπο , η θεωρία μπορεί να επιβεβαιωθεί σε ένα απλό περιβάλλον, χωρίς να χρειάζεται να υπολογιστούν όλες οι άλλες δυνάμεις που επηρεάζουν την πτώση των αντικειμένων στον πραγματικό κόσμο.

Με ελάχιστες εξαιρέσεις οι οικονομολόγοι δεν έχουν την δυνατότητα να διεξάγουν ελεγχόμενα πειράματα προκειμένου να ελέγξουν τα υποδείγματα τους.

---

9. Μικροοικονομική θεωρία. Βασικές αρχές και προεκτάσεις Τόμος Α΄ Walter Nicholson Εκδόσεις Κριτική 2008

Αντ' αυτού οι οικονομολόγοι είναι αναγκασμένοι να στηρίζονται σε διάφορες στατιστικές μεθόδους για να περιορίσουν τις υπόλοιπες επιδράσεις όταν ελέγχουν τις θεωρίες τους. Παρόλο που οι στατιστικές αυτές μέθοδοι είναι θεωρητικά τόσο έγκυρες όσο και οι μέθοδοι ενός ελεγχόμενου πειράματος που χρησιμοποιούν οι άλλοι επιστήμονες στην πράξη εγείρουν διάφορα ακανθώδη προβλήματα. Γι' αυτόν ακριβώς τον λόγο , οι περιορισμοί και το ακριβές νόημα της υπόθεσης ceteris paribus στα οικονομικά είναι πολύ πιο αμφιλεγόμενα από ότι στις θετικές επιστήμες. [9]

Παρόλο που αναφερθήκαμε σε δύο παραδοχές δεν πρέπει να υποβαθμίζουμε όλη την εργασία που κάναμε και παρουσιάσαμε νωρίτερα. Αντιθέτως βλέπουμε πώς παρόλο το δύσκολο έργο που είχαν οι οικονομολόγο εφεύραν τα κατάλληλα εργαλεία ώστε να επιτύχουν την μελέτη των διαφόρων οικονομικών παραγόντων.

Μπορεί να φαίνεται «μικρή» η δουλεία που κάνουμε μελετώντας την μία μεταβλητή αλλά κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Καταρχήν στα οικονομικά δεν ασχολούμαστε μόνο με μία μεταβλητή αλλά με περισσότερες. Στα περισσότερα παραδείγματα μελετούμε τουλάχιστον δύο μεταβλητές. Ασχολούμαστε δηλαδή με διμεταβλητές συναρτήσεις $f(\chi, \psi)$. Για να γίνει προφανώς κάτι τέτοιο θα έπρεπε να γνωρίζουμε την βάση εργασίας μας στην μία μεταβλητή ώστε να επεκταθεί και σε περισσότερες. Αφού λοιπόν ομαδοποιήσουμε στην συνέχεια την μεθοδολογία εργασίας για συναρτήσεις μιας μεταβλητής θα δώσουμε και ένα ενδεικτικό παράδειγμα πώς εργαζόμαστε και ζητούμενα με δύο αγνώστους που μπορούν να μεταβάλλονται.

Ας δούμε λοιπόν πως θα πρέπει να εργαζόμαστε σε περιπτώσεις βελτιστοποίησης συναρτήσεων μίας μεταβλητής .

Έστω μια συνάρτηση $f(x)$:

Βήμα 1ο :

Υπολογίζουμε πεδίο ορισμού: Μαθηματικοί περιορισμοί αλλά και λογικές συνθήκες

Βήμα 2ο :

Υπολογίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης δηλαδή την $f'(\chi)$

Βήμα 3ο :

Υπολογίζω τα πιθανά ακρότατα μηδενίζοντας την παράγωγο δηλαδή $f'(\chi)=0$

Βήμα 4ο :

Μελετώ το πρόσημο της παραγώγου με πίνακα για να δω αν είναι όντως ακρότατα και για να τα χαρακτηρίσω .(Μέγιστο ή ακρότατο) Εναλλακτικά χρησιμοποιώ το θεώρημα δεύτερης παραγώγου.

Βήμα 5^{ο} :

Ελέγχω τα εξαγόμενα μου αν ισχύουν . (Μπορεί η τιμή να είναι εκτός πεδίου ορισμού, ενδείκνυται και η χρήση γραφήματος)

Βήμα 6^{ο} :

Υπολογίζω ότι άλλο μου έχει ζητηθεί, η τιμή στο ακρότατο, μονοτονία σε διαστήματα, όριο κτλ.

Βλέπουμε λοιπόν ποια είναι η μέγιστη συμβολή της παραγώγου στην επίλυση των διαφόρων οικονομικών προβλημάτων. Σε όλη την μεθοδολογία μας στηριχθήκαμε στο γεγονός ότι είχαμε βρει νωρίτερα την μεταβολή της κλίσης της συνάρτησης και τον τρόπου γενικότερα που κινείται.

Αξίζει να αναφερθούμε στην εναλλακτική επίλυση ώστε να δούμε πως θα εργαζόμασταν αν δεν γνωρίζαμε την παράγωγο και τις ιδιότητες της. Σύμφωνα με το πρώτο κεφάλαιο, το μαθηματικό υπόβαθρο , η εναλλακτική μας σύμφωνα με την θεωρία των ακροτάτων θα ήταν να μελετήσουμε την μονοτονία στα διαστήματα πριν και μετά από το πιθανό ακρότατο. Άρα νωρίτερα θα πρέπει να έχουμε βρει και σημεία που να πρέπει να μελετήσουμε. Μπορεί να μην φαίνεται τόσο δύσκολο καθώς από τα σχολικά μας χρόνια έχουμε μελετήσει μονοτονία με την χρήση του ορισμού σε παραδείγματα όμως απλά. Ας αναλογιστούμε κάποιο παράδειγμα συνάρτησης που θα περιείχε πολλαπλές συνθέσεις για παράδειγμα λογαριθμικών , εκθετικών και ριζικών συναρτήσεων. Ας σκεφτούμε λίγο τον όγκο εργασίας , πράγμα που σημαίνει και μεγαλύτερος κίνδυνος να γίνει κάποιο λάθος αριθμητικό ή μη, όταν θα πρέπει να συνθέτουμε τις συναρτήσεις επί πόση ώρα.

Είναι λοιπόν πλέον προφανής η μέγιστη συμβολή της παραγώγου μιας συνάρτησης στην μελέτη της. Της παραγώγου μονομεταβλητής συνάρτησης. Άρα μπορούμε να φανταστούμε ήδη τον ρόλο όσον αφορά την παράγωγο διμεταβλητής συνάρτησης.

Αξίζει λοιπόν να κάνουμε μια αναφορά σε αυτήν και να δούμε ένα μόνο παράδειγμα. Ευτυχώς δεν θα χρειαστούμε να αναφέρουμε ολόκληρο το μαθηματικό υπόβαθρο όπως στην πρώτη περίπτωση αφού μιλάμε για τις ίδιες έννοιες επεκταμένες σε ένα πολυμεταβλητό σύστημα.

<u>Μερική παράγωγος:</u>[10]

Όταν η ψ είναι συνάρτηση πολλών μεταβλητών η έννοια της μερικής παραγώγου αποκτά σημασία. Ας υποθέσουμε ότι :

$\psi = f(x_1, x_2)$

Επομένως υπάρχουν δύο μερικές παράγωγοι , μια ως προς χ_1 και μια ως προς χ_2. Η μερική παράγωγος της ψ ως προς χ_1 που συμβολίζεται εδώ με $\frac{qy}{qc_1}$ είναι απλώς η συνήθης παράγωγος ως προς χ_1 όπου <u>η χ_2 αντιμετωπίζεται ως σταθερά</u> . Ομοίως η $\frac{qy}{qc_2}$ είναι απλώς η παράγωγος ως προς χ_2, κρατώντας <u>σταθερή την χ_1</u>.

Οι μερικές παράγωγοι είναι χρήσιμες για τον ίδιο λόγο όπως οι συνήθεις παράγωγοι. Μπορούμε δηλαδή να υπολογίσουμε κατά προσέγγιση την μεταβολή της ψ ως:

$\mathrm{D}y = \frac{qy}{qc_1}.\mathrm{D}c_1$ κρατώντας σταθερή την χ_2.

Ένα παράδειγμα είναι το εξής

$\psi = 5 + 4\chi_1 + \chi_1^2 - 3\chi_2 + 7\chi_1\chi_2$

Τώρα η παράγωγος ως προς χ_1 είναι απλώς η $\frac{qy}{qc_1} = 4 + 2\chi_1 + 7\chi_2$

ενώ η παράγωγος ως προς χ_2 είναι $\frac{qy}{qc_2} = -3 + 7\chi_1$

---

10. Εισαγωγή στην οικονομετρία , Μια νέα προσέγγιση Τόμος Β, Jeffrey M. Wooldridge Εκδόσεις Παπαζήση Αθήνα 2006

<u>Βελτιστοποίηση διμεταβλητής συνάρτησης :</u>[10]

Ο διαφορικός λογισμός παίζει σημαντικό ρόλο στην ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση συναρτήσεων μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών . Αν $f(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση κ μεταβλητών τότε μια αναγκαία συνθήκη για να ελαχιστοποιούν ή να μεγιστοποιούν οι $\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\kappa$ την f επί όλων των πιθανών τιμών της xj είναι $\frac{qf}{qc_j}(x_1,x_2,...,x_k) = 0,\ j = 1,2,...,k$ **(1)**

Με άλλα λόγια όλες οι μερικοί παράγωγοι της g πρέπει να ίσες με μηδέν όταν υπολογιστούν στην τιμή χ_h. Αυτές ονομάζονται συνθήκες πρώτης τάξεως για ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση μιας συνάρτησης. Στην πράξη ελπίζουμε να λύσουμε την εξίσωση (1) για χ_h.

Για να κρίνουμε κατά πόσο πρόκειται για μέγιστο ή ελάχιστο της συνάρτησης

(ή και όχι , αφού δεν πρέπει υποχρεωτικά να είναι κάτι από τα δύο) χρησιμοποιούμε το επόμενο θεώρημα:

Έστω $f(x_1,x_2)$ σε ένα ανοιχτό σύνολο U στον R^2. Ένα σημείο (χ_1^*,χ_2^*) είναι τοπικό ελάχιστο της f αρκεί να ισχύουν οι τρείς παρακάτω συνθήκες :[11]

(i) $\frac{qf}{qc_1}(x_1^*,x_2^*) = \frac{qf}{qc_2}(x_1^*,x_2^*) = 0$

(ii) $\frac{q^2 f}{qc_1^2}(x_1^*,x_2^*) > 0$

(iii) $D = (\frac{q^2 f}{qc_1^2})(\frac{q^2 f}{qc_2^2}) - (\frac{q^2 f}{qc_1 qc_2})^2 > 0 \quad s\,t\,o \quad (c_1^*,c_2^*)$

Η D ονομάζεται διακρίνουσα. Αν στην δεύτερη σχέση έχουμε <0 αντί >0 και η τρίτη συνθήκη μένει ως έχει, τότε έχουμε τοπικό μέγιστο .

---

10. Εισαγωγή στην οικονομετρία , Μια νέα προσέγγιση Τόμος Β, Jeffrey M. Wooldridge Εκδόσεις Παπαζήση Αθήνα 2006

11. Διανυσματικός λογισμός J. Marsden – A. Tromba Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης , Ηράκλειο 2005

Α δούμε πλέον και ένα παράδειγμα πώς χρησιμοποιούνται τα ανωτέρω σε πραγματικά ζητούμενα όπου εξαρτώνται από δύο μεταβλητές :

Παράδειγμα :[12]

Υποθέστε ότι ένας κατασκευαστής φαρμάκων πωλεί ένα εξέχον φάρμακο στην Ευρώπη και στις ηνωμένες Πολιτείες. Λόγω νομικών περιορισμών το φάρμακο δεν μπορεί να αγοραστεί στην μια αγορά και να πωληθεί στην άλλη.

Η καμπύλη ζήτησης για το φάρμακο στην Ευρώπη είναι

$$P_E=10-Q_E$$

όπου P_E η τιμή (σε δολάρια ανά λίβρα) στην Ευρώπη και Q_E η ποσότητα (σε εκατομμύρια λίβρες) που πωλείται σε αυτήν την αγορά. Η καμπύλη ζήτησης για το φάρμακο στις Ηνωμένες Πολιτείες είναι

$$P_U=20-1.5Q_U$$

όπου P_U η τιμή (σε δολάρια ανά λίβρα) και Q_U η ποσότητα (σε εκατομμύρια λίβρες) που πωλείται σε αυτήν την αγορά.

Το συνολικό κόστος (σε εκατομμύρια δολάρια) της παραγωγής του φαρμάκου σε ολόκληρο τον κόσμο είναι

$$TC= 4+2(Q_E+Q_U)$$

Τα συνολικά κέρδη της επιχείρησης και από τις δύο αγορές (Ευρώπη και Ηνωμένες Πολιτείες) είναι

$\Pi= P_EQ_E+P_UQ_U-TC=$

$(10-Q_E)Q_E+(20-1.5Q_U)Q_U-[4+2(Q_E+Q_U)]=$

$-4+8Q_E-Q_U^2+18Q_U-1.5Q_U^2$

Για να μεγιστοποιήσουμε το Π ως προς Q_E και Q_U βρίσκουμε τις πρώτες παραγώγους της Π ως προς Q_E και Q_U και τις θέτουμε ίσες με το μηδέν :

$$\frac{qP}{qQ_E} = 8-\ 2Q_E = 0$$

$$\frac{qP}{qQ_U} = 18-\ 3Q_U = 0$$

12. Managerial Economics Edwin Mansfiled, Trird Edition, Τόμος Α Εκδόσεις Μπένου Αθήνα

Λύνοντας αυτές τις εξισώσεις ως προς Q_E και Q_U βρίσκουμε ότι θα πρέπει να πωληθούν 4 εκατομμύρια λίβρες από το φάρμακο στην Ευρώπη και 6 εκατομμύρια λίβρες στις Ηνωμένες Πολιτείες

Για να βρούμε τις άριστες τιμές στην Ευρώπη και τις Ηνωμένες Πολιτείες , υποκαθιστούμε την Q_E με 4 και την Q_U με το 6 στις εξισώσεις νωρίτερα. Το αποτέλεσμα ως προς την τιμή στην Ευρώπη θα πρέπει να είναι 6$ ανά λίβρα και η τιμή στις Ηνωμένες Πολιτείες θα πρέπει να είναι 11$ ανά λίβρα.

Υποκαθιστώντας αυτές τις τιμές και τις ποσότητες που βρήκαμε νωρίτερα στην εξίσωση των κερδών βλέπουμε ότι τα κέρδη της επιχείρησης είναι ίσα με

$\Pi=-4+8(4)-4^2+18(6)+1{,}5(6^2)=66$ ή 66$ εκατομμύρια

Τέλος πρέπει να ελέγξουμε κατά πόσο η τιμή μας δίνει όντως μέγιστο στην συνάρτηση των κερδών. Έχουμε :

$$\frac{q^2 P}{q Q_E^{\ 2}} = -2 < 0 \text{ και}$$

$$D = \left(\frac{q^2 P}{q Q_E^{\ 2}}\right)\left(\frac{q^2 P}{q Q_U^{\ 2}}\right) - \left(\frac{q^2 P}{q Q_E q Q_U}\right)^2 = (-2)(-3) - 0 = 6 > 0$$

που συνεπάγεται λόγω του θεωρήματος νωρίτερα ότι μιλάμε για μέγιστο.

Επίλογος:

Κλείνοντας την εργασία μας αξίζει να συγκεντρώσουμε τα αποτελέσματα μας. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η οικονομία είναι ένα είδος ζωντανού οργανισμού και αλλάζει, μεταλλάσσεται συνεχώς. Κάθε στιγμή που μπορούμε να πούμε ότι γνωρίζουμε όσα πρέπει και έχουμε την βέλτιστη στρατηγική, την ίδια στιγμή ένας παράγοντας αλλάζει και χρειάζεται να επαναπροσδιορίσουμε να δεδομένα μας.

Αυτό όμως ίσως είναι και η ομορφιά του χώρου και δεν πρέπει να μας αποθαρρύνει. Αν η οικονομία έμενε σταθερή θα είχαμε υπολογίσει τα βέλτιστα της ως προς κάθε συνάρτηση και δεν θα ασχολούμασταν ξανά μαζί της. Άρα δεν θα είχε και λόγο ύπαρξης η ανωτέρω εργασία.

Είδαμε λοιπόν ότι η παράγωγος έλυσε τεράστια προβλήματα σε όλες τις επιστήμες και κατ' επέκταση και στην οικονομία. Μπορεί αρχικά να είδαμε ότι στα απλουστευμένα παραδείγματα η παράγωγος μονοδιάστατης συνάρτησης μας έλυνε τα χέρια δεχόμενοι όμως ότι οι άλλες μεταβλητές παρέμεναν σταθερές. Απλοποιήσουμε δηλαδή το πραγματικό μοντέλο. Στην συνέχεια όμως είδαμε πως η έννοια της παραγώγου μπορεί να επεκταθεί σε ν μεταβλητές και να πλησιάζει ιδανικά τον υπαρκτό κόσμο.

Προφανώς και η δυσκολία σε ν μεταβλητές θα είναι πολύ μεγαλύτερη αλλά και η οικονομία η ίδια δεν είναι κάτι το εύκολο στην καθημερινότητα μας.

" Προς τε γαρ οικονομίαν και προς πολιτείαν και προς τας τέχνας πάσας, εν ουδέν ούτω δύναμιν έχειν παίδειον μάθημα ή η περί τους αριθμούς διατριβή"

Δηλαδή : " Για την οικονομία , την πολιτεία και για όλες τις τέχνες κανένα άλλο μάθημα δεν έχει τέτοια παιδευτική δύναμη όσο η Αριθμητική".

Πλάτωνας (427 π.Χ. - 347 π.Χ.)

<u>Βιβλιογραφία :</u>

1. Ανώτερα μαθηματικά Μαθηματικά – Ηλίας Φλυτζάνης – Εκδόσεις Α. Σταμούλης 1993

2. Ασκήσεις οικονομικής θεωρίας Τόμος Β , Νικόλαου Κ. Μπαλτά Αθήνα 2003

3. Μικροοικονομική θεωρία Τόμος Α Δρανδάκης Ε, Μπήτρος Γ. Μπαλτάς Ν. Εκδόσεις Μπένου

4. Ασκήσεις Μικροοικονομικής θεωρίας Τόμος Α Δρανδάκης Ε, Δημάκου Δ. Εκδόσεις Σταμούλης Αθήνα –Πειραιάς 1993

5. Μαθηματικά Οικονομικών επιστημών Τόμος Α, Μανώλη Λουκάκη , Εκδόσεις Σοφία

6. Ανώτερα μαθηματικά δια τους πρωτοετής φοιτητάς– Δ. Ι. Χατζόπουλου – Θεσσαλονίκη 1988

7. Πρόσκληση στα Μαθηματικά Οικονομικών και Διοικητικών επιστημών- Λουκάκης Μανώλης – Εκδόσεις Σοφία 2012

8. Ξεπαπαδέας – Γιαννίκος –Μαθηματικές μέθοδοι στα οικονομικά

9. Μικροοικονομική θεωρία. Βασικές αρχές και προεκτάσεις Τόμος Α΄ Walter Nicholson Εκδόσεις Κριτική 2008

10. Εισαγωγή στην οικονομετρία , Μια νέα προσέγγιση Τόμος Β, Jeffrey M. Wooldridge Εκδόσεις Παπαζήση Αθήνα 2006

11. Διανυσματικός λογισμός J. Marsden – A. Tromba Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης , Ηράκλειο 2005

12. Managerial Economics Edwin Mansfiled, Trird Edition, Τόμος Α Εκδόσεις Μπένου Αθήνα