Τ.Ε.Ι. ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

Πτυχιακή Εργασία

Επίλυση οικονομικών προβλημάτων με χρήση του προγράμματος Mathematica

Ονοματεπώνυμο: Κόκκαλη Ιωάννα

Ονοματεπώνυμο: Αγγελόπουλος Θεόδωρος

Εποπτεύων Καθηγητής: Δρ. Κουνετάς Κωνσταντίνος

19/09/2013

T.E.I.
ΠΑΤΡΑΣ

Πρόλογος

Μετά από την αλματώδη ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών και την ευρεία χρήση τους σε όλα σχεδόν τα πεδία, καθίσταται πλέον επιτακτική η γνώση μιας τουλάχιστον σύγχρονης γλώσσας προγραμματισμού. Η επιλογή της γλώσσας αυτής είναι μια διαδικασία για την οποία υπάρχουν πολλές και αντικρουόμενες απόψεις. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό και από το επιστημονικό πεδίο στο οποίο θα χρησιμοποιηθεί η γλώσσα αυτή. Μια σύγχρονη, και ταυτόχρονα εισαγωγική γλώσσα προγραμματισμού, που απευθύνεται στους Φυσικούς, και γενικότερα στο κλάδο των Θετικών επιστημών, θα πρέπει να έχει τη δυνατότητα εκτέλεσης τόσο αλγεβρικών όσο και αριθμητικών υπολογισμών, και να παρέχει στο χρήστη ένα ιδιαίτερα φιλικό περιβάλλον εργασίας. Μια τέτοια γλώσσα θα γίνει ελκυστική στο σύνολο σχεδόν των φοιτητών του κλάδου, και όχι μόνο σε μια μικρή μειονότητα που έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε υπολογιστές, και θα τους παρέχει ένα ουσιαστικό εργαλείο για μαθηματικό χειρισμό προβλημάτων που θα αντιμετωπίσουν τόσο στη διάρκεια των σπουδών, όσο και στη μετέπειτα σταδιοδρομία τους. Μια τέτοια γλώσσα είναι η *Mathematica*.

Η *Mathematica* είναι μια από τις πιο εξελιγμένες γλώσσες συμβολικού προγραμματισμού. Έχει τη δυνατότητα εκτέλεσης αριθμητικών αλλά και αλγεβρικών υπολογισμών, και παρέχει στο χρήστη ένα πλήρες πακέτο γραφικών για οπτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων. Κατ’ αρχήν, στη *Mathematica* υπάρχει μια πολύ μεγάλη ποικιλία εσωτερικών συναρτήσεων για εκτέλεση συγκεκριμένων υπολογισμών, που προσφέρονται για άμεση χρήση. Πρέπει όμως να τονισθεί ότι η *Mathematica* δεν είναι απλώς μια συλλογή έτοιμων προγραμμάτων, αλλά μια πλήρης γλώσσα προγραμματισμού, στην οποία υπάρχει η δυνατότητα ανάπτυξης νέων συναρτήσεων και προγραμμάτων, που δεν έχουν εκ των προτέρων προβλεφθεί, για την εκτέλεση υπολογισμών της επιλογής του χρήστη. Τέλος, ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά της *Mathematica* είναι ότι παρέχει στο χρήστη ένα ιδιαίτερα φιλικό περιβάλλον εργασίας. Τα παραπάνω στοιχεία είναι αυτά που καθιστούν τη *Mathematica* ιδιαίτερα ελκυστική για εισαγωγή στην εκπαίδευση.

Σκοπός του παρόντος βιβλίου είναι να ενημερώσει τον αναγνώστη για τις δυνατότητες και τη χρησιμότητα της *Mathematica*, και να τον βοηθήσει στην εκμάθηση των βασικών της σημείων. Η έκδοση που θα παρουσιαστεί είναι αυτή που εγκαθίσταται στο λειτουργικό σύστημα των WINDOWS. Οι εκδόσεις της *Mathematica* που εγκαθίστανται πάνω σε άλλα λειτουργικά συστήματα λειτουργούν σε γενικές γραμμές με παρόμοιο τρόπο.

Περιεχόμενα

Πίνακας Εικόνων

1. Εισαγωγή

Το Mathematica είναι ένα ολοκληρωμένο περιβάλλον για πολλών ειδών υπολογισμούς.

Δημιούργημα των ερευνών Wolfram, μιας παγκοσμίου κλάσεως ομάδας με επικεφαλής το Stephen Wolfram, πρωτοεκδόθηκε το 1988 ανατρέποντας τα έως τότε δεδομένα στον τρόπο χρήσης των Η/Υ, τόσο στον τεχνικό, όσο και σε άλλους τομείς.

Έως τότε υπήρχαν μεμονωμένα πακέτα για συγκεκριμένους αριθμητικούς και αλγεβρικούς υπολογισμούς ή για τη δημιουργία γραφικών παραστάσεων. Η αρχική ιδέα την οποία έπρεπε να εξυπηρετήσει το Mathematica ήταν η δημιουργία ενός μοναδικού συστήματος για όλους τους παραπάνω υπολογισμούς, χρησιμοποιώντας μια απλή και κατανοητή μέθοδο.

Η υλοποίηση αυτής της ιδέας έγινε εφικτή με τη δημιουργία μιας συμβολικής γλώσσας η οποία θα μπορούσε να χειριστεί ένα μεγάλο εύρος αντικειμένων που σχετίζονται με τους τεχνικούς υπολογισμούς, χρησιμοποιώντας ένα μικρό αριθμό βασικών αρχικών στοιχείων.

Το Mathematica, που από την πρώτη στιγμή της έκδοσής του κατατάχθηκε στις σημαντικότερες εφευρέσεις της χρονιάς, αρχικά χρησιμοποιήθηκε από τις φυσικές επιστήμες, τους μηχανικούς και τα μαθηματικά. Αργότερα, όμως, έγινε απαραίτητο μέσο σε πολύ περισσότερους τομείς .

Σε τεχνικό επίπεδο, το Mathematica είναι ευρέως αναγνωρισμένο ως η μεγαλύτερη ανακάλυψη στον τομέα των λογισμικών. Είναι ένα από τα μεγαλύτερα προγράμματα που έχουν αναπτυχθεί και περιέχει ένα μεγάλο αριθμό νέων αλγορίθμων και σημαντικών τεχνικών καινοτομιών.

Σε αυτή τη φάση θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε τις λειτουργίες του προγράμματος αυτού, και κυρίως αυτές τις οποίες εμείς εκμεταλλευόμαστε για την επίτευξη του σκοπού μας, όσο καλύτερα μπορούμε, ώστε ο αναγνώστης αυτού του εγχειριδίου να τις κατανοήσει και να μπορέσει να χρησιμοποιήσει το περιβάλλον εξομοίωσης το οποίο θα δημιουργήσουμε.

Σε αυτό το μέρος λοιπόν θα αναφέρουμε μερικές από τις βασικές λειτουργίες του Mathematica καθώς και παραδείγματα για κάθε μια από αυτές.

Εκκινηση του προγράμματος

Η εκκίνηση της *Mathematica* γίνεται με διπλό πάτημα του αριστερού πλήκτρου του «ποντικιού» πάνω στο αντίστοιχο εικονίδιο. Με την εκκίνηση του προγράμματος, φορτώνεται το πρόγραμμα διαχείρισης (*editor*) της *Mathematica*. Μέσα στο φύλο εργασίας του προγράμματος αυτού γράφονται όλες οι εντολές, δίνεται η εντολή εκτέλεσης τους, και εμφανίζονται τα αποτελέσματα των πράξεων. Το κυρίως πρόγραμμα της *Mathematica*, που εκτελεί τους υπολογισμούς, είναι ο πυρήνας (kernel), ο οποίος φορτώνεται αυτόματα με την εκτέλεση της πρώτης εντολής. Τα αποτελέσματα των υπολογισμών εμφανίζονται στο φύλλο εργασίας, αλλά ταυτόχρονα διατηρούνται και στη μνήμη του πυρήνα.
Αρχικά ο πυρήνας δεν είναι ενεργοποιημένος αλλά ενεργοποιείται την πρώτη φορά που θα εκτελέσουμε κάποια εντολή. Οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται είναι Global (δηλαδήείναι δηλωμένες στον πυρήνα και οι τιμές τους μπορούν να ανακληθούν ή να τροποποιηθούν οποιαδήποτε στιγμή μετά τον ορισμό τους) εκτός αν δηλωθούν διαφορετικά (π.χ. ως Local μέσα σε ένα Module οπότε μετά το τέλος του δεν υφίστανται).
Εάν υπάρχει κάτι μη αποδεκτό από το Mathematica στο In, τότε στο Out εμφανίζεται κάποιο προειδοποιητικό μήνυμα. Εάν έχουμε ζητήσει την εκτέλεση κάποιων σύνθετων εντολών και το πρόγραμμα καθυστερεί να αποκριθεί (π.χ. λόγω εισαγωγής σε ατέρμονο βρόχο) τότε μπορούμε να διακόψουμε την εκτέλεση από το /Kernel/Quit Kernel.
Αν στο τέλος κάποιας εντολής υπάρχει ';' τότε όταν η εντολή εκτελείται τα αποτελέσματα δεν εμφανίζονται (μπορούν όμως π.χ. να χρησιμοποιηθούν για τις επόμενες εντολές).
Επίσης είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι το πρόγραμμα κάνει διάκριση μεταξύ πεζών - κεφαλαίων γραμμάτων (Οι εντολές όλες είναι με πεζά εκτός από το πρώτο γράμμα).
Το Mathematica έχει την δυνατότητα να πραγματοποιεί (μέσα από εκατοντάδες εντολές και συναρτήσεις) κυρίως τρεις κατηγορίες εντολών:

i) *Αριθμητικούς υπολογισμούς*: απλούς υπολογισμούς χρησιμοποιώντας τις συνήθεις πράξεις +, − , *, / ,^ κ.ο.κ. (π.χ. **5+7, 3^100)**, αλλά και σύνθετους υπολογισμούς όπως π.χ. την αριθμητική εύρεση των ριζών μιας εξίσωσης ή τον αριθμητικό υπολογισμό ενός ορισμένου ολοκληρώματος.

ii) *Συμβολικό λογισμό*: Την εύρεση ή απλοποίηση εκφράσεων που περιέχουν μαθηματικές μεταβλητές *x*, *y*… κ.ο.κ., π.χ. την εύρεση της παραγώγου συνάρτησης μιας οποιασδήποτε συνάρτησης, ή την εύρεση ενός αορίστου ολοκληρώματος (π.χ. **Integrate[x^4/(x^2-1),x]**), ή την απλοποίηση ενός σύνθετου κλάσματος κ.ο.κ

iii) *Γραφικές παραστάσεις* συναρτήσεων σε μία ή περισσότερες διαστάσεις (π.χ. **Plot[Sin[x],{x,0,2*Pi}]**)

Επίσης υπάρχουν και πολλές εντολές χειρισμού δομών δεδομένων (λίστες - πίνακες), επανάληψης (**Do, While**), λογικές (**If**), εμφάνισης αποτελεσμάτων (**Print**) κ.α. οι οποίες συνδυαζόμενες μπορούν να αποτελέσουν ολοκληρωμένα προγράμματα.

Το Mathematica επίσης προσφέρει τη δυνατότητα να φορτωθούν επιπλέον πακέτα εντολών (packages) τα οποία περιέχουν εξειδικευμένες εντολές (π.χ. υπάρχουν αρκετά Statistical Packages που περιέχουν επιπλέον εντολές και συναρτήσεις).
Οι εντολές και οι συναρτήσεις του Mathematica είναι πολλές εκατοντάδες και για αυτό στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ορισμένες βασικές καθώς και ορισμένες εντολές που θα μας φανούν χρήσιμες στη συνέχεια. Για μία πλήρη παρουσίαση όλων των εντολών και των δυνατοτήτων του Mathematica παραπέμπουμε στο αναλυτικότατο help Browser του Notebook

Αριθμητικές πράξεις

Μπορούμε να εκτελέσουμε αριθμητικές πράξεις (+, -, *, /, ^) όπως σε οποιοδήποτε υπολογιστή **π.χ.** :
In[1]:= 2.3 + 5.63
Out[1]:=7.93
In[1]:= 2.4 / 8.9 ^ 2 (*ύψωση σε δύναμη*)
Out[1]:=0.0302992
In[1]:= 2*3*4 (*ή ισοδύναμα* **2 3 4** *με κενά μεταξύ των αριθμών*)
Out[1]:=24
In[1]:=(3+4)^2-2(3+1) (*μεταξύ αριθμών και παρένθεσης εννοείται* *****)
Out[1]:=41

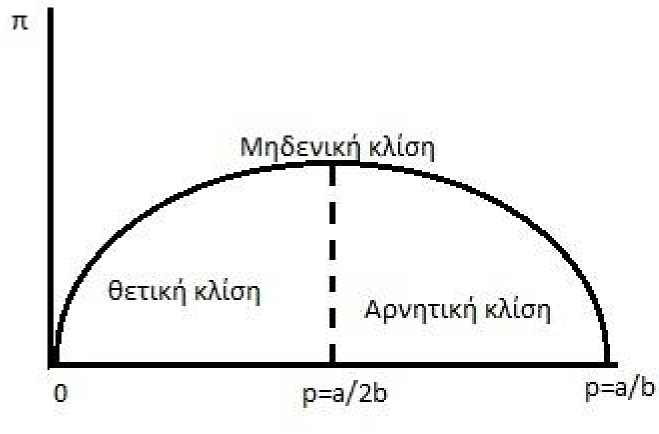
Ακριβή και προσεγγιστικά αποτελέσματα

Στο Mathematica μπορούμε να έχουμε όσο μεγάλη ακρίβεια επιθυμούμε ενώ ακόμη μπορούμε
να πάρουμε και ακριβή αποτελέσματα
In[1]:= 2 ^ 100
Out[1]:=1267650600228229401496703205376
Εάν θέλουμε προσέγγιση τότε γράφουμε:
In[1]:= 2^100 //N ή **N[2^100]**
Out[1]:=1.26765×1030
Μπορούμε να πάρουμε ακριβή αποτελέσματα με τη χρήση ακεραίων (χωρίς υποδιαστολές).
In[1]:= 1/3 + 2/7
Out[1]:=13/21
Ενώ για προσέγγιση γράφουμε
In[1]:= 1/3 + 2/7 //N ή **N[1/3 + 2/7]**
Out[1]:=0.619048
Επίσης,
In[1]:=(4*Exp[2] + 6)/2
Out[1]:=(6+4e2)/2
ενώ προσεγγιστικά,
In[1]:=N[3*Exp[2]+1]
Out[1]:=17.7781

1. Παραγώγιση Συναρτήσεων μιας Μεταβλητής

Έννοια του λογισμού και χρησιμότητα στα οικονομικά

Είναι ο κλάδος των μαθηματικών που εστιάζεται στα προβλήματα του ρυθμού μεταβολής μιας συνάρτησης,δηλαδή της παραγώγισης,και της ολοκλήρωσης.Ας υποθέσουμε ότι σε μια εταιρεία η ακριβής σχέση μεταξύ τιμής και κερδών περιγράφεται από την εξίσωση της μορφής: $\pi = \alpha p - bp^2$,α>0,β>0, όπου π είναι τα κέρδη και p είναι η τιμή του αγαθού.Αυτή η πληροφορία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιοριστεί η μεταβολή που συντελείται στα κέρδη της επιχείρησης από κάθε πιθανή μεταβολή της τιμής.Αν ο στόχος είναι η μεγιστοποίηση των κερδών,τότε μπορεί να υπολογιστεί η κατάλληλη τιμή που συνδέεται με το μέγιστο κέρδος



Εικόνα 1

Παρατηρούμε ότι τα κέρδηείναι πολύ χαμηλά για πολύ χαμηλές ή για πολύ υψηλές τιμές.Η κλίση της εφαπτομένης μέχρι την τιμή p<a/2b είναι θετική,και κατά συνέπεια αύξηση της τιμής ισοδυναμεί με αύξηση των κερδών.Τα κέρδη μεγιστοποιούνται στο σημείο p=a/2b,ενώ μετά την τιμή p>a/2b οι αλλαγές στην τιμή συνδέονται αντίστροφα με τα κέρδη.Ο ρυθμός μεταβολής των κερδών σε κάποιο σημείο υπολογίζεται με την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό.

Παράγωγος Συνάρτησης

Μια συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = A$ αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to\chi_0}\frac{f(x)-f(\chi_0)}{x-\chi_0} = f'(\chi_0)$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Τότε η συνάρτηση ονομάζεται **παραγωγίσιμη** ή **διαφορίσμη** στο σημείο αυτό.Η παράγωγος της συνάρτησης $y = f(x)$ ως προς τη μεταβλητή χ είναι η συνάρτηση f' με τιμή στο χ:

$$f'(\chi) = \lim_{x\to\chi_0}\tfrac{f(x)-f(\chi_0)}{x-\chi_0}$$

Το πεδίο ορισμού της f' είναι το σύνολο των σημείων του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το όριο υπάρχει.Αν η παράγωγος υπάρχει σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης τότε η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη.

Το όριο

$$\lim_{x\to\chi_0^+}\frac{f(x)-f(\chi_0)}{x-\chi_0} = f_+{}'(\chi_0)$$

ονομάζεται **δεξιά πλευρική παράγωγος** της f στο σημείο χ_0, ενώ το όριο

$$\lim_{x\to\chi_0^-}\frac{f(x)-f(\chi_0)}{x-\chi_0} = f_-{}'(\chi_0)$$

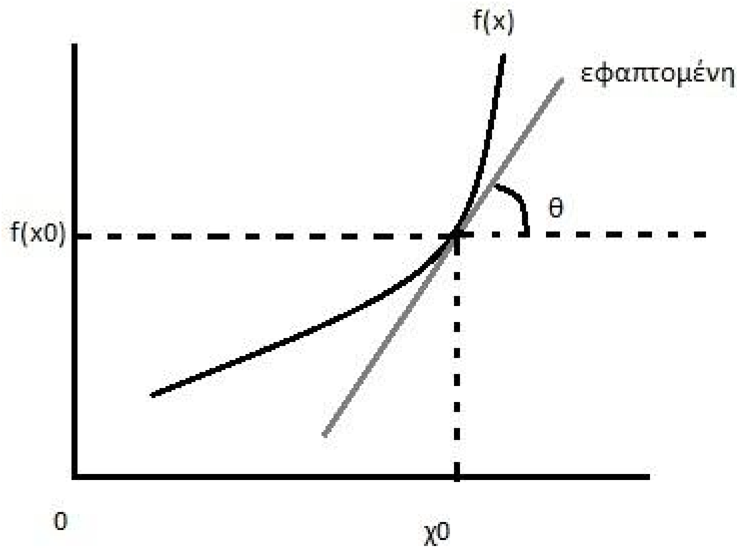
ονομάζεται **αριστερή πλευρική παράγωγος** της f στο σημείο χ_0.

Για να είναι η f παραγωγίσιμη πρέπει :

$$f_+'(\chi_0) = f_-{}'(\chi_0)$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο χ_0 είναι ίση με την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο $(\chi_0, f(\chi_0))$.



Εικόνα 2

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(\chi_0, f(\chi_0))$ δίνεται από τη σχέση :

$$y - f(\chi_0) = f'(\chi_0)(x - \chi_0)$$

όπου $f'(\chi_0)$ η κλίση της εφαπτομένης.

Άσκηση 1

Μια βιοτεχνία υποδυμάτων για να παράγει χ ζευγάρια υποδημάτων το μήνα έχει κόστος παραγωγής:

$$C(x) = 1500 + 6x + 0.1x^2 \ \ \nu.\mu.$$

Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κόστους C ως προς x.Να συγκριθούν οι ρυθμοί όταν χ=1000 και χ=2000.

Αναλυτική Λύση

Ο ρυθμός μεταβολής του κόστους ως προς χ είναι

$$C + \Delta C = 1500 + 6(x + \Delta\chi) + 0.1(\chi + \Delta\chi)^2$$

$$= 1500 + 6\chi + 6\Delta\chi + 0.1\chi^2 + 0.2\chi\Delta\chi + 0.1\Delta\chi^2$$

Το όριο της παράστασης είναι

$$\lim_{\Delta\chi\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta\chi} = \lim_{\Delta\chi\to 0}(6 + 0.2\chi + 0.1\Delta\chi) = 6 + 0.2\chi$$

Για χ=1000, C'(x)=C'(1000)=206 ν.μ.

Για χ=2000, C'(x)=C'(2000)=406 ν.μ.

Η παράγωγος C'(x) του συνολικού κόστους C ονομάζεται **οριακό κόστος**(marginal cost) της νιοστής μονάδας που παράγεται.Το οριακό κόστος **MC** είναι η μεταβολή στο κόστος,όταν το παραγόμενο προιόν μεταβάλεται κατά μία μονάδα.

Επίλυση Mathematica

Ορισμός συνάρτησης

- Οι μεταβλητές μιας συνάρτησης μπαίνουν σε αγκύλες
- Δεξιά από κάθε μεταβλητή βάζουμε ‘’_’’
- Η ισότητα συμβολίζεται με ‘’:=’’

Όρια

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο μιας συνάρτησης,χρησιμοποιούμε την εντολή:

Limit[f[x],x->x0]

Ενώ για τα πλευρικά όρια

Limit[f[x],x->**α**,Direction->1] είναι το $\lim_{x \to a^-} f(x)$

Limit[f[x],x->**α**,Direction->-1] είναι το $\lim_{x \to a^+} f(x)$

Παράγωγοι

Η παράγωγος μιας συνάρτησης f(x) ως προς χ γίνεται με την εντολη:

D[f(x),x]

Για την παράγωγο ν οστής τάξης

D[f[x],(x,n)]

Κώδικας

```
Quit[]

C1[x_] := 1500 + 6 * x + 0.1 * x^2
```

Ρυθμός μεταβολής:

```
C1[x + Dx]

1500 + 6 (Dx + x) + 0.1 (Dx + x)^2

DC := C1[x + Dx] - C1[x]

Limit[DC / Dx, Dx → 0]

6. + 0.2 x

D[C1[x], x]

6 + 0.2 x
```

Οριακό Κόστος=C'(x)

```
MC[x_] := 6 + 0.2 * x

MC[1000]

206.

MC[2000]

406.
```

Παραγωγισιμότητα και συνέχεια

Συναρτήσεις όπως οι πολυωνυμικές είναι παραγωγίσιμες αφου οι γραφικές τους παραστάσεις δεν παρουσιάζουν ασυνέχειες ή γωνίες.Οι ρητές συναρτήσεις όμως δεν είναι παραγωγίσιμες σε σημεία που μηδενίζουν τον παρονομαστή του κλάσματος.Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι συνεχής,όμως υπάρχουν συναρτήσεις που είναι συνεχείς σε ένα σημείο τους αλλά όχι παραγωγίσιμες σε αυτό.

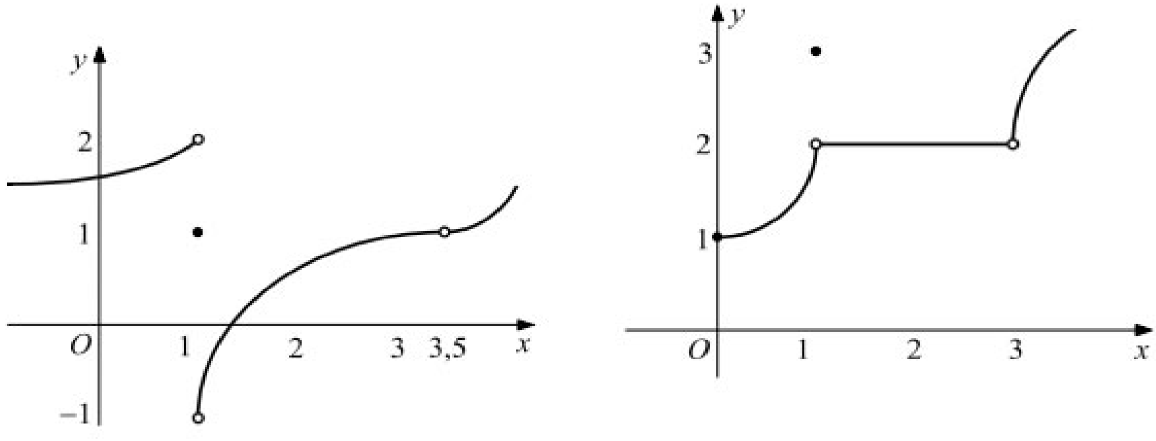
Μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη όταν:

- Δεν είναι συνεχής:

$$f'_{+}(\chi_0) = f_{-}{}'(\chi_0)$$

- Όταν δεν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to\chi_0} \frac{f(x)-f(\chi_0)}{x-\chi_0}$$



Εικόνα 3:Μη παραγωγίσιμες συναρτήσεις

Παράγωγος μερικών βασικών συναρτήσεων

- Η συνάρτηση $f(x)=c$,c∈R είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή

$$\boxed{(c)'=0}$$

- Η συνάρτηση $f(x)=x$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή

$$\boxed{(x)'=1}$$

- Η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu \in N-\{0,1\}$ f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή

$$\boxed{(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}}$$

- Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

- Η συνάρτηση $f(x)=$ ημx είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=$ συνx, δηλαδή

$$\boxed{(\text{ημ}x)'=\text{συν}x}$$

- Η συνάρτηση $f(x)=$ συνx είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=-$ημx, δηλαδή

$$\boxed{(\text{συν}x)'=-\text{ημ}x}$$

• Αποδεικνύεται ότι η $f(x)=e^x$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=e^x$, δηλαδή

$$\boxed{(e^x)'=e^x}$$

• Αποδεικνύεται ότι η $f(x)=\ln x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{x}$, δηλαδή

$$\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}}$$

Κανόνες Παραγώγισης

Παράγωγος αθροίσματος

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα *Δ*, τότε για κάθε $x\in Δ$ ισχύει:

$\boldsymbol{(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)}$.

Τα παραπάνω ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Δηλαδή, αν $f_1, f_2, ..., f_k$, είναι παραγωγίσιμες στο *Δ*, τότε

$(f_1+f_2+\dots+f_k)'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+\dots+f_k'(x)$.

Παράγωγος γινομένου

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα *Δ*, τότε για κάθε $x\in Δ$ ισχύει:

$\boldsymbol{(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$.

Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα διάστημα *Δ* και $c\in$ R, επειδή $(c)'=0$, σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:

$$\boxed{(cf(x))'=cf'(x)}$$

Παράγωγος πηλίκου

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $g(x) \neq 0$, τότε για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Από τους παραπάνω κανόνες παραγώγισης προκύπτουν τα παρακάτω

- Η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}, \nu \in \mathbb{N}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή

$$\boxed{(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}}$$

- Η συνάρτηση $f(x) = \text{εφ}x$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\text{συν}^2 x}$, δηλαδή

$$\boxed{(\text{εφ}x)' = \frac{1}{\text{συν}^2 x}}$$

- Η συνάρτηση $f(x) = \text{σφ}x$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{\text{ημ}^2 x}$, δηλαδή

$$\boxed{(\text{σφ}x)' = -\frac{1}{\text{ημ}^2 x}}$$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτηση

Αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$\boldsymbol{(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}.$$

Δηλαδή, αν $\boldsymbol{u = g(x)}$, τότε: $\boldsymbol{(f(u))' = f'(u) \cdot u'}$

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, έχουμε τον τύπο: $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$

που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας.**

Από τα παραπάνω προκύπτουν τα εξής:

- Η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in$ R-Z είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή

$$\boxed{(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}}$$

<u>Αποδεικνύεται</u> ότι, για $\alpha > 1$ η f είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0 = 0$ και η παράγωγός της είναι ίση με 0, επομένως δίνεται από τον ίδιο τύπο.

- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^{x}$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = \alpha^{x} \ln \alpha$, δηλαδή

$$\boxed{(\alpha^{x})' = \alpha^{x} \ln \alpha}$$

- Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, x$\in$R* είναι παραγωγίσιμη στο R* και ισχύει:

$$\boxed{(\ln|x|)' = \frac{1}{x}}$$

Άσκηση 2

Έστω η συνάρτηση συνολικού κόστους:

$$C = (5 + 4x^2)^5$$

Να υπολογιστεί το οριακό κόστος.

Αναλυτική λύση

Θέτουμε $u = 5 + 4x^2$, άρα $C = u^2$

$$\frac{dC}{du} = 5u^4 \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{du}{dx} = 8x$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\frac{dy}{dx} = 5u^4 8x = 5(5 + 4x^2)^4 8x$$

Επίλυση στο Mathematica

Κώδικας

```
In[1]:= Quit[]

In[1]:= c[u_] := (u)^5

In[2]:= c[u]
Out[2]= u^5

In[3]:= D[c[u], u]
Out[3]= 5 u^4

In[4]:= u[x_] := 5 + 4 * x^2

In[5]:= D[u[x], x]
Out[5]= 8 x
```

Οριακό Κόστος:

```
In[6]:= MC := D[c[u], u] * D[u[x], x]

In[7]:= MC
Out[7]= 40 u^4 x
```

Ασκηση 3

Οι μηνιαίες συναρτήσεις εσόδων (R)και κόστους (C) παραγωγής ενός προιόντος μιας επιχείρισης είναι:

$$R(x) = 1200x + 13x^2 \quad \text{και} \quad C(x) = x^3 + 10x^2 + 100x + 250$$

όπου x είναι ο αριθμός των μονάδων που παράγονται.Να υπολογιστούν οι μηνιαίοι ρυθμοί αύξησης των εσόδων,του κόστους και των κερδών, όταν η παραγωγή είναι ίση με 10 μονάδες προιόντος και παραγματοποιείται 4 φορές το μήνα.

Αναλυτική λύση

Για τα έσοδα έχουμε:

$$\frac{dR}{dt} = (1200 - 26x)\frac{dx}{dt}$$

Για χ=10 και $\frac{dx}{dt} = 4$,

$$\frac{dR}{dt} = (1200 - 26 * 10)4 = 3760\, \nu.\mu.$$

είναι το **οριακό έσοδο** (marginal revenue)(MR),δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής των εσόδων που αντιστοιχει στην παραγωγή 10 μονάδων χ που διατίθενται στην αγορά 4 φορές το μήνα.

Για το ρυθμό μεταβολής του κόστους **(MC)** έχουμε:

$$\frac{dC}{dt} = (3x^2 - 20x + 200)\frac{dx}{dt} = 2400\, \nu.\mu.$$

Για το ρυθμό μεταβολής του κέρδους:

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{dR}{dt} - = 3760 - 2400 = 1360\, \nu.\mu.$$

Επίλυση στο Mathematica

Κώδικας

```
Quit[]

R[x_] := 1200 * x - 13 * x^2

C1[x_] := x^3 + 10 * x^2 + 100 * x + 250
```

Οριακό Έσοδο: MR= dR/dt

```
dxdt := 4

MR[x_] := R'[x] * dxdt

MR[x]

4 (1200 - 26 x)

MR[10]

3760
```

Οριακό κόστος MC=dC/dt

```
MC[x_] := C1'[x] * dxdt

MC[x]
```

$4\left(100 + 20\,x + 3\,x^2\right)$

```
MC[10]

2400
```

Ρυθμός Μεταβολής Κέρδους: dPdt=MR-MC

```
PC := MR[10] - MC[10]

PC

1360
```

Προσέγγιση μέσω μικρών μεταβολών

Έστω μια συνάρτηση y=f(x) που είναι παραγωγίσιμη στο $\chi = \chi_0$.Έστω ότι dx=Δχ μια μικρή μεταβολή στην ανεξάρτητη μεταβλητή.Τότε η μεταβολή στην εξαρτημένη μεταβλητή ισούται με:

$$\Delta y = f(\chi_0 + \Delta\chi) - f(\chi_0)$$

και

$$\Delta y = dy = f'(\chi_0)\Delta\chi$$

εφόσον Δχ σχετικά μικρό.Έτσι το διαφορικό dy είναι κατά προσέγγιση ίσο με τη μεταβολή στο y που προέρχεται από μια μικρή μεταβολή στο χ.

Η προσέγγιση αυτή μπορεί να τροποποιηθεί και να μας δώσει την τιμή της $f(\chi_0 + \Delta\chi)$.

Επειδή $\Delta y = f(\chi_0 + \Delta\chi) - f(\chi_0)$

τότε $f(\chi_0 + \Delta\chi) - f(\chi_0) = f'(\chi_0)\Delta\chi$

και έτσι $f(\chi_0 + \Delta\chi) = f(\chi_0) + f'(\chi_0)\Delta\chi$.

Όπου

$$f(\chi_0 + \Delta\chi) = \text{η καινούργια τιμή της συνάρτησης}$$

$$f(\chi_0) = \text{η αρχική τιμή της συνάρτησης}$$

$$f'(\chi_0)\Delta\chi = η\ μεταβολή\ της\ συνάρτησης\ κατά\ προσέγγιση$$

Άσκηση 4

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Χρησιμοποιήστε Διαφορικά για την προσέγγιση $f(81{,}05) = \sqrt{81{,}05}$.

Αναλυτική λύση

Χρησιμοποιώντας τον τύπο για την προσέγγιση έχουμε:

$$f(\chi_0 + \varDelta\chi) = f(\chi_0) + f'(\chi_0)\varDelta\chi$$

$$=> \sqrt{\chi_0 + \varDelta\chi} = \sqrt{\chi_0} + \frac{1}{2\sqrt{\chi_0}}\varDelta\chi$$

Για $\chi_0 = 81$,

Δχ=dx=0.05 , έχουμε:

$$\sqrt{81.05} = \sqrt{81} + \frac{1}{2\sqrt{81}}0.05 = 9 + \frac{0.05}{18} = 9.0027$$

Που είναι μια καλή προσέγγιση καθώς $9{,}0027^2$=81,048

Επίλυση Mathematica

```
Quit[]

f[x_] := √x

f[x0 + Dx] == f[x0] + f'[x0] Dx
```

$$\sqrt{Dx + x0} == \frac{Dx}{2\sqrt{x0}} + \sqrt{x0}$$

```
x0 := 81
Dx := 0.05

f[x0 + Dx]

9.00278

f[x0] + f'[x0] Dx

9.00278
```

2. Απροσδιόριστες Μορφές-Αναπτύγματα και Σειρές Taylor

Όρια που τείνουν στο άπειρο

Το όριο μιας συνάρτησης της οποίας η ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει στο άπειρο,έχει πολλές χρήσιμες εφαρμογές στα οικονομικά,όπου συχνά αντιμετωπίζουμε ζητήματα μακροχρόνιων τάσεων,όπως ο Νόμος της πτωτικής τάσης του ποσοστού κέρδους,η αύξηση του πληθυσμού σύμφωνα με τον Malthus,η μακροχρόνια τάση του δημοσίου χρέους.

Όρια ρητών συναρτήσεων

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x+3}{5x^2-9x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+5\frac{1}{x}+3\frac{1}{x^2}}{5-9\frac{1}{x}+4\frac{1}{x^2}} = \frac{3}{5}$$

Όρια απροσδιόριστων μορφών

Υπάρχουν συναρτήσεις που ο υπολογισμός του ορίου όταν το χ->∞,είναι πολύ δύσκολος,ή οδηγεί σε μη πεπερασμένο αποτέλεσμα,δηλαδή σε κάποια απροσδιόριστη μορφή όπως $+\infty, -\infty$.

Παράδειγμα το όριο $\lim_{\chi\to\infty} \frac{\chi}{e^x}$ στο οποίο όταν το χ->∞,τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής τείνουν στο άπειρο,και άρα έχουμε $\frac{\infty}{\infty}$.

Κανόνας του L'Hopital

Ο κανόνας του L' Hopital χρησιμοποιείται για την εύρεση ορίων απροσδιόριστων μορφών.Όταν το όριο μιας ρητής συνάρτησης είναι απροσδιόριστο,είτε της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$, είτε $\frac{0}{0}$, τότε σύμφωνα με τον κανόνα παραγωγίζουμε ξεχωριστά τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος,και βρίσκουμε το όριο του νέου κλάσματος που προέκυψε.Στην περίπτωση που έχουμε πάλι απροσδιόριστη μορφή εφαρμόζουμε ξανά τον κανόνα όσες φορές χρειαστεί μέχρι το όριο να είναι πεπερασμένο.

Έστω δύο συναρτήσεις f,g παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα (α,β), με, $g'(x) \neq 0$

Αν

$$\lim_{\chi\to c} f(x) = \infty \;, \lim_{\chi\to c} g(x) = \infty \;\; \kappa\alpha\iota \quad \lim_{\chi\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Τότε

$$\lim_{\chi\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\chi\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Παραγωγίζοντας αριθμητή και παρονομαστή,υπολογίζουμε ποσοτικά την ταχύτητα μεταβολής τους,δηλαδή το πόσο γρήγορα τείνει ο καθένας στο πχ στο άπειρο.

Παράδειγμα 1

$\lim_{\chi\to\infty} \frac{\chi}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$ απροσδιόριστο

με τον κανόνα L'Hopital έχουμε:

$$\lim_{\chi\to\infty} \frac{\chi}{e^x} = \lim_{\chi\to\infty} \frac{(\chi)'}{(e^x)'} = \lim_{\chi\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Άσκηση 1

Έστω η συνάρτηση σταθερών ελαστικοτήτων υποκατάστασης (CES):

$Q = A[aK^{-p} + (1-a)L^{-p}]^{-1/p}$ με A>0 και 0<α<1,όπου Q το παραγόμενο προιόν με K και L τις ποσότητες κεφαλαίου και εργασίας αντίστοιχα.Να δειχθεί ότι για ρ->0, η συνάρτηση έχει όριο τη συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas, $Q = AK^{a}L^{1-a}$.

Αναλυτική λύση:

$\lim_{p\to 0} Q = \lim_{p\to 0} A * \lim_{p\to 0} [aK^{-p} + (1-a)L^{-p}]^{-1/p} =$
1^{∞} απροσδιοριστία

Οπότε

$$\lim_{p\to 0} Q = A * \lim_{p\to 0} e^{\lim_{p\to\infty} ln[aK^{-p}+(1-a)L^{-p}]^{-\frac{1}{p}}}$$

$$= A * e^{\lim_{p\to 0} \frac{-ln[aK^{-p}+(1-a)L^{-p}]^{-\frac{1}{p}}}{p}} =$$

$$=A * \lim_{p\to 0} \exp\left[\frac{aK^{-p}lnK+(1-a)L^{-p}lnL}{aK^{-p}+(1-a)L^{-p}}\right] =$$

$$= A * e^{lnK+(1-a)lnL} = A * e^{lnK^{a}L^{1-a}} =$$

$$= K^{a}L^{1-a}$$

Κώδικας Mathematica

```
In[1]:= Quit[]

In[1]:= Q[p_] := A * (a * K ^ (-p)  + (1 - a) * L ^ (-p)) ^ (-1 / p)
        Q[p]
```

Out[2]= $A \left(a K^{-p} + (1-a) L^{-p}\right)^{-1/p}$

```
In[3]:= Limit[Q[p], p → 0, Assumptions → 0 ≤ a < 1]
```

Out[3]= $A K^{a} L^{1-a}$

Πολυώνυμα και Σειρές MacLaurin και Taylor

Θεώρημα MacLaurin

Έστω μια πολυωνυμική συνάρτηση της μορφής:

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n.$

Έχουμε:

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$

$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2}$

$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4 x + 60a_5 x^2 \ldots + n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3}$

…

$f^n(x) = n(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1)a_n x^{n-3}$

Αν εκτιμήσουμε τις παραγώγους στο σημείο χ=0,καταλήγουμε:

$f'(0) = a_1$

$f''(0) = 2a_2 = 2!\, a_2$

$f'''(0) = 6a_3 = 3!\, a_3$

…

$f^n(0) = n(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1)a_n = n!\, a_n$

Αντικαθιστώντας στο αρχικό πολυώνυμο,και γνωρίζοντας ότι $f(0) = a_0$,καταλήγουμε σε ένα καινούργιο πολυώνυμο με τους συντελεστές του εκφρασμένους σε παραγώγους εκτιμημένες στην τιμή χ=0:

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'^{(0)}}{1!}x + \frac{f''^{(0)}}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να εκφράσουμε την πολυωνυμική συνάρτηση f(x) με ένα καινούργιο πολυώνυμο,που παριστάνει την ανάπτυξη της συνάρτησης f(x) γύρω από το 0.Το ανάπτυγμα αυτού του είδους λέγεται ανάπτυγμα MacLaurin.

Άσκηση 2

Να διατυπωθεί σε ανάπτυγμα MacLaurin η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Αναλυτική λύση

$f(x) = \frac{1}{1-x}$, $\frac{f(0)}{0!} = 1$

$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $\frac{f\prime(0)}{1!} = \frac{1}{1!} = 1$

$f''(x) = \frac{(1)(2)}{(1-x)^3}$, $\frac{f\prime\prime(0)}{2!} = \frac{2}{2!} = 1$

$f'''(x) = \frac{(1)(2)(3)}{(1-x)^4}$, $\frac{f\prime\prime\prime(0)}{3!} = \frac{6}{3!} = 1$

…

$f^n(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^{n-1}}$, $\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-1)!} = 1$

Το ανάπτυγμα είναι:

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'^{(0)}}{1!}x + \frac{f''^{(0)}}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

Επομένως η σειρά MacLaurin θα είναι:

$$\frac{1}{1-\chi} = 1 + \chi + \chi^2 + \chi^3 + \cdots + \chi^n$$

Κώδικας Mathematica

Έδώ θα χρησιμοποιήσουμε την εντολή **Series** του Mathematica με την οποία μπορύμε να φτιαχνουμε το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor μιας συνάρτησης **f**,στο σημείο $\chi = \chi_0$.Για $\chi_0 = \mathbf{0}$ βρίσκουμε το ανάπτυγμα MacLaurin.

Συγκεκριμένα η **Series** ορίζεται:

$\mathbf{Series}[f(x), \{x, x_0, n\}]$

Και μας δίνει το ανάπτυγμα της **f** στο $\chi = x_0$,μέχρι νιοστής τάξης $(\chi - \chi_0)^n$

```
Quit[]

F[x_] := 1 / (1 - x)

F[0]

1

F'[0]

1

F''[0]

2

F'''[0]

6
```

Σειρά McLaurin n τάξης:

$f(x) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f'''(0)}{3!} + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}$

```
Series[F[x], {x, 0, 4}]
```

$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + O[x]^5$

Άσκηση 3

Να βρεθεί το ανάπτυγμα MacLaurin της συνάρτησης $f(x) = e^{sinx}$.

Αναλυτική Λύση

$f(x) = e^{sinx}$, $f(0) = e^{sin0} = e^0 = 1$

$f'(x) = e^{sinx}(sinx)' = cosx * e^{sinx}$, $f'(0) = cos0 * e^{sin0} = 1$

$f''(x) = cosx * e^{sinx} = cos^2x * e^{sinx} - sinx * e^{sinx}$, $f''(0) = 1$

$f'''(x) = e^{sinx}cosx(-3sinx + cos^2x - 1)$, $f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = e^{sinx}[sinx * (3sinx + 1) + cos^4x - 2(3sinx + 2)cos^2x]$, $f^{(4)}(0) = -3$

Οπότε:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}$$

Κώδικας Mathematica

```
Quit[]

F[x_] := E^Sin[x]

F[0]

1

F'[0]

1

F''[0]

1

F'''[0]

0

F''''[0]

-3

f[x_] := F[0] + x * F'[0] / 1! + x^2 * F''[0] / 2! + x^3 * F'''[0] / 3! + x^4 * F''''[0] / 4!

f[x]
```

$$1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}$$

Το Θεώρημα του Taylor

Ένα πολυώνυμο μπορεί να αναπτυχθεί γύρω από ένα οποιοδήποτε σημείο c και όχι αναγκαστικά γύρω από το μηδέν.Άρα αν πάρουμε ένα τυχαίο χ, τότε αυτό μπορεί να νοηθεί ως απόκλιση του c.Έστω δ η απόκλιση του χ,τότε ισχύει χ=c+δ.

Έστω μια πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = e + bx + ax^2$,

θέτουμε χ=c+δ οπότε:

$$f(x) = e + b(c + \delta) + \alpha(c + \delta)^2$$

Η οποία πλέον γράφεται :

$$g(\delta) = e + b(c + \delta) + \alpha(c + \delta)^2$$

$$g'(\delta) = b + 2\alpha(c + \delta)$$

$$g''(\delta) = 2\alpha$$

Το πολυώνυμο γύρω από από το δ=0,είναι το ανάπτυγμα του MacLaurin:

$$g(\delta) = \frac{g(0)}{0!} + \frac{g'(0)}{1!}\delta + \frac{g''(0)}{2!}\delta^2$$

Όμως για δ=0 στην ουσία αναπτύσουμε για χ=c,όπου c$\neq$ 0.Αν αντικαταστήσουμε όπου g(δ) με f(x),και για δ=0 έχουμε:

$$g(0) = f(c)$$

$$g'(0) = f'(c)$$

$$g''(0) = f''(c)$$

Οπότε το ανάπτυγμα MacLaurin γίνεται:

$$f(x) = \frac{f(c)}{0!} + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

Το οποίο είναι το ανάπτυγμα Taylor για πολυώνυμα μεγαύτέρου βαθμού γύρω από το χ=δ.

Άσκηση 4

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{2-x}$, για n=4,γύρω από το c=1 και c=0.

Αναλυτική λύση

$f(x) = \frac{1}{2-x}$ $\qquad \frac{f(1)}{0!} = 1$ $\qquad \frac{f'(0)}{0!} = \frac{1}{2}$

$f'(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$ $\qquad \frac{f\prime(1)}{1!} = 1$ $\qquad \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{4}$

$f''(x) = \frac{2}{(2-x)^3}$ $\qquad \frac{f''(1)}{2!} = 1$ $\qquad \frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{8}$

$f'''(x) = \frac{6}{(2-x)^4}$ $\qquad \frac{f'''(1)}{3!} = 1$ $\qquad \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{16}$

$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(2-x)^5}$ $\qquad \frac{f^{(4)}(1)}{4!} = 1$ $\qquad \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{1}{32}$

Άρα έχουμε:

$$f(1) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 + R4$$

$$f(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{32}x^4 + R4$$

Κώδικας Mathematica

```
Quit[]

F[x_] := 1 / (2 - x)

F[1]

1

F'[1]

1

F''[1]

2

F'''[1]

6

F''''[1]

24
```

Ανάπτυγμα Taylor στο 1 μέχρι 4ης τάξης:

```
f[c_] := F[c] / 0! + (x - c) * F'[c] / 1! + (x - c) ^2 * F''[c] / 2! + (x - c) ^3 *F'''[c] / 3! +
   (x - c) ^4 *F''''[c] / 4!

f[1]
```

$(-1+x)^2 + (-1+x)^3 + (-1+x)^4 + x$

Ανάπτυγμα Taylor στο 0 μέχρι 4ης τάξης:

```
f[0]
```

$\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{32}$

Άσκηση 5

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(x) = lnx$ για χ=1,και n=3.

Αναλυτική λύση

$f(x) = lnx$ $\qquad\qquad \frac{f(1)}{0!} = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad\qquad \frac{f'(1)}{1!} = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\qquad\qquad \frac{f''(1)}{2!} = -\frac{1}{2}$

$f'''(x) = -\frac{2}{x^2}$ $\qquad\qquad \frac{f'''(1)}{3!} = \frac{1}{3}$

Επομένως το ανάπτυγμα Taylor είναι:

$$lnx = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + R3$$

Κώδικας Mathematica

```
In[6]:= Quit[]

In[1]:= F[x_] := Log[x]

In[2]:= F[x]
Out[2]= Log[x]

In[7]:= F'[1]
Out[7]= 1

In[8]:= F''[1]
Out[8]= -1

In[9]:= F'''[1]
Out[9]= 2

In[10]:= f[x_] := (x - 1) * F'[1] / 1! + (F''[1] / 2!) * (x - 1) ^2 + (F'''[1] / 3!) * (x - 1) ^3

In[11]:= f[x]
```

$$\text{Out[11]}= -1 - \frac{1}{2}(-1+x)^2 + \frac{1}{3}(-1+x)^3 + x$$

3. Ολικά Διαφορικά και Παράγωγοι

Ολικά διαφορικά

Έστω μια συνάρτηση $y = f(x)$, τότε το ολικό διαφορικό της γράφεται dy=f’(x)dx.Όταν έχουμε συναρτήσεις με δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές, τότε το διαφορικό τέτοιων συναρτήσεων καλείται **ολικό διαφορικό.**Το ολικό διαφορικό μας δίνει μια γραμμική προσέγγιση μια μεταβολής στην εξαρτημένη μεταβλητή,που προέρχεται από μια απειροελλάχιστα μικρή μεταβολή στις ανεξάρτητες μεταβλητές.¨ετσι αν θεωρήσουμε την z=f(x,y) μια συνάρτηση παραγωγής,τότε μια μικρή μεταβολή στους συντελεστές της παραγωγής χ και y,οδηγεί σε μια μεταβολή στο παραγόμενο προϊόν z.Η συνολική μεταβολή στο z που προέρχεται από μια μικρή μεταβολή στα χ και y είναι:

$$\Delta\chi = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta\chi + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

Αν τα Δχ και Δy είναι πολύ μικρά τότε:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}d\chi + \frac{\partial z}{\partial y}dy \text{ ή}$$

$$dz = f_x d\chi + f_y dy$$

Όπου dz είνα το ολικό διαφορικό και μετρά το άθροισμα των μεταβολών που προέρχονται από μεταβολές στις μεταβλητές χ και y και μας δίνει προσεγγιστικά τη διαφορά μεταξύ των τιμών της συνάρτησης στα σημεία P(x,y) και P(x+Δχ,y+Δy).

Κανόνες για την εύρεση ολικών διαφορικών

Αν g=g(x,y) και h=h(x,y) δύο συνεχείς και παραγωγίσιμες συναρτήσεις τότε ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες :

i) Κανόνας αθροίσματος-διαφοράς

$$d(g \mp h) = dg \mp dh$$

ii) Κανόνας συνάρτησης υψωμένης σε δύναμη

$$d(cg^n) = cng^{n-1}dg$$

iii) Κανόνας γινομένου

$$d(gh) = hdg + gdh$$

iv) Κανόνας πηλίκου

$$d\left(\frac{g}{h}\right) = (\frac{hdg + gdh}{h^2})$$

Ολικά διαφορικά ανώτερης τάξης

Τα ολικά διαφορικά ανώτερης τάξης μας χρησιμεύουν για την ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση συναρτήσεων.Το διαφορικό νιοστής τάξης είναι:

$$d^n y = f^n(x)dx^n$$

Έστω η συνάρτηση z=f(x,y).Για να υπολογίσουμε το διαφορικό β' τάξης,βρίσκουμε το διαφορικό πρώτης τάξης:

$$dz = f_x d\chi + f_y dy$$

Όπου τα dx και dy είναι δεδομένες αυθαίρετες μεταβολές των μεταβλητών x και y.Επομένως το dz μεταβάλεται με τις f_x, f_y των οποίων οι μερικές παράγωγοι είναι συναρτήσεις των μεταβλητών x και y.Στη συνέχεια υπολογίζουμε το ρυθμό μεταβολής της $f_x\ ως\ προς\ \chi$ ενώ το y είναι σταθερό,και τη συμβολίζουμε με f_{xx}.

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f_x) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(f_y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y}$$

Για την εύρεση του διαφορικού δεύτερης τάξης έχουμε :

$$d^2 z = d(dz) = \frac{\partial(dz)}{\partial x}dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y}dy$$

Που με αντικαταστάσεις καταλλήγουμε στη μορφή:

$$d^2 z = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dydx + f_{yy}dy^2$$

Που σε μητρωική μορφή γράφεται:

$$d^2z = [dx \quad dy]\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

Όπου η μήτρα των παραγώγων δεύτερης τάξης λέγεται **Εσσιανή μήτρα.**

Άσκηση 1

Έστω η συνάρτηση $z = x^2 + xy^2 \; με \; xy = c$.Να βρεθούν τα διαφορικά πρώτης και δεύτερης τάξης.

Αναλυτική λύση

$$dz = (2x + y^2)dx + 2xydy$$

$$d^2z = (2x + y^2)d^2x + 2dx^2 + 4ydxdy + 2xdy^2$$

Όμως

$$dx = -\frac{c}{y^2}dy \; και \; d^2x = \frac{2c}{y^3}dy^2$$

Και προκύπτει: $d^2z = (2x + y^2)\frac{2c}{y^3}dy^2 + 2dx^2 + 4ydxdy + 2xdy^2$

Επίλυση με το Mathematica

Για την εύρεση του ολικού διαφορικού θα χρησιμοποιήσουμε την εντολή

`Dt[f]`

όπου f είναι η συνάρτηση,και χωρίς να προσδιορίσουμε τις ανεξάρτητες μεταβλητές υπολογίζουμε το ολικό διαφορικό πρώτης τάξης.

Κώδικας

```
In[7]:= Quit[]

In[1]:= z[x_, y_] := x^2 + x * y^2
        c := x * y

In[3]:= Dt[z[x, y]]
Out[3]= 2 x Dt[x] + y^2 Dt[x] + 2 x y Dt[y]

In[4]:= f[x_, y_] := Dt[z[x, y]]

In[5]:= f[x, y]
Out[5]= 2 x Dt[x] + y^2 Dt[x] + 2 x y Dt[y]

In[6]:= Dt[f[x, y]]
Out[6]= 2 Dt[x]^2 + 4 y Dt[x] Dt[y] + 2 x Dt[y]^2 + 2 x Dt[Dt[x]] + y^2 Dt[Dt[x]] + 2 x y Dt[Dt[y]]
```

Άσκηση 2

Έστω συνάρτηση παραγωγής $q = f(K, L) = 100KL - K^3L - 3L^2$ με $K = g(t) = 0.5t^2$ $και\ L = h(t) = 2t + 1. Να\ βρεθεί\ η\ \frac{dq}{dt}$

Αναλυτική λύση

Βρίσκουμε το ολικό διαφορικό της q:

$$dq = f_k dK + f_L dL = (100L - 3K^2L)dK + (100K - K^3 - 6L)dL$$

$$\frac{dq}{dt} = (100L - 3K^2L)\frac{dK}{dt} + (100K - K^3 - 6L)\frac{dL}{dt}$$

Όμως $\frac{dK}{dt} = t$ και $\frac{dL}{dt} = 2$

άρα:

$$\frac{dq}{dt} = (100L - 3K^2L)t + (100K - K^3 - 6L)2$$
$$= 100Lt - 3K^2Lt + 200K - 2K^3 - 12L$$

$$τελικά\ \frac{dq}{dt} = 100t^2 + 76t - 1{,}75t^6 - 0{,}75t^5 - 12$$

Επίλυση στο Mathematica

```
In[8]:= Quit[]

In[1]:= K[t_] := 0.5*t^2
        L[t] := 2*t+1

In[3]:= q[K_, L_] := 100*K*L - K^3*L - 3 L^2

In[4]:= q[K[t], L[t]]
Out[4]= 50. t^2 (1+2 t) - 0.125 t^6 (1+2 t) - 3 (1+2 t)^2

In[5]:= Dt[K[t]]
Out[5]= 1. t Dt[t]

In[6]:= Dt[L[t]]
Out[6]= 2 Dt[t]

In[7]:= Dt[q[K[t], L[t]]]
Out[7]= 100. t^2 Dt[t] - 0.25 t^6 Dt[t] - 12 (1+2 t) Dt[t] + 100. t (1+2 t) Dt[t] - 0.75 t^5 (1+2 t) Dt[t]

In[8]:= dqdt := Dt[q[K[t], L[t]]] / Dt[t]

In[9]:= dqdt
Out[9]= 1/Dt[t] (100. t^2 Dt[t] - 0.25 t^6 Dt[t] -
          12 (1+2 t) Dt[t] + 100. t (1+2 t) Dt[t] - 0.75 t^5 (1+2 t) Dt[t])
```

Άσκηση 3

Η παραγωγή μιας εταιρείας είναι Q(K,L)=$60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$ μονάδες όπου K είναι το κεφάλαιο που έχει επενδύσει σε εκατομμύρια δραχμές και L οι εργατοώρες.Προς το παρόν χρησιμοποιούνται 1000 εργατοώρες και έχει επενδυθεί κεφάλαιο 900 εκατομμυρίων.Να προσεγγισθεί η αλαγή στην παραγωγή όταν το κεφάλαιο αυξηθεί κατά 1 εκατ. Και οι εργατοώρες κατά 2.

Αναλυτική επίλυση

K=900, L=1000, ΔK=1, ΔΛ=2

$$\Delta Q=\frac{\partial Q}{\partial K}\Delta K + \frac{\partial Q}{\partial L}\Delta L = 30K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}\Delta K + 20K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{-2}{3}}\Delta L =$$

$$= 30\frac{1}{30}10 + 20 * 30\frac{1}{100}2 = 22\ \mu o\nu \acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma$$

Που προσεγγίζει και την αύξηση της παραγωγής

Επίλυση με το Mathematica

In[8]:= Quit[]

In[1]:= Q[K_, L_] := 60 * K^(1/2) * L^(1/3)

In[2]:= D[Q[K, L], K]

D[Q[K, L], L]

Out[2]= $\frac{30\,L^{1/3}}{\sqrt{K}}$

Out[3]= $\frac{20\sqrt{K}}{L^{2/3}}$

In[4]:= Qx[K_, L_] := $\frac{30\,L^{1/3}}{\sqrt{K}}$

In[5]:= Qy[K_, L_] := $\frac{20\sqrt{K}}{L^{2/3}}$

In[6]:= dk := 1

In[7]:= dl := 2

In[9]:= DQ[K_, L_] := Qx[K, L] * dk + Qy[K, L] * dl

In[10]:= DQ[900, 1000]

Out[10]= 22

Άσκηση 4

Να υπολογισθεί η $\frac{dz}{dt}$ όταν $z = f(x,y) = 8x^2 + 3y^2$ και χ=8t, y=6t.

Αναλυτική λύση

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt}z_x \frac{dy}{dt}z_y = 16x * 8 + 6y * 6 = 128x + 36y = 128 * 8t + 36 * 6t = 1240t$$

Επίλυση με το Mathematica

```
In[11]:= Quit[]

In[1]:= z[x_, y_] := 8*x^2 + 3*y^2

In[2]:= x[t_] := 8*t

In[3]:= y[t_] := 6*t

In[4]:= Dt[z[x[t], y[t]]]

Out[4]= 1240 t Dt[t]
```

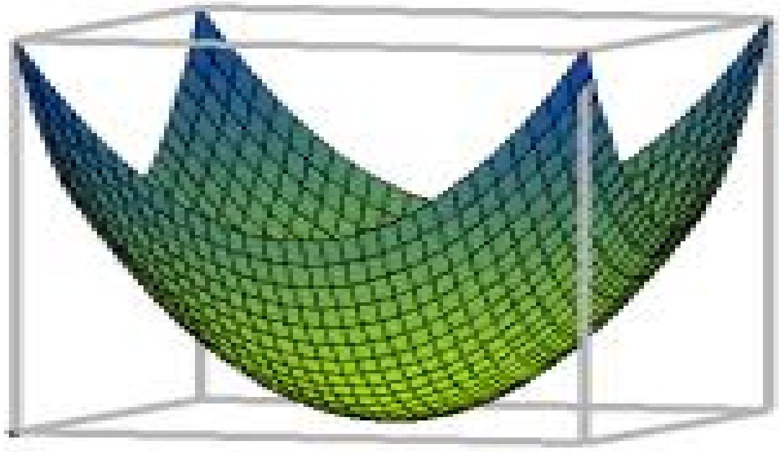
4. Βελτιστοποίηση Συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Έστω η συνάρτηση f(x,y) ορισμένη σε μια περιοχή $A \subseteq R^2$ που περιέχει το (a,b).Τότε:

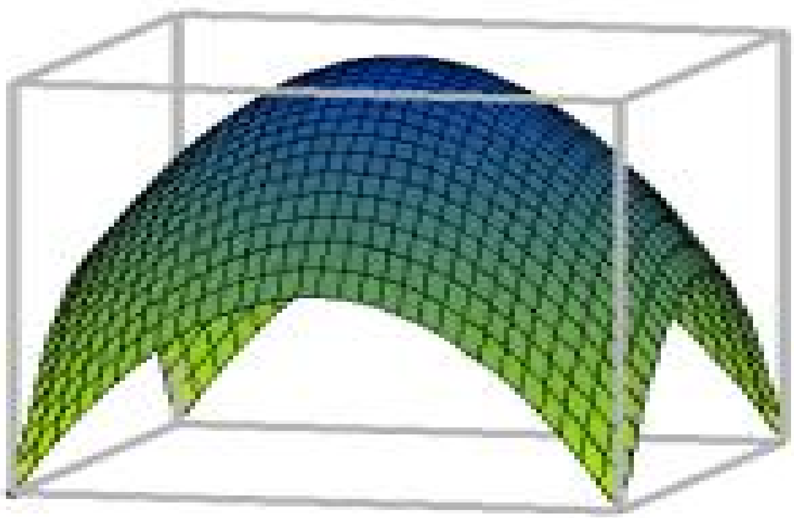
- Το f(a,b) καλείται ολικό μέγιστο της f όταν:
  f(x,y)≤ f(a,b) για κάθε χ,y του A.
- Το f(a,b) καλείται ολικό ελάχιστο της f όταν:
  f(x,y)≥ f(a,b) για κάθε χ,y του A.
- Το f(a,b) καλείται τοπικό μέγιστο της f εάν υπάρχει περιοχή Δ με κέντρο το (a,b) έτσι ώστε f(x,y)≤ f(a,b)
- Το f(a,b) καλείται τοπικό μέγιστο της f εάν υπάρχει περιοχή Δ με κέντρο το (a,b) έτσι ώστε f(x,y)≥ f(a,b)

Γεωμετρικά το τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f(x,y) είναι ένα σημείο της επιφάνειας z= f(x,y) που βρίσκεται ψηλότερα από οποιοδήποτε άλλο γειτονικό σημείο της επιφάνειας.

Τοπικό ελλάχιστο μιας συνάρτησης f(x,y) είναι ένα σημείο της επιφάνειας z= f(x,y) που βρίσκεται χαμηλότερα από οποιοδήποτε άλλο γειτονικό σημείο της επιφάνειας.



Εικόνα 4:Τοπικό ελάχιστο



Εικόνα 5:Τοπικό μέγιστο

Ένα σημείο (χ=a,y=b) του πεδίου ορισμού της f(x,y) με :

$$f_x(a,b) = 0$$

$$f_y(a,b) = 0$$

Καλείται κρίσιμο σημείο της f(x,y).

Εάν οι πρώτες μερικές παράγωγοι της f(x,y) ορίζονται σε όλα τα σημεία μιας περιοχής, τότε τα τοπικά ακρότατα της f(x,y) στην περιοχή συνταντούνται μόνο στα κρίσιμα σημεία.

Εάν το σημείο (χ',y') είναι σημείο τοπικού μέγιστου για ορισμένες καμπύλες,και τοπικό ελάχιστο για τις υπόλοιπες τότε ονμάζεται σαγματικό σημείο.Συγκεκριμένα αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες τότε το σημείο χ=a,y=b της f(x,y) είναι τοπικό ακρότατο ή σαγματικό σημείο.

- Τοπικό Μέγιστο

$$f_x(a,b) = 0$$

$$f_y(a,b) = 0$$

$$f_{xx}(a,b) < 0$$

$$f_{yy}(a,b) < 0$$

$$f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - \left(f_{xy}(a,b)\right)^2 > 0$$

- Τοπικό Ελάχιστο

$$f_x(a,b) = 0$$

$$f_y(a,b) = 0$$

$$f_{xx}(a,b) > 0$$

$$f_{yy}(a,b) > 0$$

$$f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - \left(f_{xy}(a,b)\right)^2 > 0$$

- Σαγματικό σημείο

$$f_x(a,b) = 0$$
$$f_y(a,b) = 0$$

$$f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - \left(f_{xy}(a,b)\right)^2 < 0$$

- Τίποτα από τα παραπάνω

$$f_x(a,b) = 0$$
$$f_y(a,b) = 0$$

$$f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - \left(f_{xy}(a,b)\right)^2 = 0$$

Άσκηση 1

Έστω η z=f(x,y)=$y^2 - x^2$.Να βρεθούν τα ακρότατα αν υπάρχουν.

Αναλυτική λύση

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

Το σύστημα $\{\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0\}$ δίνει το σημείο χ=0 και y=0

$$z_{xx} = -2 < 0$$

$$z_{yy} = 2 > 0$$

$$z_{xy} = 0$$

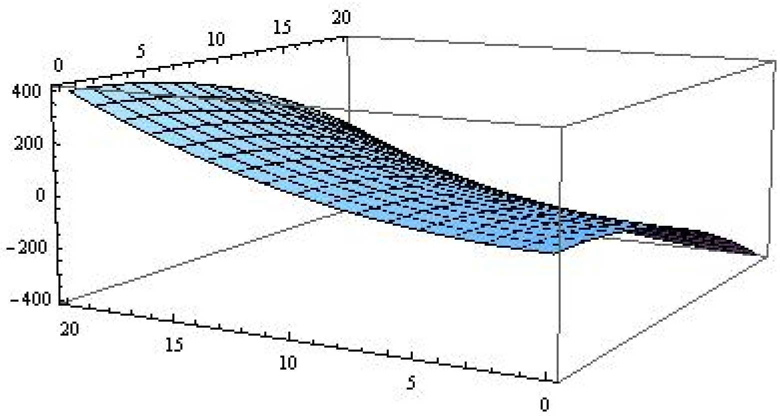
$$z_{xx} * z_{yy} - (z_{xy})^2\text{=-2*2-0=-4<0}$$

Άρα είναι σαγματικό σημείο.

Επίλυση στο Mathematica

```
In[6]:= Quit[]

In[1]:= z[x_, y_] := y^2 - x^2

In[2]:= D[z[x, y], x]

Out[2]= -2 x

In[3]:= D[z[x, y], y]

Out[3]= 2 y

In[4]:= NSolve[{D[z[x, y], x] == 0, D[z[x, y], y] == 0}, {x, y}]

Out[4]= {{x → 0., y → 0.}}

In[5]:= D[z[x, y], {x, 2}]

Out[5]= -2

In[6]:= D[z[x, y], {y, 2}]

Out[6]= 2

In[7]:= D[D[z[x, y], x], y]

Out[7]= 0

In[9]:= Plot3D[z[x , y], {x, 0, 20}, {y, 0, 20}]
```

Out[9]=



Άσκηση 2

‘Εστω μια εταιρεία με συνάρτηση πααραγωγής $Q = 4LK - 3L^2 - 2K^2 + 6L + 14K$ όπου L,K είναι ο αριθμός μονάδων εργασίας και κεφαλαίου που διαθέτει η εταιρεία και Q η παραγωγή της εταιρείας σε κατάλληλες μονάδες.Να βρεθούν:

Α)Τα L,K που μεγιστοποιούν την παραγωγή της εταιρείας,

Β) Τα L,K που μεγιστοποιούν το κέρδος της εταιρείας, εαν η εταιρεία παράγει υπό σηνθήκες τέλειου ανταγωνισμού,πουλά το προιόν της 25 τη μονάδα και πληρώνει 7 τη μονάδα εργασίας και 14 τη μονάδα κεφαλαίου.

Αναλυτική λύση

Α) Είναι:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = 4K - 6L + 6$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 4L - 4K + 14$$

Το σύστημα

$$4K - 6L + 6 = 0$$

$$4L - 4K + 14 = 0$$

Δίνει L=10 και K=13.5

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = -6$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = -4$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial K} = 4$$

Δηλαδή $\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} * \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial K} = 8 > 0$

Άρα για L=10 και K=13.5, μεγιστοποιείται η παραγωγή.

B) Το κέρδος είναι Π=TR-TC, όπου TR το συνολικό εισόδημα και TC το συνολικό κόστος.Είναι TC=7L+14K και επειδή η εταιρεία πουλά σε συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού η τιμή του προϊόντος είναι σταθερά.,συνεπώς:

TR=P*Q=25*($4LK - 3L^2 - 2K^2 + 6L + 14K$)

*Π=TR-TC=100LK-75*$L^2 - 50K^2 + 143L + 336K$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = 100K - 150L + 143$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = 100L - 100K + 336$$

Λύνουμε το σύστημα $\frac{\partial \Pi}{\partial L} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial K} = 0$

Και προκύπτει L=9.58 ,K=12.94

Επίσης $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial K^2} = 100 > 0$, $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial L^2} = -150$, $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial L \partial K} = 100$

Δηλαδή $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial L^2} * \frac{\partial^2 \Pi}{\partial K^2} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial L \partial K} = 15000 - 10000 = 5000 > 0$

Άρα για L=9.58 ,K=12.94 μεγιστοποιούνται τα κέρδη της εταιρείας

Επίλυση Mathematica

```
In[1]:= Quit[]

In[1]:= Q[K_, L_] := 4*L*K - 3*L^2 - 2*K^2 + 6*L + 14*K

In[2]:= D[Q[K, L], L]

Out[2]= 6 + 4 K - 6 L

In[3]:= D[Q[K, L], K]

Out[3]= 14 - 4 K + 4 L

In[4]:= NSolve[{D[Q[K, L], L] == 0, D[Q[K, L], K] == 0}, {K, L}]

Out[4]= {{K → 13.5, L → 10.}}

In[5]:= D[Q[K, L], {L, 2}]

Out[5]= -6

In[6]:= D[Q[K, L], {K, 2}]

Out[6]= -4

In[7]:= D[D[Q[K, L], L], K]

Out[7]= 4

In[11]:= D[Q[K, L], {L, 2}]*D[Q[K, L], {K, 2}] - D[D[Q[K, L], L], K]^2

Out[11]= 8

In[12]:= D[Q[K, L], {L, 2}]*D[Q[K, L], {K, 2}] - D[D[Q[K, L], L], K]^2 ≥ 0

Out[12]= True
```

Άσκηση 3

Μια εταιρεία έχει το μονοπώλειο των 2 προϊόντων της, που έχουν συνάρτηση ζήτησης:

Προϊόν 1: $Q_1 = 25 - 0.3P_1$

Προϊόν 2: $P_1 = 210 - 5Q_1$

Όπου P,Q συμβολίζουν τη τιμή και την ποσότητα του προϊόντος αντίστοιχα.Ησυνάρτηση συνολικού κόστους για την εταιρεία είναι:

$TC = 25Q_1 + 30Q_2 + 45$.Να βρεθούν οι τιμές για κάθε προϊόν που μεγιστοποιούν τα κέρδη.

Αναλυτική λύση

Το συνολικό εισόδημα είναι:

TR=$P_1 Q_1 + P_2 Q_2$

Επειδή η εταιρεία έχει το μονοπώλειο των προϊόντων της η τιμή βρίσκεται από τη συνάρτηση ζήτησης,και είναι:

TR=$P_1(25-0.3P_1) + P_2(42-0.2P_2) = 25P_1 - 0.3{P_1}^2 + 42P_2 - 0.2{P_2}^2$

Για το συνολικό κόστος έχουμε:

$$TC = 25Q_1 + 30Q_2 + 45 = 25(25-0.3P_1\ ) + 30(42-0.2P_2) + 45$$
$$= -7.5P_1 - 6P_2 + 1930$$

Άρα το κέρδος της εταιρείας είναι:

$$\Pi = TR - TC = 25P_1 - 0.3{P_1}^2 + 42P_2 - 0.2{P_2}^2 - (-7.5P_1 - 6P_2 + 1930)$$
$$= 32.5P_1 + 48P_2 - 0.3{P_1}^2 - 0.2{P_2}^2 - 1930$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P_1} = 32.5 - 0.6P_1$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P_2} = 48 - 0.4P_2$$

Το συστημα $\frac{\partial \Pi}{\partial P_1} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial P_2} = 0$ δίνει $P_1 = 54.17, P_2 = 120$

$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial {P_1}^2} = -0.6 < 0,\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial {P_2}^2} = -0.4 < 0,\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial L \partial K} = 0$

$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial L^2} * \frac{\partial^2 \Pi}{\partial K^2}$- $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial L \partial K}$ =0.24>0

Άρα οι τιμές που μεγιστοποιούν το κέρδος είναι 54.17 και 120

Επίλυση Mathematica

```
In[6]:= Quit[]

In[1]:= Q1[P1_] := 25 - 0.3 * P1

In[2]:= Q2[P2_] := 42 - 0.2 * P2

In[3]:= TC[Q1_, Q2_] := 25 * Q1 + 30 * Q2 + 45

In[4]:= TR[Q1_, Q2_] := P1 * Q1 + P2 * Q2

In[6]:= TC[Q1[P1], Q2[P2]]

Out[6]= 45 + 25 (25 - 0.3 P1) + 30 (42 - 0.2 P2)

In[7]:= TR[Q1[P1], Q2[P2]]

Out[7]= (25 - 0.3 P1) P1 + (42 - 0.2 P2) P2

In[8]:= P[P1_, P2_] := TR[Q1[P1], Q2[P2]] - TC[Q1[P1], Q2[P2]]

In[9]:= P[P1, P2]

Out[9]= -45 - 25 (25 - 0.3 P1) + (25 - 0.3 P1) P1 - 30 (42 - 0.2 P2) + (42 - 0.2 P2) P2

In[10]:= D[P[P1, P2], P1]

Out[10]= 32.5 - 0.6 P1

In[11]:= D[P[P1, P2], P2]

Out[11]= 48. - 0.4 P2

In[12]:= NSolve[{D[P[P1, P2], P1] == 0, D[P[P1, P2], P2] == 0}, {P1, P2}]

Out[12]= {{P1 → 54.1667, P2 → 120.}}

In[13]:= D[D[P[P1, P2], P1], P1]

Out[13]= -0.6

In[15]:= D[D[P[P1, P2], P2], P2]

Out[15]= -0.4

In[16]:= D[D[P[P1, P2], P1], P2]

Out[16]= 0.

In[18]:= D[D[P[P1, P2], P1], P1] * D[D[P[P1, P2], P2], P2] - D[D[P[P1, P2], P1], P2]^2

Out[18]= 0.24

In[19]:= D[D[P[P1, P2], P1], P1] * D[D[P[P1, P2], P2], P2] - D[D[P[P1, P2], P1], P2]^2 ≥ 0

Out[19]= True
```

Άσκηση 4

Ένα άτομο έχει συνάρτηση ωφελιμότητας

$$U = {x_1}^3 - \frac{151}{2}{x_1}^2 + 1440x_1 - \frac{3}{2}{x_2}^2 + 240x_2 - 3x_1x_2$$

Όπου x_1 $και$ x_2 ο αριθμός των ωρών που διαθέτει σε 2 δραστηριότητες.Να βρεθεί πόσες ώρες πρέπει να διαθέτει σε κάθε δραστηριότητα,έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η ωφελιμότητά του.

Αναλυτική λύση

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 3{x_1}^2 - 153x_1 + 1440 - 3x_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = -3x_2 + 240 - 3x_1$$

Το σύστημα $3{x_1}^2 - 153x_1 + 1440 - 3x_2 = 0,\ 3x_2 + 240 - 3x_1 = 0$

Μας δίνει 2 σημεία

$$x_1 = 10 \text{ ή } x_1 = 40 => \ x_2 = 70 \text{ ή } x_2 = 40$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial {x_1}^2} = 6x_1 - 153$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial {x_2}^2} = -3$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 x_2} = -3$$

Στο σημείο $x_1 = 10, x_2 = 70$ έχουμε:

$\frac{\partial^2 U}{\partial {x_1}^2} = -93 < 0,\ \frac{\partial^2 U}{\partial {x_2}^2} = -3 < 0,$ και

$$\frac{\partial^2 U}{\partial {x_1}^2} * \frac{\partial^2 U}{\partial {x_2}^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 x_2} = 270 > 0$$

Άρα για $x_1 = 10, x_2 = 70$ μεγιστοποιεί την ωφελιμότητά του

Στο σημείο $x_1 = 40, x_2 = 40$ έχουμε:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial {x_1}^2} = 87 > 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial {x_2}^2} = -3 < 0$$

Και $\frac{\partial^2 U}{\partial {x_1}^2} * \frac{\partial^2 U}{\partial {x_2}^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 x_2} = -270 < 0$

Άρα το σημείο είναι Σαγματικό

Επίλυση Mathematica

```
In[14]:= Quit[]

In[1]:= U[x1_, x2_] := x1^3 - (153 / 2) * x1^2 + 1440 * x1 - 1.5 * x2^2 + 240 * x2 - 3 * x1 * x2

In[2]:= D[U[x1, x2], x1]

Out[2]= 1440. - 153 x1 + 3 x1^2 - 3 x2

In[3]:= D[U[x1, x2], x2]

Out[3]= 240 - 3 x1 - 3. x2

In[4]:= NSolve[{D[U[x1, x2], x1] == 0, D[U[x1, x2], x2] == 0}, {x1, x2}]

Out[4]= {{x1 → 10., x2 → 70.}, {x1 → 40., x2 → 40.}}
```

Gia x1=10 kai x2=70 exoyme:

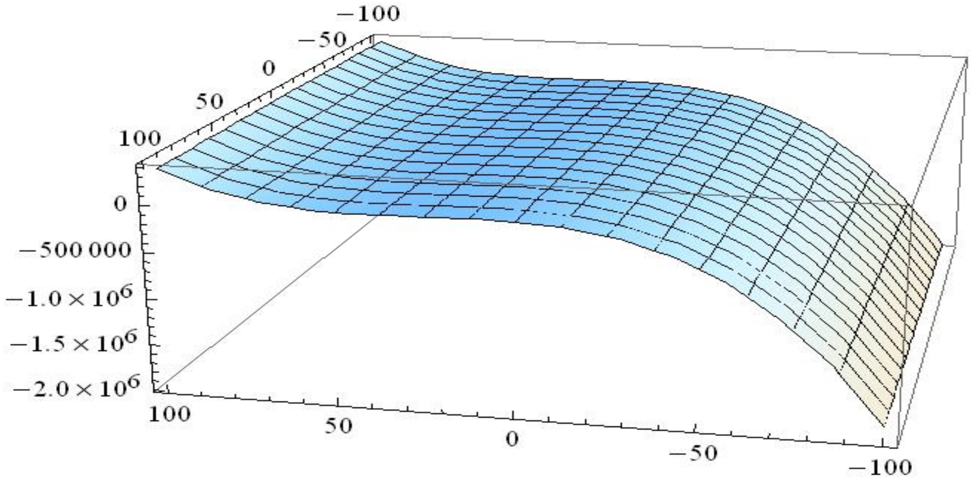
```
In[5]:= D[D[U[x1, x2], x1], x1]

Out[5]= -153 + 6 x1

In[6]:= % /. x1 → 10

Out[6]= -93

In[13]:= D[D[U[x1, x2], x2], x2]

Out[13]= -3.

In[14]:= D[D[U[x1, x2], x1], x2]

Out[14]= -3

In[15]:= D[D[U[x1, x2], x1], x1] * D[D[U[x1, x2], x1], x2] - D[D[U[x1, x2], x1], x2]^2

Out[15]= -9 - 3 (-153 + 6 x1)

In[16]:= % /. x1 → 10

Out[16]= 270
```

Ara gia x1=10 x2=70 megistopoieitai i ofelimotita

Gia x1=40 kai x2=40

```
In[17]:= D[D[U[x1, x2], x1], x1]

Out[17]= -153 + 6 x1

In[18]:= % /. x1 → 40

Out[18]= 87

In[19]:= D[D[U[x1, x2], x2], x2]

Out[19]= -3.

In[20]:= D[D[U[x1, x2], x1], x2]

Out[20]= -3

In[21]:= D[D[U[x1, x2], x1], x1] * D[D[U[x1, x2], x1], x2] - D[D[U[x1, x2], x1], x2]^2

Out[21]= -9 - 3 (-153 + 6 x1)

In[22]:= % /. x1 → 40

Out[22]= -270
```

Ara to simeio einai sagmatiko



Εικόνα 6:Γραφική παράσταση της U

Αριστοποίηση

1)Χωρίς περιορισμούς

Μια συνάρτηση της μορφής y=f(x1,x2,...xn) έχει μέγιστο ή ελλάχιστο για τις τιμές χ1',χ2',...χn' των n αντίστοιχων μεταβλητών της όταν ισχύουν:

1)Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial f}{\partial x1} = \frac{\partial f}{\partial x2} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial xn} = 0$$

2)Συνθήκες δεύτερης τάξης:

Άν |H| η ορίζουσα της Εσσιανής μήτρας:

$$|\mathrm{H}|=\begin{bmatrix} f11 & \cdots & f1n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ fn1 & \cdots & fnn \end{bmatrix}$$

Όπου $fij = \frac{\partial^2 f}{\partial xi \partial xj}$ $\mu\varepsilon\ i,j = 1,2,\ldots n$

Και |H1|,|H2|,|Hn| οι κύριες ελάσσονες της ορίζουσας |H|,δηλαδή:

$$|H1| = |f11|, \qquad |H2| = \begin{vmatrix} f11 & f12 \\ f21 & f22 \end{vmatrix}, \quad |H3| = \begin{vmatrix} f11 & f12 & f13 \\ f21 & f22 & f23 \\ f31 & f32 & f33 \end{vmatrix}, \quad |Hn| = |H|$$

3)Τότε η αρχική συνάρτηση έχει για τις τιμές χ1’,χ2’,....,χn’ :

A)**Μέγιστο** όταν |H1|<0,|H2|>0,|H3|<0.Δηλαδή όταν οι κύριες ελάσσονες της ορίζουσας |H| εναλλάσονται στο πρόσημο με την |H1|<0

Β)**Ελάχιστο** όταν οι κύριες ελάσσονες της |Η| είναι όλες θετικές,

Δηλαδή |Η1|,|Η2|,...>0

2)**Με περιορισμούς**(**Μέθοδος** Lagrange)

Έστω μια συνάρτηση y=f(x1,x2,…xn),που αποτελείται από n ανεξάρτητες μεταβλητές χ1,χ2,...χn,που υπόκεινται όμως στον περιορισμό g(x1,x2,…,xn)=c.

1) Δημιουργούμε τη συνάρτηση Lagrange:

$$L = f(x1, x2, \dots, xn) + \lambda[c - g(x1, x2, \dots, xn)]$$

Όπου λ είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange.

Το πρόβλημα της αριστοποίησης υπό κάποιο περιορισμό g(x1,x2,..,xn),πλέον το ανάγουμε σε ένα πρόβλημα αριστοποίησης χωρίς περιορισμούς, της συνάρτησης Lagrange.

2) Ορίζουμε τις συνθήκες πρώτης τάξης:

$$L_\lambda = L_1 = L_2 = \cdots = L_n = 0$$

Όπου L_i=$\frac{\partial L}{\partial Xi}$ και L_λ=$\frac{\partial L}{\partial \lambda}$ για i-1,2,3,..n και από τις οποίες υπολογίζουμε τις χ1’,χ2’,χ3’,...χn’.

3) Συνθήκες δεύτερης τάξης

$$|H|=\begin{bmatrix} 0 & g1 & g2 \cdots & gn \\ g1 & L11 & L12 & L1n \\ \dots & L21 & L22 & \dots \\ gn & Ln1 & \cdots & Lnn \end{bmatrix}$$

Όπου $g_i = \frac{\partial g}{\partial xi}$, $L_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial xi \partial xj}$, i,j=1,2,..,n

Και |H2|,|H3|,...,|Hn|είναι οι κύριες ελάσσονες της ορίζουσας |H|.

Δηλαδή $|H2|=\begin{vmatrix} 0 & g1 & g2 \\ g1 & L11 & L12 \\ g2 & L21 & L22 \end{vmatrix}$, $|H3|=\begin{vmatrix} 0 & g1 & g2 & g3 \\ g1 & L11 & L12 & L13 \\ g2 & L21 & L22 & L23 \\ g3 & L31 & L32 & L33 \end{vmatrix}$,…,|Hn|=|H|

Ομοίως

A) Αν |H2|>0,|H3|<0,|H4|>0...

Η αρχική συνάρτηση y=f(x1,x2,..xn) για τις τιμές χ1',χ2',...,χn',υπό τον περιορισμό g(x1,x2,…,xn)=c έχει μέγιστο.

B) Άν |H2|,H3|,...,|H3|<0 η συνάρτηση έχει ελάχιστο.

Άσκηση 5

Να λυθεί το πρόβλημα $\max z = 160x + 103y - 4x^2 - 1.03y^2$ με τον περιορισμό $64\chi + 51.5y = 480$.

Αναλυτική λύση

Σχηματίζουμε τη συνάρτηση Lagrange:

$$L(x, y, \lambda) = 160x + 103y - 4x^2 - 1.03y^2 + \lambda(64\chi + 51.5y - 480)$$

Και το συστημα: $\begin{cases} Lx = 160 - 8x + 64 = 0 \\ Ly = 103 - 2y + 51.5\lambda = 0 \\ L\lambda = 64\chi + 51.5y - 480 \end{cases}$

Μας δίνει y=3.11 και χ=4.99

Παράγωγοι δεύτερης τάξης:

Lxx=-8<0, Lyy=-2.06<0, Lxy=0

Lxx*Lyy-$(Lxy)^2$=16.48>0

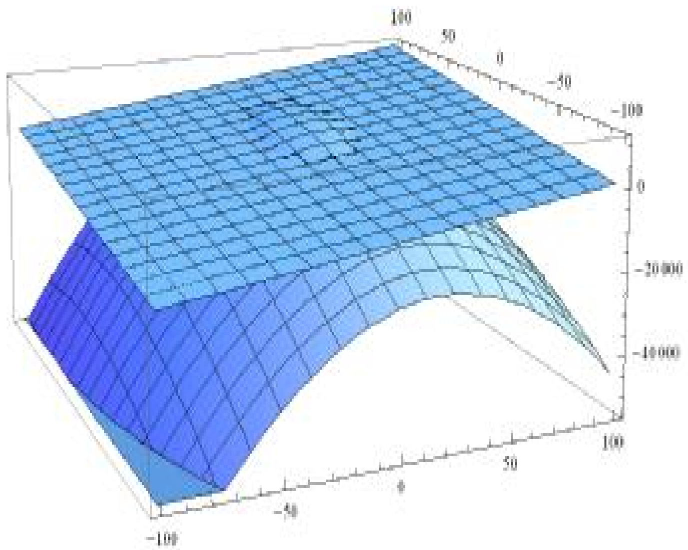
Συνεπώς το σημείο χ=4.99,y=3.11 μεγιστοποιεί τη δοθείσα συνάρτηση z με τον περιορισμό $64\chi + 51.5y = 480$

Επίλυση Mathematica

```
In[25]:= Quit[]

In[1]:= z[x_, y_] := 160 * x + 103 * y - 4 * x^2 - 1.03 * y^2

In[2]:= K[x_, y_] := 64 * x + 51.5 * y - 480

In[3]:= L[x_, y_, l_] := z[x, y] + l * K[x, y]

In[4]:= D[L[x, y, l], x]

Out[4]= 160. + 64. l - 8 x

In[5]:= D[L[x, y, l], y]

Out[5]= 103 + 51.5 l - 2.06 y

In[6]:= D[L[x, y, l], l]

Out[6]= -480. + 64 x + 51.5 y

In[8]:= NSolve[{D[L[x, y, l], x] == 0, D[L[x, y, l], y] == 0, D[L[x, y, l], l] == 0},
          {x, y, l}]

Out[8]= {{x → 4.99583, y → 3.11198, l → -1.87552}}
```

Paragvgoi 2is taksis

```
In[9]:= D[D[L[x, y, l], x], x]

Out[9]= -8.

In[10]:= D[D[L[x, y, l], x], y]

Out[10]= 0.

In[11]:= D[D[L[x, y, l], y], y]

Out[11]= -2.06
```



Εικόνα 7:Γράφημα της συνάρτησης μαζί με τον περιορισμό

Άσκηση 6

Να λυθεί το πρόβλημα : max $z = 10x^{0.6}y^{0.4}$ με τους περιορισμούς :

$20x + 30y = 600$, x, y>0

Αναλυτική λύση

Σχηματιζουμε τη συνάρτηση Lagrange :

L(x,y,λ)= $10x^{0.6}y^{0.4} + \lambda(20x + 30y = 600)$

Και θεωρούμε το σύστημα των εξισώσεων:

Lx=10*0.6$x^{-0.4}y^{0.4} + 20\lambda$=0

Ly=10*0.1$x^{0.6}y^{-0.6} + 30\lambda = 0$

Lλ=$20x + 30y - 600 = 0$

Και λύνοντάς το βρίσκουμε χ=18, y=8

Θεωρούμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

Lxx= -2.4$x^{-1.4}y^{0.4}$

Lyy= -2.4$x^{-0.6}y^{-1.6}$

Lxy= 2.4$x^{-0.4}y^{-0.6}$

Έστω G(x,y)= $20x + 30y - 600$, τότε

Gx=20, Gy=30

Επειδή Lxx*Lyy - $(Lxy)^2 = 0$, εξετάζουμε την ποσότητα

Gx$^2 * Lyy - 2 * Gx * Gy * Lxy + Gy^2 < 0$ και έτσι το σημείο χ=18, y=8 μεγιστοποιεί τη δοθείσα συνάρτηση z με τους περιορισμούς $20x + 30y = 600$, x, y>0

Και η τιμή του λ =0.22

Επίλυση με το Mathematica

```
In[20]:= Quit[]

In[1]:= z[x_, y_] := 10 * x^0.6 * y^0.4

In[2]:= g[x_, y_] := 20 * x + 30 * y - 600

In[3]:= L[x_, y_, l_] := z[x, y] + l * g[x, y]

In[4]:= L[x, y, l]
```

Out[4]= $10\, x^{0.6}\, y^{0.4} + l\,(-600 + 20\, x + 30\, y)$

```
In[5]:= D[L[x, y, l], x]
```

Out[5]= $20\, l + \dfrac{6.\, y^{0.4}}{x^{0.4}}$

```
In[6]:= D[L[x, y, l], y]
```

Out[6]= $30\, l + \dfrac{4.\, x^{0.6}}{y^{0.6}}$

```
In[7]:= D[L[x, y, l], l]
```

Out[7]= $-600 + 20\, x + 30\, y$

```
In[8]:= NSolve[{D[L[x, y, l], x] == 0, D[L[x, y, l], y] == 0, D[L[x, y, l], l] == 0}, {x, y, l}]
```

Out[8]= {{x → 18., y → 8., l → -0.216894}}

```
In[9]:= D[D[L[x, y, l], x], x]
```

Out[9]= $\dfrac{2.4\, y^{0.4}}{x^{1.4}}$

```
In[10]:= D[D[L[x, y, l], y], y]
```

Out[10]= $\dfrac{2.4\, x^{0.6}}{y^{1.6}}$

```
In[11]:= D[D[L[x, y, l], x], y]
```

Out[11]= $\dfrac{2.4}{x^{0.4}\, y^{0.6}}$

```
In[13]:= D[D[L[x, y, l], x], x] * D[D[L[x, y, l], y], y] - (D[D[L[x, y, l], x], y])^2
```

Out[13]= $-\dfrac{8.88178 \times 10^{-16}}{x^{0.8}\, y^{1.2}}$

```
In[18]:= D[g[x, y], x]
```

Out[18]= 20

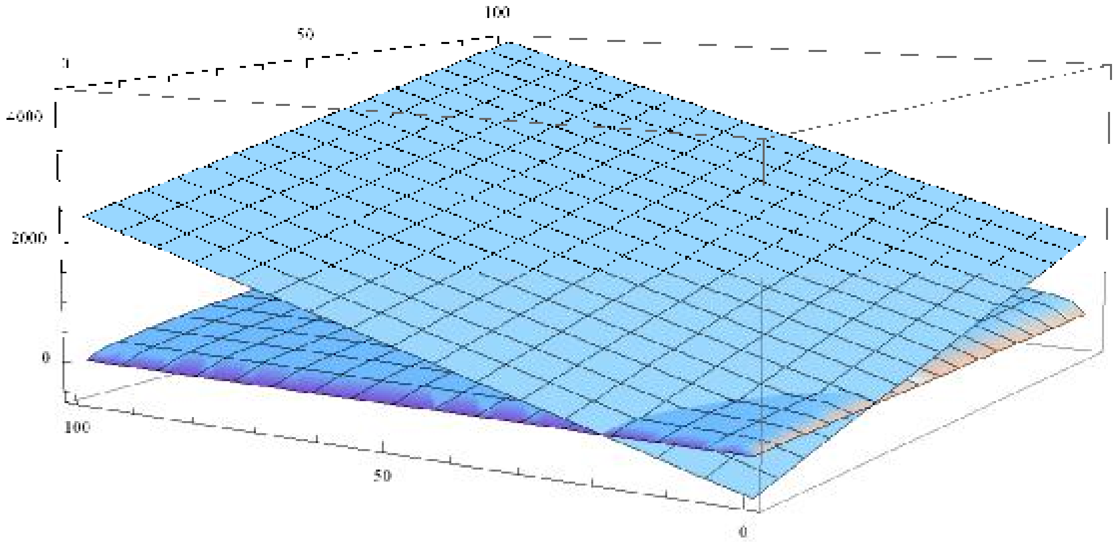
```
In[20]:= D[g[x, y], y]
```

Out[20]= 30

```
In[24]:= D[g[x, y], x]^2 * D[D[L[x, y, l], y], y] - 2 * D[g[x, y], x] * D[g[x, y], y] * D[D[L[x, y, l], x], y] + D[g[x, y], y]^2 * D[D[L[x, y, l], x], x]
```

Out[24]= $-\dfrac{960.\, x^{0.6}}{y^{1.6}} - \dfrac{2880.}{x^{0.4}\, y^{0.6}} - \dfrac{2160.\, y^{0.4}}{x^{1.4}}$

Ara to x=18 kai y=6 megistopoioei thn z



Εικόνα 8:Γράφημα της συνάρτησης μαζί με τους περιορισμούς

3)Προσδιορισμός άριστου επιπέδου παραγωγής

Έστω μια επιχείρηση , της οποίας τα συνολικά κέρδη θα είναι

TC=TR-TC

Τότε TC=A+f(Q) και TR=P*Q, οπότε

TR=P*Q-A-f(Q).

Για να έχουμε μεγιστοποίηση των κερδών θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

1)$\frac{dTP}{dQ} = 0$

2)$\frac{d^2TP}{dQ^2} < 0$

Δηλαδή,

$\frac{dTP}{dQ} = p - F'(Q) = 0 \cup F'(Q) = p$ 1η συνθήκη

Επειδή όμως

$F'(Q) = \frac{dTP}{dQ} = MC$

Δηλαδή το σημείο ισορροπίας βρίσκεται στη θέση που MC=p.

$\frac{d^2TP}{dQ^2} < -F''(Q) < 0 \cup F''(Q) > 0$ 2η συνθήκη

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω ,για την ισορροπία μιας επιχείρησης πρέπει το οριακό κόστος να ισούται με την τιμή διάθεσης του προιόντος , και συγχρόνως η τιμή να είναι τουλαχιστον ίση με το μεταβλητό κόστος παραγωγής.

Δηλαδή οι γενικές συνθήκες ισορροπίας είναι:

1) MC=P≥ AVC

2) $\frac{dMC}{dQ} > 0$

Η θέση αυτή στην οποία πληρούνται οι συνθήκες λέγεται **οικονομικά optimum θέση** της επιχείρησης.

Ανάλυση στη Mathematica

Παράγωγος

Η μερική παράγωγος μιας συνάρτησης **f[x]** ως προς ***x*** υπολογίζεται στη *Mathematica* με την εντολή:

D[f[x], x]

Η παράγωγος *n*-τάξεως ως προς ***x*** υπολογίζεται με την εντολή:

D[f[x], {x, n}]

Για τον υπολογισμό της μερικής παραγώγου ανωτέρας τάξεως μιας συνάρτησης Πολλών μεταβλητών, ... *f* [*x*, *y*,...]

$$\frac{\partial}{\partial \chi}, \frac{\partial}{\partial y} \dots f(x, y, \dots)$$

χρησιμοποιούμε την εντολή:

D[f[x,y,...], x, y,...]

Λύσεις συστημάτων

Οι εντολές ***Solve*** και ***NSolve*** έχουν τη δυνατότητα να προσδιορίζουν λύσεις συστήματος. Η εντολή για την αριθμητική λύση ενός συστήματος είναι

NSolve[{eq1, eq2,..., eqn}, {x1, x2,..., xn}]

με ***{eq1, eq2,..., eqn}*** η λίστα με τις εξισώσεις του συστήματος και ***{x1, x2,..., xn}*** με τις μεταβλητές του. Οι εξισώσεις ενός συστήματος μπορούν επίσης να αποδοθούν σε παραμέτρους ως εξής:

eq1 = f1[{xi}]==0;eq2 = f2[{xi}] == 0;...; eqn=fn[{xi}] == 0

και μετά να δοθεί η εντολή για τη λύση του συστήματος.

Στην περίπτωση που υπάρχει αναλυτική λύση, τότε αυτή υπολογίζεται με την εντολή

Solve[{eq1, eq2,..., eqn}, {x1, x2,..., xn}]

Δισδιάστατες γραφικές παραστάσεις

Χρησιμοποιώντας τη *Mathematica* μπορούμε να αποδώσουμε γραφικά συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Η εντολή για τη δισδιάστατη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι η παρακάτω:

Plot[f[x], {x, xmin, xmax}]

Η οποία δίνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής στο διάστημα ***(xmin, xmax)***.

Υπάρχει επίσης η δυνατότητα ταυτόχρονης αναπαράστασης πολλών συναρτήσεων
μέσα στο ίδιο σχήμα, και αυτό γίνεται με την εντολή

Plot[{f1[x], f2[x], ...}, {x, xmin, xmax}]

με (*f1(x), f2(x), ...*) συναρτήσεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής, που καθορίζουν τις αντίστοιχες καμπύλες.

Επιμέλεια γραφικών

Υπάρχει η δυνατότητα διαμόρφωσης, μέσα από την εντολή *Plot,* μιας γραφικής παράστασης. Για το σκοπό αυτό υπάρχουν παράμετροι που οι τιμές τους καθορίζουν τη μορφή του σχήματος. Οι προκαθορισμένες τιμές των παραμέτρων αυτών τυπώνονται με την εντολή ***Options[Plot]***, όπως φαίνεται παρακάτω:

```
Options[Plot]

{AspectRatio →1/GoldenRatio
Axes → Automatic,
AxesLabel → None, AxesOrigin → Automatic,
AxesStyle → Automatic, Background → Automatic,
ColorOutput → Automatic, Compiled → True,
DefaultColor → Automatic, Epilog → 8<, Frame → False,
FrameLabel → None, FrameStyle → Automatic,
FrameTicks → Automatic, GridLines → None,
ImageSize → Automatic, MaxBend → 10.,
PlotDivision → 30., PlotLabel → None, PlotPoints → 25,
PlotRange → Automatic, PlotRegion → Automatic,
PlotStyle → Automatic, Prolog → 8<, RotateLabel → True,
Ticks → Automatic, DefaultFont  $DefaultFont,
DisplayFunction  $DisplayFunction,
FormatType -> $FormatType, TextStyle-> $TextStyle}
```

5. Αόριστο Ολοκλήρωμα

Παράγουσα ή αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f(x) ονομάζεται κάθε συνάρτηση φ(χ) με φ΄(χ) =f(x) και συμβολίζεται με $\int f(x)dx$.Το σύμβολο dx δείχνει ότι η ολοκλήρωση γίνεται ως προς τη μεταβλητή χ.

Έτσι αν $\varphi(\chi) = \int f(x)dx$ τότε φ'(χ)=f(x) και $\int \varphi(x)dx$=φ(χ).

Εάν η φ(χ) είναι μια παράγουσα της f(x) και c μια σταθερά τότε και η φ(χ)+c είναι παράγουσα της f(x), αφού (φ(χ)+c)΄= φ΄(χ). Άρα σε κάθε f(x) αντιστοιχούν άπειρες παράγουσες που ανά δύο διαφέρουν κατά μια σταθερά. Έτσι $\int f(x)dx$= φ(χ)+c όπου φ(χ) μια παράγουσα της f(x) και c μια πραγματική παράμετρος.

Κανόνες Ολοκλήρωσης

1) $\int dx = x + c$

2) $\int Kdx = Kx + c$

3) $\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$+c
4) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

5) $\int e^x\, dx = e^x + c$

6) $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$

7) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ όπου f, g συνεχεις

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Έστω $\int 4\chi^2(\chi^3 + 5)^3$dx. Θέτουμε $u(x) = x^3$+5 και τότε du= $(x^3$+5)'dx= $= 3x^2dx$

Δηλαδή $dx = \frac{du}{3x^2}$ και με αντικατάσταση στο αρχικό:

$\int 4\chi^2(\chi^3 + 5)^3$dx= $\int 4\chi^2 u^3 \frac{du}{x^2}$=$\int \frac{4}{3}u^3\, du = \frac{4}{3}\frac{u^4}{4} + c = \frac{1}{3}(\chi^3 + 5)^3 + c$

Παραγοντική ολοκλήρωση

Η παραγοντική ολοκλήρωση μπορεί να θεωρηθεί σαν αντίστροφη πράξη της παραγώγισης ενός γινομένου.

Έστω οι συναρτήσεις $f_1(x), f_2(x)$, τότε:

$(f_1(x)\, f_2(x))' = f_1(x)f_2'(x) + f_1'(x)\, f_2(x)$

Άρα

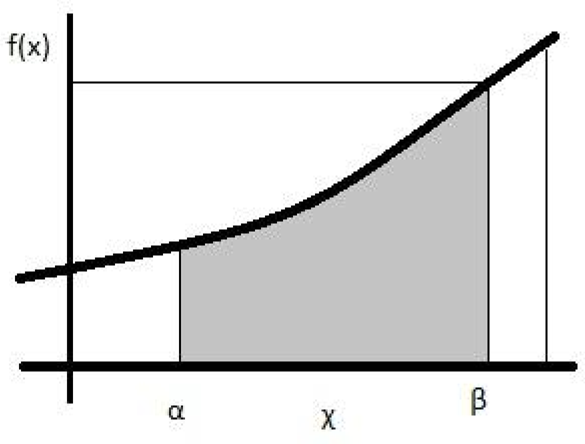
$\int (f_1(x)\, f_2(x))'\, dx$=$\int f_1(x)f_2'(x)$ dx +$\int f_1'(x)\, f_2(x)dx$

$f_1(x)\, f_2(x)$=$\int f_1(x) f_2{'}(x)$ dx +$\int f_1{'}(x)\, f_2(x) dx$

$\int f_1(x) f_2{'}(x)$ dx = $f_1(x)\, f_2(x) - \int f_1{'}(x)\, f_2(x) dx$

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Έστω η συνάρτηση y=f(x) με f(x)≥ 0, και το διάγραμμά της:



Εικόνα 9: Διάγραμμα της f

Η ολοκλήρωση της f(x) και ο υπολογισμός του φ(β)-φ(α), όπου φ(χ) μια παράγουσα της f, για την εύρεση του εμβαδού συμβολίζεται με:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = [\varphi(\chi)]_{\alpha}^{\beta} = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$$

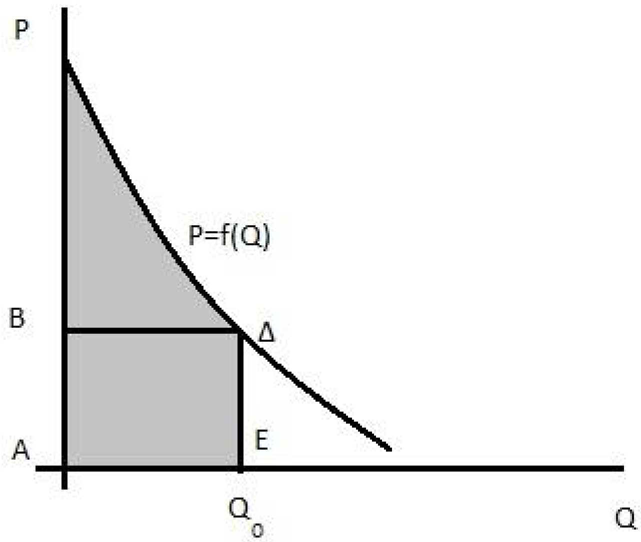
που καλείται ορισμένο ολοκλήρωμα της f(x) στο κλειστό διάστημα [α,β], με την προυπόθεση η f να είναι συνεχής στο [α ,β].

Ιδιότητες:

1. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$
2. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$
3. $\int_{\alpha}^{\beta}[f(x) + g(x)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$
4. $\int_{\alpha}^{\beta} c\, f(x)dx = c\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, όπου c σταθερά
5. $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x\,)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx$

Πλεόνασμα Καταναλωτή-Παραγωγού

Η τιμή που ένας καταναλωτής επιθυμεί να πληρώσει για να αγοράσει μια πρόσθετη μονάδα προιόντος είναι συνάρτηση των μονάδων που έχει ήδη αγοράσει.Δηλαδή η συνάρτηση ζήτησης του καταναλωτή P=f(Q), που δίνει την τιμή ανά μονάδα του προιόντος, είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς Q, όπως φαίνεται στο διάγραμμα :



Εικόνα 10: Συνάρτηση ζήτησης

Το συνολικό ποσό που ο καταναλωτής επιθυμεί να δαπανήσει για Q_0 μονάδες του προιόντος δίνεται από το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν, και είναι ίσο με:

$$\int_0^{Q_0} f(Q)dQ$$

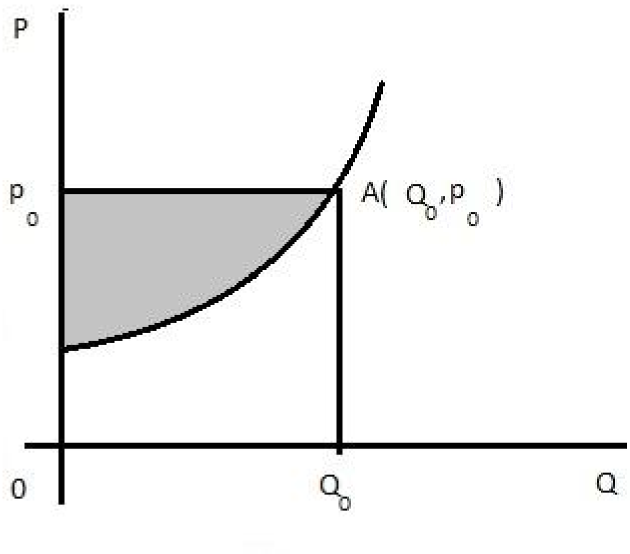
Σε μια ανταγωνιστική οικονομία το συνολικό ποσό που οι καταναλωτές δαπανούν είναι συνήθως μικρότερο απ'αυτό που θα μπορούσαν να δαπανήσουν.Η διαφορά μεταξύ των δύο καλείται πλεόνασμα καταναλωτή.

Η διαφορά αυτή εκφράζεται από :

$$\int_0^{Q_0} f(Q)dQ - P_0Q_0$$

Όπου το P_0Q_0 είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου κάτω από το σημείο ισοροπίας Α(P_0, Q_0).

Έστω τώρα η αύξουσα συνάρηση προσφοράς P=g(Q) που δίνεται στο διάγραμμα με σημείο ισοροπίας το Α$(P_{0,}Q_0)$.



Εικόνα 11: Πλεόνασμα Παραγωγού

Το συνολικό ώφελος των παραγωγών καλείται πλεόνασμα του παραγωγού και δίνεται από:

$$P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} f(Q)dQ$$

Που ισοδυναμεί με το εμβαδόν της γραμοσκιασμένης περιοχής.

Σε συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού το σημείο ισορροπίας $(P_{0,}Q_0)$ βρίσκεται στην τομή της καμπύλης ζήτησης και της καμπύλης προσφοράς. Για την εύρεση του $(P_{0,}Q_0)$ σε συνθήκες μονοπωλείου, ο παραγωγός επιλέγει το επίπεδο παραγωγής και την τιμή που μεγιστοποιεί το κέρδος του. Για την μεγιστοποίηση του κέρδους σε συνθήκες μονοπωλείου ισχύει η σχέση:

MR=MC

Δηλαδή οριακό εισόδημα = οριακό κόστος.

Άσκηση 1

Έστω ότι η συνάρτηση προσφοράς είναι $P = 5 + Q$ και η ποσότητα που πωλείται στην αγορά είναι 4. Τότε η τιμή που αντιστοιχεί σ'αυτή την ποσότητα είναι:

Αναλυτική λύση

$$P = (5+4)^{\frac{1}{2}} = 3$$

Πλεόνασμα παραγωγού:

$$(4)(3) - \int_0^4 (5+Q)^{\frac{1}{2}} dQ = 12 - \left[\frac{(5+Q)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = 12 - [\frac{2}{3}9^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}5^{\frac{3}{2}}] =$$

$=12 - [18- \frac{2}{3}\sqrt{5^3}] = 1.45$

Επίλυση mathematica

```
In[3]:= Quit[]

In[1]:= Q0 := 4

In[3]:= P0 := (5 + Q0) ^ (1 / 2)
```

$$\text{In[4]:= } P0 * Q0 - \int_0^{Q0} (5+Q)^{\wedge}(1/2)\, dQ$$

$$\text{Out[4]= } -6 + \frac{10\sqrt{5}}{3}$$

Άσκηση 2

Έστω η συνάρτηση ζήτησης P=33 - 6Q - Q^2 με τιμή ισοροπίας 6.

Αναλυτική λύση

Τότε η ποσότητα που αντιστοιχεί σ'αυτή την τιμή βρίσκεται από:

$$33 - 6Q - Q^2 = 6$$

$$27 - 6Q - Q^2 = 0$$

$$(Q + 9)(-Q + 3) = 0$$

Συνεπώς Q=3, αφού το Q=-9 απορρίπτεται

Πλεόνασμα καταναλωτή:

$$\int_0^3 (33 - 6Q - Q^2)\, dQ - (3)(6) = \left[33Q - \frac{6}{2}Q^2 - \frac{Q^3}{3}\right]_0^3 - 18 =$$

$$= (33)(3) - (3)(9) - \frac{27}{3} - 18 = 99 - 27 - 9 - 18 = 45$$

Επίλυση mathematica

Έστω η συνάρτηση ζήτησης P= 33- 6Q -Q^2 με τιμή ισοροπίας 6.

```
In[5]:= Quit[]

In[1]:= P0 := 6

In[2]:= P[Q_] := 33 - 6 * Q - Q^2

In[3]:= NSolve[{P[Q] == 6, Q ≥ 0}, {Q}]

Out[3]= {{Q → 3.}}

In[4]:= Q0 := 3

In[5]:= ∫_0^3 (33 - 6 * Q - Q^2) dQ - P0 * Q0

Out[5]= 45
```

Άσκηση 3

Έστω η συνάρτηση οριακού κόστους ενός προιόντος δίνεται από:

$15 - 0.1x + 0.0009x^2$. Να βρεθεί η συνάρτηση συνολικού κόστους εαν το κόστος 10 μονάδων είναι 150 ευρώ.

Αναλυτική λύση

Έστω ότι TC(x) είναι η συνάρτηση συνολικού κόστους, τότε:

$$\frac{dTC(x)}{dx} = 15 - 0.1x + 0.0009x^2$$

Ολοκληρώνουμε ως προς χ:

$$TC(x) = \int (15 - 0.1x + 0.0009x^2)dx =$$

$$= 15x - 0.05x^2 + 0.0003x^3 + c$$

Για χ=10 είναι:

$$150 = 150 - 0.05 * 100 + 0.0003 * 1000 + c$$

$$150 = 150 - 5 + 0.3 + c$$

$$c = 4.7$$

Έτσι η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι:

$$TC(x) = 4.7 + 15x - 0.005x^2 + 0.0003x^3$$

Επίλυση Mathematica

```
Quit[]

dTC[x_] := 15 - 0.1*x + 0.0009*x^2

TC[x_] := ∫dTC[x] dx + c

TC[x]

c + 15 x - 0.05 x^2 + 0.0003 x^3

Solve[c + 15*10 - 0.05*10^2 + 0.0003`*10^3 == 150, c]

{{c → 4.7}}

c := 4.7

TC[x]

4.7 + 15 x - 0.05 x^2 + 0.0003 x^3
```

Άσκηση 4

Έστω ότι το κέρδος που αποδίδει η επένδυση Α, χ χρόνια από τώρα, δίνεται από τη συνάρτηση:

$\Pi 1(x) = 100 + \chi^2$, χιλιάδες ευρώ.

Το κέρδος που αποδίδει η επένδυση Β, χ χρόνια από τώρα είναι:

$\Pi 2(\chi) = 250 + 5\chi$, χιλιάδες ευρώ.

Για πόσα χρόνια η επένδυση Β είναι κερδοφόρα; Να υπολογισθεί το επιπλέον κέρδος, εάν επενδύσουμε στη Β αντί για την Α;

Αναλυτική λύση

Και οι 2 επενδύσεις έχουν το ίδιο κέρδος όταν:

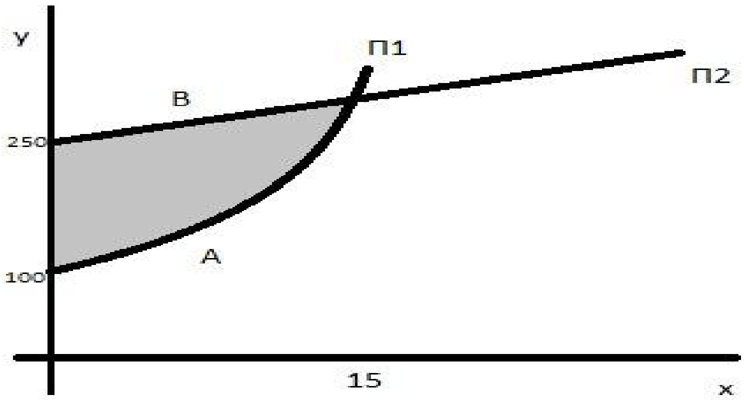
$$250 + 5\chi = 100 + \chi^2$$

$$\chi^2 - 5\chi - 150 = 0$$

$$(\chi - 15)(\chi + 10) = 0$$

$$x = 15 \text{ ή } \chi = -10 \text{ απορρίπτεται}$$

Άρα οι 2 επενδύσεις δίνουν ίδιο κέρδος μετά από 15 χρόνια.



Εικόνα 12: Διάγραμμα των 2 συναρτήσεων

Για τα πρώτα 15 χρόνια το κέρδος που αποδίδει επένδυση Β είναι μεγαλύτερο από της Α. Το επιπλέον κέρδος επενδύοντας στην Β αντί στην Α για τα 15 χρόνια είναι:

$$\int_0^{15} [\Pi 1(\chi) - \Pi 2(\chi)]dx = \int_0^{15} [250 + 5x - 100 - x^2]dx$$

$$\int_0^{15} [150 + 5x - x^2]dx = [150x + 5\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]\begin{matrix}15\\0\end{matrix}$$

$$= 2250 + \frac{1125}{2} - 1125 = 1687.5$$

Επίλυση mathematica

```
In[7]:= Quit[]

In[1]:= P1[x_] := 100 + x^2

In[2]:= P2[x_] := 250 + 5 * x

In[4]:= NSolve[{P1[x] == P2[x], x ≥ 0}, {}]

Out[4]= {{x → 15.}}
```

In[5]:= $\int_0^{15} (P1[x] - P2[x])\, dx$

Out[5]= $-\frac{3375}{2}$

Άσκηση 5

Το οριακό κόστος σε μια εταιρεία δίνεται από τη σχέση $MC = 4(x-4)^2$, όπου χ είναι η ποσότητα παραγωγής. Κατά πόσο αυξάνει το συνολικό κόστος παραγωγής εάν η παραγωγή αυξηθεί από 6 σε 10 μονάδες;

Αναλυτική λύση

Έστω TC(x) το συνολικό κόστος παραγωγής χ μονάδων προιόντος. Τότε το οριακό κόστος είναι:

$$MC = \frac{dTC}{dx} = 4(x-4)^2$$

Και η αύξηση στο συνολικό κόστος όταν η παραγωγή αυξηθεί από 6 σε 10 μονάδες είναι:

$$TC(10) - TC(6) = \int_6^{10} 4(x-4)^2 dx$$

$$= [4\frac{(x-4)^3}{3}]_6^{10}$$

$$= \frac{4}{3}[(10-4)^3 - (6-4)^3] = 277.33$$

Επίλυση mathematica

```
In[4]:= Quit[]

In[1]:= MC[x_] := 4 * (x - 4) ^2
```

Αύξηση στο συνολικό κόστος όταν η παραγωγή αυξηθεί από 6 σε 10 μονάδες:

In[2]:= $dTC := \int_6^{10} 4 * (x - 4)^2 \, dx$

In[3]:= dTC

Out[3]= $\frac{832}{3}$

6. Βιβλιογραφία

Τζαβαλής, Ηλίας. Οικονομετρία / Ηλίας Τζαβαλής. - 1η έκδ. - Αθήνα

Πέκος, Γεώργιος Δ. Εφαρμοσμένα μαθηματικά για οικονομικές επιστήμες : Με τη χρήση του Maple - 7 / *Γεώργιος Δημ. Πέκος. - Θεσσαλονίκη : Ζυγός, 2004*

Παπαδάκης, Κωνσταντίνος Ε. Εισαγωγή στο Mathematica / *Κωνσταντίνος Παπαδάκης. - 3η έκδ. - Θεσσαλονίκη : Τζιόλα, 2009*

Ξεπαπαδέας, Αναστάσιος Π. Μαθηματικές μέθοδοι στα οικονομικά : Θεωρία και εφαρμογές /Αναστάσιος Π. Ξεπαπαδέας, Ιωάννης Χ. Γιαννίκος. - 1η έκδ. - Αθήνα : Gutenberg - *Γιώργος & Κώστας Δαρδανός, 2011*

Σαπουντζής, Κωνσταντίνος Ι. Ασκήσεις μαθηματικών για οικονομολόγους : Με περιληπτική θεωρία / Κωνσταντίνου Ι. Σαπουντζή. - Αθήνα : Σταμούλη Α.Ε., 1990.

Τραχανάς, Στέφανος Λ. Mathematica και εφαρμογές : Για μαθηματικούς, φυσικούς και μηχανικούς / Στέφανος Τραχανάς · επιμέλεια σειράς Στέφανος Τραχανάς. - 2η έκδ. - Ηράκλειο Κρήτης : Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2004.