ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μοντέλα επιχειρησιακής έρευνας για τον προγραμματισμό σιδηροδρομικού υλικού

Νάτση Γεωργία

Ρίκα Μαλβίνα

Επιβλέπων καθηγητής: Κακαρελίδης Γεώργιος

Τόπος – Χρονολογία: Πάτρα , Απρίλιος 2014

Πρόλογος

Σε αυτήν την εργασία, παρουσιάζονται μια σειρά μοντέλων γραμμικού προγραμματισμού για τη διαχείρηση του διαθεσίμου σιδηροδρομικου υλικού, δεδομένου ενός συνόλου δρομολογίων, για μία συνηθισμένη ημέρα της εβδομάδος, και με στόχο την ελαχιστοποίηση μίας συνάρτησης που εξαρτάται από το κόστος λειτουργίας, τη ποιότητα των υπηρεσιών και την αξιοπιστία των υπηρεσιών.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή αρχικά παρουσιάζεται ο τρόπος σχεδιασμού προβλημάτων των σιδηροδρόμων ως προς το είδος, το χρονικό ορίζοντα και τη περιοχή ευθύνης, καθώς και ο τρόπος σχεδιασμού του προγραμματισμού σιδηροδρομικού υλικού που εφαρμόζεται από τον κρατικό διαχειριστή επιβατικού κοινού στις σιδηροδρομικές μεταφορές NS (Nederlandse Spoorwegen) στην Ολλανδία. Επίσης, αναφέρονται διάφορες επιστημονικές εργασίες που σκοπό έχουν την επίλυση προβλημάτων των σιδηροδρόμων.

Στην συνέχεια, παρουσιάζονται μια σειρά μοντέλων για τον τακτικό προγραμματισμό σιδηροδρομικού υλικού. Τα μοντέλα περιλαμβάνουν ένα βασικό μοντέλο και διάφορες επεκτάσεις του. Η κάθε επέκταση έχει σκοπό να καλύψει μια επιπλέον ανάγκη. Επίσης, παρουσιάζεται μία τροποποίηση του βασικού μοντέλου με σκοπό τη γρηγορότερη επίλυση και την άμεση παραγωγή ακεραίων λύσεων. Επίσης, παρουσιάζεται ένα μοντέλο που καλύπτει ένα συγκεκριμένο πρόβλημα για τις ανάγκες της ομάδας γραμμών Noord – Oost για την εταιρία NS (Nederlandse Spoorwegen).

Τέλος, παρουσιάζεται το βασικό μοντέλο, το οποίο έχει στόχο να βελτιστοποιήσει την ποιότητα των υπηρεσιών, μειώνοντας όσο το δυνατόν περισσότερο τις ελλείψεις στις θέσεις. Επίσης, παρουσιάζεται μία μέθοδος εκτίμησης της αναμενόμενης ζήτησης μίας διαδρομής για μία συγκεκριμένη κλάση θέσεων, μια συγκεκριμένη ημέρα της εβδομάδος και μία συγκεκριμένη εποχή του χρόνου.

Linear programming; Mixed Integer Programming; Dantzig – Wolfe decomposition; Branch and Price; Column Generation; Nederlandse Spoorwegen; Poisson regression

Περιεχόμενα

I. Εισαγωγή

i. Ο σκοπός της εργασίας

Σκοπός της εργασίας είναι ο προγραμματισμός του σιδηροδρομικού υλικού για ένα σύνολο δρομολογίων και για ένα σύνολο σιδηροδρομικών οχημάτων, δηλαδή ποια πρέπει να είναι η σύνθεση των σιδηροδρομικών οχημάτων, έτσι ώστε να βελτιστοποιείται η ποιότητα της εξυπηρέτησης των επιβατών, σε τακτικό επίπεδο, δηλαδή για κάθε μία μέρα μιας τυπικής εβδομάδας.

ii. Βασικές έννοιες

i. Ο οργανισμός NSR

Ο NSR (NS επιβάτες) είναι κλάδος του κρατικού οργανισμού, NS (Nederlandse Spoorwegen), ο οποίος είναι ο μεγαλύτερος διαχειριστής επιβατικού κοινού στις σιδηροδρομικές μεταφορές στην Ολλανδία. Ο NSR σχεδιάζει το χρονοδιάγραμμα, προγραμματίζει το σιδηροδρομικό υλικό και κάνει τη διαχείριση του προσωπικού. Ο τρόπος σκέψης της επίλυσης των προβλημάτων, τα προβλήματα και οι υποθέσεις των μοντέλων που παρουσιάζονται παρακάτω είναι για τις ανάγκες των προβλημάτων του NSR, κυρίως για την ομάδα γραμμών Noord – Oost, όπου είναι ένα σύστημα διασυνδεδεμένων γραμμών.

ii. Τα προβλήματα των σιδηροδρόμων

Τα είδη των προβλημάτων των σιδηροδρόμων

Ο NSR κατηγοριοποιεί τα προβλήματα των σιδηροδρόμων στα παρακάτω είδη:

1. Καθορισμός του χρονοδιαγράμματος

2. Προγραμματισμός σιδηροδρομικού υλικού
3. Διαχείριση προσωπικού

Καθορισμός του χρονοδιαγράμματος

Στο χρονοδιάγραμμα ορίζονται όλα τα δρομολόγια. Για κάθε δρομολόγιο προσδιορίζονται:

- Οι σταθμοί αναχώρησης και άφιξης.
- Οι ενδιάμεσοι σταθμοί.
- Οι σιδηροδρομικές γράμμες από τις οποίες θα εκτελεστεί.
- Ο χρόνος αναχώρησης.
- Ο χρόνος άφιξης.
- Οι πλατφόρμες των σταθμών, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν από το σιδηροδρομικό όχημα.
- Αν ο σκοπός του σιδηροδρομικού οχήματος είναι να μεταφέρει επιβάτες ή είναι άδειο με σκοπό κάποια άλλη υπηρεσία.

Τα προβλήματα των σιδηροδρόμων ως προς τον χρονικό ορίζοντα

Ο NSR χαρακτηρίζει τα προβλήματα σιδηροδρόμων αναφορικά με τον χρονικό ορίζοντα ως:

1. Στρατηγικά
2. Τακτικά
3. Λειτουργικά

4. Βραχυπρόθεσμα

- Στα στρατηγικά προβλήματα ο χρονικός ορίζοντας είναι πολλά χρόνια ή δεκαετίες.
- Στα τακτικά προβλήματα ο χρονικός ορίζοντας είναι μεταξύ 2 μηνών και ενός έτους.
- Στα λειτουργικά προβλήματα ο χρονικός ορίζοντας είναι μεταξύ 3 ημερών και 2 μηνών.
- Στα βραχυπρόθεσμα προβλήματα ο χρονικός ορίζοντας είναι το πολύ μέχρι 3 ημέρες.

Ζήτουμενο των στρατηγικών προβλημάτων είναι η ποσότητα του σιδηροδρομικού υλικού που θα χρειαστεί τα επόμενα χρόνια ή δεκαετίες, ενώ τα προβλήματα των άλλων κατηγοριών έχουν σχέση με τη διαχείριση του διαθεσίμου σιδηροδρομικού υλικού. Καθώς ο χρονικός ορίζοντας γίνεται πιο μικρός ο σχεδιασμός γίνεται πιο λεπτομερής.

Τα επίπεδα του σχεδιασμού των προβλημάτων

Ο NSR θέτει δύο επίπεδα σχεδιασμού προβλημάτων τα οποία είναι:

- Κεντρικός σχεδιασμός
- Τοπικός σχεδιασμός

Οι αποφάσεις του κεντρικού σχεδιασμού καλύπτουν ολόκληρο το σιδηροδρομικό δίκτυο ενώ οι αποφάσεις του τοπικού σχεδιασμού αφορούν μόνο ένα συγκεκριμένο σταθμό. Για τον κεντρικό σχεδιασμό υπεύθυνο είναι το τμήμα Logistics του NSR, ενώ για το τοπικό σχεδιασμό υπεύθυνοι είναι ο οργανισμός ελέγχου μεταφορών (TBO) καθώς και οι διαχειριστές της περιβόλου του σταθμού.

iii. Προγραμματισμός σιδηροδρομικού υλικού

Η διαχείριση του σιδηροδρομικού υλικού διακρίνεται στον προσδιορισμό της ποσότητας του σιδηροδρομικού υλικού και στη διαχείριση της χρήσης του σιδηροδρομικού υλικού.

1. Προγραμματισμός της αναγκαίας ποσότητας του σιδηροδρομικού υλικού

Εκτιμά το πλήθος των σιδηροδρομικών μηχανών, των τύπων των βαγονιών και του πλήθους των βαγονιών ανά τύπο που χρειάζονται για μία μελλοντική χρονική περίοδο.

2. Προγραμματισμός της χρήσης του σιδηροδρομικού υλικού

- Δεδομένου του διαθεσίμου σιδηροδρομικού υλικού και του συνόλου των δρομολογίων σε μία χρονική περίοδο (ημέρα), για κάθε δρομολόγιο καθορίζεται το πλήθος των σιδηροδρομικών οχημάτων που το εκτελούν και για κάθε σιδηροδρομικό όχημα ορίζεται το πλήθος των σιδηροδρομικών μονάδων που το αποτελούν, για κάθε σιδηροδρομική μονάδα το πλήθος των βαγονιών που την αποτελούν και για κάθε βαγόνι της κάθε σιδηροδρομικής μονάδας ορίζεται ο τύπος του και η θέση του στη σιδηροδρομική μονάδα. Επίσης, ορίζεται και η διάταξη των σιδηροδρομικών μονάδων.

  Ως **σιδηροδρομική μονάδα** ορίζεται ένα σύνολο από σιδηροδρομικό υλικό, το οποίο μπορεί να εκτελέσει δρομολόγιο. Αποτελείται από σιδηροδρομικά βαγόνια, σιδηροδρομικές μηχανές και το πρώτο και τελευταίο σιδηροδρομικό βαγόνι διαθέτουν καμπίνα οδηγού. Ένα **σιδηροδρομικό όχημα** μπορεί να αποτελείται από μία σιδηροδρομική μονάδα ή από την σύζευξη δύο ή περισσοτέρων σιδηροδρομικών μονάδων.

  Ένα **δρομολόγιο** εκτελείται από ένα ή περισσότερα σιδηροδρομικά οχήματα. Στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται περισσότερα του ενός σιδηροδρομικά οχήματα τότε κάθε ένα εκτελεί ένα κομμάτι του δρομολογίου (σύνολο σταθμών), το οποίο καλείται **ταξίδι (trip)**. Η έννοια αυτή χρησιμοποιείται στο τακτικό σχεδιασμό.

Στο τέλος του κάθε ταξιδιού το σιδηροδρομικό όχημα κατευθύνεται στο περίβολο μετατροπής (shunting yard) και μετατρέπεται. Με την **μετατροπή** αυτή είτε παράγεται ένα καινούργιο όχημα το οποίο καλείται διάδοχο όχημα και συνεχίζει το δρομολόγιο ή δύο καινούργια οχήματα τα οποία καλούνται διάδοχα και το ένα από αυτά συνεχίζει το δρομολόγιο ενώ το άλλο συνεχίζει ένα άλλο δρομολόγιο.

Επίσης στην περίπτωση του ενός διαδόχου οχήματος αν η **σύζευξη** γίνεται από δύο σιδηροδρομικά οχήματα που μόλις έφτασαν στον σταθμό τότε λέγεται ότι το διάδοχο όχημα έχει δύο προκάτοχα οχήματα, ενώ αν η **σύζευξη** γίνεται από το όχημα που μόλις έφθασε και από τις σιδηροδρομικές μονάδες που υπάρχουν στον σταθμό τότε λέγεται ότι το διάδοχο όχημα έχει ένα προκάτοχο οχήμα.

Για την μετατροπή ισχύει ο περιορισμός ότι μπορεί να γίνει μόνο σύζευξη των μονάδων ή μόνο διάζευξη. Επιπλέον, μη προβλεπόμενες μετατροπές αποφεύγονται ή απαγορεύονται για να μην οδηγήσουν σε δυσλειτουργίες του διαδόχου οχήματος και καθυστερήσεις σε δρομολόγια.

- Η διαχείριση του δρομολογίου πρέπει να είναι τέτοια ώστε να ικανοποιείται, η αρχή της απαιτούμενης συνέχειας (**Continuity requirement**) σύμφωνα με την οποία τουλάχιστον μία σιδηροδρομική μονάδα καλύπτει όλο το δρομολόγιο. Αυτό εξασφαλίζει ότι αν κάποιος επιβιβαστεί από την αρχή του δρομολογίου και επιθυμεί να αποβιβαστεί στον τερματικό σταθμό να μην χρειάζεται να αλλάξει θέση.

- Η διαχείριση πρέπει να είναι τέτοια ώστε το μήκος του κάθε σιδηροδρομικού οχήματος που εκτελεί το δρομολόγιο να ικανοποιεί ένα **μέγιστο** και ένα **ελάχιστο όριο**. Το μέγιστο όριο ορίζεται από τις πλατφόρμες επιβίβασης – αποβίβασης των σταθμών που θα περάσει και το ελάχιστο όριο από τη επιβατική ζήτηση.

- Η διαχείριση πρέπει να είναι τέτοια ώστε οι μετατροπές που γίνονται σε κάθε σταθμό να λαμβάνουν υπόψη το **μέγιστο όριο χωρητικότητας** και το απόθεμα του σταθμού σε σιδηροδρομικές μονάδες ώστε να υπάρχει χώρος ώστε το συγκεκριμένο σιδηροδρομικό όχημα την συγκεκριμένη χρονική περίοδο να μπορεί να μετατραπεί. Επίσης, στην πράξη η χωρητικότητα είναι τέτοια ώστε να είναι εφικτό **μέχρι δύο σιδηροδρομικές μονάδες** να μπορούν να συνδεθούν ή να αποσυνδεθούν.

- Η διαχείριση πρέπει να είναι τέτοια ώστε να ικανοποιείται ο περιορισμός, στον οποίο για κάθε σταθμό και για δύο διαδοχικές χρονικές περιόδους (ημέρες) πρέπει οι σιδηροδρομικές μονάδες του σταθμού στο τέλος της μίας χρονικής περιόδου (ημέρας) να είναι ίδιες με τις σιδηροδρομικές μονάδες του σταθμού στην αρχή της επόμενης χρονικής περιόδου (ημέρας). Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για τις διαδοχικές ημέρες που η επιβατική ζήτηση αναμένεται να είναι η ίδια (Τρίτη, Τετάρτη και Πέμπτη).

iv. Η συμβολή της επιχειρησιακής έρευνας στην επίλυση προβλημάτων των σιδηροδρόμων

Ορισμένες έρευνες επιχειρησιακής ανάλυσης για την επίλυση προβλημάτων επιχειρησιακής ανάλυσης είναι οι παρακάτω:

1. Οι Assad [2] και Cordeau [3] ερεύνησαν για το προγραμματισμό όλων των ειδών προβλημάτων σιδηροδρόμων (από προβλήματα σιδηροδρομικών υποδομών μέχρι προβλήματα σχετικά με το επιβατικό κοινό και τη μεταφορά των εμπορευμάτων).

2. Ο Huisman [4] ερεύνησε τη σιδηροδρομική μεταφορά των επιβατών με μεθόδους επιχειρησιακής ανάλυσης.

3. Οι Bussiek [5], Scholl [6] και Scholl [7] ερεύνησαν το πως να διευκολύνουν όσο το δυνατόν καλύτερα τους επιβάτες, έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί η πιθανότητα να αλλάζει ο επιβάτης σιδηροδρομικές γραμμές για να μεταβεί από ένα σταθμό σε ένα άλλο. Ως σιδηροδρομική γραμμή, ορίζεται το σύνολο των σταθμών οι οποίοι μεσολαβούν για τη μετάβαση από ένα τερματικό σταθμό σε έναν άλλο.

4. Ο Van Dijk [8] ανέπτυξε ένα μοντέλο στρατηγικής διαχείρισης του προσωπικού.

5. Ο Peeters [9] έκανε βελτιστοποίηση του τακτικού κυκλικού χρονοδιαγράμματος στο σιδηρόδρομο. Για το πρόβλημα αυτό έχει αναπτυχθεί το λογισμικό DONS. Επίσης, το λογισμικό προσομοίωσης SIMONE για να αναλύσει τη ευαισθησία των χρονοδιαγραμμάτων από καθυστερήσεις. Οι Vromans and Kroon [10] και Vromans [11] βελτιστοποίησαν την ανθεκτικότητα των χρονοδιαγραμμάτων μέσω ποσοτικών μεθόδων.

6. Ο Abbink [12] περιέγραψε ένα μοντέλο επιχειρησιακής έρευνας για το τακτικό καταμερισμό του σιδηροδρομικού υλικού στις σιδηροδρομικές γραμμές. Το μοντέλο αυτό κατανέμει το σιδηροδρομικό υλικό με στόχο την ελαχιστοποίηση των ελλείψεων θέσεων στις ώρες αιχμής και να ελαχιστοποιήσει τον αριθμό των διαφορετικών τύπων ανά γραμμή. Για το πρόβλημα αυτό έχουν ασχοληθεί οι Schrijver [13], Ben – Khedher [14], Brucker [15], Cordeau [16], [17], Alfieri [18], Lingaya [19] και Peeters and Kroon [20].

Ο Shrijver [21] ασχολήθηκε με το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του αριθμού των βαγονιών που χρειάζονται ώστε να ικανοποιηθεί η ζήτηση του επιβατικού κοινού για μία σιδηροδρομική γραμμή και για μία μέρα. Η μέθοδος υπολογίζει τον αριθμό των βαγονιών αδιαφορώντας για την διάταξη τους. Επίσης, η μέθοδος δεν ασχολείται με τις ελλείψεις των θέσεων ούτε με τον αριθμό των μετατροπών για τη σύνθεση του σιδηροδρομικού οχήματος. Το πρόβλημα είναι πρόβλημα μικτού ακεραίου προγραμματισμού (MIP – Mixed Integer Programming) και οι λύσεις του βρίσκονται μέσω ειδικών εμπορικών λογισμικών.

Οι Groot [22] και Alfieri [18] ασχολήθηκαν με το τρόπο χρήσης του σιδηροδρομικού υλικού για μία μέρα και μία σιδηροδρομική γραμμή δεδομένου ότι χρησιμοποιούνται βαγόνια διαφορετικών τύπων. Η μέθοδος ασχολείται και για την διάταξη των βαγονιών στο σιδηροδρομικό όχημα. Αντικειμενικός στόχος είναι η αποτελεσματικότατη χρήση του σιδηροδρομικού υλικού δεδομένου ότι η ζήτηση του επιβατικού κοινού ικανοποιείται έτσι ώστε να μην υπάρχουν ελλείψεις στις θέσεις. Η μέθοδος δεν ασχολείται με την ελαχιστοποίηση του αριθμού των μετατροπών για τη σύνθεση του σιδηροδρομικού οχήματος. Για την επίλυση του προβλήματος το πρόβλημα αναλύεται σε υποπροβλήματα των οποίων οι λύσεις περιορίζουν το μέγεθος του προβλήματος και καθιστούν πιο εύκολη την επίλυση του από ειδικά εμπορικά λογισμικά προβλημάτων μικτού ακεραίου προγραμματισμού (MIP – Mixed Integer Programming).

Ο Van Montfort [23] ασχολήθηκε με τον προγραμματισμό των ρυμουλκούμενων βαγονιών, με σκοπό την πιο αποτελεσματική χρήση του σιδηροδρομικού υλικού με τα λιγότερο δυνατόν βαγόνια (είναι δύο κατηγοριών, πρώτης και δεύτερης κατηγορίας) δεδομένου ότι η ζήτηση του επιβατικού κοινού ικανοποιείται. Η μέθοδος ασχολείται και για την διάταξη των βαγονιών στο σιδηροδρομικό όχημα. Η επίλυση του προβλήματος γίνεται από ειδικά εμπορικά λογισμικά προβλημάτων μικτού ακεραίου προγραμματισμού (MIP – Mixed Integer Programming).

Οι Peeters and Kroon [20] ασχολήθηκαν με το προγραμματισμό του σιδηροδρομικού υλικού δεδομένου του χρονοδιαγράμματος και της επιβατικής ζήτησης. Αντικειμενικός στόχος είναι η ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης με ορίσματα, το λειτουργικό κόστος , την έλλειψη θέσεων και τη ανθεκτικότητα. Το μοντέλο υποθέτει ότι δεν γίνονται ενώσεις ή διασπάσεις σιδηροδρομικών μονάδων. Το πρόβλημα λύνεται με τον αλγόριθμο Dantzig –Wolfe decomposition και στην συνέχεια η ακέραια λύση δίνεται με τη μέθοδο Branch and Price.

Ο Brucker [15] ασχολήθηκε με το πρόβλημα της δρομολόγησης των σιδηροδρομικών βαγονιών μέσω ενός σιδηροδρομικού δικτύου. Ο αντικειμενικός στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί μία μη γραμμική συνάρτηση του κόστους δεδομένου ότι ικανοποιείται η επιβατική ζήτηση. Η λύση δίνεται μέσω του αλγορίθμου simulated annealing.

Ο Ben – Khedher [14] ασχολήθηκε με τη τοποθέτηση μονάδων σιδηροδρομικού υλικού σε γαλλικά σιδηροδρομικά τραίνα TGV. Τα σιδηροδρομικά οχήματα αποτελούνται το πολύ από δύο σιδηροδρομικές μονάδες. Ο προγραμματισμός του σιδηροδρομικού υλικού είναι βραχυχρόνιος και βασίζεται στην προηγούμενη επιβατική ζήτηση. Αντικειμενικός στόχος είναι να μεγιστοποιηθεί το αναμενόμενο κέρδος. Το πρόβλημα λύνεται με χρήση των μεθόδων της στοχαστικής βελτιστοποίησης, της column generation και της branch and bound.

Ο Cordeau [16] ασχολήθηκε με το προγραμματισμό σιδηροδρομικών μηχανών και βαγονιών. Το πρόβλημα καταλήγει σε ένα μεγάλο πρόβλημα μικτού ακεραίου γραμμικού προγραμματισμού το οποίο λύνεται με τη χρήση της μεθόδου Benders decomposition. Ο Cordeau [17] επέκτεινε το μοντέλο του, ώστε να περιλαμβάνει και τη συντήρηση του σιδηροδρομικού υλικού. Για τη λύση του προβλήματος χρησιμοποιείται η μέθοδος column generation και στη συνέχεια μία τροποποίηση του αλγορίθμου branch and bound. Ο Cordeau δεν ασχολήθηκε με τη διάταξη των βαγονιών στο σχηματισμό της σιδηροδρομικής μονάδας.

Ο Lingaya [19] κατεσκεύασε μοντέλο επιχειρησιακής διαχείρισης ρυμουλκούμενων σιδηροδρομικών βαγονιών. Λαμβάνει υπόψιν την διάταξη των βαγονιών, δεν ασχολείται με τη διαδικασία σύνδεσης – αποσύνδεσης των σιδηροδρομικών μονάδων και δεν ενδιαφέρεται να ελαχιστοποιήσει τον αριθμό των αλλαγών που χρειάζονται για την σύνδεση – αποσύνδεση των σιδηροδρομικών μονάδων. Ασχολήθηκε με τη συντήρηση του σιδηροδρομικού υλικού και δεν ενδιαφέρεται να ελαχιστοποιήσει την έλλειψη των θέσεων. Το πρόβλημα λύνεται με τον αλγόριθμο Dantzig –Wolfe decomposition.

7. Ο Barnhart [24], [25] στον τακτικό προγραμματισμό του προσωπικού, ασχολήθηκε με το πρόβλημα σε κάποιο εργαζόμενο να γίνει η ανάθεση ενός καθήκοντος, το οποίο είναι ένα πρόβλημα που λύνεται ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με χαλάρωση και στην συνέχεια η ακέραια λύση δίνεται με τη μέθοδο Branch and Price και αντικειμενικό στόχο την ελαχιστοποίηση του κόστους. Για το πρόβλημα αυτό ένα πολύ πρακτικό αλγόριθμο ανέπτυξε ο Caprara [26] και βάση του αλγορίθμου αυτού έχει αναπτυχθεί το λογισμικό TURNI. Επιπλέον λογισμικά είναι τα CARMEN και TRACKS II. Οι Kohl and Karish [28] και οι Caprara [27] και Sodhi [29] ερεύνησαν το πρόβλημα της σύνθεσης του προσωπικού.

8. Στον βραχυχρόνιο προγραμματισμό οι Suhl and Mellouli [30], οι Shen and Wilson [31] και ο Suhl [32] ερεύνησαν τη διαχείριση του συστήματος δημοσίας μεταφοράς.

9. Στον βραχυχρόνιο προγραμματισμό οι Feo and Bard [33], ο Clarke [34], ο Barnhart [25], οι Gopalan και Talluri [35], ο Talluri [36], ο Anderegg [37] και ο Lingaya [19] ασχολήθηκαν με τον προγραμματισμό της συντήρησης των οχημάτων.

II. Γενική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων στο τακτικό προγραμματισμό σιδηροδρομικού υλικού

i. Επιχειρησιακή έρευνα και προγραμματισμός σιδηροδρομικού υλικού

Οι μέθοδοι της επιχειρησιακής έρευνας δίνουν λύσεις για το προγραμματισμό σιδηροδρομικού υλικού με σκοπό τη ελαχιστοποίηση μιας **αντικειμενικής συναρτήσεως**.

Η αντικειμενική συνάρτηση εξαρτάται από ένα ή περισσότερους **παράγοντες που καθορίζουν** το προγραμματισμό του σιδηροδρομικού υλικού. Η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποιείται υπό κάποιους περιορισμούς στο πλαίσιο του μοντέλου που **καλείται μοντέλο σύνθεσης (Composition model),** το οποίο είναι ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Οι λύσεις του προβλήματος δίνουν το πως πρέπει να γίνει ο προγραμματισμός του σιδηροδρομικού υλικού. Το μοντέλο αυτό αναφέρεται από τον Maróti [1] και έχει εφαρμοστεί από την κρατική εταιρεία Nederlandse Spoorwegen που είναι ο κύριος διαχειριστής του επιβατικού σιδηροδρόμου της Ολλανδίας, και πιο συγκεκριμένα από το παρακλάδι της Nederlandse Spoorwegen την εταιρεία Nederlandse Spoorwegen Reizigers της οποίας μία από τις ευθύνες είναι ο προγραμματισμός του σιδηροδρομικού υλικού.

Παρακάτω αναλύονται λεπτομερώς οι καθοριστικοί παράγοντες της αντικειμενικής συναρτήσεως, η αντικειμενική συνάρτηση και το μοντέλο σύνθεσης.

ii. Καθοριστικοί παράγοντες στον προγραμματισμό του σιδηροδρομικού υλικού

Ο Maróti [1] αναφέρει ότι ο αντικειμενικος στόχος στον προγραμματισμό του σιδηροδρομικού υλικού είναι η **ελαχιστοποίηση μίας συναρτήσεως** η οποία εξαρτάται από τους τρεις παρακάτω **παράγοντες**:

<u>Αποτελεσματικότητα</u>

Η **αποτελεσματικότητα** στον προγραμματισμό του σιδηροδρομικού υλικού, εκφράζεται μειώνοντας τα λειτουργικά εξόδα. Αυτό γίνεται ελαχιστοποιώντας μια συνάρτηση που εξαρτάται από τον αριθμό των βαγονιών και των χιλιομέτρων. Για το μοντέλο σύνθεσης που χρησιμοποιείται για την εύρεση των βέλτιστων συνθέσεων των σιδηροδρομικών οχημάτων που εκτελούν ένα σύνολο δρομολογίων (Composition model), η μεταβλητή N, που αντιστοιχεί στο μέγεθος της αποτελεσματικότητας, καλείται αριθμός των βαγονιών – χιλιομέτρων (carriage – kilometers) και ορίζεται ως το παρακάτω άθροισμα:

$$N = \sum_{t \in T} d_t \cdot \sum_{m \in M} c_m \cdot N_{t,m}$$

Όπου

- T, από τη λέξη Trips, είναι το σύνολο των ταξιδιών (trips) ενός συνόλου δρομολογίων.
- d_t, από τη λέξη distance, τα χιλιόμετρα του ταξιδιού t.
- $N_{t,m}$, από τη λέξη Number, το πλήθος των σιδηροδρομικών μονάδων τύπου m του ταξιδιού t.
- c_m, από τη λέξη carriages, το πλήθος των βαγονιών μιας σιδηροδρομικής μονάδας τύπου m.

- M είναι το σύνολο όλων των τύπων των σιδηροδρομικών μονάδων.

Επομένως, το άθροισμα $\sum_{m \in M} c_m \cdot N_{t,m}$ είναι ο αριθμός των βαγονιών του σιδηροδρομικού οχήματος που εκτελεί το ταξίδι t του δρομολογίου, το γινόμενο $d_t \cdot \sum_{m \in M} c_m \cdot N_{t,m}$ είναι το γινόμενο των χιλιομέτρων του ταξιδιού t επί τον αριθμό των βαγονιών του σιδηροδρομικού οχήματος του ταξιδιού t, όπου το γινόμενο αυτό καλείται αριθμός των βαγονιών – χιλιομέτρων του ταξιδιού t.

Άρα το N είναι ο συνολικός αριθμός των βαγονιών – χιλιομέτρων για όλα τα ταξίδια t του συνόλου των δρομολογίων.

Εφόσον, όσο μεγαλύτερο το πλήθος των βαγονιών, τόσο υψηλότερα τα λειτουργικά έξοδα και όσο μεγαλύτερη η απόσταση του ταξιδιού τόσο υψηλότερα τα λειτουργικά έξοδα και τα έξοδα συντήρησης και άρα όσο μεγαλύτερος ο αριθμός N τόσο υψηλότερα τα έξοδα. Με βάση το N επιλέγονται οι συνθέσεις των σιδηροδρομικών οχημάτων που εκτελούν τα δρομολόγια.

Επομένως, οσο πιο μικρό μπορεί να γίνει το N τόσο πιο αποτελεσματικός είναι ο προγραμματισμός του σιδηροδρομικού υλικού.

Ποιότητα

Η **ποιότητα** των υπηρεσιών που προσφέρονται στους επιβάτες εξασφαλίζεται ελαχιστοποιώντας το φαινομένο της έλλειψης θέσεων. Αυτό είναι πιο σημαντικό σε ταξίδια σχετικά μεγάλων αποστάσεων. Για το μοντέλο σύνθεσης που χρησιμοποιείται για την εύρεση των βέλτιστων συνθέσεων των σιδηροδρομικών οχημάτων που εκτελούν ένα δρομολόγιο (Composition model), η μεταβλητή X, που αντιστοιχεί στο μέγεθος της ποιότητας, καλείται αριθμός των έλλειψεων θέσεων – χιλιομέτρων (seat - shortages kilometers) και ορίζεται ως το παρακάτω άθροισμα:

$$X = \sum_{t \in T} d_t \cdot \sum_{p \in P_t} I_t(p) \cdot \sum_{c \in C} s_{t,p,c}$$

Όπου,

- T είναι το σύνολο των ταξιδιών (trips) του συνόλου των δρομολογίων.
- d_t τα χιλιόμετρα του ταξιδιού t.
- P_t το σύνολο όλων των δυνατών συνθέσεων του σιδηροδρομικού οχήματος για το ταξίδι t.
- $I_t(p)$ είναι η δείκτρια συνάρτηση που παίρνει τιμή 1, εάν στο ταξιδί t το σιδηροδρομικό όχημα έχει τη σύνθεση p και παίρνει τιμή 0, εάν στο ταξιδί t το σιδηροδρομικό όχημα δεν έχει τη σύνθεση p.
- C, από τη λέξη class, είναι το σύνολο των κατηγοριών των επιβατικών θέσεων.
- $s_{t,p,c}$, από τη λέξη seat, είναι το αναμενόμενο πλήθος σε έλλειψη θέσεων για τη κατηγορία θέσεων c, όταν το σιδηροδρομικό όχημα έχει τη σύνθεση p και διανύει το ταξίδι t.

Επομένως, το άθροισμα $\sum_{c\in C} s_{t,p,c}$ είναι το συνολικό αναμενόμενο πλήθος σε έλλειψη θέσεων για όλες τις κατηγορίες όταν το σιδηροδρομικό όχημα έχει τη σύνθεση p και διανύει το ταξίδι t.

Επίσης, αν υποτεθεί ότι για το ταξίδι t επιλέχθηκε για το σιδηροδρομικό όχημα η σύνθεση p_{ch}, τότε το άθροισμα $S_{ch} = \sum_{c\in C} s_{t,p_{ch},c}$ είναι το συνολικό αναμενόμενο πλήθος των σε έλλειψη θέσεων για όλες τις κατηγορίες του επιλεγόμενου σιδηροδρομικού οχήματος και τότε αν $p = p_{ch}$ τότε $I_t(p)=1$, ενώ αν $p \neq p_{ch}$ τότε $I_t(p)=0$ και άρα ισχύει ότι $\sum_{p\in P_t} I_t(p)\cdot \sum_{c\in C} s_{t,p,c} = \sum_{c\in C} s_{t,p_{ch},c} = S_{ch}$, δηλαδή το άθροισμα $\sum_{p\in P_t} I_t(p)\cdot \sum_{c\in C} s_{t,p,c}$ είναι το συνολικό αναμενόμενο πλήθος σε έλλειψη θέσεων για όλες τις κατηγορίες του επιλεγόμενου σιδηροδρομικού οχήματος. Άρα το γινόμενο $d_t \cdot \sum_{p\in P_t} I_t(p)\cdot \sum_{c\in C} s_{t,p,c}$ είναι το γινόμενο των χιλιομέτρων του ταξιδιού t επί το συνολικό αναμενόμενο πλήθος σε έλλειψη θέσεων για όλες τις κατηγορίες του επιλεγόμενου σιδηροδρομικού οχήματος και το γινόμενο αυτό καλείται αριθμός των ελλείψεων θέσεων – χιλιομέτρων (seat - shortages kilometers) του ταξιδιού t.

Επομένως, το X είναι ο συνολικός αριθμός των ελλείψεων θέσεων – χιλιομέτρων για όλα τα ταξίδια t του συνόλου των δρομολογίων.

Εφόσον, όσο μεγαλύτερο το συνολικό αναμενόμενο πλήθος σε έλλειψη θέσεων για όλες τις κατηγορίες του επιλεγόμενου σιδηροδρομικού οχήματος για το ταξίδι t, τόσο χειρότερη η ποιότητα των υπηρεσιών και αν η απόσταση του ταξιδιού είναι μεγάλη τότε το φαινόμενο έλλειψης θέσεων έχει μεγάλη σημασία και άρα όσο μεγαλύτερο είναι d_t για το ταξίδι t τόσο μεγαλύτερη είναι ποσότητα $d_t \cdot \sum_{p\in P_t} I_t(p)\cdot \sum_{c\in C} s_{t,p,c}$ και άρα τόσο χειρότερη η ποιότητα των υπηρεσιών. Επομένως, όσο μεγαλύτερο είναι το X τόσο πιο χειρότερη είναι η ποιότητα των υπηρεσιών. Με βάση το X επιλέγονται οι συνθέσεις των σιδηροδρομικών οχημάτων που εκτελούν τα δρομολόγια.

Επομένως, οσο πιο μικρό μπορεί να γίνει το X τόσο πιο ποιοτικός είναι ο προγραμματισμός του σιδηροδρομικού υλικού.

Αξιοπιστία

Η **αξιοπιστία ή ανθεκτικότητα** των υπηρεσιών που προσφέρονται στους επιβάτες, η οποία καθορίζει τη πιθανότητα να συμβούν καθυστερήσεις, το μέγεθος των καθυστερήσεων και τη πιθανότητα να επηρεαστούν άλλα δρομολόγια από τις καθυστερήσεις αυτές. Η αξιοπιστία επιτυγχάνεται μειώνοντας τον αριθμό των αλλαγών που γίνονται για τη σύνθεση ή αποσύνθεση του μεταφορικού μέσου. Από τα παραπάνω αν υποτεθεί ότι στην πράξη η χωρητικότητα είναι τέτοια ώστε να είναι εφικτό **μέχρι δύο σιδηροδρομικές μονάδες** να μπορούν να συνδεθούν ή να αποσυνδεθούν και ότι για κάθε μετατροπή ισχύει ο περιορισμός ότι μπορεί να γίνει μόνο σύζευξη των μονάδων ή μόνο διάζευξη, τότε συνεπάγεται ότι :

Συμπέρασμα 1.: Το πλήθος των βαγονιών του σιδηροδρομικού ταξιδιού t **δεν ισούται με** το πλήθος των βαγονιών του επόμενου ταξιδιού, εφόσον δεν δύναται να συμβούν ταυτοχρόνως και σύζευξη και διάζευξη.

Συμπέρασμα 2.:

- Σε περίπτωση συζεύξεως, το πολύ να συνδεθούν δύο σιδηροδρομικές μονάδες και άρα ο μέγιστος αριθμός συνδέσεων είναι **μία**.
- Σε περίπτωση διαζεύξεως, για το σιδηροδρομικό όχημα του ταξιδιού t, το πολύ να αποσυνδεθούν δύο σιδηροδρομικές μονάδες, και άρα ο μέγιστος αριθμός αποσυνδέσεων είναι **μία**, εφόσον η

χωρητικότητα επιτρέπει μέχρι δύο σιδηροδρομικές μονάδες.

Επομένως, συμπεραίνεται ότι όταν γίνεται μετατροπή σιδηροδρομικών οχημάτων τότε συμβαίνει μία αλλαγή.

Για το μοντέλο σύνθεσης που χρησιμοποιείται για την εύρεση των βέλτιστων συνθέσεων των σιδηροδρομικών οχημάτων που εκτελούν ένα δρομολόγιο (Composition model), η μεταβλητή Z, που αντιστοιχεί στο μέγεθος της αξιοπιστίας, καλείται συνολικό πλήθος των αλλαγών των μετατροπών του δρομολογίου και ορίζεται ως το παρακάτω άθροισμα:

$$Z = \sum_{t \in T - T_\infty} \sum_{(p, p') \in G_t} I_t(p, p')$$

Όπου,

- T είναι το σύνολο των ταξιδιών (trips) του συνόλου των δρομολογίων.
- T_∞ είναι το σύνολο των ταξιδίων στο οποίο κάθε ένα ταξίδι δεν έχει διάδοχο ταξίδι.
- $T - T_\infty$ είναι το σύνολο με τα ταξίδια (trips) των δρομολογίων εκτός του συνόλου των ταξιδίων στο οποίο κάθε ένα ταξίδι δεν έχει διάδοχο ταξίδι.
- Μια μετατροπή μπορεί να περιγραφεί μέσω του ζεύγους (p, p'), όπου p είναι η σύνθεση του σιδηροδρομικού οχήματος του ταξιδιού t του δρομολογίου, και p' είναι η σύνθεση του σιδηροδρομικού οχήματος του επόμενου ταξιδιού του δρομολογίου.
- G_t το σύνολο με όλα τα δυνατά ζεύγη συνθέσεων (p, p'), όπου p, η σύνθεση του σιδηροδρομικού

οχήματος του ταξιδιού t και p', η σύνθεση του σιδηροδρομικού οχήματος του ταξιδιού $s(t)$. Τα ζεύγη συνδέσεων πρέπει να ικανοποιούν τον περιορισμό του συμπεράσματος 1., δηλαδή ότι αν το ζεύγος συνδέσεων (p, p') ανήκει στο G_t, τότε ισχύει ότι το πλήθος των σιδηροδρομικών μονάδων της σύνθεσης p δεν ισούται με το πλήθος των σιδηροδρομικών μονάδων της σύνθεσης p'.

- $I_t(p, p')$ είναι η δείκτρια συνάρτηση που παίρνει τιμή 1, εάν στο ταξιδί t το σιδηροδρομικό όχημα έχει τη σύνθεση p και το διάδοχο ταξίδι του t έχει τη σύνθεση p'. Παίρνει τιμή 0, αλλιώς. Επειδή, από το συμπέρασμα 2, ισχύει ότι για κάθε μετατροπή σιδηροδρομικών οχημάτων συμβαίνει μια αλλαγή, ο δείκτης $I_t(p, p')$ εκφράζει τον αριθμό των αλλαγών της μετατροπής του ζεύγους των συνθέσεων (p, p'). Αν συμβεί το ζεύγος των συνθέσεων (p, p') τότε ο δείκτης $I_t(p, p')$ ισούται με 1, δηλαδή ο αριθμός των αλλαγών της μετατροπής είναι 1, ενώ αν δεν συμβεί το ζεύγος των συνθέσεων (p, p') τότε ο δείκτης $I_t(p, p')$ ισούται με 0, δηλαδή ο αριθμός των αλλαγών της μετατροπής είναι 0.

Επειδή από το σύνολο G_t, σύμβαίνει ένα ζεύγος συνθέσεων τότε το άθροισμα $\sum_{(p, p') \in G_t} I_t(p, p')$ εκφράζει τον αριθμό των αλλαγών της μετατροπής που επιλέχθηκε για το σιδηροδρομικό όχημα του ταξιδιού t.

Άρα $\sum_{t \in T - T_\infty} \sum_{(p, p') \in G_t} I_t(p, p')$ είναι το συνολικό πλήθος των αλλαγών των μετατροπών που γίνονται μετά από από τα ταξίδια t όλων των δρομολογίων εκτός των δρομολογίων τα οποία δεν έχουν διάδοχο δρομολόγιο. Δηλαδή, Z είναι το συνολικό πλήθος των αλλαγών των μετατροπών των δρομολογίων όλων των δρομολογίων εκτός των δρομολογίων τα οποία δεν έχουν διάδοχο δρομολόγιο και όσο μικρότερο το Z, τόσο μικρότερη η πιθανότητα καθυστερήσεων ή απρόβλεπτων δυσλειτουργιών των σιδηροδρομικών οχημάτων. Για το σύνολο των ταξιδίων στο οποίο κάθε ένα ταξίδι δεν έχει διάδοχο ταξίδι, οι αλλαγές δεν λογαριάζονται διότι είναι μετά το τέλος της ημέρας και υπάρχει αρκετός χρόνος για να προετοιμαστούν τα πρώτα ταξίδια της επόμενης μέρας.

Επομένως, οσο πιο μικρό μπορεί να γίνει το Z τόσο πιο ανθεκτικός είναι ο προγραμματισμός του σιδηροδρομικού υλικού.

iii. Η αντικειμενική συνάρτηση στον προγραμματισμό του σιδηροδρομικού υλικού

Η αντικειμενική συνάρτηση που χρειάζεται να ελαχιστοποιηθεί είναι ένα σταθμικός μέσος των τριών μεταβλητών που αναπτύχθηκαν παραπάνω και είναι οι εξής:

1. Η μεταβλητή N, που αντιστοιχεί στο μέγεθος της αποτελεσματικότητας, καλείται αριθμός των βαγονιών – χιλιομέτρων (carriage – kilometers).
2. Η μεταβλητή X, που αντιστοιχεί στο μέγεθος της ποιότητας, καλείται αριθμός των έλλειψεων θέσεων – χιλιομέτρων (seat - shortages kilometers).
3. Η μεταβλητή Z, που αντιστοιχεί στο μέγεθος της αξιοπιστίας, καλείται συνολικό πλήθος των αλλαγών των μετατροπών του δρομολογίου.

Η **αντικειμενική συνάρτηση** $F(N,X,Z)$ ορίζεται ως:

$$F(N,X,Z) = w_1 \cdot N + w_2 \cdot X + w_3 \cdot Z ,$$

όπου $0 \le w_i \le 1,\ i = 1,2,3$ και $\sum_{i=1}^{3} w_i = 1$.

Τα w_i είναι τα τυποποιημένα βάρη του σταθμισμένου μέσου και προεπιλέγονται από τον ερευνητή. Αν για παράδειγμα επιλεγούν τα βάρη $w_1 = 1$ και $w_2 = w_3 = 0$ τότε αυτό σημαίνει ότι δίνεται σημασία μόνο στο παράγοντα αποτελεσματικότητα, αδιαφορώντας για τους άλλους δύο παράγοντες. Αν επιλεγούν τα βάρη $w_1 = w_2 = w_3 = 1/3$ τότε αυτό σημαίνει ότι δίνεται ίδιο βάρος στις τρεις μεταβλητές N, X, Z. Αν επιλεγούν τα βάρη $w_1 = 0.3$, $w_2 = 0.5$ και $w_3 = 0.2$, τότε δίνεται το μεγαλύτερο βάρος στην μεταβλητή N και το μικρότερο στην μεταβλητή Z.

Αν είναι γνωστές οι παρακάτω ποσότητες:

a. c_1, το αναμενόμενο κόστος για μία μονάδα του μεγέθους βαγονιών – χιλιομέτρων

b. c_2, το αναμενόμενο κόστος για μία μονάδα του μεγέθους έλλειψεων θέσεων – χιλιομέτρων

c. c_3, αναμενόμενο το κόστος ανά μετατροπή.

Και οι τιμές των τυποποιημένων βαρών είναι:

$$w_1 = \frac{c_1}{\sum_{i=1}^{3} c_i}\ ,\ w_2 = \frac{c_2}{\sum_{i=1}^{3} c_i}\ ,\ w_3 = \frac{c_3}{\sum_{i=1}^{3} c_i}$$

Με την επιλογή αυτή τα βάρη είναι ανάλογα του κόστους και με την επιλογή ελαχιστοποιείται το κόστος της εταιρείας.

iv. Μοντέλο σύνθεσης (Composition Model)

i. Βασικό μοντέλο

Ο Maróti [1] με το βασικό μοντέλο σύνθεσης βρίσκει για κάθε ταξίδι t από ένα σύνολο δρομολογίων τη σύνθεση του αντιστοίχου σιδηροδρομικού οχήματος υποθέτωντας για τις μετατροπές ότι **υπάρχει ακριβώς ένα προκάτοχο σιδηροδρομικό όχημα και ακριβώς ένα διάδοχο σιδηροδρομικό όχημα**, με σκοπό να ελαχιστοποιήσει την αντικειμενική συνάρτηση:

$$F(N, X, Z) = w_1 \cdot N + w_2 \cdot X + w_3 \cdot Z$$

υπό των παρακάτω περιορισμών:

Οι περιορισμοί του μοντέλου συνθέσεως ορίζονται ως:

Ομάδα περιορισμών 1.

$$\sum_{p \in P_t} I_t(p) = 1\ , \qquad \forall t \in T$$

Όπου T , P_t , $I_t(p)$ έχουν οριστεί παραπάνω. Η παραπάνω ομάδα περιορισμών εξασφαλίζει **ότι θα επιλεγεί ακριβώς μία σύνθεση** από το σύνολο όλων των δυνατών συνθέσεων για το σιδηροδρομικό όχημα του ταξιδιού t ενός δρομολογίου που ανήκει στο σύνολο των ταξιδιών (trips) του συνόλου όλων των δρομολογίων.

Ομάδα περιορισμών 2.

$$I_t(p) = \sum_{\substack{p' \in P_{s(t)}: \\ (p,p') \in G_t}} I_t(p,p') \quad , \quad \forall t \in T - T_\infty \, , \; \forall \, p \in P_t$$

Όπου

- p , p' , (p,p'), $T - T_\infty$, P_t , G_t και $I_t(p)$ έχουν οριστεί παραπάνω.
- Η συνάρτηση $I_t(p,p')$ στο πρόβλημα επιτρέπεται να έχει σύνολο τιμών τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς, όμως οι λύσεις που θα βγάζει είναι στο σύνολο $\{0,1\}$.
- $s\,(t)$ είναι το διάδοχο ταξίδι του ταξίδιου t.
- $P_{s\,(t)}$ το σύνολο όλων των δυνατών συνθέσεων του σιδηροδρομικού οχήματος για το ταξίδι $s\,(t)$.

Η παραπάνω ομάδα περιορισμών εξασφαλίζει ότι για το σιδηροδρομικό όχημα του ταξιδιού t που έχει σύνθεση p και έχει διάδοχο δρομολόγιο, υπάρχει ακριβώς μία μετατροπή (p,p'), η οποία ανήκει στο σύνολο G_t και ότι η σύνθεση p' ανήκει στο σύνολο $P_{s\,(t)}$, δηλαδή ότι υπάρχει **ακριβώς ένα διάδοχο όχημα για κάθε ταξίδι** t , το οποίο ανήκει στο σύνολο $T - T_\infty$.

Ομάδα περιορισμών 3.

$$I_{s(t)}(p') = \sum_{\substack{p \in P_t: \\ (p,p') \in G_t}} I_t(p,p') \quad , \forall t \in T - T_\infty \, , \, \forall \, p' \in P_{s(t)}$$

Όπου

- p, p', (p,p'), $T - T_\infty$, P_t, $P_{s(t)}$, G_t και $I_t(p,p')$ έχουν οριστεί παραπάνω.
- $I_{s(t)}(p')$ είναι η δείκτρια συνάρτηση που παίρνει τιμή 1, εάν στο ταξιδί $s(t)$ το σιδηροδρομικό όχημα έχει τη σύνθεση p' και παίρνει τιμή 0, εάν στο ταξιδί $s(t)$ το σιδηροδρομικό όχημα δεν έχει τη σύνθεση p'.

Η παραπάνω ομάδα περιορισμών εξασφαλίζει ότι για το σιδηροδρομικό όχημα του ταξιδιού $s(t)$ που έχει σύνθεση p', υπάρχει ακριβώς ένα ζεύγος συνθέσεων (p,p'), το οποίο ανήκει στο σύνολο G_t δηλαδή ότι υπάρχει **ακριβώς ένα προκάτοχο όχημα για κάθε ταξίδι** $s(t)$, όπου t ανήκει στο σύνολο $T - T_\infty$.

Ομάδα περιορισμών 4.

$$N_{t,m} = \sum_{p \in P_t} v(p)_m \cdot I_t(p) \, , \, \forall t \in T \, , \, \forall m \in M$$

Όπου

- T, M, p, P_t και $I_t(p)$ έχουν οριστεί παραπάνω.
- $v(p)_m$ είναι το πλήθος των σιδηροδρομικών μονάδων τύπου m για το σιδηροδρομικό όχημα με σύνθεση p.

- $N_{t,m}$, είναι το πλήθος των σιδηροδρομικών μονάδων τύπου m για το σιδηροδρομικό όχημα του ταξιδιού t.

Η παραπάνω ομάδα περιορισμών εξασφαλίζει ότι για κάθε ταξίδι t και για κάθε τύπο m, το πλήθος των σιδηροδρομικών μονάδων τύπου m του σιδηροδρομικού οχήματος του ταξιδιού t, ισούται με το πλήθος των σιδηροδρομικών μονάδων τύπου m του οχήματος της σύνθεσης p που επιλέχθηκε για αυτό το ταξίδι.

Ομάδα περιορισμών 5.

$$C_{s(t),m} = \sum_{\substack{(p,p')\in G_t: \\ v(p')_m > v(p)_m}} \left(v(p')_m - v(p)_m\right)\cdot I_t(p,p') ,$$

$$\forall t \in T - T_\infty ,\ \forall m \in M$$

Όπου

- M, $s(t)$, p, p', (p,p'), G_t, $I_t(p,p')$, $v(p)_m$ και $T - T_\infty$ έχουν οριστεί παραπάνω.
- $v(p')_m$ είναι το πλήθος των σιδηροδρομικών μονάδων τύπου m με σύνθεση p'.
- $C_{s(t),m}$ (Coupled) είναι ο αριθμός των επιπλέον σιδηροδρομικών μονάδων τύπου m του οχήματος του ταξιδιού $s(t)$ σε σχέση με το προκάτοχο όχημα του ταξιδιού t.

Η παραπάνω ομάδα περιορισμών εξασφαλίζει αναφορικά με το ζεύγος συνδέσεων (p,p') ότι αν έγινε σύνδεση σιδηροδρομικών μονάδων τότε ο αριθμός των επιπλέον σιδηροδρομικών μονάδων τύπου m του οχήματος του ταξιδιού $s(t)$ σε σχέση με το προηγούμενο όχημα του ταξιδιού t είναι $v(p')_m - v(p)_m$ και ισούται με $C_{s(t),m}$.

Ομάδα περιορισμών 6.

$$U_{t,m} = \sum_{\substack{(p,p') \in G_t: \\ v(p)_m > v(p')_m}} \left(v(p)_m - v(p')_m \right) \cdot I_t(p,p'),$$

$$\forall t \in T - T_\infty,\ \forall m \in M$$

Όπου

- M, p, p', (p,p'), G_t, $I_t(p,p')$, $v(p)_m$, $v(p')_m$ και $T - T_\infty$ έχουν οριστεί παραπάνω.
- $U_{t,m}$ (Uncoupled) είναι ο αριθμός των επιπλέον σιδηροδρομικών μονάδων τύπου m του οχήματος του ταξιδιού t σε σχέση με το επόμενο όχημα του ταξιδιού $s(t)$.

Η παραπάνω ομάδα περιορισμών εξασφαλίζει αναφορικά με το ζέυγος συνθέσεων (p,p') ότι αν έγινε αποσύνδεση σιδηροδρομικών μονάδων τότε ο αριθμός των επιπλέον σιδηροδρομικών μονάδων τύπου m του οχήματος του ταξιδιού t σε σχέση με το επομένο όχημα του ταξιδιού $s(t)$ είναι $v(p)_m - v(p')_m$ και ισούται με $U_{t,m}$.

Ομάδα περιορισμών 7.

$$N_{t,m} = C_{t,m}, \quad \forall t \in T_0, \ \forall m \in M$$

Όπου

- T_0 είναι το σύνολο των ταξιδίων στο οποίο κάθε ένα ταξίδι δεν έχει προκάτοχο ταξίδι.

Η παραπάνω ομάδα περιορισμών δηλώνει ότι στην αρχή της ημέρας το όχημα συντίθενται αποκλειστικά από σιδηροδρομικές μονάδες, χωρίς να χρησιμοποιείται κάποιο προηγούμενο όχημα.

Ομάδα περιορισμών 8.

$$N_{t,m} = U_{t,m}, \quad \forall t \in T_\infty, \ \forall m \in M$$

Όπου,

- T_∞ είναι το σύνολο των ταξιδίων στο οποίο κάθε ένα ταξίδι δεν έχει διάδοχο ταξίδι.

Η παραπάνω ομάδα περιορισμών δηλώνει ότι στο τέλος της ημέρας το όχημα αποσυντίθενται σε σιδηροδρομικές μονάδες.

Ομάδα περιορισμών 9.

$$Inv_{t,m} = Inv^0_{s_d(t),m} - \sum_{\substack{t' \in T: \\ s_d(t') = s_d(t) \\ kai \\ t_d(t') \le t_d(t)}} C_{t',m} + \sum_{\substack{t' \in T: \\ s_a(t') = s_d(t) \\ kai \\ t_a(t') + r(t') \le t_d(t)}} U_{t',m},$$

$$\forall t \in T, \ \forall m \in M$$

Όπου

- $s_d(t)$, ο σταθμός αναχώρησης του ταξιδιού t.
- $s_a(t)$, ο σταθμός άφιξης του ταξιδιού t.
- $t_d(t)$, είναι ο χρόνος αναχώρησης του ταξιδιού t.
- $t_a(t)$, είναι ο χρόνος άφιξης του ταξιδιού t.
- $r(t)$, ο χρόνος που χρειάζεται για να ενσωματωθούν στο απόθεμα σιδηροδρομικές μονάδες που αποσυνδέθηκαν μετά την άφιξη του ταξιδιού t.
- $Inv_{t,m}$, το απόθεμα του σταθμού $s_d(t)$, για σιδηροδρομικές μονάδες τύπου m, αμέσως μετά την αναχώρηση του οχήματος που εκτελεί το ταξίδι t .
- $Inv^0_{s_d(t),m}$ το αρχικό απόθεμα του σταθμού $s_d(t)$, για σιδηροδρομικές μονάδες τύπου m.

Η παραπάνω ομάδα περιορισμών δηλώνει ότι το απόθεμα του σταθμού από τον οποίο αναχωρεί το όχημα του ταξιδιού t, αμέσως μετά την αναχώρηση του οχήματος του ταξιδιού t, ισούται με το απόθεμα του σταθμού αυτού στην αρχή της ημέρας, μείον τον αριθμό των σιδηροδρομικών μονάδων του αποθέματος που συνδέθηκαν με οχήματα άλλων ταξιδιών που είχαν σταθμό αναχώρησης τον $s_d(t)$ από την αρχή της ημέρας μέχρι την αναχώρηση του οχήματος του ταξιδιού t, συν τον αριθμό των σιδηροδρομικών μονάδων που ενσωματώθηκαν στο απόθεμα του σταθμού $s_d(t)$ από την αρχή της ημέρας μέχρι τη αναχώρηση του οχήματος του ταξιδιού t.

Ομάδα περιορισμών 10.

$$Inv^{\infty}_{s,m} = Inv^{0}_{s,m} - \sum_{\substack{t\in T: \\ s_d(t)=s}} C_{t,m} + \sum_{\substack{t\in T: \\ s_a(t)=s}} U_{t,m} \,,$$

$$\forall s \in S \,, \; \forall m \in M$$

Όπου

- S, το σύνολο όλων των σταθμών.
- $Inv^{\infty}_{s,m}$, το απόθεμα σε σιδηροδρομικές μονάδες τύπου m για το σταθμό s, στο τέλος της ημέρας.
- $Inv^{0}_{s,m}$, το απόθεμα σε σιδηροδρομικές μονάδες τύπου m για το σταθμό s, στην αρχή της ημέρας.

Η παραπάνω ομάδα περιορισμών δηλώνει ότι το απόθεμα του σταθμού s στο τέλος της ημέρας, ισούται με το απόθεμα του σταθμού s στην αρχή της ημέρας, μείον τον αριθμό των σιδηροδρομικών μονάδων που συνδέθηκαν σε οχήματα στο σταθμό s κατά τη διάρκεια της ημέρας, συν τον αριθμό των σιδηροδρομικών μονάδων που αποσυνδέθηκαν από οχήματα στο σταθμό s κατά τη διάρκεια της ημέρας.

Ομάδα περιορισμών 11.α.

$$Inv^{0}_{s,m} = inv^{0}_{s,m} \,, \; \forall s \in S \,, \; \forall m \in M$$

Όπου

- $inv^{0}_{s,m}$, το επιθυμητό απόθεμα σιδηροδρομικών μονάδων τύπου m στην αρχή της ημέρας.

Ομάδα περιορισμών 11.β.

$$Inv_{s,m}^{\infty} = inv_{s,m}^{\infty}\ ,\ \forall s \in S\ ,\ \forall m \in M$$

Όπου

- $inv_{s,m}^{\infty}$, το επιθυμητό απόθεμα σιδηροδρομικών μονάδων τύπου m στο τέλος της ημέρας.

Με τις παραπάνω δύο ομάδες περιορισμών ορίζεται ποιο πρέπει να είναι το αρχικό και το τελικό απόθεμα σιδηροδρομικών μονάδων τύπου m για όλους τους σταθμούς και για όλους τους τύπους.

Ομάδα περιορισμών 12.

Για τις παραπάνω παραμέτρους των περιορισμών ισχύουν οι παρακάτω περιορισμοί:

$$I_t(p) \in \{0,1\} \qquad \forall t \in T\ ,\ p \in P_t$$

$$I_t(p, p') \in \Re_+ \qquad \forall t \in T\ ,\ (p, p') \in G_t$$

$$N_{t,m}, C_{t,m}, U_{t,m}, Inv_{t,m} \in \Re_+ \qquad \forall t \in T, \forall m \in M$$

$$Inv_{s,m}^{\infty}, Inv_{s,m}^{0} \in \Re_+ \qquad \forall s \in S, \forall m \in M$$

Το παραπάνω μοντέλο με τις ομάδες περιορισμών 1-12, όταν έχει εφικτή λύση, οι μεταβλητές $U_{t,m}, C_{t,m}, Inv_{t,m}, Inv_{s,m}^{\infty}, Inv_{s,m}^{0}, I_t(p, p')$ είναι ακέραιες.

ii. Μοντέλο για κυκλικό προγραμματισμό

Αν είναι επιθυμητό τα αρχικά αποθέματα να είναι ίσα με τα τελικά αποθέματα τότε οι ομάδες περιορισμών 11.α. και 11.β. μπορούν να αντικατασταθούν από τις δύο παρακάτω:

Ομάδα περιορισμών 13.α.

$$\sum_{s \in S} Inv^{0}_{s,m} = n_m , \quad \forall m \in M$$

Όπου

- n_m, ο συνολικός αριθμός των διαθεσίμων σιδηροδρομικών μονάδων τύπου m.

Ομάδα περιορισμών 13.β.

$$Inv^{\infty}_{s,m} = Inv^{0}_{s,m} , \ \forall s \in S , \ \forall m \in M$$

Το μοντέλο με τις ομάδες περιορισμών 1-10, 12, 13.α, 13.β, δηλαδή το βασικό μοντέλο για κυκλικό προγραμματισμό, όταν έχει εφικτή λύση, τότε έχει ακέραια βέλτιστη λύση.

iii. Επέκταση βασικού μοντέλου για πρόβλημα χωρητικότητας

Αν πρέπει να ληφθούν υπόψη οι περιορισμένες χωρητικότητες των σταθμών, τότε πρέπει να προστεθούν στο βασικό μοντέλο οι παρακάτω ομάδες περιορισμών 14.α. – 14.γ.:

Ομάδα περιορισμών 14.α.

$$\sum_{m\in M} l_m \cdot Inv_{t,m} \leq W_s \,,\quad \forall t\in T : s_d(t) = s \,, \forall s\in S$$

Όπου

- l_m, το μήκος της σιδηροδρομικής μονάδας τύπου m.
- W_s, η χωρητικότητα σε μέτρα του σταθμού s.
- $Inv_{t,m}$ το απόθεμα του σταθμού $s_d(t) = s$, για σιδηροδρομικές μονάδες τύπου m, αμέσως μετά την αναχώρηση του οχήματος που εκτελεί το ταξίδι t.

Με την παραπάνω ομάδα περιορισμών για κάθε ταξίδι τη στιγμή όπου το όχημα αναχωρεί από το σταθμό s, τα μήκος όλων των σιδηροδρομικών μονάδων του αποθέματος δεν πρέπει να ξεπερνά τη χωρητικότητα του σταθμού, για κάθε σταθμό.

Ομάδα περιορισμών 14.β.

$$\sum_{m\in M} l_m \cdot Inv_{s,m}^{\infty} \leq W_s \,,\quad \forall s\in S$$

Όπου

- l_m, το μήκος της σιδηροδρομικής μονάδας τύπου m.
- W_s, η χωρητικότητα σε μέτρα του σταθμού s.

- $Inv_{s,m}^{\infty}$ το απόθεμα σε σιδηροδρομικές μονάδες τύπου m για το σταθμό s, στο τέλος της ημέρας.

Με την παραπάνω ομάδα περιορισμών στο σταθμό s στο τέλος της ημέρας, τα μήκος όλων των σιδηροδρομικών μονάδων του αποθέματος δεν πρέπει να ξεπερνά τη χωρητικότητα του σταθμού, για κάθε σταθμό.

Ομάδα περιορισμών 14.γ.

$$\sum_{m \in M} l_m \cdot Inv_{s,m}^{0} \leq W_s, \quad \forall s \in S$$

Όπου

- l_m, το μήκος της σιδηροδρομικής μονάδας τύπου m.
- W_s, η χωρητικότητα σε μέτρα του σταθμού s.
- $Inv_{s,m}^{0}$ το απόθεμα σε σιδηροδρομικές μονάδες τύπου m για το σταθμό s, στην αρχή της ημέρας.

Με την παραπάνω ομάδα περιορισμών στο σταθμό s στην αρχή της ημέρας, τα μήκος όλων των σιδηροδρομικών μονάδων του αποθέματος δεν πρέπει να ξεπερνά τη χωρητικότητα του σταθμού, για κάθε σταθμό.

iv. Επέκταση βασικού μοντέλου για την αρχή της απαιτούμενης συνέχειας

Αυτή η ομάδα περιορισμών διασφαλίζει την αρχή της απαιτούμενης συνέχειας (**Continuity requirement**) σύμφωνα με την οποία τουλάχιστον μία σιδηροδρομική μονάδα καλύπτει όλο το δρομολόγιο. Έστω ένα δρομολόγιο αποτελείται από k ταξίδια. Αν απαιτείται μία σιδηροδρομική μονάδα να καλύπτει όλο το δρομολόγιο, τότε αυτή καλείται μόνιμη σιδηροδρομική μοναδα του δρομολογίου και έστω $J_i \in N$, **η θέση της μόνιμης σιδηροδρομικής μονάδας στο σιδηροδρομικό όχημα για το ταξίδι t_i, όπου $t_j = s(t_{j-1})$, $i = 1, 2, \mathbf{K}, k$ και $j = 2, \mathbf{K}, k$.** Επίσης, έστω $g_i \in N$ ο αριθμός των σιδηροδρομικών μονάδων που συνιστούν το σιδηροδρομικό όχημα για το ταξίδι t_i. Για το g_i ισχύει ο παρακάτω αναδρομικός τύπος:

$$g_i = g_{i-1} - a_i^L - a_i^R + b_i^L + b_i^R, \text{ όπου } i = 2, \mathbf{K}, k.$$

Όπου,

- $a_i^L \in \{0,1,2,3,\mathbf{K}\}$, ο αριθμός των σιδηροδρομικών μονάδων που αποσυνδέονται από τα αριστερά του οχήματος μετά το ταξίδι t_{i-1} και πριν το ταξίδι t_i, όπου $i = 2, \mathbf{K}, k$.

- $a_i^R \in \{0,1,2,3,\mathbf{K}\}$, ο αριθμός των σιδηροδρομικών μονάδων που αποσυνδέονται από τα δεξιά του οχήματος μετά το ταξίδι t_{i-1} και πριν το ταξίδι t_i, όπου $i = 2, \mathbf{K}, k$.

- $b_i^L \in \{0,1,2,3,\mathbf{K}\}$, ο αριθμός των σιδηροδρομικών μονάδων που συνδέονται από τα αριστερά του οχήματος μετά το ταξίδι t_{i-1} και πριν το ταξίδι t_i, όπου $i = 2, \mathbf{K}, k$.

- $b_i^R \in \{0,1,2,3,\mathbf{K}\}$, ο αριθμός των σιδηροδρομικών μονάδων που συνδέονται από τα δεξιά του οχήματος μετά το ταξίδι t_{i-1} και πριν το ταξίδι t_i, όπου $i = 2, \mathbf{K}, k$.

Άρα, συναρτήσει του g_i, για το J_i, ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$1 \le J_i \le g_i, \text{ όπου } i = 1, 2, \mathbf{K}, k.$$

Δηλαδή η θέση της μόνιμης σιδηροδρομικής μονάδας είναι μεγαλύτερη ή ίση από 1 και μικρότερη ή ίση από το αριθμό των σιδηροδρομικών μονάδων του οχήματος για κάθε ταξίδι.

Επίσης, ισχύει ο αναδρομικός τύπος:

$$J_i = J_{i-1} - a_i^L + b_i^L \text{, όπου } i = 2, \ldots, k.$$

Δηλαδή, η θέση της μόνιμης σιδηροδρομικής μονάδας μειώνεται όταν αποσυνδέονται σιδηροδρομικές μονάδες από τα αριστερά και αυξάνεται όταν συνδέονται σιδηροδρομικές μονάδες από τα αριστερά. Από το παραπάνω τύπο προκύπτει ότι:

$$J_i = J_1 - \sum_{j=1}^{i} a_j^L + \sum_{j=1}^{i} b_j^L \qquad i = 2, \ldots, k.$$

Για να ικανοποιείται η αρχή της απαιτούμενης συνέχειας πρέπει να ισχύει ότι:

$$J_{i-1} \leq g_{i-1} - a_i^R \text{, όπου } i = 2, \ldots, k.$$

Όπου a_i^R, ο αριθμός των σιδηροδρομικών μονάδων που αποσυνδέονται από τα δεξιά του οχήματος μετά το ταξίδι t_{i-1} και πριν το ταξίδι t_i, όπου $i = 2, \ldots, k$.

Δηλαδή, η θέση της μόνιμης σιδηροδρομικής μονάδας στο ταξίδι t_{i-1} πρέπει είναι μικρότερη ή ίση από $g_{i-1} - a_i^R$, ώστε στο επόμενο ταξίδι η μόνιμη σιδηροδρομική μονάδα να βρίσκεται στο όχημα.

Συμπερασματικά, για το J_i ισχύουν τα παρακατω:

- $1 \leq J_i \leq g_i$, όπου $i = 1, 2, \ldots, k$.
- $J_i = J_1 - \sum_{j=1}^{i} a_j^L + \sum_{j=1}^{i} b_j^L$, όπου $i = 2, \ldots, k$.
- $J_{i-1} \leq g_{i-1} - a_i^R$, όπου $i = 2, \ldots, k$.

Δηλαδή, η τελική μορφή της ομάδας των περιορισμών που πρέπει να προστεθεί στο βασικό μοντέλο ώστε να διασφαλιστεί η αρχή της απαιτούμενης συνέχειας (**Continuity requirement**) είναι:

Ομάδα περιορισμών 15.

- $1 \le J_1 \le g_1$
- $1 \le J_1 - \sum_{j=1}^{i} a_j^L + \sum_{j=1}^{i} b_j^L \le g_i - a_{i+1}^R \quad \forall\ i = 2, \mathbf{K}, k-1$
- $1 \le J_1 - \sum_{j=1}^{k} a_j^L + \sum_{j=1}^{k} b_j^L \le g_k$
- $J_1 \in \Re_+$

v. Τροποποίηση του βασικού μοντέλου

Έστω για κάθε ταξίδι t το σύνολο των διανυσμάτων $\mathrm{B}_t = \{n(p) : p \in P_t\}$, όπου $n(p) = (n(p)_1, n(p)_2, \mathbf{K}, n(p)_m)'$, το διάνυσμα που περιέχει για κάθε τύπο μονάδας τον αριθμό των μονάδων καθένα τύπου για τη σύνθεση p και $M = \{1, 2, \mathbf{K}, m\}$ είναι το σύνολο όλων των τύπων των σιδηροδρομικών μονάδων. Δηλαδή το $n(p)_2$ εκφράζει τον αριθμό των μονάδων τύπου 2 για τη σύνθεση p.

Επίσης, έστω για κάθε ταξίδι t και για κάθε $b \in \mathrm{B}_t$, η δίτιμη μεταβλητή $Y_{t,b}$ είναι η δείκτρια συνάρτηση που παίρνει τιμή 1, εάν στο ταξιδί t το σιδηροδρομικό όχημα έχει για κάθε τύπο αριθμούς σιδηροδρομικών μονάδων που σχηματίζουν το διάνυσμα b και παίρνει τιμή 0, αλλιώς.

Έστω οι ομάδες περιορισμών:

Ομάδα περιορισμών 16.

$$Y_{t,b} = \sum_{p \in P_t : b = n(p)} I_t(p) \qquad \forall\ t \in T \text{ και } \forall\ b \in B_t$$

Ομάδα περιορισμών 17.

$$I_t(p) \in [0,1] \qquad \forall t \in T\ ,\ p \in P_t$$

$$I_t(p, p') \in \Re_+ \qquad \forall t \in T\ ,$$

$(p, p') \in G_t$

$$N_{t,m}, C_{t,m}, U_{t,m}, Inv_{t,m} \in \Re_+ \qquad \forall t \in T, \forall m \in M$$

$$Inv^{\infty}_{s,m}, Inv^{0}_{s,m} \in \Re_+ \qquad \forall s \in S, \forall m \in M$$

Τότε για το τροποποιημένο βασικό μοντέλο σύνθεσης με τις ομάδες περιορισμών 1-11.β, 16 και 17 αν έχει εφικτή λύση τότε έχει μία βέλτιστη ακέραια λύση. Επιπλέον, στο τροποποιημένο βασικό μοντέλο οι δίτιμες μεταβλητές περιορίζονται σε σχέση με το βασικό. Στην περίπτωση της Noord – Oost, για το βασικό μοντέλο, το πλήθος των διτίμων μεταβλητών $I_t(p)$ είναι 9,900, ενώ για το τροποποιημένο βασικό μοντέλο, το πλήθος των διτίμων μεταβλητών $Y_{t,b}$ είναι 5,700.

vi. Επέκταση του βασικού μοντέλου για διάσπαση οχήματος (Splitting) ή συνδυασμό οχημάτων (Combining)

Ο Maróti [1] επεκτείνοντας το παραπάνω βασικό μοντέλο σύνθεσης βρίσκει για κάθε ταξίδι t από ένα σύνολο δρομολογίων τις συνθέσεις των σιδηροδρομικών οχημάτων υποθέτωντας για μετατροπές τριών περιπτώσεων, με σκοπό να ελαχιστοποιήσει την αντικειμενική συνάρτηση $F(N,X,Z)$.

Οι τρεις περιπτώσεις είναι:

1. **Να υπάρχει ένα προκάτοχο σιδηροδρομικό όχημα που μόλις εκτέλεσε το δρομολόγιο t και ένα διάδοχο σιδηροδρομικό όχημα, το δρομολόγιο t να μην έχει προκάτοχο δρομολόγιο και το δρομολόγιο t να μην έχει διάδοχο δρομολόγιο. Το δρομολόγιο t ανήκει στο σύνολο T, όπου είναι το σύνολο στο οποίο ανήκουν όλα τα δρομολόγια στα οποία αφού εκτελεστούν, οι μετατροπές είναι του τύπου ένα προκάτοχο όχημα – ένα διάδοχο όχημα, τα δρομολόγια τα οποία δεν έχουν προκάτοχο όχημα και τα δρομολόγια τα οποία δεν έχουν διάδοχο όχημα.**

2. **Να υπάρχει ένα προκάτοχο σιδηροδρομικό όχημα και δύο διάδοχα σιδηροδρομικά οχήματα, δηλαδή η περίπτωση όπου το όχημα φθάνει στο τερματικό σταθμό του ταξιδιού t, στην συνέχεια διασπάται σε δύο σιδηροδρομικά οχήματα, όπου το ένα εκτελεί το διάδοχο δρομολόγιο $s_1(t)$ και το άλλο εκτελεί το διάδοχο δρομολόγιο $s_2(t)$. Το δρομολόγιο t ανήκει στο σύνολο T^S, όπου είναι το σύνολο στο οποίο ανήκουν όλα τα δρομολόγια στα οποία αφού εκτελεστούν, οι μετατροπές είναι του τύπου ένα προκάτοχο όχημα – δύο διάδοχα οχήματα.**

3. **Να υπάρχουν δύο προκάτοχα σιδηροδρομικά οχήματα και ένα διάδοχο σιδηροδρομικό όχημα, δηλαδή η περίπτωση όπου τα οχήματα φθάνουν στο τερματικό σταθμό των ταξιδιών $t_1(t)$ και $t_2(t)$, στην συνέχεια συνδυάζονται σε ένα σιδηροδρομικό όχημα, όπου εκτελεί το διάδοχο δρομολόγιο t. Το δρομολόγιο t ανήκει στο σύνολο T^C, όπου είναι το σύνολο στο οποίο ανήκουν όλα τα δρομολόγια στα οποία πριν εκτελεστούν, οι μετατροπές είναι του τύπου δύο προκάτοχα οχήματα – ένα διάδοχο όχημα.**

Για κάθε μία από τις περιπτώσεις η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποιείται υπό διαφορετική οικογένεια περιορισμών. Για κάθε μία από τις τρεις περιπτώσεις οι αντίστοιχες οικογένειες περιορισμών παρουσιάζονται παρακάτω. Επίσης, παρουσιάζεται και μία τέταρτη ομάδα περιορισμών η οποία αναφέρεται για όλα τα ταξίδια.

Οι τέσσερις οικογένειες περιορισμών για κάθε περίπτωση είναι:

1. Για την πρώτη περίπτωση, που αφορά τα ταξίδια που ανήκουν στο σύνολο T, τότε η οικογένεια των περιορισμών είναι οι ομάδες των περιορισμών του βασικού μοντέλου, δηλαδή οι ομάδες περιορισμών 2-8, 11.α, 11.β.

2. Για την δεύτερη περίπτωση, που αφορά τα ταξίδια που ανήκουν στο σύνολο T^S, τότε η οικογένεια των περιορισμών είναι:

Ομάδα περιορισμών 18.

$$I_t^S(p, p_1, p_2) \in [0, 1], \qquad \forall (p, p_1, p_2) \in G_t^S$$

Όπου,

- G_t^S, το σύνολο όλων των δυνατών ζευγών (p, p_1, p_2), όπου p η σύνθεση του σιδηροδρομικού οχήματος για το ταξίδι t, p_1 η σύνθεση του σιδηροδρομικού οχήματος για το ταξίδι $s_1(t)$ και p_2 η σύνθεση του σιδηροδρομικού οχήματος για το ταξίδι $s_2(t)$.

- $I_t^S(p, p_1, p_2)$ είναι η συνάρτηση, που εκφράζει ότι για κάθε ζεύγος $(p, p_1, p_2) \in G_t^S$ παίρνει μια τιμή στο διάστημα μεταξύ του 0 και του 1.

Ομάδα περιορισμών 19.

$$I_t(p) = \sum_{\substack{p_1, p_2: \\ (p, p_1, p_2) \in G_t^S}} I_t^S(p, p_1, p_2), \qquad \forall\, p \in P_t \text{ και } \forall t \in T^S$$

Ομάδα περιορισμών 20.

$$I_{s_1(t)}(p_1) = \sum_{\substack{p, p_2: \\ (p, p_1, p_2) \in G_t^S}} I_t^S(p, p_1, p_2), \;\; \forall\, p_1 \in P_{s_1(t)} \text{ και } \forall t \in T^S$$

Όπου,

- $P_{s_1(t)}$ το σύνολο όλων των δυνατών συνθέσεων του σιδηροδρομικού οχήματος για το ταξίδι $s_1(t)$.

Ομάδα περιορισμών 21.

$$I_{s_2(t)}(p_2) = \sum_{\substack{p, p_1: \\ (p, p_1, p_2) \in G_t^S}} I_t^S(p, p_1, p_2), \ \forall p_2 \in P_{s_2(t)} \text{ και } \forall t \in T^S$$

Όπου,

- $P_{s_2(t)}$ το σύνολο όλων των δυνατών συνθέσεων του σιδηροδρομικού οχήματος για το ταξίδι $s_2(t)$.

Ομάδα περιορισμών 22.

$$N_{t,m} = \sum_{p \in P_t} v(p)_m \cdot I_t(p), \forall t \in T^S, \ \forall m \in M$$

Όπου,

- M, το σύνολο όλων των τύπων των σιδηροδρομικών μονάδων.
- $v(p)_m$ είναι το πλήθος των σιδηροδρομικών μονάδων τύπου m για το σιδηροδρομικό όχημα με σύνθεση p.
- $N_{t,m}$, είναι το πλήθος των σιδηροδρομικών μονάδων τύπου m για το σιδηροδρομικό όχημα του ταξιδιού t.

Ομάδα περιορισμών 23.

$$U_{t,m} = \sum_{\substack{p, p_1, p_2: \\ (p, p_1, p_2) \in G_t^S \\ kai \\ v(p)_m > v(p_1)_m + v(p_2)_m}} \left(v(p)_m - \left(v(p_1)_m + v(p_2)_m \right) \right) \cdot I_t^S(p, p_1, p_2),$$

$$\forall t \in T^S, \ \forall m \in M$$

Όπου,

- $M, v(p)_m$, G_t^S, και $I_t^S(p, p_1, p_2)$ έχουν οριστεί παραπάνω.
- $v(p_1)_m$ και $v(p_2)_m$ είναι το πλήθος των σιδηροδρομικών μονάδων τύπου m για το σιδηροδρομικά οχήματα με σύνθεση p_1 και p_2.
- $U_{t,m}$ (Uncoupled) είναι ο αριθμός των επιπλέον σιδηροδρομικών μονάδων τύπου m του οχήματος του ταξιδιού t σε σχέση με τα επόμενα οχήματα των ταξιδιών $s_1(t)$ και $s_2(t)$.

Ομάδα περιορισμών 24.

$$C_{s_1(t),m} = \sum_{\substack{p, p_1, p_2: \\ (p, p_1, p_2) \in G_t^S \\ kai \\ v(p_1)_m + v(p_2)_m > v(p)_m}} \left(\left(v(p_1)_m + v(p_2)_m \right) - v(p)_m \right) \cdot I_t^S(p, p_1, p_2)$$

$$C_{s_2(t),m} = 0$$

3. Για την τρίτη περίπτωση, που αφορά τα ταξίδια που ανήκουν στο σύνολο T^C, τότε η οικογένεια των περιορισμών είναι:

Ομάδα περιορισμών 25.

$$I_t^C(p, p_1, p_2) \in [0, 1], \qquad \forall\, (p, p_1, p_2) \in G_t^C$$

Όπου,

- G_t^C, το σύνολο όλων των δυνατών ζευγών (p, p_1, p_2), όπου p η σύνθεση του σιδηροδρομικού οχήματος για το διάδοχο ταξίδι t, p_1 η σύνθεση του ενός προκατόχου σιδηροδρομικού οχήματος που εκτελεί το ταξίδι $t_1(t)$ και p_2 η σύνθεση του άλλου προκατόχου σιδηροδρομικού οχήματος που εκτελεί το ταξίδι $t_2(t)$.

- $I_t^C(p, p_1, p_2)$ είναι η συνάρτηση, που εκφράζει ότι για κάθε ζεύγος $(p, p_1, p_2) \in G_t^C$ παίρνει μια τιμή στο διάστημα μεταξύ του 0 και του 1.

Ομάδα περιορισμών 26.

$$I_{t_1(t)}(p_1) = \sum_{\substack{p,\, p_2: \\ (p, p_1, p_2) \in G_t^C}} I_t^C(p, p_1, p_2), \ \forall\, p_1 \in P_{t_1(t)} \text{ και } \forall\, t \in T^C$$

Ομάδα περιορισμών 27.

$$I_{t_2(t)}(p_2) = \sum_{\substack{p,\, p_1: \\ (p, p_1, p_2) \in G_t^C}} I_t^C(p, p_1, p_2), \ \forall\, p_2 \in P_{t_2(t)} \text{ και } \forall\, t \in T^C$$

Ομάδα περιορισμών 28.

$$I_t(p) = \sum_{\substack{p_1, p_2: \\ (p, p_1, p_2) \in G_t^C}} I_t^C(p, p_1, p_2), \qquad \forall\, p \in P_t \text{ και } \forall\, t \in T^C$$

Ομάδα περιορισμών 29.

$$N_{t_1(t),m} = \sum_{p_1 \in P_{t_1(t)}} v(p_1)_m \cdot I_{t_1(t)}(p_1), \quad \forall t \in T^C, \ \forall m \in M$$

Ομάδα περιορισμών 30.

$$N_{t_2(t),m} = \sum_{p_2 \in P_{t_2(t)}} v(p_2)_m \cdot I_{t_2(t)}(p_2), \quad \forall t \in T^C, \ \forall m \in M$$

Ομάδα περιορισμών 31.

$$U_{t_1(t),\, m} = \sum_{\substack{p, p_1, p_2: \\ (p, p_1, p_2) \in G_t^C \\ kai \\ v(p_1)_m + v(p_2)_m > v(p)_m}} \left(\left(v(p_1)_m + v(p_2)_m \right) - v(p)_m \right) \cdot I_t^C(p, p_1, p_2),$$

$$\forall t \in T^C, \ \forall m \in M$$

$$U_{t_2(t),\, m} = 0, \qquad \forall t \in T^C, \ \forall m \in M$$

Ομάδα περιορισμών 32.

$$C_{t,\, m} = \sum_{\substack{p, p_1, p_2: \\ (p, p_1, p_2) \in G_t^C \\ kai \\ v(p)_m > v(p_1)_m + v(p_2)_m}} \left(v(p)_m - \left(v(p_1)_m + v(p_2)_m \right) \right) \cdot I_t^C(p, p_1, p_2),$$

$$, \forall t \in T^C \ \forall m \in M$$

4. Για την τέταρτη περίπτωση, που αφορά όλα τα ταξίδια. Αν T_1 το σύνολο των ταξιδιών που ανήκουν τα ταξίδια $t_1(t)$, όπου $t \in T^C$ και T_2 το σύνολο των ταξιδιών που ανήκουν τα ταξίδια $t_2(t)$, όπου $t \in T^C$, τότε το σύνολο όλων των ταξιδιών είναι το $\mathrm{A} = T \cup T^S \cup T^C \cup T_1 \cup T_2$, τότε η κοινή οικογένεια των περιορισμών είναι:

Ομάδα περιορισμών 33. (κοινή)

$$\sum_{p \in P_t} I_t(p) = 1, \qquad \forall t \in A$$

Ομάδα περιορισμών 34. (κοινή)

$$Inv_{t,m} = Inv^0_{s_d(t),m} - \sum_{\substack{t' \in A: \\ s_d(t') = s_d(t) \\ kai \\ t_d(t') \le t_d(t)}} C_{t',m} + \sum_{\substack{t' \in A: \\ s_a(t') = s_d(t) \\ kai \\ t_a(t') + r(t') \le t_d(t)}} U_{t',m},$$

$$\forall t \in A, \ \forall m \in M$$

Ομάδα περιορισμών 35. (κοινή)

$$Inv_{s,m}^{\infty} = Inv_{s,m}^{0} - \sum_{\substack{t \in A: \\ s_d(t)=s}} C_{t,m} + \sum_{\substack{t \in A: \\ s_a(t)=s}} U_{t,m} \quad , \qquad \forall s \in S \, , \, \forall m \in M$$

Ομάδα περιορισμών 36. (κοινή)

Για τις παραπάνω παραμέτρους των περιορισμών ισχύουν οι παρακάτω περιορισμοί:

$$I_t(p) \in \{0,1\} \qquad \forall t \in A, \; p \in P_t$$

$$I_t(p, p') \in \Re_+ \qquad \forall t \in T \,, \; (p, p') \in G_t$$

$$N_{t,m}, C_{t,m}, U_{t,m}, Inv_{t,m} \in \Re_+ \qquad \forall t \in A, \forall m \in M$$

$$Inv_{s,m}^{\infty}, Inv_{s,m}^{0} \in \Re_+ \qquad \forall s \in S, \forall m \in M$$

Συγκεντρωτικά, το σύνολο των περιορισμών που αναφέρονται για το βασικό μοντέλο που περιλαμβάνει διασπάσεις οχημάτων (Splitting) ή συνδυασμούς οχημάτων (Combining) αποτελείται από:

- Τις ομάδες περιορισμών 2.-8., 11.α., 11.β., οι οποίες αναφέρονται στο σύνολο T .
- Τις ομάδες περιορισμών 18. - 24., οι οποίες αναφέρονται στο σύνολο T^S .
- Τις ομάδες περιορισμών 25. - 32., οι οποίες αναφέρονται στο σύνολο T^C .

- Τις ομάδες περιορισμών 33. - 36., οι οποίες αναφέρονται στο γενικό σύνολο A.

Η αντικειμενική συνάρτηση του μοντέλου είναι η

$$F(N,X,Z) = w_1 \cdot N + w_2 \cdot X + w_3 \cdot Z\ ,$$

Όπου,

$$N = \sum_{t \in A} d_t \cdot \sum_{m \in M} c_m \cdot N_{t,m}$$

$$X = \sum_{t \in A} d_t \cdot \sum_{p \in P_t} I_t(p) \cdot \sum_{c \in C} s_{t,p,c}$$

$$\begin{aligned} Z = & \sum_{t \in T - T_\infty} \sum_{(p,p') \in G_t} I_t(p,p') \\ & + \sum_{t \in T^C} \sum_{\substack{(p,p_1,p_2) \in G_t^C: \\ v(p) \neq v(p_1) + v(p_2)}} I_t^C(p,p_1,p_2) \\ & + \sum_{t \in T^S} \sum_{\substack{(p,p_1,p_2) \in G_t^S: \\ v(p) \neq v(p_1) + v(p_2)}} I_t^S(p,p_1,p_2) \end{aligned}$$

Το παραπάνω γενικευμένο μοντέλο με τις ομάδες περιορισμών 2.-8., 11.α., 11.β., 18. - 24., 25. - 32., 33. - 36. όταν έχει εφικτή λύση, οι μεταβλητές $U_{t,m}, C_{t,m}, Inv_{t,m}, Inv_{s,m}^{\infty}, Inv_{s,m}^{0}, I_t(p,p'), I_t^S(p,p_1,p_2), I_t^C(p,p_1,p_2)$ είναι ακέραιες.

Επομένως, αν και οι συναρτήσεις $I_t^S(p,p_1,p_2), I_t^C(p,p_1,p_2)$ έχουν σύνολο τιμών το $[0, 1]$, σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση οι λύσεις των συναρτήσεων $I_t^S(p,p_1,p_2), I_t^C(p,p_1,p_2)$ είναι στο σύνολο $\{0,1\}$. Δηλαδή οι συναρτήσεις $I_t^S(p,p_1,p_2), I_t^C(p,p_1,p_2)$ στην πράξη συμπεριφέρονται ως δείκτριες, οι οποίες δείχνουν αν έχει επιλεγεί το ζεύγος (p,p_1,p_2) ή όχι.

Μία αντίστοιχη τροποποίηση του παραπάνω γενικευμένου μοντέλου, όπως αυτής στην περίπτωση v., η οποίο αναφέρεται στο τροποποιημένο βασικό μοντέλο, με την εισαγωγή του περιορισμού:

$$Y_{t,b} = \sum_{p \in P_t : b = n(p)} I_t(p), \qquad \forall\, t \in A \text{ και } \forall\, b \in B_t$$

Όπου $Y_{t,b}$, B_t και $n(p)$ έχουν οριστεί στην περίπτωση του τροποποιημένου βασικού μοντέλου. Επίσης, η τροποποίηση αυτή συνοδεύεται από την χαλάρωση του περιορισμού:

$$I_t(p) \in \{0,1\} \qquad \forall t \in A,\ p \in P_t$$

στον περιορισμό:

$$I_t(p) \in [0,1] \qquad \forall t \in A,\ p \in P_t$$

Όμως με την τροποποίηση αυτή αν υπάρχει εφικτή λύση τότε δεν υπάρχει βέλτιστη ακέραια λύση, όπως στην περίπτωση της τροποποίησης του βασικού μοντέλου. Για αυτό το λόγο η τροποποίηση πρέπει να γίνει χωρίς τη χαλάρωση του προηγουμένου περιορισμού. Όμως, όσες φορές δοκιμάστηκε η τροποποίηση του παραπάνω γενικευμένου μοντέλου με τη χαλάρωση του περιορισμού $I_t(p) \in \{0,1\}$ στον περιορισμό $I_t(p) \in Q_+$, όπου Q_+ οι θετικοί ρητοί αριθμοί τότε παντότε βρέθηκαν ακέραιες βέλτιστες λύσεις.

vii. Ειδική περίπτωση μοντέλου

Στην ομάδα γραμμών Noord – Oost, ένα παράδειγμα προβλήματος που περιέχει διάσπαση ή συνδυασμό, είναι το παρακάτω:

- Το πρώτο ταξίδι είναι το t_1, το οποίο έχει σταθμό άφιξης τον σταθμό Ut, στον οποίο δεν μπορούν να προστεθούν σιδηροδρομικές μονάδες από το απόθεμα του σταθμού στα διάδοχα οχήματα ή να αφαιρεθούν σιδηροδρομικές μονάδες από το προκάτοχο όχημα και να αποθηκευτούν στο απόθεμα του σταθμού.

- Στην συνέχεια γίνεται διάσπαση του οχήματος του ταξιδιού t_1, σε δύο διάδοχα οχήματα που εκτελούν τα ταξίδια t_2 και t_3 με σταθμούς άφιξης, τους Gvc και Rtd αντίστοιχα. Στους σταθμούς Gvc και Rtd μπορούν να προστεθούν σιδηροδρομικές μονάδες από το απόθεμα του σταθμού στο διάδοχο όχημα ή να αφαιρεθούν σιδηροδρομικές μονάδες από προκάτοχο όχημα στο απόθεμα του σταθμού.

- Στην συνέχεια από τους σταθμούς Gvc και Rtd εκτελούνται δύο ταξίδια επιστροφής προς το σταθμό Ut, τα ταξίδια t_4 και t_5 αντίστοιχα. Δηλαδή, το διάδοχο ταξίδι του t_2 είναι το t_4 και το διάδοχο ταξίδι του t_3 είναι το t_5.

- Τέλος, τα οχήματα των ταξιδιών t_4 και t_5, ενώνονται στο σταθμό αφιξής τους, Ut, και το διάδοχο όχημα εκτελεί το τελευταίο ταξίδι t_6.

Για την επίλυση του προβλήματος, χρησιμοποιείται η δείκτρια συνάρτηση $I(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$, η οποία παίρνει τιμή 1, αν τα ταξίδια $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ έχουν τις συνθέσεις $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ αντίστοιχα και 0 αλλιώς.

Με την παραπάνω δείκτρια οι ομάδες περιορισμών του βασικού μοντέλου 2 και 3 αντικαθίστανται από την ομάδα περιορισμών:

Ομάδα περιορισμών 37.

$$I_t(p_1) = \sum_{p_2, p_3, p_4, p_5, p_6} I(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) \qquad \forall\, p_1 \in P_{t_1}$$

$$I_t(p_6) = \sum_{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5} I(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) \qquad \forall\, p_6 \in P_{t_6}$$

Επίσης, επειδή δεν μπορούν να προστεθούν σιδηροδρομικές μονάδες από το απόθεμα του σταθμού στα διάδοχα οχήματα ή να αφαιρεθούν σιδηροδρομικές μονάδες στο προκάτοχο όχημα από το απόθεμα του σταθμού Ut, αυτό σημαίνει ότι από τα οχήματα των ταξιδιών t_1, t_4, t_5 δεν μπορούν να αφαιρεθούν μονάδες από αυτά στο απόθεμα του σταθμού Ut, ούτε να προστεθούν στα οχήματα των ταξιδιών t_2, t_3, t_6 μονάδες από το απόθεμα του σταθμού Ut. Επομένως, πρέπει να ισχύουν οι περιορισμοί:

Ομάδα περιορισμών 38.

$$U_{t_1,m} = U_{t_4,m} = U_{t_5,m} = 0, \qquad \forall m \in M$$

$$C_{t_2,m} = C_{t_3,m} = C_{t_6,m} = 0, \qquad \forall m \in M$$

Επίσης, επειδή στους σταθμούς Gvc και Rtd μπορούν να προστεθούν σιδηροδρομικές μονάδες από το απόθεμα του σταθμού στο διάδοχο όχημα ή να αφαιρεθούν σιδηροδρομικές μονάδες στο προκάτοχο όχημα από το απόθεμα του σταθμού. Αυτό σημαίνει ότι από τα οχήματα των ταξιδιών t_2, t_3 μπορούν να αφαιρεθούν μονάδες και να αποθηκευτούν στα αποθέματα των σταθμών Gvc και Rtd αντίστοιχα. Επομένως, οι αντίστοιχοι περιορισμοί είναι:

Ομάδα περιορισμών 39.

$$U_{t_2,m} = \sum_{\substack{p_1,\mathbf{K},p_6 \\ n(p_2)_m > n(p_4)_m}} \left(n(p_2)_m - n(p_4)_m\right) \cdot I(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6), \qquad \forall m \in M$$

$$U_{t_3,m} = \sum_{\substack{p_1,\mathbf{K},p_6 \\ n(p_3)_m > n(p_5)_m}} \left(n(p_3)_m - n(p_5)_m\right) \cdot I(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6), \qquad \forall m \in M$$

Επίσης, στα οχήματα t_4, t_5 μπορούν να προστεθούν σιδηροδρομικές μονάδες από το απόθεμα τους σταθμούς Gvc και Rtd αντίστοιχα. Επομένως, οι αντίστοιχοι περιορισμοί είναι:

Ομάδα περιορισμών 40.

$$C_{t_2,m} = \sum_{\substack{p_1,\mathbf{K},p_6 \\ n(p_4)_m > n(p_2)_m}} \left(n(p_4)_m - n(p_2)_m\right) \cdot I\left(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\right), \qquad \forall m \in M$$

$$C_{t_3,m} = \sum_{\substack{p_1,\mathbf{K},p_6 \\ n(p_5)_m > n(p_3)_m}} \left(n(p_5)_m - n(p_3)_m\right) \cdot I\left(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\right), \qquad \forall m \in M$$

Οι ομάδες περιορισμών 38-40 αντικαθιστούν στο βασικό μοντέλο τις ομάδες περιορισμών 5 και 6.

Για το παραπάνω παράδειγμα η χαλάρωση του περιορισμού $I\left(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\right) \in \{0,1\}$ **δεν οδηγεί σε ακέραιες λύσεις.**

Όμως, αν στο παραπάνω μοντέλο **προστεθούν οι παρακάτω ομάδες περιορισμών:**

Ομάδα περιορισμών 41.

$$U^{Gvc} \in \{0,1\}$$

$$U^{Rtd} \in \{0,1\}$$

$$C^{Gvc} \in \{0,1\}$$

$$C^{Rtd} \in \{0,1\}$$

Ομάδα περιορισμών 42.

$$U^{Gvc} = \sum_{\substack{p_1,\mathbf{K},p_6: \\ |p_2| > |p_4|}} I\left(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\right)$$

$$U^{Rtd} = \sum_{\substack{p_1,\mathbf{K},p_6: \\ |p_3| > |p_5|}} I\left(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\right)$$

$$C^{Gvc} = \sum_{\substack{p_1,\mathbf{K},p_6: \\ |p_4|>|p_2|}} I(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6)$$

$$C^{Rtd} = \sum_{\substack{p_1,\mathbf{K},p_6: \\ |p_5|>|p_3|}} I(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6)$$

Ομάδα περιορισμών 43.

$$C_{t_i,m} \in Z_+, \quad \forall i = 2,\mathbf{K},5, \quad \forall m \in M$$

Ομάδα περιορισμών 44.

$$U_{t_i,m} \in Z_+, \quad \forall i = 2,\mathbf{K},5, \quad \forall m \in M$$

Όπου Z_+, το σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων.

Επιπλέον, αν **ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις**, οι οποίες ισχύουν στην περίπτωση της ομάδας γραμμών της Noord – Oost, οι οποίες είναι:

- Υπάρχουν δύο τύποι σιδηροδρομικών μονάδων οι οποίοι είναι, ο τύπος με 3 βαγόνια και ο τύπος με 4 βαγόνια.
- Κάθε ταξίδι έχει το πολύ 15 βαγόνια.
- Το πολύ δύο μονάδες μπορούν να προστεθούν από το απόθεμα του σταθμού ή να αφαιρεθούν την ίδια στιγμή.
- Κάθε φορά που ένα όχημα διασπάται στο σταθμό Ut, το αριστερό κομμάτι συνεχίζει για το σταθμό Gvc και το δεξιό συνεχίζει για το σταθμό Rtd.

Και αν γίνει χαλάρωση του περιορισμού $I(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6) \in \{0,1\}$ στον περιορισμό $I(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6) \in [0,1]$ **τότε, το παραπάνω μοντέλο αν έχει εφικτή λύση θα είναι ακέραια βέλτιστη λύση.**

V. Μέθοδοι επίλυσης του μοντέλου σύνθεσης

Οι Peeters and Kroon [20] λύνουν το πρόβλημα για ομάδες γραμμών που δεν απαιτούν διασπάσεις ή ενώσεις οχημάτων. Η επίλυση γίνεται αρχικά με τον αλγόριθμο Dantzig – Wolfe decomposition και για την πιο γρήγορη επίλυση χρησιμοποιείται γραφική αναπαράσταση και στην συνέχεια η ακέραια λύση δίνεται με τη μέθοδο Branch and Price. Η μέθοδος αυτή δουλεύει καλά για τις ανάγκες της NSR, όταν δεν απαιτούνται διασπάσεις ή ενώσεις οχημάτων. Η μέθοδος επεκτείνεται για διασπάσεις ή ενώσεις οχημάτων μόνο αν μετά τη διάσπαση των οχημάτων, τα οχήματα στο επόμενο ταξίδι επιστρέφουν στο σταθμό που διασπάστηκαν και ξανά – ενώνονται, όμως, τα άλλα προβλήματα που απαιτούν διαφορετικής μορφής διασπάσεις ή ενώσεις οχημάτων δεν μπορούν να επιλυθούν με τον αλγόριθμο Dantzig – Wolfe decomposition.

Ο Maróti [1] βρήκε λύσεις μέσω ενός εμπορικού λογισμικού για προβλήματα μικτού ακεραίου προγραμματισμού (MIP – Mixed Integer Programming), το οποίο καλείται ILOG CPLEX 9.0. Η χωρητικότητα της μνήμης του υπολογιστή που χρησιμοποιήθηκε ήταν 512 Mb. Αν μετά από ένα ορισμένο αριθμό ωρών δεν βρεθεί λύση, τότε το πρόγραμμα διακόπτεται.

vi. Υπολογισμός του μοντέλου

Ο Maróti [1] υπολόγισε το μοντέλο σύνθεσης (βασικό μοντέλο με επέκταση για κυκλικό προγραμματισμό) για την ομάδα γραμμών Noord – Oost για μία γενική Τρίτη. Οι λύσεις βρίσκονται για διάφορα βάρη w_1, w_2, w_3 της αντικειμενικής συνάρτησης:

$$F(N, X, Z) = w_1 \cdot N + w_2 \cdot X + w_3 \cdot Z$$

Επίσης, ποικίλουν και τα όρια που πρέπει να έχουν, ο αριθμός των βαγονιών – χιλιομέτρων (αποτελεσματικότητα) N, ο αριθμός των έλλειψεων θέσεων – χιλιομέτρων (ποιότητα) X, και το συνολικό πλήθος των αλλαγών των μετατροπών του δρομολογίου (αξιοπιστία) Z.

Τα βάρη προσαρμόζονται στις απαιτήσεις της NSR, δίνοντας ένα χαμηλό βάρος στο N και θέτοντας τον περιορισμό $N \leq 318{,}000$. Επίσης, έγιναν επιπλέον περιορισμοί με χαμηλότερο το άνω όριο του N και θέτοντας όρια στα X, Z. Επιπλέον κριτήρια είναι η μεγαλύτερη επιβάρυνση του πλήθους των μετατροπών σε ώρες αιχμής και η μεγαλύτερη επιβάρυνση των ελλείψεων θέσεων πρώτης κλάσης.

III. Σχεδιασμός / Μεθοδολογία / εκτέλεση έρευνας

i. Μοντέλο με σκοπό την ποιότητα των υπηρεσιών

Το μοντέλο που έχει σκοπό μια πιο αποτελεσματική κάλυψη των αναγκών, είναι το μοντέλο που βελτιστοποιεί τη ποιότητα των υπηρεσιών, δηλαδή είναι το Μοντέλο σύνθεσης (Composition Model), του οποίου η αντικειμενική συνάρτηση είναι η $F(X)=X$, όπου η μεταβλητή X, που αντιστοιχεί στο μέγεθος της ποιότητας, καλείται αριθμός των έλλειψεων θέσεων – χιλιομέτρων (seat - shortages kilometers) που όπως ορίστηκε παραπάνω είναι:

$$X = \sum_{t \in T} d_t \cdot \sum_{p \in P_t} I_t(p) \cdot \sum_{c \in C} s_{t,p,c}$$

Και οι περιορισμοί του μοντέλου έχουν οριστεί παραπάνω (Ομάδα περιορισμών 1-15).

Η εκτίμηση της αναμενόμενης έλλειψης θέσεων για την κατηγορία c, $s_{t,p,c}$ και για τακτικό προγραμματισμό είναι:

$$s_{t,p,c} = \max\left(\, l_{t,c} - q_{p,c}, \, 0 \right)$$

Όπου ,

- $l_{t,c}$, η αναμενόμενη ζήτηση θέσεων για το ταξίδι t και τη κατηγορία θέσεων c.

- $q_{p,c}$, το πλήθος των διαθέσιμων θέσεων της κατηγορίας c του οχήματος με σύνθεση p.

Η αναμενόμενη ζήτηση θέσεων για το ταξίδι t και τη κατηγορία θέσεων c, $l_{t,c}$, είναι άγνωστη και πρέπει να εκτιμηθεί. Η ζήτηση των θέσεων για το ταξίδι t και τη κατηγορία θέσεων c, είναι τυχαία μεταβλητή και εξαρτάται διάφορους παράγοντες, όπως ποια ημέρα της εβδομάδας είναι (Δευτέρα, Τρίτη, κτλ.) και ποια είναι η εποχή (Άνοιξη, Καλοκαίρι, κτλ.)

Ένα μοντέλο που εκτιμάει τη ζήτηση των θέσεων για το ταξίδι t και τη κατηγορία θέσεων c, βάση των παραπάνω παραγόντων είναι η παλινδρόμηση Poisson (Poisson Regression) και η εξίσωση της παλινδόμησης είναι:

$$\log\left(l_{t,c}\right) = b_0 + b_{11} \cdot I_{\Delta} + b_{12} \cdot I_{\mathrm{T}r} + b_{13} \cdot I_{\mathrm{T}e} + b_{14} \cdot I_{\Pi e} \\ + b_{15} \cdot I_{\Pi a} + b_{16} \cdot I_{\Sigma a} + b_{21} \cdot I_{\mathrm{A}n} + b_{22} \cdot I_{\mathrm{K}a} + b_{23} \cdot I_{\Phi q}$$

Όπου,

- I_{Δ}, παίρνει τιμή 1 αν η μέρα είναι Δευτέρα και 0 αλλιώς.

- $I_{\mathrm{T}r}$, παίρνει τιμή 1 αν η μέρα είναι Τρίτη και 0 αλλιώς.

- $I_{\mathrm{T}e}$, παίρνει τιμή 1 αν η μέρα είναι Τετάρτη και 0 αλλιώς.

- $I_{\Pi e}$, παίρνει τιμή 1 αν η μέρα είναι Πέμπτη και 0 αλλιώς.

- $I_{\Pi a}$, παίρνει τιμή 1 αν η μέρα είναι Παρασκευή και 0 αλλιώς.

- $I_{\Sigma a}$, παίρνει τιμή 1 αν η μέρα είναι Σάββατο και 0 αλλιώς.

- $I_{\mathrm{A}n}$, παίρνει τιμή 1 αν η εποχή είναι Άνοιξη και 0 αλλιώς.

- $I_{\mathrm{K}a}$, παίρνει τιμή 1 αν η εποχή είναι Καλοκαίρι και 0 αλλιώς.

- $I_{\Phi q}$, παίρνει τιμή 1 αν η εποχή είναι Φθινόπωρο και 0 αλλιώς.

Για κάθε ταξίδι $t \in T$ και για κάθε κατηγορία θέσεων $c \in C$, εκτιμάται το παραπάνω μοντέλο.

IV. Γενικά Συμπεράσματα

Σύμφωνα με τις παραπάνω πληροφορίες που αντλήσαμε από τα μοντέλα επιχειρησιακής έρευνας για τον προγραμματισμό σιδηροδρομικού υλικού, αυτό που διαπιστώσαμε, αρχικά, είναι πως με τον σωστό σχεδιασμό των προβλημάτων των σιδηροδρόμων (είδος, χρονικό ορίζοντα, περιοχή ευθύνης, κλπ), μπορούμε να εντοπίσουμε την κύρια πηγή απ'όπου προέρχονται τα εκάστοτε προβλήματα και εφαρμόζοντας τις κατάλληλες επιστημονικές εργασίες οδηγούμαστε στην επιτυχημένη επίλυσή τους.

Εν συνεχεία, με την εφαρμογή των κατάλληλων μοντέλων για τον προγραμματισμό του σιδηροδρομικού υλικού επιτυγχάνουμε την κάλυψη οποιασδήποτε ανάγκης προκύψη και την ταχύτερη επίλυση αυτής.

Τέλος, εφαρμόζοντας όλα τα παραπάνω, η καλύτερη και γρηγορότερη εξυπηρέτηση του επιβατικού κοινού υλοποιείται με επιτυχία με αποτέλεσμα να μειωθεί αισθητά το ποσοστό αυτών οι οποίοι είναι δυσαρεστημένοι.

V. Αναφορές

Papers

1. Maróti, G., Operations Research Models for Railway Rolling Stock Planning. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 1- 86, (2006).

2. Assad, A.A., Models for Rail Transportation, Transportation Research A, (1980).

3. Cordeau, J.F., Toth, P., Vigo, D., A Survey of Optimization Models for Train Routing and Scheduling, Transportation Science, (1998).

4. Huisman, D., Kroon, L.G., Lentink, R.M., Vromans, M.J.C.M., Operations Research in Passenger Railway Transportation, Statistica Neerlandica, (2005).

5. Bussieck, M.R., Optimal Line Plans in Public Rail Transport, Ph.D. thesis, Braunschweig University of Technology, Germany, (1998).

6. Scholl, S., Anschlusssicherungen bei Verspatungen in ÖPNV (Securing Connections in Case of Delays at ÖPNV). Master's thesis, University of Kaiserslautern, Germany. In German, (2001).

7. Scholl, S., Customer Oriented Line Planning. Ph.D. thesis, Kaiserslautern University of Technology, Germany, (2005).

8. Van Dijk, W.G.H., Capaciteitsplanning Rijdend Personeel bij NS Reizigers (Crew Capacity Planning at NS Reizigers). Thesis, Eindhoven University of Technology. The Netherlands, In Dutch, (2003).

9. Peeters, L.W.P., Cyclic Railway Timetable Optimization. Ph.D. thesis, Erasmus University Rotterdam, The Netherlands, (2003).

10. Vromans, M.J.C.M., Kroon, L.G., Stochastic Optimization of Railway Timetables. In Proceedings TRAIL 8th Annual Congress, Delft University Press, Delft. The Netherlands, (2004).

11. Vromans, M.C.J.M., Reliability of Railway Systems. Ph.D. thesis, Erasmus University Rotterdam, The Netherlands, (2005).

12. Abbink, E.J.W., Van der Berg, B.W.V., Kroon, L.G., Salomon, M., Allocation of Railway Rolling Stock for Passenger Trains. Transportation Science, (2004).

13. Schrijver, A. Minimum Circulation of Railway Stock. Center for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, The Netherlands, (1993).

14. Ben-Khedher, N., Kintanar, J., Queille, C., Stripling, W., Schedule Optimization at SNCF: From Conception to Day of Departure. Interfaces, (1998).

15. Brucker, P., Hurink, J., Rolfes, T., Routing of Railway Carriages: A Case Study. Osnabrücker Schriften zur Mathematik, Reihe P, Heft 205, (1998).

16. Cordeau, J.F., Soumis, F., Desrosiers, J., A Benders Decomposition Approach for the Locomotive and Car Assignment Problem. Transportation Science, (2000).

17. Cordeau, J.F., Soumis, F., Desrosiers, J., Simultaneous Assignment of Locomotives and Cars to Passenger Trains. Operations Research, (2001).

18. Alfieri, A., Groot, R., Kroon, L.G., Schrijver, A., Efficient Circulation of Railway Rolling Stock. ERIM Research Report ERS-2002-110-LIS, Erasmus University Rotterdam, The Netherlands. Submitted to Transportation Science, (2002).

19. Lingaya, N., Cordeau, J.F., Desaulniers, G., Desrosiers, J., Soumis, F., Operational Car Assignment at VIA Rail Canada. Transportation Research B, (2002).

20. Peeters, M., Kroon, L.G., Circulation of Railway Rolling Stock: a Branchand-Price Approach. ERIM Research Report ERS-2003-055-LIS, Erasmus University Rotterdam, The Netherlands. To appear in Computers and Operations Research, (2003).

21. Schrijver, A., Minimum Circulation of Railway Stock. Center for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, The Netherlands, (1993).

22. Groot, R. (1996). Minimum Circulation of Railway Stock. Master's thesis, University of Amsterdam, The Netherlands.

23. Van Montfort, J., Optimizing Railway Carriage Circulation with Integral Linear Programming. Master's thesis, University of Amsterdam, The Netherlands, (1997).

24. Barnhart, C., Boland, N.L., Clarke, L.W., Johnson, E.L., Nemhauser, G.L., Shenoi, R.G., Flight String Models for Aircraft Fleeting and Routing. Transportation Science, (1998a).

25. Barnhart, C., Johnson, E.L., Nemhauser, G.L., Savelsbergh, M.W.P., Vance, P.H., Branch-and-Price: Column Generation for Solving Huge Integer Programs. Operations Research, (1998b).

26. Caprara, A., Fischetti, M., Toth, P., A Heuristic Algorithm for the Set Covering Problem. Operations Research, (1999).

27. Caprara, A., Fischetti, M., Toth, P., Vigo, D., Modeling and Solving the Crew Rostering Problem. Operations Research, (1998).

28. Kohl, N., Karish, S.E., Airline Crew Rostering: Problem Types, Modeling and Optimization. Annals of Operations Research, (2004).

29. Sodhi, M., Norris, S., A Flexible, Fast, and Optimal Modeling Approach Applied to Crew Rostering at London Underground. Annals of Operations Research, (2004).

30. Suhl, L., Mellouli, T., Requirements for, and Design of, an Operations Control System for Railways. In Wilson, N.H.M. (editor), Computer-Aided Transit Scheduling, Springer, Berlin, Germany.

31. Shen, S., Wilson, N.H.M., An Optimal Integrated Real-time Disruption Control Model for Rail Transit Systems. In Voss, S., Daduna, J.R. (editors), Computer-Aided Scheduling of Public Transport, Springer, Berlin, Germany, (2001).

32. Suhl, L., Biederbick, C., Kliewer, N., Design of Customer-oriented Dispatching Support for Railways. In Voss, S., Daduna, J.R. (editors), Computer-Aided Scheduling of Public Transport, Springer, Berlin, Germany, (2001).

33. Feo, T.A., Bard, J.F., Flight Scheduling and Maintenance Base Planning. Management Science, (1989).

34. Clarke, L., Johnson, E., Nemhauser, G., Zhu, Z., The Aircraft Rotation Problem. Annals of Operations Research, (1997).

35. Gopalan, R., Talluri, K.T., The Aircraft Maintenance Routing Problem. Operations Research, (1998).

36. Talluri, K.T., The Four-day Aircraft Maintenance Routing Problem. Transportation Science, (1998).

37. Anderegg, L., Eidenbenz, S., Gantenbein, M., Stamm, Ch., Taylor, D.S., Weber, B., Widmayer, P., Train Routing Algorithms: Concepts, Design Choices, and Practical Considerations, (2003). In Proceedings of ALENEX'03. http://www.siam.org/meetings/alenex03/Abstracts/LAnderegg3.pdf.

Books

38. Winston, W. L., Operations Research: Applications and Algorithms. Indiana University. Boston: Duxbury Press (1987).

Lecture notes

39. Anderson, C. J., Poisson Regression or Regression of Counts (& Rates). Department of Educational Psychology. University of Illinois at Urbana : Champaign, 1-7

(http://courses.education.illinois.edu/EdPsy589/lectures/4glm3-ha-online.pdf)

WWW

40. http://en.wikipedia.org/wiki/Regression

41. http://en.wikipedia.org/wiki/Nonlinear_regression

42. http://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_linear_model

43. http://en.wikipedia.org/wiki/Count_data

44. http://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_distribution

45. http://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_regression