ΤΕΙ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

‘Γραμμικός Προγραμματισμός: Το πρόβλημα της Μεταφοράς, Εφαρμογές και Παραδείγματα.’

‘Linear Programming: The Transportation Problem, Applications and Examples.’

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΑΝΤΩΝΗ ΑΝΙΣΑ, Α.Μ 12285

ΛΟΞΑ ΕΥΤΥΧΙΑ, Α.Μ. 12417

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ: ΒΑΣΙΟΥ ΓΕΩΡΓΙΑ

ΠΑΤΡΑ,2014

Περιεχόμενα

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας πτυχιακής εργασίας αποτελεί τόσο η παρουσίαση όσο και η ανάλυση βασικού κλάδου της επιστήμης της Επιχειρησιακής Έρευνας. Ο γραμμικός προγραμματισμός αποτελεί δομικό στοιχείο στην Επιχειρησιακή Έρευνα και τα αποτελέσματά του πολύ σημαντικά για τη λήψη αποφάσεων στο χώρο των επιχειρήσεων και γενικότερα της βιομηχανίας. Σημαντικό πρόβλημα αποτελεί η μεταφορά προϊόντων που αυτό περιγράφεται από μια ειδική κατηγορία προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού που ονομάζεται Πρόβλημα Μεταφοράς.

Στα πλαίσια εκπόνησης της πτυχιακής εργασίας το 1^{ο} κεφάλαιο αφορά το προσδιορισμό της έννοιας «Γραμμικού Προγραμματισμού», τόσο την ιστορική αναδρομή όσο και την ιστορική εξέλιξη του κλάδου. Ακόμα περιγράφονται τα δομικά του στοιχεία και η μορφή ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, στη καλύτερη κατανόηση βοηθά η μοντελοποίηση ενός προβλήματος. Βασικό εργαλείο αποτελεί η μέθοδος Simplex όπου δίνονται και τα βήματα του αλγορίθμου, η λύση στο πρόβλημα της ερμηνείας των αποτελεσμάτων ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού για μια επιχείρηση είναι η ανάλυση ευαισθησίας.

Στο 2^{ο} κεφάλαιο αρχικά παρουσιάζεται μια ιστορική αναδρομή για το πρόβλημα μεταφοράς και αναφέρει τους πιο σπουδαίους επιστήμονες που ασχολήθηκαν με αυτό. Στη συνέχεια προσδιορίζεται τι είναι και ποια το δομικά στοιχεία ενός προβλήματος μεταφοράς. Προσδιορίζονται τα στάδια στη μέθοδο επίλυσης και αναλύονται μια-μια οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται έτσι ώστε να βρεθεί το βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς των προϊόντων.

Τέλος, στο 3^{ο} κεφάλαιο αναφέρονται οι ειδικές περιπτώσεις του προβλήματος μεταφοράς όπως: το πρόβλημα εκχώρησης και το πρόβλημα μεταφόρτωσης. Στη συνέχεια πραγματοποιείται η επίλυση διάφορων παραδειγμάτων προβλήματος μεταφοράς με τη χρήση διαφορετικών λογισμικών και δίνεται μια ερμηνεία στα αποτελέσματα που προκύπτουν. Επίσης, μελετάται μέσα από μία περίπτωση χρήσης που αφορά ένα σημαντικό για το ελληνικό κράτος, τις θαλάσσιες μεταφορές και πως αυτές επηρεάζουν τη κοινωνία.

Abstract

Subject of this paper is both the presentation and the analysis of the basic element ofOperational Research. Linear programming is a structural element in Operations Research and its results are very important for making decision in business andgeneral in industry area. Important problem is the transportation of products is described by a special case of linear programming problems called transportation problem.

As part of preparing the dissertation is that the first chapter deals with the determination of 'Linear Programming', both the historical background and the historical development of it. Even describing the structural elements and the form of a linear programming problem, helps to better understand the modelling of a problem. The basic tool is the Simplex method where given and steps of the algorithm, the solution to the problem of analysing the results of a linear programming problem for a business is the sensitivity analysis.

The 2nd chapter initially presents a throwback to the transportation problem and give the world's greatest scientists engaged with it. Thereafter is determined what is and what the structural elements of a transportation problem. Stages are defined in the process solution and analysed one by one the methods used to find the optimal plan of transporting the products.

Finally, the third chapter presents the special cases of transportation problem including: the assignment problem and the transhipment problem. Then carried out the solving the transport problem by several examples using different software and gives an interpretation to the results obtained. Also studied through a case study involving a major for the Greek state, maritime transport and how they affect society.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

«Με τον όρο **Επιχειρησιακή Έρευνα**, εννοούμε την “επιστήμη που ασχολείται με την βελτιστοποίηση της απόδοσης ενός συστήματος».[12]

Πιο απλά σημαίνει πως η επιχειρησιακή έρευνα είναι η επιστήμη όπου «ερευνά στις επιχειρήσεις». Αυτό φανερώνει κάτι τόσο για το πεδίο εφαρμογής όσο και για την προσέγγιση. Η χρήση της επιστήμης αυτής γίνεται σε προβλήματα που έχουν σχέση με τον συντονισμό των λειτουργιών και τον τρόπο που διοικείται ένας οργανισμός, η προσέγγιση της είναι εκείνη της επιστημονικής μεθόδου. Η διαδικασία περιλαμβάνει την διατύπωση και εξέταση του προβλήματος και το επόμενο βήμα είναι η κατασκευή ενός επιστημονικού (τυπικά μαθηματικού) πρότυπου. Στη συνέχεια πραγματοποιείται η υπόθεση ότι το πρότυπο που κατασκευάστε είναι μια ακριβή απεικόνιση των βασικών χαρακτηριστικών της κατάστασης. Άρα συμπερασματικά καταλήγουμε στο ότι η επιχειρησιακή ερευνά ασκεί επιστημονική ερευνά στις θεμελιώδεις ιδιότητες των «επιχειρήσεων», και ειδικότερα η επιστήμη αυτή ασχολείται με την πρακτική διοίκηση των οργανισμών.

Ο **Γραμμικός Προγραμματισμός** είναι ο πιο εφαρμοσμένος κλάδος της επιστήμης των Μαθηματικών με πληθώρα εφαρμογών στην επιστήμη των ηλεκτρονικών υπολογιστών και ασχολείται με την επίλυση του γραμμικού προβλήματος, κατασκευάζει μεθόδους επίλυσης (αλγορίθμους) και εξετάζει τρόπους εφαρμογής των αποτελεσμάτων στην λήψη πολύπλοκων αποφάσεων σε διοικητικό επίπεδο, με επιστημονικό τρόπο.[14]

Σήμερα, ο γραμμικός προγραμματισμός θεωρείται ένα εργαλείο πρότυπο, όπου χρησιμοποιείται από τις περισσότερες εμπορικές και βιομηχανικές επιχειρήσεις. Πρέπει επίσης να διευκρινιστεί πως ο γραμμικός προγραμματισμός ασχολείται με τα προβλήματα της κατανομής των περιορισμένων πόρων μεταξύ των ανταγωνιζόμενων δραστηριοτήτων κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

[12] ΤΣΑΝΤΑΣ Ν.Δ-ΒΑΣΙΛΙΕΟΥ Π.Γ.Χ, (2000), Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη

[14] http://libkas.teikoz.gr/2009/ptyxiakes/OIKONOMOU_KALLIOPI.pdf

Η αρχική μαθηματική διατύπωση του προβλήματος καθώς και μια συστηματική διαδικασία λύσης του, **η μέθοδος Simplex**, οφείλεται στον G.B. Danzig στα 1947. Νωρίτερα διάφορα προβλήματα τύπου γραμμικού προγραμματισμού είχαν διαμορφωθεί και επιλυθεί. Ένα από τα σημαντικότερα είναι το πρόβλημα της μεταφορά. Ο Danzig ήταν όμως ο άνθρωπος μου κατασκεύασε το γενικό πλαίσιο και ταυτόχρονα ανακάλυψε την μέθοδο της επίλυσής του.[12]

Είναι ένας αλγόριθμος όπου θεωρείται για τον λόγο ότι είναι μια επαναληπτική διαδικασία μέχρι να βρεθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Συχνά συναντιούνται προβλήματα βελτιστοποίησης που εκφράζονται με μια ιδιαίτερη διαφορετική δομή από τα γραμμικά προβλήματα. Τα διαφορετικά αυτά προβλήματα χωρίζονται στις εξής κατηγορίες:

- Το πρόβλημα της μεταφοράς,
- Το πρόβλημα της μεταφόρτωσης,
- Και το πρόβλημα της εκχώρησης.

Το πρόβλημα της μεταφοράς αφορά τη μεταφορά προϊόντων από διαφορετικά σημεία παραγωγής ή κεντρικής αποθήκευσης (π.χ. εργοστάσια), σε κέντρα διανομής που είναι εγκατεστημένα σε άλλα γεωγραφικά σημεία με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Τα προβλήματα αυτά αποτελούν την ειδική κατηγορία προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού με ειδική δομή και αποκαλούνται **Προβλήματα Μεταφοράς**. Για την επίλυσή του έχουν αναπτυχθεί αποτελεσματικές τεχνικές (παραλλαγές της μεθόδου Simplex). Το πρόβλημα ήταν γνωστό από το 1941 και ως π.γ.π. θεμελιώθηκε και λύθηκε από τον Dantzig το 1951. Ως ειδική περίπτωση του προβλήματος μεταφοράς μπορούν να θεωρηθούν μια μεγάλη σειρά πρακτικών προβλημάτων, που δεν αναφέρονται στις μεταφορές, και για το λόγο αυτό η μέθοδος επίλυσής του είναι ένα σπουδαίο εργαλείο για την εν γένει Επιχειρησιακή Έρευνα. Το αντικείμενο των προβλημάτων μεταφοράς είναι ο καθορισμός των ποσοτήτων που θα μεταφερθούν από κάθε ένα εργοστάσιο σε διάφορες θέσεις κατανάλωσης με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτυγχάνεται η ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς.

Η έννοια της δυϊκότητας (duality) είναι μια πολύ σημαντικότατη παράμετρος τόσο για την ανάπτυξη του γραμμικού προγραμματισμού όσο και για την ανάλυση

[12]ΤΣΑΝΤΑΣ Ν.Δ-ΒΑΣΙΛΙΕΟΥ Π.Γ.Χ, (2000), Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη

του γραμμικού προβλήματος. Κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού συνδέεται με ένα νέο πρόβλημα το οποίο ονομάζεται δυϊκό (dual), ενώ το αρχικό πρόβλημα ονομάζεται πρωτεύον (primal). Το δυϊκό πρόβλημα παρέχει σημαντικές πληροφορίες οικονομικού χαρακτήρα σχετικά με τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος, διευρύνοντας τον κύκλο των αποτελεσμάτων στην περιοχή της οριακής οικονομικής ανάλυσης.

Κεφάλαιο 1ο: Έννοια Γραμμικού Προγραμματισμού

Ο γραμμικός προγραμματισμός (linearprogramming) αποτελεί αναμφίβολα το δημοφιλέστερο μοντέλο στο χώρο της επιχειρησιακής έρευνας αλλά και της διοικητικής επιστήμης (managementscience) γενικότερα. Η μεγάλη επιτυχία που είχαν σε εφαρμογές του σε προβλήματα λήψης αποφάσεων των ιδιωτικών και δημόσιων επιχειρήσεων και οργανισμών αποδίδεται, από τη μια πλευρά στα επιτεύγματα της έρευνας μαθηματικών και οικονομολόγων σε θεωρητικό επίπεδο και από την άλλη πλευρά στην επαναστατική ανέλιξη της πληροφορικής επιστήμης και τεχνολογίας. Κυριαρχεί σήμερα η αντίληψη ότι, τρεις στις τέσσερις εφαρμογές μοντέλων επιχειρησιακής έρευνας σε πραγματικά προβλήματα διοίκησης παραπέμπουν στο γραμμικό προγραμματισμό (Γ.Π.).[15]

Σε μια επιχείρηση ο όρος **προγραμματισμός** περιλαμβάνει τη διαδικασία λήψης και υλοποίησης αποφάσεων που θα οδηγούν στην επίτευξη ατομικών και ομαδικών στόχων. Ο προγραμματισμός επίσης είναι μια λειτουργία δυναμική διότι τόσο το περιβάλλον μέσα στο οποίο λαμβάνονται οι αποφάσεις όσο και οι παραδοχές οι οποίες διέπουν την λήψη οποιασδήποτε απόφασης είναι διαρκώς μεταβαλλόμενες.[13]

Επίσης βρίσκει πολλές εφαρμογές στην παραγωγική διαδικασία, όπου αναζητούνται οι ποσότητες των παραγόμενων προϊόντων σε σχέση με τα αποθέματα, τις πρώτες ύλες, το προσωπικό και άλλους παράγοντες με στόχο την μεγιστοποίηση του κέρδους.[16]

Επιπλέον είναι το σύνολο των υπολογιστικών τεχνικών για τον προσδιορισμό του μεγίστου ή του ελαχίστου μιας γραμμικής συνάρτησης της οποίας οι μεταβλητές απαιτείται να ικανοποιούν ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων.

Η εφαρμογή του γραμμικού και ειδικότερα του μαθηματικού προγραμματισμού για τη βελτιστοποίηση της λειτουργίας ή της δομής ενός συστήματος, απαιτεί την περιγραφή του με ένα μαθηματικό μοντέλο. Η

[15] http://www.math.ntua.gr/~coletsos/Documents/linearprogramming.pdf

[13] ΥΨΗΛΑΝΤΗΣ Π.Γ,(2005), Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις ΕΛΛΗΝ, Αθήνα

[16] http://dspace.lib.uom.gr/bitstream/2159/14402/6/KolliasDimitriosMsc2010.pdf

μοντελοποίηση του συστήματος αυτού επιτυγχάνεται με τη βοήθεια μαθηματικών σχέσεων, οι οποίες απεικονίζουν την δομή και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δομικών στοιχείων του συστήματος.

Από μαθηματικής σκοπιάς, ο γραμμικός προγραμματισμός περιγράφει ένα μοντέλο που αφορά τη μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση μιας γραμμικής συνάρτησης κάτω από κάποιους γραμμικούς περιορισμούς. Ο όρος «προγραμματισμός» δεν έχει την έννοια του «προγραμματισμού ηλεκτρονικών υπολογιστών» αλλά αυτή του «σχεδιασμού». Ο Γραμμικός Προγραμματισμός ασχολείται με τη σχεδίαση των δραστηριοτήτων του συστήματος που περιγράφει για να προκύψει το άριστο αποτέλεσμα, το αποτέλεσμα δηλαδή εκείνο, που μεταξύ όλων των δυνατών εναλλακτικών λύσεων πραγματώνει τον προκαθορισμένο σκοπό κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

1.1 Ιστορική Αναδρομή του Γραμμικού Προγραμματισμού

Ο γραμμικός προγραμματισμός ή γενικότερα η επιχειρησιακή έρευνα γεννήθηκεπερίπου στις αρχές του Β' Παγκόσμιο πόλεμο. Ήταν η πρώτη φορά που εφαρμόσθηκαν επιστημονικές μέθοδοι για την άριστη κατανομή των συμμαχικών δυνάμεων και εφοδίων στην Ευρώπη με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο χρόνος πρόσβασης στις πιθανότερες εστίες μαχών και να βελτιωθεί ο εφοδιασμός, ο συντονισμός και η διοίκηση των συμμαχικών δυνάμεων. Τον καιρό εκείνο ονομάσθηκε στην αγγλική γλώσσα OperationsResearch (USA), ο όρος αυτός σημαίνει έρευνα στρατιωτικών επιχειρήσεων.

Σε ελάχιστο χρονικό διάστημα μετά την έναρξη του Β' παγκοσμίου πολέμου, δημιουργήθηκε μια επιστημονική επιτροπή που ο στόχος της ήταν να βρει σε ποιες θέσεις πρόκειτε να εγκατασταθούν οι μονάδες ραντάρ ώστε να αυξηθεί η πιθανότητα αποτελεσματικής αντιμετώπισης των γερμανικών βομβαρδιστικών. Εκείνη την εποχή ο γνωστός μαθηματικός L. V. Kantorovich δούλευε στη Σοβιετική Ένωση και λίγο αργότερα ανακάλυψε το πρόβλημα μεταφοράς του Hitchcock και έτσι επηρέασε σε μεγάλο βαθμό την Βασιλική Ακαδημία της Σουηδίας να του απονείμει μαζί με τον T. C. Koopmans το βραβείο νόμπελ Οικονομίας το 1975. Ο Koopmans ήταν ο πρώτος που πρότεινε το όνομα Γραμμικός Προγραμματισμός.

Αργότερα έγιναν κι άλλες σημαντικές ανακαλύψεις. Στην διάρκεια του Β' Παγκοσμίου πολέμου ζητήθηκε από τις ένοπλες Δυνάμεις των Η.Π.Α. η βοήθεια των επιστημών του Ran Corporation. Πολλοί επιστήμονες μεταξύ αυτών και ο νεαρός τότε διδάκτωρ του μαθηματικού τμήματος του Πανεπιστημίου του Σικάγο, George B. Dantzig, κλήθηκαν για την άρση των κρίσιμων προβλημάτων.

Λίγο μετά τη λήξη του πολέμου, το 1947 ο Dantzig συνέλαβε την ιδέα της ανάπτυξης μιας μεθόδου επίλυσης του προβλήματος βελτιστοποίησης, του γραμμικού προβλήματος.Αυτή η μέθοδος επίλυσης ήταν ο αλγόριθμος Simplex, πιθανών το πιο σημαντικό αποτέλεσμα της Επιχειρησιακής Έρευνας.

Ο αλγόριθμος simplex άρχισε να αντιμετωπίζει προβλήματα χρόνου στην επίλυση των μεγάλων προβλημάτων. Το σημαντικότερο χτύπημα ήρθε το 1971 όταν οι μαθηματικοί Klee και Minty απάντησαν αρνητικά στο σημαντικότερο ανοικτό πρόβλημα τον καιρό εκείνο πάνω στην πολυπλοκότητα της χειρότερης περίπτωσης. Επίσης ο Klee και ο Minty απέδειξαν ότι ο αλγόριθμος simplex από την θεωρητική του άποψη το χειρότερο που μπορούσε να συμβεί, δηλαδή ένας εκθετικός και όχι πολυωνυμικός αλγόριθμος.

Η απόδειξη αυτή των δύο ανωτέρω μαθηματικών έστρεψε την έρευνα σε άλλες κατευθύνσεις. Η ανακάλυψη πολυωνυμικού αλγορίθμου για το γραμμικό πρόβλημα εκτός του ότι έγινε διάσημο ανοικτό πρόβλημα, ταλαιπώρησε και την επιστημονική κοινότητα για αρκετά χρόνια (περίπου 10 χρόνια). Το 1979 ο νεαρός τότε Ρώσος επιστήμονας L. Khachian τροποποίησε έναν αλγόριθμο ο οποίος αναπτύχθηκε από άλλους Ρώσους επιστήμονες, I. I. Dikin και N. Z. Shor, και απέδειξε ότι η τροποποίηση του είναι πολυωνυμική. Ο νέος αλγόριθμος, ο ελλειψοειδής (ellipsoid algorithm) παρ' ότι ήταν ότι καλύτερο από θεωρητικής απόψεως έμελλε να μείνει γνωστός στην ιστορία και για την μνημειώδη πρακτική αναποτελεσματικότητα του. Οι συγκρίσεις με τον αλγόριθμο Simplex ήταν απογοητευτικές και η αιτιολόγηση ήταν σχεδόν προφανής.

Δούλευε πάντα στη χειρότερη περίπτωση του. Κάτω από αυτές τις συνθήκες οι επιστήμονες στράφηκαν φυσιολογικά στην επινόηση νέων πολυωνυμικών αλγορίθμων οι οποίοι όμως έπρεπε να είναι αποτελεσματικοί και στην πράξη. Το Δεκέμβριο του 1983 ο N. Karmarkar στο συνέδριο της IEEE, ανακοίνωσε ότι ο πολυωνυμικός αλγόριθμος εσωτερικών σημείων που είχε κατασκευάσει είναι πολύ γρηγορότερος από τον αλγόριθμο Simplex.

Επιπλέον, ο Borgwardt απέδειξε ότι η μέση υπολογιστική συμπεριφορά ορισμένων κανόνων περιστροφής του αλγορίθμου simplex 'δουλεύουν' πολυωνυμικά. Τέλος, το 1976 η Ακαδημία Επιστημών των Η.Π.Α. απένειμε το

Εθνικό Μετάλλιο Επιστημών (National Medal of Science) στο πατέρα του γραμμικού προγραμματισμού, G. B. Dantzig.[17]

1.2 Ιστορική εξέλιξη του Γραμμικού Προγραμματισμού

Ο γραμμικός προγραμματισμός εμφανίστηκε στη Μεγάλη Βρετανία κατά την διάρκεια του Β’ Παγκόσμιου Πολέμου. Εκείνη την εποχή εκλήθησαν διάφοροι επιστήμονες όπου δημιούργησαν μια ομάδα Επιχειρησιακών Ερευνών υπό τον καθηγητή Blackett. Η ομάδα των Επιχειρησιακών Ερευνών διαδόθηκε γρήγορα και απέκτησε φήμη εφόσον με τις μελέτες που έκαναν πάνω στα στρατιωτικά προβλήματα του πολέμου έγιναν με μεγάλη επιτυχία. Αρκετοί από τους ερευνητές που είχαν πάρει μέρος στην προαναφερθείσα ομάδα συνέχισαν τις έρευνες και δημιούργησαν μια νέα ομάδα για την Βιομηχανία. Η ανάπτυξη και εφαρμογή της Επιχειρησιακής Έρευνας υπήρξε έντονα από το 1950 και ύστερα.

Η εξέλιξη της Επιχειρησιακής Έρευνας ήταν αστραπιαία και έτσι εμφανίστηκε για την λήψη αποφάσεως σε Στρατιωτικά Η Θέματα, Κυβερνητικά Προγράμματα, Προβλήματα Βιομηχανίας, Ιατρικής και γενικά σε θέματα Διοίκησης και Οργάνωσης.

Αφού τελείωσε ο Β΄ Παγκόσμιος Πόλεμος, στο Υπουργείο Αεροπορίας των Ηνωμένων Πολιτειών δημιουργήθηκε μια ομάδα Επιστημών από τον GeorgeDantzing με σκοπό την έρευνα και την μελέτης της εφαρμογής μαθηματικών μεθόδων σε προβλήματα στρατιωτικού προγραμματισμού και θέματα προγραμματισμού και οικονομικής ανάπτυξης. Η έρευνα αυτή οδήγησε τον Dantzig στην Μαθηματική διατύπωση του Γενικού Προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού και στον αλγόριθμο επίλυσης το 1947.

Η εξέλιξη του Γραμμικού Προγραμματισμού διαδόθηκε ταχύτατα. Διάφοροι μελετητές συνέστησαν περισσότερους αλγορίθμους επίλυσης γραμμικών προβλημάτων (Motzkin, Tompkins, Brown, Koopmas κ.α.). Η πρώτη εφαρμογή που εμφανίστηκε ήταν η μέθοδος Simplex.

Όταν εμφανίστηκαν οι Ηλεκτρονικού Υπολογιστές εκείνη την περίοδο εμφανίστηκε και ο Γραμμικός Προγραμματισμός. Αυτή ήταν μια σύμπτωση, γιατί τα

[17]http://dspace.lib.uom.gr/bitstream/2159/13888/1/Glavelis_Msc2009.pdf

προβλήματα προγραμματισμού που περιέχουν μεγάλο αριθμό μεταβλητών αποφάσεων, η επίλυσή του απαιτεί υπολογιστική υποστήριξη.

Στην συνέχεια προεκτάθηκε ο Γραμμικός Προγραμματισμός σε αρκετούς κλάδους. Κάποιοι από αυτούς είναι ο Κυρτός και ο Στοχαστικός Προγραμματισμός.

- Όσον αφορά τον **Κυρτό Προγραμματισμό** είναι μια γενικευμένη μορφή του Γραμμικού Προβλήματος, όπου η αντικειμενική συνάρτηση και οι συνθήκες του προβλήματος να είναι κυρτές συναρτήσεις.
- Τώρα όσον αφορά τον **Στοχαστικό Προγραμματισμό** είναι και αυτός ένα κλάδος του Γραμμικού Προγραμματισμού που ονομάζεται Δυναμικός Προγραμματισμός. Αντικείμενο του κλάδου αυτού είναι το πρόβλημα της Μεταφοράς.

1.3 Γενικά

Στην επιστήμη της Επιχειρησιακής Έρευνας, με τον ορισμό σύστημα αναφέρεται ως πάσης φύσεως επιχειρήσεις, κρατικές υπηρεσίες, βιομηχανίες και οργανισμούς. Για την μελέτη των συστημάτων γίνεται χρήση του μαθηματικού μοντέλου. Ο βασικός σκοπός είναι να υπάρχει ισομορφία με όλες τις σημαντικές παραμέτρους για το σύστημα.[12]

Η επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος Επιχειρησιακής Έρευνας διέρχεται, κατά κανόνα από τα παρακάτω πέντε κύρια στάδια όπως:

Διαμόρφωση του Προβλήματος. Κατά το στάδιο αυτό περιγράφονται και προσδιορίζονται:

- Ο επιδιωκόμενος σκοπός
- Οι επιδρώντες παράγοντες οι παράμετροι του συστήματος
- Οι τυχόν υπάρχοντες περιορισμοί και απαιτήσεις

Κατασκευή Προτύπου. Μετά την διαμόρφωση του προβλήματος, το επόμενο βήμα είναι η επιλογή του πλέον κατάλληλου προτύπου για την αναπαράσταση του συστήματος. Ο επιδιωκόμενος σκοπός και οι τυχόν υπάρχοντες φυσικοί περιορισμοί του συστήματος εκφράζονται με ισοδύναμες μαθηματικές σχέσεις, όλες των οποίων

[12] ΤΣΑΝΤΑΣ Ν.Δ-ΒΑΣΙΛΙΕΟΥ Π.Γ.Χ, (2000), Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη

είναι συναρτήσεις των ελεγχόμενων μεταβλητών. Αν οι μαθηματικές σχέσεις του προτύπου είναι τόσο πολύπλοκες, ώστε να αποκλείεται η επίλυση με αναλυτικές μεθόδους, τότε είναι προτιμότερη η αναπαράσταση του συστήματος με ένα πρότυπο.

Επίλυση προτύπου. Κατά το στάδιο αυτό λαμβάνεται η λύση του αναπτυχθέντος προτύπου και εξετάζεται η συμπεριφορά του συστήματος σε ενδεχόμενες μεταβολές τιμών των παραμέτρων του με μια κατάλληλη ανάλυση ευαισθησίας.

Έλεγχος Προτύπου. Δεδομένου ότι οι βέλτιστες τιμές των ελεγχόμενων μεταβλητών στην προκύπτουσα λύση βελτιώνουν την απόδοση του συστήματος, μόνον στην περίπτωση που το αναπτυχθέν πρότυπο αποδίδει ικανοποιητικά το πραγματικό σύστημα, απαιτείται ο έλεγχος του προτύπου αυτού. Ένα μέτρο της ισχύος του προτύπου είναι η δυνατότητα αναπαραγωγής την προγενέστερης συμπεριφοράς του συστήματος υπό αυτές τις συνθήκες εισόδου.

Εφαρμογή της Λύσης. Το τελευταίο στάδιο αποτελεί η εφαρμογή της λαμβανόμενης λύσης εφόσον βέβαια αυτή γίνεται αποδεκτή. Αυτό άλλωστε είναι και το αντικείμενο της Επιχειρησιακής Έρευνας. Όχι μόνο η υποβολή εισηγήσεων και προτάσεων, αλλά η βελτίωση των εξεταζόμενων συστημάτων.

1.4 Γραμμικός Προγραμματισμός

Γραμμικός Προγραμματισμός: χαρακτηρίζεται το σύνολο των υπολογιστικών τεχνικών που χρησιμοποιούνται για την επίλυση μιας κατηγορίας προβλημάτων κατανομής.[8]Τα προβλήματα αυτά συνίστανται στην κατανομή των μέσων που διατίθενται για την εκτέλεσης ενός ορισμένου αριθμού εργασιών, κατά τρόπο που να επιτυγχάνεται το βέλτιστο αποτέλεσμα.

Ο γραμμικός προγραμματισμός χρησιμοποιεί ένα μαθηματικό πρότυπο για να περιγράψει το πρόβλημα που εξετάζεται. Με τον όρο «*γραμμικός*» εννοείται ότι όλες οι μαθηματικές συναρτήσεις στο πρότυπο είναι απαραίτητο να είναι γραμμικές. Η λέξη «*προγραμματισμός*» έχει την έννοια της σχεδίασης. Άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο γραμμικός προγραμματισμός ασχολείται με τη σχεδίαση των ενεργειών για να προκύψει αυτό που αποκαλείται το «άριστο» αποτέλεσμα, δηλαδή

---

[8]F.SHILLERKAILIEBERMANG.J,(1985), Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα: Τόμος Α, Β' Έκδοση, Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα

εκείνο το αποτέλεσμα που μέσα από ένα σύνολο δυνατών εναλλακτικών λύσεων είναι ικανό να ικανοποιήσει το σκοπό εκείνο που έχει προκαθοριστεί κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Για την καλύτερη κατανόηση του γραμμικού προγραμματισμού είναι η περιγραφή της έννοιας τι είναι το *μαθηματικό πρότυπο*. Μαθηματικά πρότυπα ορίζονται ως τα πρότυπο εκείνα που χρησιμοποιούν ένα σύνολο συμβόλων και που βοηθούν στην αναπαράσταση της δομής(δηλαδή από τι αποτελείται) και της λειτουργίας(τις ενέργειες που εκτελεί) του συστήματος. Με την ανάπτυξη των μαθηματικών τεχνικών που είναι κατάλληλες μπορεί να γίνει η λύση του προβλήματος. Η εφαρμογή των μαθηματικών μεθόδων γίνεται για τον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης.

Είναι απαραίτητο να γίνει αναφορά στο γεγονός ότι τα μαθηματικά πρότυπα έχουν συγκεκριμένη δομή και τα ακόλουθα βασικά στοιχεία:

- <u>Οι ελεγχόμενες μεταβλητές και οι παράμετροι</u>. Οι άγνωστοι παράγοντες που πρόκειται να προσδιοριστούν από τη λύση του προτύπου, ορίζονται ως ελεγχόμενες μεταβλητές. Απ' την άλλη πλευρά οι παράμετροι είναι εκείνες που αποτελούν τις μη ελεγχόμενες μεταβλητές.
- <u>Οι συνθήκες</u>. Σε ένα μαθηματικό πρότυπο πρέπει να ληφθούν υπόψη οι φυσικοί περιορισμοί υπό τη μελέτη του συστήματος, με σκοπό να περιορίσουν τις ελεγχόμενες μεταβλητές στις εφικτές(feasible), δηλαδή στις επιτρεπτές τους τιμές. Οι συνθήκες του προτύπου εκφράζονται με την μορφή των ανοσοεξισόσεων .
- <u>Η αντικειμενική συνάρτηση(objectivefunction).</u> Ορίζεται ως το μέτρο αποτελεσματικότητας του συστήματος που φέρουν τη μορφή συναρτήσεων των ελεγχόμενων μεταβλητών του. Βέλτιστη λύση θεωρείται εκείνη όπου μέσα από τη μελέτη του συστήματος οι ελεγχόμενες παρέχουν τη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ενώ παράλληλα ικανοποιούν όλες τις συνθήκες του προβλήματος.

Για να ελεγχθεί κατά πόσο η λύση στην οποία συγκλίνει η επαναληπτική διαδικασία. Για να επιτευχθεί αυτός ο σκοπός είναι απαραίτητο να γίνει ο κατάλληλος καθορισμός των αναγκαίων και ικανών συνθηκών, εννοείται λοιπόν οι συνθήκες υπό τις οποίες ένα σύνολο τιμών των ελεγχόμενων μεταβλητών είναι απαραίτητες για την εύρεση μιας τέτοιας λύσης. Είναι σημαντικό ότι οι συνθήκες αποτελούν επίσης τη βάση για την ανάπτυξη πολλών τεχνικών.

Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού έχουν σαν κύριο χαρακτηριστικό τη γραμμικότητα, όπου χαρακτηρίζει όλες τις συναρτήσεις ως προς τις προσδιοριστέες μεταβλητές. Υπάρχουν όμως και προβλήματα των οποίων η μορφή επιτρέπει την ανάπτυξη ειδικών και πιο αποτελεσματικών μεθόδων επίλυσης. Αυτά μπορεί να είναι προβλήματα μεταφοράς και καταμερισμού.

Η διαδικασία του γραμμικού προγραμματισμού θεωρείται ότι είναι μια συστημική διαδικασία προσέγγισης του τρόπου επίλυσης προβλημάτων που έχουν ως θέμα τη κατανομή πόρων. Όπως έχει ήδη αναφερθεί τα προβλήματα εκφράζονται με γραμμικές συναρτήσεις, δηλαδή συναρτήσεις πρώτου βαθμού που πρέπει βρίσκει τη βέλτιστη λύση(να μεγιστοποιεί ή να ελαχιστοποιεί) ικανοποιώντας ένα σύνολο περιορισμών που και αυτοί εκφράζονται ως γραμμικές σχέσεις. Οι συνθήκες του προβλήματος ορίζονται από ένα σύστημα ανισοεξισώσεων και απεικονίζουν τους φυσικούς πόρους που εκφράζονται ως περιορισμοί στους οποίους υπόκειται. Αυτό που εκφράζεται ως επιδιωκόμενο στόχο είναι η αντικειμενική συνάρτηση που χρήζει προς βελτιστοποίηση.

1.5 Μορφή του γενικού προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού

Το γενικό πρότυπο του γενικού προβλήματος του γραμμικού προγραμματισμού έχει την ακόλουθη μορφή:

min ή max $c_1x_1+\ldots+c_jx_j+..+c_nx_n$

υπό τις συνθήκες $a_{i1}x_1+..+a_{ij}x_j+..+a_{in}x_n \leq$ ή $=$ ή $\geq$ $b_i, i = 1,..,m$

Η γραμμικότητα της αντικειμενικής συνάρτησης και αυτή των συνθηκών και η μη αρνητικότητα των προσδιοριστέων μεταβλητών, όλοι αυτοί οι παράγοντες αποτελούν τα κύρια χαρακτηριστικά γνωρίσματα ενός γραμμικού προτύπου.

Στη συνέχεια θα πρέπει αναφερθεί ο τρόπος που ένα πρόβλημα κατανομής διαμορφώνεται σαν ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μέσω της κατασκευής ενός μαθηματικού προτύπου. Για την καλύτερη κατανόηση αυτού θα παρατεθεί το επόμενο παράδειγμα.

Μια βιομηχανική μονάδα διαθέτει ορισμένες ποσότητες διάφορων πόρων, όπως είναι οι πρώτες ύλες, τα μηχανήματα και οι εργάτες που απασχολούνται, όλοι αυτοί οι παράγοντες μπορούν να συνδυαστούν για την παραγωγή διάφορων προϊόντων. Ζητείται να προσδιοριστεί σε τι ποσότητες πρέπει να παραχθούν τα διάφορα προϊόντα έτσι ώστε να προκύπτει το μέγιστο δυνατό κέρδος από τη διάθεση των προϊόντων αυτών. Τα δεδομένα του προβλήματος προσδιορίζονται ως εξής:

m: ο αριθμός των πόρων

n: ο αριθμός των προϊόντων

a_{ij}: η ποσότητα του πόρου i ου απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας ποσότητας του προϊόντος j.

b_i: η διαθέσιμη ποσότητα από το πόρο i

c_j:το κέρδος ανά μονάδα ποσότητας του προϊόντος j

οι προσδιοριστέες μεταβλητές είναι οι ποσότητες x_jπου πρέπει να παραχθούν από τα διάφορα προϊόντα jj=1,..,n, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της επιχείρησης.

Το επόμενο βήμα είναι η λεκτική διατύπωση του παραπάνω προβλήματος να μετατραπεί σε μια μαθηματική διαμόρφωση αυτού. Αυτό εκφράζεται με την αναγωγή των προτάσεων σε ισοδύναμες μαθηματικές προτάσεις

Η συνολική ποσότητα που χρησιμοποιείται από το πόροi είναι ίση με:

$$a_{i1}x_1+..+a_{ij}x_j+..+a_{in}x_n$$

Επειδή η ποσότητα αυτή δεν πρέπει να υπερβαίνει τη διαθέσιμη ποσότητα b_iαπό το πόρο i, προκύπτει για κάθε i=1,..,m, μια γραμμική ανισότητα της παρακάτω μορφής

$$a_{i\,1}x_1+..+a_{i\,j}j_j+..+a_{i\,n}\,x_n \leq bi, i = 1,..,m$$

Εξάλλου επειδή τα x_j, j=1,..,n, παριστάνουν ποσότητες και αρνητικές ποσότητες δεν επιδέχονται, γενικά κατάλληλη και λογική ερμηνεία θα πρέπει να είναι

$$x_j \geq 0, j = 1,..,n$$

Το κέρδος που προκύπτει από τη παραγωγή και διάθεση στην κατανάλωση μιας ποσότητας x_j από το προϊόν j, είναι c_jx_j. Επομένως η παραγωγή θα πρέπει να προγραμματισθεί έτσι ώστε οι παραγόμενες ποσότητες x_j, j=1,..,n, να μεγιστοποιούν τη γραμμική μορφή

$$z = c_1x_1+..+c_jx_j+..+c_nx_n$$

Η ανάλυση που προηγήθηκε οδηγεί στην ακόλουθη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος που έχει ήδη περιγραφεί παραπάνω προγραμματισμού της παραγωγής:

$$\max\textstyle\sum_{j=1}^{n} cjxj$$

υπό τις συνθήκες $\sum_{j=1}^{n} a_{\,i\,j}\,x_j \leq b_i\,, i = 1,..,m$

$x_j \geq 0, j = 1,..,n$

1.6 Υποθέσεις γραμμικού προγραμματισμού.

Για να διαμορφωθεί ένα πρόβλημα σε ένα πρότυπο γραμμικού προγραμματισμού υπάρχουν οι υποθέσεις που βοηθούν στη διαμόρφωση αυτή. Ικανοποιώντας ένα πρόβλημα αυτές τις υποθέσεις βγαίνει το συμπέρασμα εάν το πρότυπο του γραμμικού προγραμματισμού είναι αντιπροσωπευτικό αυτού. Παρακάτω θα εξηγηθούν τέσσερις υποθέσεις:

1. <u>Αναλογικότητα</u>: Η αναλογικότητα (proportionality) αναφέρεται σε ξεχωριστές δραστηριότητες, που εξετάζονται ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Ακόμη αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν αρχικές επιβαρύνσεις με την έναρξη της δραστηριότητας και η ιδιότητα αυτή ισχύει σε όλα τα επίπεδα τιμών στης δραστηριότητας. Τέλος πρέπει να αναφερθεί ότι με την υπόθεση της αναλογικότητας δεν εξασφαλίζεται ότι η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί είναι γραμμικές συναρτήσεις.
2. <u>Προσθετικότητα</u>: Η προσθετικότητα (additivity) προϋποθέτει ότι δεν υπάρχουν αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δραστηριοτήτων. Για κάθε επίπεδο δραστηριοτήτων ($x_1, x_2, .., x_n$), η συνολική χρήση κάθε πόρου καθώς και το συνολικό μέτρο αποτελεσματικότητας είναι ίσα με άθροισμα των αντίστοιχων ποσοτήτων κάθε δραστηριότητας.
3. <u>Διαιρετότητα</u>: Διαιρετότητα (divisibility) είναι η υπόθεση εκείνη όπου, οι μονάδες δραστηριότητας μπορούν να διαιρεθούν σε οποιοδήποτε κλασματικό επίπεδο, έτσι ώστε οι μη ακέραιες τιμές για τις μεταβλητές αποφάσεων να είναι επιτρεπτές. Η λύση που είναι το αποτέλεσμα από τη χρήση του γραμμικού προγραμματισμό έχει συχνά μη ακέραιες τιμές.
4. <u>Προσδιοριστικότητα</u>: Η υπόθεση αυτή αφορά ότι όλες οι τιμές των παραμέτρων του προτύπου, δηλαδή τα a_{ij}, b_i, c_jείναι γνωστές σταθερές. Οι παράμετροι βασίζονται όμως συχνά σε προβλέψεις μελλοντικών καταστάσεων, οι οποίες έχουν αναπόφευκτα κάποιο βαθμό αβεβαιότητας. Ένα σημαντικό εργαλείο είναι μετά την εύρεση της άριστης λύσης κάνουμε ανάλυση ευαισθησίας (sensitivityanalysis) στις τιμές των παραμέτρων.

1.7 Τυποποιημένη και κανονική μορφή των γραμμικών προτύπων

Το γενικό πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να εμφανισθεί σε διάφορες μορφές (ελάχιστο ή μέγιστο) και αυτό αφορά την αντικειμενική συνάρτηση, ή με την μορφή ανισοεξισώσεων ($\geq, =, \leq$) για τις συνθήκες των περιορισμών. Υπάρχουν διάφορες εκβάσεις στα παραδείγματα που μπορεί να μελετηθούν άγονται σε μία κοινή μορφή, που επιτρέπει την χρήση της γενικής υπολογιστικής διαδικασίας που ονομάζεται μέθοδος simplex για την επίλυση γενικευμένου προβλήματος.

Η μορφή αυτή είναι μια γενικευμένη, γνωστή ως τυποποιημένη (standard) είναι η αυτή που ακολουθεί:

$$\max z = c_1 x_1 + \ldots + c_j x_j + \ldots + c_n x_n$$

Υπό τις συνθήκες $a_{11} x_1 + \ldots + a_{1j} x_j + \ldots + a_{1n} x_n = b_1$

$$a_{i1} x_1 + \ldots + a_{ij} x_j + \ldots + a_{in} x_n = b_i \quad (2.4\text{-}1)$$

$$a_{m1} + x_1 + \ldots + a_{mj} x_j + \ldots + a_{mn} x_n = b_m$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_j \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

Ένα πρόβλημα που βρίσκεται σε τυποποιημένη μορφή έχει χαρακτηριστικά που θεωρούνται σημαντικά που είναι τα ακόλουθα:

- Όλες οι συνθήκες που αφορούν το πρόβλημα εκφράζονται με τη μορφή εξισώσεων, εκτός από τις συνθήκες μη αρνητικότητας που διατηρούν την ανισοτική τους μορφή.
- Όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές.
- Ζητείται ο προσδιορισμός μέγιστου, ως προς την αντικειμενική συνάρτηση.

Οποιαδήποτε περίπτωση προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού ανάγεται σε ένα είδος ανώτερης τυποποιημένης μορφής χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς. Στη συνέχεια λοιπόν θα αναλυθούν εκτενέστερα παρακάτω.[11]

<u>Περίπτωση 1. Προσδιορισμός ελαχίστου της αντικειμενικής συνάρτησης.</u>

[11] ΜΠΟΤΣΑΡΗΣ Χ.Γ, (1996), Επιχειρησιακή Έρευνα Μέθοδοι &Προβλήματα, Εκδόσεις Έλλην, Αθήνα

Ὀταν ζητείται ο προσδιορισμός την ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης $z = c_1x_1 + .. + c_jx_j + c_nx_n$, αντί τη μεγιστοποίηση αυτής θέτουμε:

$y = -z = c_1x_1 - .. - c_jx_j - .. - c_nx_n$

Και γίνεται η μεγιστοποίηση στη συνάρτηση y. Το επόμενο βήμα μετά από την εύρεση του μέγιστου της y, είναι να προσδιοριστεί το ελάχιστο της z κάνοντας χρήση της επόμενης βασικής σχέσης

$\min z = -\max y'$

Είναι γεγονός, αν x_j^*, j=1,..,n, είναι μια θέση ελάχιστου της z και κάποια φραγμένη περιοχή c του n- του δισδιάστατου διανυσματικού χώρου R^nκαι z^* είναι η αντίστοιχη ελάχιστη τιμή της z, τότε ισχύει σε κάθε σημείο της περιοχής c η σχέση που ακολουθεί

$$z^* - z \leq 0$$

Μέσα από αυτή προκύπτει

$$(-z^*) - (-z) \geq 0$$

Υπάρχει η εναλλακτική λύση να θέτοντας y=-z

$y^* - y \geq 0$

Άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, το σημείο x_j^* , j=1,..,n, είναι μια θέση του μέγιστου της συνάρτησης που έχει αναλυθεί παραπάνω, είναι maxy=-minz, ή minz=-maxy= -max-z.

Περίπτωση 2. Συνθήκες της μορφής $l_j \leq x_j$

Για να αναλυθεί η συγκεκριμένη περίπτωση, θεωρείται η αλλαγή μεταβλητής

$y_j = x_j - l_j$

Και γίνεται η αντικατάσταση σε όλες τις σχέσεις το x_jμε το y_j+l_j. Είναι αναμενόμενο ότι $y_j \geq 0$, αφού $x_j \geq l_j$

Περίπτωση 3. Συνθήκες της μορφής $x_j \leq v_j$

Θέτοντας $\qquad y_j = v_j - x_j \geq 0$

Και με την αντικατάσταση αυτής σε όλες τις σχέσεις το x_jμε το v_j-y_j, $y_j \geq 0$.

Περίπτωση 4. Όταν το x_jείναι θετικό, αρνητικό ή μηδέν.

Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει περιορισμός ως προς το πρόσημο. Πρέπει να αναφερθεί ότι αυτό σημαίνει ότι μια μεταβλητή είναι ισοδύναμη με την διαφορά δύο μη αρνητικών μεταβλητών. Άρα θέτοντας σε όλες τις σχέσεις

$x_j = x_j^+ - x_j^-, x_j^+ \geq 0, x_j \geq 0$

Ας σημειωθεί ότι στην τελική λύση ένα τουλάχιστον από τα x_j^+και x_j^- θα είναι μηδέν, το οποίο εξαρτάται από το κατά πόσο η βέλτιστη τιμή του x_jείναι θετική, αρνητική ή μηδέν.

Περίπτωση 5. Συνθήκες της μορφής $l_j \leq x_j \leq v_j$

Η παραπάνω συνθήκη είναι ισοδύναμη με την εξής

$$0 \leq x_j - l_j \leq v_j - l_j$$

Αν παρατηρηθεί ότι όπως και στην περίπτωση 2, μπορεί να θεωρηθεί ότι με την αλλαγή μεταβλητής $y_j=x_j-l_j$ και η αντικατάσταση αυτής σε όλες τις σχέσεις το x_jμε το $y_j=x_j+l_j$, όπου$y_j \geq 0$. Παρατηρείται πρέπει να ισχύει και η παρακάτω σχέση: $y_j \leq v_j - l_j$. Ο χειρισμός του παραπάνω προβλήματος γίνεται με δύο τρόπους, ο πιο αποτελεσματικός είναι ο αλγόριθμος των φραγμένων μεταβλητών (boundedvariablesalgorithm). Χρησιμοποιείται όταν ο αριθμός των συνθηκών της παραπάνω μορφής είναι και θεωρείται σχετικά μεγάλος. Σε αντίθεση όταν ο αριθμός των συνθηκών αυτών είναι μικρός, είναι αναγκαίο να προστεθεί στο y_iμια μεταβλητή s_j που ονομάζεται *περιθώριο(slack),* το οποίο σημαίνει ότι είναι μια θετική ποσότητα η οποία αίρει το «περιθώριο» $y_j - (v_j - l_j)$ όπως δηλώνει και το όνομά της. Άρα προκύπτει μια ισότητα που έχει την εξής μορφή:

$$y_j + s_j = v_j - l_j, y_j \geq 0, s_j \geq 0$$

Όπως θα δούμε οι περιθώριες μεταβλητές χρησιμοποιούνται ευρύτατα στις επόμενες περιπτώσεις που θα αναλυθούν.

Περίπτωση 6. Συνθήκες της μορφής $\mathrm{a_{1\,i}x_i + .. + a_{i\,j}\,x_j + .. + a_{i\,j}x_j + .. + a_{i\,n}x_n \leq b_i}$

Μια τέτοια συνθήκη για να αναχθεί σε τυποποιημένη μορφή που εκφράζεται όπως έχει ήδη αναφερθεί η (2.4-1), δηλαδή με τη μορφή ισότητας και αυτό επιτυγχάνεται με τη πρόσθεση μιας μη αρνητικής περιθωρίου μεταβλητής x_sστο αριστερό μέλος της ανισότητας έχει ως εξής:

$$\mathrm{a_{1\,i}x_i + .. + a_{i\,j}\,x_j + .. + a_{i\,n}x_n + x_s = b_i,\ x_s \geq 0}$$

Περίπτωση 7. Συνθήκες της μορφής $a_{1\,i}x_i + .. + a_{ij}x_j + .. + a_{ij}x_j + .. + a_{in}x_n \geq b_i$

Εάν αφαιρεθεί από το αριστερό μέλος της ανισότητας μια μη αρνητική περιθώριο μεταβλητή x_sμετατρέπεται σε συνθήκη που έχει τυποποιημένη μορφή

$$\mathrm{a_{1\,i}x_i + .. + a_{i\,j}\,x_j + .. + a_{i\,n}x_n - x_s = b_i,\ x_s \geq 0}$$

Περίπτωση8 Συνθήκεςτης μορφής $b_{i\,1} \leq a_{i\,1}x_1 + .. + a_{i\,1}x_1 + .. + a_{ij}x_{j\pm} + .. + a_{in}x_n \leq b$

Συνθήκη σαν αυτή μπορεί να αντικατασταθεί από ένα ισοδύναμο σύστημα δύο συνθηκών του τύπου (=) με την εισαγωγή δύο περιθώριων μεταβλητών $x_{s\,1}$ και $x_{s\,2}$ όπως φαίνεται παρακάτω :

$$a_{i\,1}x_1+..+a_{ij}x_j+..+a_{in}x_n - x_{s\,1} = b_{i\,1}, x_{s\,1} \geq 0$$

$$a_{i\,1}x_1+..+a_{ij}x_j+..+a_{in}x_n - x_{s\,2} = b_{i\,2}, x_{s\,2} \geq 0$$

Περίπτωση 9. Συνθήκες που έχουν τη μορφή $|a_{i\,1}x_1+..+a_{ij}x_j+..+a_{in}x_n| \leq b_i$

Συνθήκη αυτή εντάσσεται ως μια ειδική μορφή της προηγούμενης περίπτωσης. Αυτό εφαρμόζεται όταν ισχύει $b_{i\,1}=-b_i$ και $b_{i\,2}=-b_i$

Περίπτωση 10. Συνθήκες της μορφής $|z| = |c_1x_1+..+c_jx_j+..+c_nx_n|$

Η επίλυση του προβλήματος αυτού ανάγεται στην επίλυση δύο προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού της συνηθισμένης μορφής, ένα τουλάχιστον των οποίων παρέχει την επιθυμητή λύση. Τα δύο αυτά προβλήματα ανάγονται στις δύο παρακάτω κατηγορίες :

- Έστω, ότι η συνάρτηση z είναι μη αρνητική στη θέση ελαχίστου της αντικειμενικής συνάρτησης |z|. Τότε σύμφωνα με τα αποτελέσματα που έχουν αναλυθεί στη περίπτωση 1, το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την μεγιστοποίηση της συνάρτησης $y = -c_1x_1-..-c_jx_j-..-c_nx_n$, υπό τη πρόσθετη συνθήκη $c_1x_1+..+c_jx_j+..+c_nx_n \geq 0$.
- Απ' την άλλη, ας υποθέσουμε η συνάρτηση είναι μη θετική στην θέση του ελαχίστου της |z|. Σε αυτή τη περίπτωση λοιπόν, το ισοδύναμο πρόβλημα συνίσταται στην μεγιστοποίηση της $y = c_1x_1+..+c_jx_j+..+c_nx_n$, υπό τη πρόσθετη συνθήκη $c_1x_1+..+c_jx_j+..+c_nx_n \leq 0$.

Κανονική μορφή (canonical), ονομάζεται μια άλλη μορφή του προβλήματος του γραμμικού προγραμματισμού, η οποία είναι αυτή που χρησιμοποιείται για την επίλυση των δυϊκών προβλημάτων.

1.8 Μοντελοποίηση Ενός Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού

Στις προηγούμενες ενότητες έχουν αναλυθεί τι είναι Γραμμικός προγραμματισμός, ο ορισμός της αντικειμενικής συνάρτησης, τι σημασία έχουν οι περιορισμοί και άλλων δομικών απαραίτητων στοιχείων. Στην ενότητα αυτή λοιπόν θα εφαρμοστούν στη πράξη δείχνοντας πως πραγματοποιείται η μοντελοποίηση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.

Παράδειγμα: «Ξυλεία»

Αγροτικός συνεταιρισμός κερδίζει 4,3 και 6 χρηματικές μονάδες που πραγματοποιεί αντίστοιχα στις 3 διαφορετικές κονσέρβες, έστω Α,Β,Γ όπου αναμιγνύοντας ροδάκινο, βερίκοκο, ανανά. Σε γενικές γραμμές η παραγωγική διαδικασία χωρίζεται σε 2 στάδια: αποφλοίωση/ κοπή (Σ1) και τη μείξη/ συσκευασία (Σ2). Στο πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι απαιτήσεις καθώς και η διαθεσιμότητα κάθε παραγωγικού συντελεστή.

	Παραγωγικός Συντελεστής				
Κονσέρβες	Ροδάκινο	Βερίκοκο	Ανανάς	1^o Στάδιο	2^o Στάδιο
Α	3	2	1	1.2	1
Β	2	2	2	1.4	2
Γ	1	2	3	1.5	1
Διαθεσιμότητα	920	900	930	1260	600

Η αντικειμενική συνάρτηση έτσι ώστε να η εταιρία να καταφέρει να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της ορίζεται ως εξής:

$$z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

Επόμενο βήμα είναι να καθοριστούν οι περιορισμοί έτσι ώστε να η καλύτερη δυνατή διαχείριση των πόρων, οι παρακάτω περιορισμοί αφορούν τη παραγωγή των κονσερβών :

$$3\chi_1 + 2\chi_2 + \chi_3 \leq 920$$

$$2\chi_1 + 2\chi_2 + 2\chi_3 \leq 900$$

$$\chi_1 + 2\chi_2 + 2\chi_3 \leq 930$$

Οι παρακάτω περιορισμοί αφορούν το χρόνο που απαιτείται για κάθε πραγματοποίηση κάθε σταδίου ξεχωριστά:

$1.2\chi_1 + 1.4\chi_2 + 1.5\chi_3 \leq 1{,}260$

$\chi_1 + 2\chi_2 + \chi_3 \leq 600$

$\chi_1, \chi_2, \chi_3 \geq 0$

1.9 Ορολογία

Αφού έχουν αναλυθεί οι περισσότερες μορφές των συνθηκών και των μετασχηματισμών που μπορούν τα προβλήματα του γραμμικού προγραμματισμού να πάρουν μορφή. Είναι χρήσιμο σε αυτό το σημείο να αναλυθεί η ορολογία που χρησιμοποιείται και τι αυτή σημαίνει.

Μεταβλητές: είναι τα δομικά στοιχεία του προβλήματος που μπορεί να επηρεάσει ο αναλυτής. Για το λόγο αυτό συχνά αναφέρονται και ως μεταβλητές ελέγχου ή μεταβλητές απόφασης.

Λύση: με τον όρο λύση στο γραμμικό προγραμματισμό θεωρείται κάθε προσδιορισμός τιμών για τις μεταβλητές αποφάσεων.

Εφικτή λύση (feasiblesolution): ορίζεται ως η λύση που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς

Άριστη λύση (optimalsolution): θεωρείται η εφικτή λύση που δίνει την επιθυμητή τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση, η «πιο επιθυμητή τιμή» είναι αυτή η μέγιστη ή ελάχιστη τιμή και εξαρτάται από το ποιος είναι ο αντικειμενικός σκοπός.

1.10 Μέθοδος Simplex

Το 1947 οGeorgeDantzing ανέπτυξε τη μέθοδο Simplex και η δημοσίευση της πραγματοποιήθηκε το 1951 στη πολυσυζητημένη μελέτη του που φέρει το τίτλο «MaximizationofaLinearofVariablesSubjecttoLinearInequalities», T.PKoopmans είναι ο εκδότης της, CowlesCommissionMonographNo.13, Wiley, NewYork,1951. Η οποία είναι μια εμπεριστατωμένη και διάσημη μέθοδος στην επιστημονική κοινότητα για την επίλυση των προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού. Η ιδέα πως λειτουργεί ο αλγόριθμος περιγράφεται με την βοήθεια γεωμετρικών όρων. Η έναρξη του αλγόριθμου γίνεται με το καθορισμό ενός ακρότατου σημείου στον εφικτό χώρο. Στη συνέχεια πραγματοποιείται ο έλεγχος εάν είναι εφικτό να ληφθεί μια βελτιωμένη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, μεταβαίνοντας σε ένα γειτονικό ακρότατο. Στη περίπτωση που αυτό δε συμβαίνει, τότε μετακινείται σε αυτό το γειτονικό σημείο με τη βελτιωμένη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων, δύο περιπτώσεις υπάρχουν για τα αποτελέσματα που μπορεί να δώσει ο αλγόριθμος, είτε θα βρει ένα ακρότατο σημείο όπου θα βρίσκεται η βέλτιστη λύση, είτε θα καταλήξει στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει κάποια βέλτιστη λύση.

Ένα από τα πιο σημαντικά εργαλεία του γραμμικού προγραμματισμού, είναι η μέθοδος simplex. Η μέθοδος simplex έχει σχεδιαστεί για να διευκολύνει ένα άτομο, ομάδα ή οργανισμό να βρίσκει, να επεξεργάζεται, να αποσαφηνίζει και να προσδιορίζει σύνθετα, αόριστα ή στρατηγικά ζητήματα δίνοντας βάρος στις ικανότητες εντοπισμού και αντίληψης προβλημάτων πριν το στάδιο της λύσης και της εφαρμογής αυτής. Στη συνέχεια θα αναλυθούν τα στάδια που αναπτύσσεται η μέθοδος αυτή.

1.10.1 Περιγραφή της Μεθόδου Simplex

Η μέθοδος της Simplex θεωρείται ο αλγόριθμος, όπου νοείται η διαδικασία η οποία επαναλαμβάνεται έχοντας σκοπό την επίλυση ενός προβλήματος, δηλαδή μια συστηματική διαδικασία που πραγματοποιείται τόσες φορές μέχρις ότου βρεθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα. Άρα κάθε φορά που τα βήματα του αλγορίθμου επαναλαμβάνονται, η διαδικασία αυτή ονομάζεται επανάληψη (iteration). Όπως κάθε αλγόριθμος, έτσι και η μέθοδος αυτή περιλαμβάνει κανόνες που τη διέπουν για να ξεκινήσει η διαδικασία και ποια είναι τα κριτήρια που προσδιορίζουν πότε εκείνη θα τελειώσει. Συνεπώς, είναι μια επαναληπτική μέθοδος όπου η χρήση της βοηθά στην επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού με σκοπό την εύρεση μιας βέλτιστης λύσης.

Η βασική ιδέα είναι η δημιουργία βασικών δυνατών λύσεων μέσα από τη δημιουργία ενός συστήματος και ο έλεγχος της εύρεσης της βέλτιστης λύσης. Μέσα από την επαναληπτική διαδικασία της μεθόδου υπάρχει η εύρεση των εφικτών λύσεων με ένα συστημικό τρόπο επιτυχώς.[7]Δύο βασικά δομικά στοιχεία για την

[7]LEVITINA,(2008), Εισαγωγή στην Ανάλυση & Σχεδίαση Αλγορίθμων, Εκδόσεις Τζιόλα

υλοποίηση της μεθόδου Simplex είναι η εφικτή και άριστη λύση. *Εφικτή ή δυνατή λύση:* ορίζεται ως μια λύση η οποία ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί. Οι εφικτές λύσεις είναι τα σημεία εκείνα που διαμορφώνουν την τομή όλων των περιορισμών που ονομάζεται αποδεκτή περιοχή. *Άριστη λύση:* ονομάζεται λοιπόν η εφικτή λύση, η οποία έχει ως αποτέλεσμα την πλέον ευνοϊκή τιμή στην ορισμένη ως αντικειμενική συνάρτηση. Ευνοϊκή τιμή θεωρείται εκείνη η μεγαλύτερη ή μικρότερη τιμή ανάλογα με το σκοπό της αντικειμενικής συνάρτησης είναι η μεγιστοποίηση ή η ελαχιστοποίηση αυτής. Είναι σημαντικό επίσης να γίνουν διακριτά τα γενικά χαρακτηριστικά των άριστων λύσεων, με απώτερο σκοπό να περιορισθεί το σύνολο των ελέγχων που απαιτούνται για την εύρεση τους όσο το δυνατό περισσότερο. Τέλος, σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού η άριστη λύση εάν υπάρχει, βρίσκεται πάντα στο σύνολο εκείνο που περιέχει τις βασικές εφικτές λύσεις και να είναι μια από αυτές.[9]

Η μέθοδος Simplex είναι εκείνη η οποία δημιουργώντας συστήματα με αλγεβρικό τρόπο μπορεί και εξετάζει στη περιοχή των εφικτών λύσεων στα ακραία σημεία τη τιμή που παίρνει η αντικειμενική συνάρτηση. Διαδοχικά εξετάζοντας τα ακραία σημεία, επαναλαμβάνεται συνέχεια οι ίδιες διαδικασίες και αλγεβρικές πράξεις μέσα από διαδοχικά βήματα με σκοπό τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης. Κάθε βήμα λοιπόν της μεθόδου είναι αυτό που αντιστοιχεί σε ένα ακραίο σημείο που ανήκει στη περιοχή των εφικτών λύσεων. Σε κάθε νέο βήμα, το επόμενο ακραίο σημείο επιλέγεται έτσι ώστε η αντικειμενική συνάρτηση να αυξάνεται (ή σε αντίθετη περίπτωση να μειώνεται εάν ο αντικειμενικός σκοπός της συνάρτησης είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους) επομένως πλησιάζοντας σταδιακά προς τη βέλτιστη λύση.

Μελετώντας τη μέθοδο αυτή μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες τόσο για την εύρεση της βέλτιστης λύσης αλλά και για την σπουδαιότητά τους σε κάθε οικονομικής φύσεως ανάλυσης, χωρίς να υπάρχει άλλος τρόπος για να τις αποκτήσουμε.

[9]Κώστογλου Β, (2002), Επιχειρησιακή Έρευνα: Μεθοδολογία Εφαρμογές και Προβλήματα Πληροφοριακά Συστήματα Διοίκησης, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη

1.10.2 Ο Αλγόριθμος Simplex

Τα βήματα που περιγράφουν τη μέθοδο Simplex μπορούν και εκτελούνται με μεγαλύτερη ευκολία χρησιμοποιώντας μια σειρά πινάκων που ονομάζονται tableauxSimplex. Παρακάτω δίνεται ο αλγόριθμος αυτός σε μια άτυπη μορφή:

1. Ανάγουμε τους περιορισμούς που εκφράζονται με ανισώσεις σε εξισώσεις, εισάγοντας νέες μη αρνητικές μεταβλητές, οι οποίες ονομάζονται χαλαρές μεταβλητές και εκφράζουμε την αντικειμενική συνάρτηση σε κατάλληλη μορφή.
2. Κατασκευάζουμε τον αρχικό Simplex πίνακα.
3. Εφαρμόζουμε τον έλεγχο της μέγιστης λύσης. Αν η βασική εφικτή λύση είναι μέγιστη,
4. τότε το πρόβλημα έχει λυθεί. Αν όχι τότε προχωράμε στο επόμενο βήμα.
5. Κατασκευάζουμε ένα νέο Simplex πίνακα ακολουθώντας την εξής διαδικασία:
    - Επιλέγουμε την στήλη άξονα
    - Επιλέγουμε την σειρά άξονα
    - Εφαρμόζουμε τη διαδικασία οδήγησης γύρω από την καταχώριση άξονα.
6. Επαναλαμβάνουμε το βήμα 3.

Δημιουργούμε πίνακες όπου περιέχουν μόνο τις πιο σημαντικές πληροφορίες που ανακτώνται από τη πλήρη μορφή των εξισώσεων, αυτές είναι:

- Οι συντελεστές των μεταβλητών
- Οι σταθερές του δεξιού μέλους των εξισώσεων και
- Η βασική μεταβλητή σε κάθε εξίσωση.

Ο αλγόριθμος για να αναπτυχθεί πρέπει να ισχύει η υπόθεση που ακλουθεί ότι ο πίνακας A απαρτίζεται από έναν mxm μοναδιαίο πίνακα που λειτουργεί ως πρώτη βάση. Σχηματίζουμε ένα πίνακα όπου έχει (m+1) * (n+4) στην πρώτη στήλη λοιπόν είναι οι βασικές στήλες ενώ στη δεύτερη οι τιμές των αντίστοιχων συντελεστών, στη τρίτη στήλη υπάρχει η αρχική βασική εφικτή λύση, στις επόμενες στήλες m αναφέρονται πληροφορίες για τα στοιχεία που υπάρχουν στις στήλες του πίνακα A ενώ η τελευταία στήλη μένει προσωρινά κενή. Τέλος πρέπει να αναφερθεί στη τελευταία γραμμή γράφεται η τιμή z_0 της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στην αρχική λύση και οι τιμές των διαφορών z_k-c_k (k=1,2,...,n).

			C_1	C_2	...	C_m	C_{m+1}	C_{m+2}	...	Cn	
B	C_B	B	P_1	P_2		P_m	P_{m+1}	P_{m+2}	...	Pn	θ
P_1	C_1	b_1	1	0		0	a_{1m+1}	a_{1m+2}	...	a 1n	
P_2	C_2	b_2	0	1		0	a_{2m+1}	a_{2m+2}	...	a 2n	
.	.	.	.	.		.	.	.	...	.	
.	.	.	.	.		.	.	.	...	.	
.	.	.	.	.		.	.	.	...	.	
							a_{mm+1}	a_{mm+2}	...	amn	
P_m	C_m	b_m	0	0		1	Z_{m+1}-C_{m+1}	Z^{m+2}-C_{m+2}	...	Zn-Cn	
		$c'_B b$	0	0		0					

Σε ένα από τα επόμενα βήματα του αλγόριθμου γίνεται ο έλεγχος αν η λύση x_0 είναι η άριστη βρίσκοντας τη διαφορά $z_k - c_k$.Υπάρχουν τρείς διαφορετικές περιπτώσεις:

- Αν $z_k - c_k \geq 0$, ισχύει για όλα τα k, η λύση x_0 είναι άριστη
- Αν $z_j - c_j \leq 0 \; \kappa\alpha\iota x_{ij} \leq 0 (i = 1,2, \ldots, m)$ για κάποιο j, τότε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι μη φραγμένο
- Αν δεν ισχύει καμιά από τις παραπάνω περιπτώσεις τότε ο αλγόριθμος πηγαίνει στο επόμενο βήμα

Γράφοντας στην τελευταία στήλη $x_{s0}/x_{sj}, \gamma\iota\alpha\, x_{sj} > 0$. Αυτό προκύπτει από τους λόγους των στοιχείων της στήλης b με τα αντίστοιχα θετικά στοιχεία της P_j. Η στήλη P_i που φεύγει από τη βάση ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{P}_i : \frac{\mathbf{x}_{i\,0}}{\mathbf{x}_{i\,j}} = \min \left\{ \frac{\mathbf{x}_{s\,0}}{x\ sj} : \mathbf{x}_{s\,j} > 0 \right\}$$

Η στήλη P_j τα στοιχεία αυτής προκύπτουν από την ακόλουθη σχέση

$$P_j : |z_j - c_j| = \max \quad \{z_k - c_k\}| : z_k - c_k < 0\}$$

Πιλότος, ονομάζεται το στοιχείο x_{ij}, το οποίο σημειώνεται με ένα τετράγωνο. Άρα τα x'_{sk}του επόμενου tableau ορίζονται από τα εξής:

$$X_{ik} = \frac{x_{ik}}{x_{ij}} (k = 0,1,2, \ldots, n)$$

$$x'_{sk} = x'_{sk} - \frac{x_{ik}}{x_{ij}}(s = 1,2,\ldots,m,m+1 \;\; s \neq i \kappa \alpha \iota k = 0,1,\ldots,n) \acute{o}\pi o \upsilon x_{m+10}$$
$$= z_0, x_{m+1k} = z_k - c_k \quad (k = 1,2,\ldots,n)$$

Όλα λοιπόν τα βήματα που έχουν αναπτυχθεί προηγουμένως σχηματικά μπορούν με τα ακόλουθα tableau.

			C1	...ci	...cm	Cm+1	cj	...cn		
B	CB	b	P1	...Pi	...Pm	Pm+1	...Pj	...Pn	Θ	
P1	C1	X10	1	...0	...0	X1m+1	...x1j	...x1n	$\boxed{x_{10}}$	Γ1
Pi	Ci	Xi0	0	...1	...0	Xim+1	...	...xin	$\frac{x_{i0}}{x_{ij}}$	Γ1
Pm	Cm	Xm0	0	...0	...1	Xmn+1	...xmj	...xmn	$\frac{x_{m0}}{x_{mj}}$	Γm
		Z0	0	...0	...0	Zm+1-cm+1	... $\boxed{\text{zj-ci}}$	... zn-cn		Γm+1
P1	C1	**X'i0**	1	....x'1i	...0	X'1m+1	...0	...x'1n		$\Gamma_1 = \Gamma'_1 - x_{1j}\Gamma'\chi$
Pj	Cj	**X'i0**	0	...x'ii	...1	X'im+1	...1	...x'in		$\Gamma'_i = \frac{1}{x_{ij}}\Gamma_i$
Pm	Cm	**X'm0**	0	...x'mi	...0	X'mn+1	...0	...x'mn		$\Gamma'_m = \Gamma_m - x_{mj}\Gamma$
		Z'0	0	...z'i-ci	...0	Z'm+1-cm+1	...0	...z'n-cn		$\Gamma'_m = \Gamma_{m+1} - (z_j$

1.10.3 Χρήση του Αλγόριθμου Simplex

Στο προηγούμενο κεφάλαιο πραγματοποιήθηκε η ανάλυση και επεξήγηση του αλγορίθμου της Simplex. Δόθηκε η ιστορία του δηλαδή από πού προήλθε, ποια είναι τα βήματα του αλγόριθμου ποιοι κανόνες τον διέπουν και ποια είναι η ερμηνεία των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την εκτέλεση των βημάτων.

Για να γίνει πιο κατανοητό ακολουθεί ένα παράδειγμα και πως αυτό λύνεται με τη μέθοδο της simplex.

Παράδειγμα: Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο simplexνα λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$\max(5x_1 - 4x_2)$

$-x_1 + x_2 \geq -6$

$3x_1 - 2x_2 \leq 24$

$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$

$x_1, x_2 \geq 0$

Λύση: Η κανονική μορφή του προβλήματος είναι

$$\max(5x_1 - 4x_2)$$

$x_1 - x_2 + x_3 + \quad + \quad = 6$

$3x_1 - 2x_2 + \quad + x_4 + \quad = 24$

$-2x_1 + 3x_2 + \quad + \quad + x_5 = 9$

$x_i \geq 0 \ (i = 1,2,\ldots,5)$

Ή σε μορφή πινάκων $\max c'x$

$AX = b$

$x \geq 0$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \\ 9 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

			5	-4	0	0	0		
B	CB	b	P1	P2	P3	P4	P5	θ	
P3	0	6	$\boxed{1}$	-1	1	0	0	6/1	Γ_1
P4	0	24	3	-2	0	1	0	$^{24}/_{3}$	Γ_2
P5	0	9	-2	3	0	0	1	-	Γ_3
	Z	0	-5	4	0	0	0		Γ_4
P1	5	6	1	-1	1	0	0	-	$\Gamma'_1 = {}^{\Gamma_1}/_{1}$
P4	0	6	0	$\boxed{1}$	-3	1	0		$\Gamma'_2 = \Gamma_2 - 3\Gamma'_1$
P5	0	21	0	1	2	0	1	6/1	$\Gamma'_3 = \Gamma_3 - (-2)\Gamma'_1$
	Z	30	0	-1	5	0	0		$\Gamma'_4 = \Gamma_4 - (-5)\Gamma'_1$
P1	5	12							$\Gamma''_2 = {}^{\Gamma'_2}/_{1}$
P2	-4	6	0	1	-3	1	0		
P5	0	15							
	z	36	0	0	2	1	0		$\Gamma''_4 = \Gamma'_4 - (-9)\Gamma''_2$

1.12 Η ανάλυση ευαισθησίας

Το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού είναι γεγονός ότι περιγράφει και αναλύει ένα σύστημα που περιλαμβάνει για παράδειγμα μια επιχείρηση είναι κάτι το δυναμικό, και αυτό σημαίνει ότι οι παράγοντες είναι εύκολα μεταβαλλόμενοι και αυτό έχει αντίκτυπο στις αποφάσεις που θα πάρει η επιχείρηση. Πρέπει να υπάρχει ένας τρόπος όπου θα λαμβάνονται οι συνεχείς αλλαγές μάσα στο περιβάλλον όπου η επιχείρηση υπάρχει και δραστηριοποιείται σε αυτό. Η λύση στο πρόβλημα αυτό είναι η μέθοδος η οποία ονομάζεται ανάλυση ευαισθησίας. *Ανάλυση Ευαισθησίας είναι εκείνη που μελετά το αποτέλεσμα των αλλαγών στις παραμέτρους του μοντέλου του γραμμικού προγραμματισμού πάνω στην άριστη λύση. Μία τέτοια είδους ανάλυση πρέπει να συνοδεύει απαραίτητα τη λύση οποιουδήποτε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, διότι δίνει στο μοντέλο ένα είδος στοχαστικού χαρακτήρα.*

Ανάλυση ευαισθησίας για τους αντικειμενικούς συντελεστές: η ανάλυση αυτή δίνει ένα διάστημα τιμών μέσα σε αυτό το διάστημα λοιπόν ο αντικειμενικός συντελεστής μπορεί να μεταβάλλεται χωρίς να αλλάζει η άριστη λύση. Πρέπει να αναφερθεί ότι η όλες οι παράμετροι παραμένουν σταθεροί. Το διάστημα αυτό ορίζεται ως εύρος αριστότητας και είναι διαφορετικό για κάθε αντικειμενικό συντελεστή.

Ανάλυση ευαισθησίας για τα δεξιά μέλη των περιορισμών: οι αλλαγές που μπορούν να επέλθουν στην άριστη λύση με οποιαδήποτε αλλαγή μπορεί να γίνει στους περιορισμούς. Στη περίπτωση όταν η ανάλυση ευαισθησίας προσδιορίζει το διάστημα των τιμών που ονομάζεται διάστημα εφικτότητας. Τότε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αλλάζει με έναν προσδιοριζόμενο σταθερό ρυθμό.

Ένας περιορισμός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού χαρακτηρίζεται σαν δεσμευτικός αν η άριστη λύση τον καθιστά ισότητα.
Σε αντίθετη περίπτωση, όταν η άριστη λύση καθιστά την άριστη λύση σε ανισότητα, ονομάζεται χαλαρός.

1.13 Ειδικές Περιπτώσεις προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

Τα προβλήματα του γραμμικού προγραμματισμού μπορούν να αναχθούν σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις που αφορά στην επίλυση τους και στην ανάλυση των αποτελεσμάτων αυτών. Παρακάτω θα αναφερθούν κάποιες βασικές περιπτώσεις προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού:

Προβλήματα Μεταφοράς: τα μοντέλα μεταφοράς αναπτύχθηκαν αρχικά για τον προσδιορισμό της βέλτιστης επιλογής των διαδρομών για τη μεταφορά αγαθών από τα σημεία παραγωγής ή αποθήκευσης στα σημεία κατανάλωσης με τον πιο οικονομικό τρόπο. Το μοντέλο αυτό προσδιορίζει τις ποσότητες που πρέπει να μεταφερθούν από κάθε αποθηκευτικό χώρο σε κάθε χώρο κατανάλωσης.

1.14 Θεωρία του Δυϊκού

Η σημαντικότερη ανακάλυψη ήταν η έννοια της δυϊκότητας, που έγινε στην αρχή της ανάπτυξης του Γραμμικού Προγραμματισμού. Σύμφωνα με την δυϊκότητα, κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού συνδέεται με ένα άλλο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που ονομάζεται δυϊκό ενώ το αρχικό ονομάζεται πρωτεύον.

Το **δυϊκό πρόβλημα** παρέχει τις σημαντικές πληροφορίες που έχουν να κάνουν με τα οικονομικά και σχετικά με τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος, διευρύνοντας τον κύκλο των αποτελεσμάτων στην περιοχή της οριακής οικονομικής ανάλυσης.

Το **πρωτεύον πρόβλημα** γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π.) διαπραγματεύεται το πρόβλημα εντοπισμού βέλτιστου προγράμματος που μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος ή ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος, το δυϊκό μοντέλο από την άλλη πλευρά διαπραγματεύεται ακριβώς το ίδιο πρόβλημα από την πλευρά των πόρων. Το σημαντικότερο για την επιχείρηση είναι να μπορεί να ασκήσει έλεγχο στους διαθέσιμους πόρους αλλά και στον τρόπο με τον οποίο συμβάλλουν στο κέρδος. Το δυϊκό πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού βοηθάει στη θεώρηση το ιδίου προβλήματος από την πλευρά της αξίας των πόρων που χρησιμοποιούνται στο βέλτιστο πρόγραμμα και επίσης μπορεί να βοηθήσει στη λήψη αποφάσεων σχετικά με το αν μπορεί να αποκτήσει πόρους.[18]

Ορισμός: «Έστω ότι έχουμε το πρωτεύον πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού στην κανονική του μορφή:

$$\pm \max \mathbf{c}'\mathbf{x}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

όπου c, x$\in \mathcal{R}_{nx1}$, b$\in \mathcal{R}_{mx1}$, A$\in \mathcal{R}_{mxn}$. Στην συνέχεια ορίζουμε σαν δυικό πρόβλημα του ανωτέρω προβλήματος το εξής πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

$$\pm \min b'w$$
$$\mathrm{A^T w} \geq \mathrm{c}$$
$$\mathrm{w} \geq 0$$

όπου w$\in \mathcal{R}_{mx1}$και $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ ο ανάστροφος πίνακας A.»

Στην συνέχεια αναφέρεται ένα παράδειγμα στο οποίο είναι να βρεθεί το δυϊκό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

κάτω από τις συνθήκες

[18] http://www.math.ntua.gr/~coletsos/Documents/Summary_of_OR.pdf

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$$
$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20$$
$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Λύση

Σύμφωνα με τον ορισμό που αναφέρεται πιο πάνω βρίσκουμε το δυϊκό πρόβλημα:

$$\min u = 48w_1 + 20w_2 + 8w_3$$

όταν

$$8w_1 + 4w_2 + 2x_3 \leq 60$$
$$6w_1 + 2w_2 + 1.5w_3 \leq 30$$
$$w_1 + 1.5w_2 + 0.5w_3 \leq 20$$
$$w_1, w_2, w_3 \geq 0$$

Όπως φαίνεται ο περιορισμός του δυϊκού αντιστοιχεί στην μεταβλητή x_1και κάθε αριθμός της προέρχεται από την πρώτη στήλη (P_1/X_1) του πρωτεύοντος. Το ίδιο συμβαίνει και για τους υπόλοιπους περιορισμούς.

Αν το πρόβλημα του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού δεν βρίσκεται στην κανονική του μορφή η μεταφορά του είναι χρονοβόρα. Στις περιπτώσεις αυτές το δυϊκό κατασκευάζεται ακολούθως:

ΠΡΩΤΕΥΟΝ	ΔΥΪΚΟ
maximize z	minimize u
i-περιορισμός μορφής ≤	i-μεταβλητή $w_i \geq 0$
i-περιορισμός μορφής =	i-μεταβλητή $w_i \in \mathcal{R}$
i-περιορισμός μορφής ≥	i-μεταβλητή $w_i \leq 0$
i-μεταβλητή $x_i \geq 0$	i-περιορισμός μορφής ≥
i-μεταβλητή $x_i \in \mathcal{R}$	i-περιορισμός μορφής ≤
i-μεταβλητή $x_i \leq 0$	i-περιορισμός μορφής ≤

Διότι, αν μια μεταβλητή του ενός δεν έχει περιορισμό στο πρόσημο, ο αντίστοιχος περιορισμός του άλλου είναι η εξίσωση και αντίστροφα. Αν μια μεταβλητή του ενός είναι μη θετική, τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του άλλου είναι ανίσωση με φορά αντίθετη της αναμενόμενης και αντίστροφα.[12]

[12]ΤΣΑΝΤΑΣ Ν.Δ-ΒΑΣΙΛΙΕΟΥ Π.Γ.Χ, (2000), Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη

Η μελέτη της δυϊκότητας είναι χρήσιμη τόσο από τη θεωρητική άποψη όσο και από την άποψη των εφαρμογών. Όσο αφορά την **θεωρητική άποψη** επιτρέπει κατανόηση της δομής του γραμμικού προγραμματισμού και όσο αφορά την **άποψη εφαρμογών** επιτρέπει κάποιες επιπλέον ενδιαφέρουσες οικονομικές ερμηνείες. Τέλος, από την υπολογιστική μεριά οδηγεί σε εναλλακτικές μορφές της μεθόδου Simplex που σε ορισμένες κατηγορίες προβλημάτων είναι πιο αποτελεσματικές.[19]

Δυϊκο Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού

Τρόπος κατασκευής δυϊκού προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού

Ο τρόπος που μπορεί να κατασκευαστεί το δυϊκό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π.) από οποιοδήποτε αρχικό π.γ.π. είναι χρησιμοποιώντας τους ακόλουθους κανόνες:

«**1.** Το δυϊκό π.γ.π. είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης όταν το πρωτεύον είναι πρόβλημα μμεγιστοποίησης (και αντίστροφα).

2. Σε κάθε περιορισμό του πρωτεύοντος Π.Ν. αντιστοιχεί μια μεταβλητή του δυϊκού προβλήματος. Το δυϊκό Π.Ν. έχει τόσες μεταβλητές απόφασης (πλήθους m) όσοι και οι περιορισμοίτου πρωτεύοντος οι οποίες ονομάζονται δυϊκές μεταβλητές (dual variables).

3. Αν ένας περιοριστές i (i = 1, 2,…, m) του αρχικού π.γ.π. είναι της μορφής ≤ η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή wi θα είναι μη αρνητική δηλαδή wi ≥0. Εάν ένας περιορισμός i του αρχικού είναι της μορφής ≥ η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή wi θα είναι μη θετική δηλαδή wi ≤0. Εάν ένας περιορισμός i του αρχικού προβλήματος είναι ισότητα, η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή wi δε θα περιορίζεται ως προς το πρόσημο δηλαδή wi ∈ R.

4. Σε κάθε μεταβλητή απόφασης του πρωτεύοντος π.γ.π. αντιστοιχεί ένας δυϊκός περιορισμός - το δυϊκό π.γ.π. έχει τόσους περιορισμούς (πλήθους n) όσες και οι μεταβλητές απόφασης του πρωτεύοντος.

5. Εάν μία μεταβλητή απόφασης του αρχικού είναι μη αρνητική δηλαδή xj≥0 (j = 1, 2,…, n), τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του δυϊκού είναι της μορφής ≥. Εάν μία μεταβλητή απόφασης του αρχικού είναι μη θετική δηλαδή xj≤0, τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του δυϊκού είναιτης μορφής ≤. Εάν μία μεταβλητή

[19] http://mathbooksgr.files.wordpress.com/2011/06/669-ypologistikes-methodoi-sti-thewria-apofasewn-simeioseis.pdf

απόφασης του αρχικού δεν περιορίζεται ως προς το πρόσημο δηλαδή xj ∈ R, τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του δυϊκού είναι ισότητα.

6. Οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού π.γ.π. προκύπτουν από τα δεξιά μέλη των περιορισμών του αρχικού π.γ.π., (b1,b2, …, bm)

7. Τα δεξιά μέλη των περιορισμών του δυϊκού π.γ.π. προκύπτουν από τους αντικειμενικούς συντελεστές του πρωτεύοντος π.γ.π. (c1, c2, …, cn).»[18]

Δυϊσμός

Η συνέπεια του ασθενούς δυϊσμού είναι ότι οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων των δύο προβλήματων δηλαδή του πρωτεύον και του δυϊκού, για να έχουν την βέλτιστη λύση πρέπει να είναι ίσες για παράδειγμα, εάν z^* είναι η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του προτεύοντος προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού και y^* είναι η ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, τότε ισχύει $z^*= y^*$. Λαμβάνοντας υπόψη μας αυτήν την ισότητα που ονομάζεται **ισχυρός δυϊσμός** (strong duality) ρυθμίζει την σχέση μεταξύ του προβλήματος μεγιστοποιήσης που είναι το πρωτεύον πρόβλημα και το πρόβλημα της μεγιστοποίησης που είναι το δυϊκό. Οπότε παρατηρείται ότι η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος προβλήματος μεγιστοποίησης είναι ίση με την ελάχιστη τιμή της αντκειμενικής συνάρτησης του δυϊκού του, το οποίο είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοτος είναι ίση με την βέλτιστη τιμή της αντκειμνικής συνάρτησης του δυϊκού, δηλαδή

$$Z^*=(c_1x_1^*+c_2x_2^*+\ldots+c_nx_n^*)=y^*=(b_1w_1^*+b_2w_2^*+\ldots+b_nw_n^*).$$ [18]

Ανάλυση Ευαισθησίας για το Δυϊκό Πρόβλημα

Η ανάλυση ευαισθησίας είναι μία μέθοδος η οποία εφαρμόζεται για να προσδιορίσει την ευαισθησία της λύσης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού στις μεταβολές των παραμέτρων του.

Στο στάδιο της διαμόρφωσης του μοντέλου κάνουμε κάποιες αποδοχές, ανάμεσα στις οποίες είναι ότι οι συντελεστές c_j, b_i, a_{ij}, του προβλήματος είναι

[18] http://www.math.ntua.gr/~coletsos/Documents/Summary_of_OR.pdf

[18] http://www.math.ntua.gr/~coletsos/Documents/Summary_of_OR.pdf

γνωστές σταθερές. Όμως στην πράξη αυτοί οι συντελεστές είναι άγνωστοι και κατά κανόνα απαρτίζονται από κάποια εκτίμησή τους. Επίσης αυτό που μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε είναι ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται η άριστη λύση που βρήκαμε και η αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης όταν μεταβληθούν οι συντελεστές του μοντέλου.

Στην αντίθετη περίπτωση η διαμόρφωση του πραγματικού προβλήματος σε μοντέλο προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού αποτελεί συνήθως μια προσέγγιση. Όταν βρούμε την άριστη λύση, τις περισσότερες φορές συμβαίνει να έχουμε την δυνατότητα να βελτιώσουμε τη λύση του προβλήματος είτε προσθέτοντας μεταβλητές είτε αφαιρώντας περιορισμούς είτε χρειάζεται να τα κάνουμε και τα δύο μαζί. Παρόλα αυτά εμείς πάλι θα χρειαστεί να αναρωτηθούμε εάν επηρεάζεται η άριστη λύση που βρήκαμε και μετά από αυτές τις μεταβολές.

Στην συνέχεια με την βοήθεια της ανάλυσης αυτής, στις περισσότερες περιπτώσεις, δεν είμαστε υποχρεωμένοι να λύσουμε από την αρχή το πρόβλημα κάνοντας τις ανωτέρω διαμορφώσεις αρκεί να ελέγξουμε αν η αρίστη εξακολουθεί να είναι άριστη και αν δεν είναι να την βελτιώσουμε με ήδη υπάρχουσες-γνωστές τεχνικές (μέθοδος Simplex, δυϊκή μέθοδος Simplex). Σε περίπτωση που οι αλλαγές που θα γίνουν δεν είναι τόσες πολλές, θα χρειαστούν μόνο ελάχιστες επαναλήψεις μέχρι να βρεθεί η νέα ικανοποιητική άριστη λύση.

Στην συνέχεια αναφέρουμε τους τρόπους για την ευαισθησία μιας άριστης λύσης ως προς

- Τη μεταβολή των αντικειμενικών συντελεστών cj
- Τη μεταβολή των σταθερών όρων b_i
- Τη μεταβολή των συντελεστών a_{ij} του συστήματος των περιορισμών,
- Την προσθήκη μεταβλητών
- Την αφαίρεση μεταβλητών
- Την προσθήκη περιορισμών και
- Την αφαίρεση περιορισμών.[12]

[12]ΤΣΑΝΤΑΣ Ν.Δ-ΒΑΣΙΛΙΕΟΥ Π.Γ.Χ, (2000), Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη

Κεφαλαίο 2^o: Το Πρόβλημα της Μεταφοράς

2.1 Ιστορική Αναδρομή

Ο πρώτος που μελέτησε και εισήγαγε στη μαθηματική κοινότητα το 1781 ήταν ο γαλλικής καταγωγής μαθηματικός G.Monge με σκοπό τη μεταφορά τεράστιων ποσοτήτων από τις πηγές. Με αλλά λόγια ήθελε να χωρίσει σε δυο ίσες ποσότητες που αντιπροσωπεύουν την αρχική ποσότητα , και στη συνέχεια σε μικρότερα κομμάτια και μετά συσχετίζοντάς τα μεταξύ τους έτσι ώστε το άθροισμα των προϊόντων του μήκους των μονοπατιών που χρησιμοποιούνται από τα μικρότερα κομμάτια και τον όγκο να ελαχιστοποιείται. Ο Monge ανέπτυξε μια μέθοδο από τη γεωμετρική σκοπιά για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιώντας σαν εργαλείο την ευκλείδεια απόσταση.

Το έτος 1930 ο A.N. Tolstoi, εξέδωσε ένα βιβλίο με αντικείμενο μελέτης το προγραμματισμό μεταφορών όπου βασίστηκε σε ένα άρθρο με τον τίτλο « Methodsoffindingtheminimaltotalkilometrageincargo- transportationplanninginspace ». Μελέτησε το πρόβλημα μεταφοράς και περιέγραψε έναν αριθμό προσεγγίσεων λύσης, που περιλαμβάνει την αναγνωρισμένη πια προσέγγιση, η οποία περιγράφει ότι η βέλτιστη λύση δεν έχει αρνητικό κόστος στο ίδιο υπολειπόμενο γράφημα(residualgraph). Επιπλέον υπέθεσε ότι τσεκάροντας το κύκλο και τις συνθήκες είναι επίσης αρκετό για τη βελτιστοποίηση.

Εμπνεύστηκε την μέθοδό του από τις εφαρμογές των μεταφορών διαφόρων αγαθών, ο Tostoi μελέτησε τη μεταφορά όπως αλάτι , τσιμέντο από τις πηγές παραγωγής στους προορισμούς κατά μήκος του σιδηροδρομικού δικτύου στη Σοβιετική Ένωση. Ιδίως όταν μεγάλης κλίμακας απόστασης στο πρόβλημα μεταφοράς επιλύθηκε με το βέλτιστο πλέον τρόπο. Ήταν ο πρώτος που σκέφτηκε το πρόβλημα της μεταφοράς στη περίπτωση που υπάρχουν μόνο δύο πηγές. Παρατήρησε λοιπόν ότι στη περίπτωση αυτή ο ένας μπορεί να προγραμματίσει τους προορισμούς με τη διαφοροποίηση στις αποστάσεις ανάμεσα στις δυο πηγές. Μετά από μια πηγή μπορεί να παρέχει στους περιορισμούς ξεκινώντας από την αρχή της λίστας μέχρι η προμήθεια της πηγής να χρησιμοποιηθεί. Παρατήρησε λοιπόν ότι η λίστα είναι ανεξάρτητη από τις απαιτήσεις και τις προμήθειες και ως εκ τουτου είναι εφαρμόσιμη για όλη τη «ζωή» των εργοστασίων, ή οι πηγές από την παραγωγή.

Χρησιμοποιώντας το πλάνο αυτό, ο καθένας μπορεί αμέσως να συνθέσει το βέλτιστο πλάνο μεταφοράς κάθε χρόνο, δίνοντας ποσότητες από τις απαιτήσεις των προορισμών.[20]

Αργότερα ο ίδιος μελέτησε το πρόβλημα της μεταφοράς σε περίπτωση όπου όλες οι πηγές και οι περιορισμοί είναι κατά μήκος μιας κυκλικής σιδηροδρομικής γραμμής, στη περίπτωση όπου η βέλτιστη λύση λαμβάνεται εύκολα, λαμβάνοντας υπόψη τη διαφορά από τα αθροίσματα από τα κόστη. Ονόμασε λοιπόν το φαινόμενο αυτό «κύκλος εξάρτησης». Τέλος ο Tosltoi, συνδύασε τις δυο ιδέες σε μια συνδυαστική λύση σε ένα γενικότερο πρόβλημα μεταφοράς από τη μεταφορά φορτίων από το Σοβιετικό σιδηροδρομικό δίκτυο. Το πρόβλημα αυτό είχε 10 πηγές, 68 προορισμούς και 155 συνδέσμους ανάμεσα σε πηγές και προορισμούς.

Ωστόσο η ειδική αυτή κατηγορία προβλημάτων αποτελούσε πόλο έλξης για πολλούς ακόμα αφού ήταν ένας τόσο καινούριος και ανεξερεύνητος τομέας του γραμμικού προγραμματισμού. Ο Frank Lauren Hitchcock αμερικανικής καταγωγής στην αρχή της ακαδημαϊκής του καριέρα υπήρξε το γεγονός ότι ήταν καθηγητής στο πανεπιστήμιο της Μασαχουσέτης δίδασκε μαθηματικά. Το 1941 λοιπόν ήταν ένας από τους οποίους διατύπωσε το πρόβλημα της μεταφοράς και επίσης κατάφερε να σχεδιάσει και να υλοποιήσει μια διαδικασία για την επίλυση η οποία είναι παρόμοια με εκείνη της μεθόδου simplex.[5]

Ανεξάρτητα λοιπόν από τις έρευνες και διατυπώσεις του F.L.Hitchcock ασχολήθηκε με το πρόβλημα μεταφοράς ο Tjalling Charles Koopmans Ολλανδικής καταγωγής ήταν ένας σπουδαίος καθηγητής ο οποίος μαζί με τον LeonidKantorovich κέρδισε το σημαντικό αυτό βραβείο που ονομάζεται Νόμπελ στις Οικονομικές Επιστήμες. Εργάστηκε ως επιστημονικός συνεργάτης στο πανεπιστήμιο Πρίνστον και ως ειδικός λέκτορας στο πανεπιστήμιο της Νέας Υόρκης ήταν εκείνα που έκανε πριν εργασθεί ως στατιστικός αναλυτής για την βρετανική αποστολή Εμπορικής Ναυτιλίας στην Ουάσιγκτον. Τότε ήταν που ο Koopmans άρχισε να μελετά ότι έχει αντικείμενο σχετικά με τις μεθόδους για το πώς θα γίνει η επιλογή των ναυτιλιακών γραμμών που θα έχει σα σκοπό την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μεταφοράς των απαιτούμενων ποσοτήτων των προϊόντων που διατίθενται σε διάφορες τοποθεσίες στην Αμερική, σε συγκεκριμένους προορισμούς στην Αγγλία. Η μελέτη του έδειξε ότι το επιθυμητό αποτέλεσμα μπορεί να ληφθεί με την άμεση λύση

[20] http://oai.cwi.nl/oai/asset/10084/10084A.pdf

[5] HITCHOCK F.L,(1941), The distribution of a Product From Several Sources to Numerous Localities

του συστήματος των εξισώσεων που αφορούν το κόστος των υλικών στη πηγή τους και τα έξοδα αποστολής τους με εναλλακτικές διαδρομές. Τέλος επινόησε ένα γενικό μαθηματικό μοντέλο που οδήγησε στις απαραίτητες εξισώσεις το οποίο αντιστοιχεί στην ειδική κατηγορία όπου ονομάζεται πρόβλημα μεταφοράς ακόμα είναι αναγκαίο να αναφερθεί ότι η σπουδαιότερο άρθρο του είχε τον τίτλο «βέλτιστη αξιοποίηση των συστημάτων μεταφοράς (optimumutilizationofthetransportationpotationssystems)». Ωστόσο πρέπει να αναφερθεί ότι παρά το γεγονός ότι οι δυο παραπάνω ασχολήθηκαν ανεξάρτητα με την έρευνα και την διατύπωση του προβλήματος συχνά στην επιστημονική κοινότητα αναφέρεται ως Hitchcock-Koopmans πρόβλημα μεταφοράς.

Ο Αμερικάνος μαθηματικός επιστήμονας GeorgeDantzing ο οποίος έκανε σημαντικές συνεισφορές στα πεδία της Επιχειρησιακής Έρευνας, της Επιστήμης των Υπολογιστών, Οικονομικών και της Στατιστικής. ΟGeorgeDantzing είναι ευρέως γνωστός ως ο Πατέρας του Γραμμικού Προγραμματισμού και ο εφευρέτης της μεθόδου Simplex, και θεωρείται ένας μαθηματικός με τη μεγαλύτερη επιρροή στον 20ο αιώνα. Έκανε αίτηση λοιπόν και εργάσθηκε στο U.S.A.F. Comptroller's Office και βοήθησε στην αυτοματοποίηση των αεροπορικών δυνάμεων και στο σχεδιασμό των διαδικασιών στην υποστήριξη και τον διαμερισμό των προμηθειών. Δημιούργησε λοιπόν ένα γραμμικό μαθηματικό μοντέλο παρουσιάζοντας τις προμήθειες που είναι διαθέσιμες και ποια αποτελέσματα απαιτούνται κατά τη διάρκεια μιας περιόδου. Υπό κάποιες συνθήκες αυτό οδηγεί σε ένα σύστημα οπού αυτές καθορίζονται, ακόμα και όταν οι μεταβλητές απαιτούνται να πάρουν μη αρνητικές. Το 1951 λοιπόν ο G.B. Gantzing ανέπτυξε μια ειδική μορφή της μεθόδου Simplex για το πρόβλημα μεταφοράς και αυτή χρησιμοποιείται ευρέως. Μεγάλα συστήματα αποτελούμενα από εκατοντάδες εξισώσεις μεταξύ χιλιάδων αγνώστων λύνονται επιτυχώς με τον υπολογισμό μέσα από τη μέθοδο Simplex.[21]

Ο HaroldW. Kuhn είναι ένας αμερικανός μαθηματικός όπου σπούδασε τη Θεωρία Παιγνίων. Είναι επίτιμος καθηγητής στο μάθημα των οικονομικών μαθηματικών στο πανεπιστήμιο του Princeton. Τα πεδία της έρευνας με τα οποία ασχολήθηκε είναι τα εξής: γραμμικού και μη γραμμικού προγραμματισμού, τη Θεωρία Παιγνίων, συνδυαστικά προβλήματα και ανέπτυξε εφαρμογές που

[21]http://www.ams.org/notices/200703/fea-cottle.pdf

χρησιμοποιούν μαθηματικές τεχνικές για να επιλύουν οικονομικά προβλήματα. Το 1955 ανέπτυξε μια διαδικασία όπου συνδύασε τις γνώσεις του με δεδομένα όπου ανέκτησε από τη διατριβή των μαθηματικών επιστημόνων D.Konig και J.Egevrary. Η διαδικασία αυτή λοιπόν αναπτύχθηκε ως μια εξειδικευμένη τεχνική επίλυσης του προβήματος εκχώρησης όπου ορίζεται ως μια ειδική κατηγορία του προβλήματος μεταφοράς.[12]

2.2 Γενικά

Προβλήματα που αφορούν τη μεταφορά αγαθών από διαφορετικά σημεία είτε παραγωγής είτε αποθήκευσης, σε κέντρα διανομής όπου βρίσκονται σε διαφορετικές μεταξύ τους γεωγραφικές περιοχές. Αντικείμενο εξέτασης αυτής της ειδικής κατηγορίας των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού, είναι ο καθορισμός των ποσοτήτων που θα μεταφερθούν από κάθε εργοστάσιο σε κάθε κέντρο διανομής έτσι ώστε να υπάρξει η ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς. Σε αυτή τη κατηγορία προβλημάτων οι συντελεστές των a_{ij} περιορισμών έχουν τη δομή όπου οι περισσότεροι είναι ίσοι με το μηδέν, σε αντίθεση με το γεγονός ότι οι μη μηδενικοί συντελεστές δείχνουν να έχουν μια συμμετρική κανονικότητα.

Για το Πρόβλημα Μεταφοράς ως μια ειδική κατηγορία για την επίλυση των προβλημάτων έχουν αναπτυχθεί αλγόριθμοι οι οποίοι είναι εδικοί και περισσότερο αποτελεσματικοί απ’ ότι είναι η μέθοδος Simplex. Ωστόσο η προσέγγιση που γίνεται είναι η ίδια με εκείνη της μεθόδου Simplex, αλλά οι αλγεβρικοί υπολογισμοί είναι απλούστεροι. Η διαδικασία του αλγορίθμου που χρησιμοποιείται μπορεί να φέρει τα απαιτούμενα αποτελέσματα σε λιγότερο υπολογιστικό χρόνο. Η μεθοδολογία λοιπόν που χρησιμοποιείται για την επίλυση του προβλήματος μεταφοράς μπορεί να χρησιμοποιηθεί εξίσου για την επίλυση άλλων προβλημάτων που καμία σχέση δεν έχουν με τη μεταφορά.

Υπάρχουν εφαρμογές που έχουν ως μέθοδο επίλυσης παρόμοια τεχνική με εκείνη του προβλήματος μεταφοράς και εφαρμόζονται σε διάφορους τομείς μεγάλου ενδιαφέροντος όπως ο σχεδιασμός και προγραμματισμός της παραγωγής προϊόντων, η επιλογή της θέσης σε ένα σύστημα παραγωγής, η μείωση του χρόνου της συνολικής διαδρομής ή ακόμα και η κατανομή των αγαθών σε διάφορα μέσα. Τα τελευταία

[12]ΤΣΑΝΤΑΣ Ν.Δ-ΒΑΣΙΛΙΕΟΥ Π.Γ.Χ, (2000), Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη

χρόνια με τις εξελίξεις στη νεότερη ιστορία που πραγματοποιούνται με το πόλεμο του κόλπου που πραγματοποιήθηκε το 1991 και ξανά το 2001, που έχει σαν βασική πηγή ενέργειας του πετρελαίου, αυτό είχε σαν αποτέλεσμα μια αύξηση της τιμής σε μεγάλο βαθμό σε μετακινήσεις κάθε είδους. Αυτό έχει άμεση επίδραση στις δαπάνες μεταφορών αυξάνουν το συνολικό κόστος για τις σύγχρονες επιχειρήσεις. Για το λόγο αυτό υπάρχει μια συνεχής προσπάθεια για την εύρεση νέων μεθόδων που θα αποδίδουν καλύτερα και θα δίνουν το βέλτιστο αποτέλεσμα. Οι εφαρμογές που απορρέουν από τη μελέτη του προβλήματος μεταφοράς και οι τεχνικές επίλυσης του θεωρούνται χρήσιμα εργαλεία τόσο για το προγραμματισμό όσο και για ανάλυση στους χώρους της βιομηχανίας και τις εμπορικές επιχειρήσεις.

2.3 Το πρόβλημα μεταφοράς

Μέσα από τη μελέτη διαφόρων προβλημάτων που έχουν χαρακτηριστικά και ιδιότητες που είναι κοινά με το πρόβλημα μεταφοράς, πρέπει να δοθεί η γενική μορφή των Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού. Μέσα από τη μοντελοποίηση δίνεται η περιγραφή, τα μεγέθη που είναι απαραίτητα για την επίλυση του προβλήματος και τέλος οι συμβολισμοί αυτών που συμμετέχουν στη συνάρτηση του κόστους. Πηγές ορίζονται ως οι ως οι γεωγραφικές περιοχές όπου οι επιχειρήσεις παράγουν τα προϊόντα τους, ενώ προορισμοί είναι οι τοποθεσίες όπου τα προϊόντα αποστέλλονται σε πελάτες. Κάθε πηγή έχει την ικανότητα να στείλει ένα περιορισμένο αριθμό ποσότητας όπου κάθε πελάτης (προορισμός) έχει κάνει παραγγελία να παραλάβει την απαιτούμενη ποσότητα του προϊόντος.

Για να ανήκει ένα πρόβλημα στη ειδική αυτή κατηγορία των προβλημάτων μεταφοράς απαιτούνται τα ακόλουθα σύνολα αριθμών και οι ορισμοί αυτών. Δυναμικότητες(παροχές) είναι το σύνολο αριθμών που ορίζει το μέγιστο μέγεθος που μπορεί κάθε πηγή να διαθέσει έχοντας οριστεί ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα δράσης. Ζητήσεις (απαιτήσεις) είναι εκείνες που προσδιορίζονται από κάποιο μοντέλο πρόβλεψης. Κατά κύριο λόγο οι ζητήσεις ανακτούνται από πληροφορίες που βασίζονται σε ιστορικά δεδομένα με το ποιες είναι οι απαιτήσεις των πελατών. Το μοναδιαίο κόστος αποστολής είναι εκείνο που μέσα από την ανάλυση του κόστους μεταφοράς προσδιορίζεται.

Ο βασικός στόχος όταν πραγματοποιείται η επίλυση του προβλήματος μεταφοράς είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μεταφοράς ή ο προσδιορισμός του συνόλου των αποστάσεων που πρέπει να πραγματοποιηθούν. Μεταβλητές ορίζονται ως οι ποσότητες των προϊόντων που είναι απαραίτητο να μεταφερθούν από το σημείο παροχής σε κάθε σημείο ζήτησης. Ένα βασικό στοιχείο για την επίλυση του προβλήματος είναι οι περιορισμοί να διαθέτουν τα εξής χαρακτηριστικά: τα φορτία να μην παίρνουν αρνητικές τιμές, τα φορτία να μπορούν να διατεθούν ανεξάρτητα από το σημείο παροχής και τέλος η ανάγκη ζήτησης κάθε σημείο ζήτησης.

2.4 Διατύπωση Προβλήματος

Για τη καλύτερη κατανόηση μα και μελέτη του προβλήματος μεταφοράς είναι απαραίτητο να γίνει η διατύπωση του προβλήματος, που έχει σαν απώτερο σκοπό τη βελτιστοποίηση των δικτύων που δημιουργούνται και εκφράζεται με διάφορες εφαρμογές πρακτικού χαρακτήρα. Άρα θα πρέπει να βρεθεί η πιο οικονομική δυνατή διακίνηση από τους σταθμούς που έχουν οριστεί.[9]

Έχοντας λοιπόν ένα συγκεκριμένο προϊόν που θα διαμοιραστεί, οι πηγές δηλαδή τα κέντρα παραγωγής ή τα μέρη όπου τα προϊόντα αποθηκεύονται συμβολίζονται με ένα σύνολο που εκφράζεται ως εξής: $\boldsymbol{m = \{1, \dots, m\}}$, οι ποσότητες που τα προϊόντα παράγονται ορίζονται ως $\boldsymbol{a_i = \{1, \dots, n\}}$. Το προϊόν λοιπόν πρέπει να παραδοθεί σε ορισμένους προορισμούς πκαι οι ανάγκες που αυτοί έχουν διατυπώνονται με το ακόλουθο σύνολο $\boldsymbol{b_j = \{1, \dots, n\}}$. Τα προϊόντα που παράγονται πρέπει να ισούται με το άθροισμα των προϊόντων που ζητούνται , άρα:

$$\sum_{i=1}^{m} a\, i = \sum_{j=1}^{n} b\, j = S$$

Μια μονάδα προϊόντος για να μεταφερθεί από το σταθμό παραγωγής A_iστο σταθμό προορισμού B_j, κοστίζει χρηματικές μονάδες εκφραζόμενες $c_{i\,j}$ (i=1,2,...,m, j=1,2,...,n). Ο σκοπός της επίλυσης του προβλήματος μεταφοράς είναι η εύρεση ενός άριστου σχεδίου μεταφοράς. Δηλαδή ποιες είναι οι ποσότητες $x_{i\,j}$που είναι απαραίτητο να μεταφερθούν έτσι ώστε να πραγματοποιηθεί η ελαχιστοποίηση του

[9]Κώστογλου Β, (2002), Επιχειρησιακή Έρευνα: Μεθοδολογία Εφαρμογές και Προβλήματα Πληροφοριακά Συστήματα Διοίκησης, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη

συνολικού κόστους μεταφοράς και την ίδια στιγμή η ικανοποίηση των αναγκών που οι περιοχές που προορίζονται τα προϊόντα έχουν. Η τελευταία στήλη λοιπόν είναι συμπληρωμένη με τις διαθέσιμες ποσότητες, ενώ η τελευταία γραμμή περιέχει τις ποσότητες των προϊόντων που απαιτούνται. Συνοπτικά όλα τα δεδομένα που περιγράφονται υπάρχουν στον ακόλουθο πίνακα:

	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}		c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\cdots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	S

Εικόνα: **Τυποποιημένος Πίνακας Μεταφοράς** (tableau)

2.5 Μαθητική Διατύπωση

Το πρόβλημα μεταφοράς διατυπώνεται αλγεβρικά με τους ακόλουθους μαθηματικούς τύπους. Η ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς ορίζεται από την εξής αντικειμενική συνάρτηση:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = A_i, i = 1,2,..,n$$

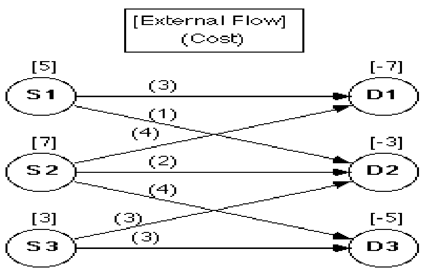
Ο παραπάνω περιορισμός ερμηνεύεται ως εξής ότι η ποσότητα που μεταφέρεται συνολικά από κάθε πηγή i προς τους περιορισμούς στο σύνολο είναι ίση με την προσφερόμενη ποσότητά της. Ο αριθμός των περιορισμών προορίζεται από τον αριθμό των θέσεων κατανάλωσης.

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = B_j, j = 1,2,\ldots,m$$

Αναλύοντας το περιορισμό σημαίνει ότι η ζήτηση όπου κάθε προορισμός έχει οριστεί να έχει θα πρέπει να είναι η ίδια προσφερόμενη ποσότητα στο σύνολο. Οι περιορισμοί εδώ έχουν σχέση με το μέγεθος του αριθμού των πηγών.

Οι περιορισμοί λοιπόν είναι το άθροισμα των αριθμών που εκφράζουν τις πηγές και τους προορισμούς και είναι σημαντικό να ειπωθεί πως δεν είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Το πλήθος των περιορισμών είναι m+n-1 δηλαδή κατά μια μονάδα λιγότεροι από το σύνολο τους, άρα κατά το πλήθος των διαδρομών που πραγματοποιούνται.

Το πρόβλημα μεταφοράς αναπαριστάται εύκολα με τη βοήθεια της δημιουργίας ενός δικτύου που αυτό είναι απαραίτητο να έχει κάποια χαρακτηριστικά για να αποτυπωθεί η κατάσταση. Ορίζεται λοιπόν ένα διμελές δίκτυο που αυτό σημαίνει υπάρχουν δύο στήλες που περιγράφουν η μία τις γεωγραφικές περιοχές όπου τα προϊόντα παράγονταιS ή προέρχονται και η δεύτερη αποτελείται από τους σταθμούς κατανάλωσης D. Υπάρχει μόνο μια κατεύθυνση όπου οι ακμές έχουν και αυτή είναι από τους κόμβους Sπρος τους κόμβους D. Από τους κόμβους των πηγών μόνο μια ακμή αντιστοιχεί σε κάθε σημείο κόμβου D.



Εικόνα:Στυγμιότυπο ενός δικτύου μεταφοράς

Μελετώντας την ειδική κατηγορία των προβλημάτων του γραμμικού προγραμματισμού μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα που είναι απαραίτητα για την επίλυσή τους. Πάντα υπάρχει μια βασική δυνατή λύση και αυτό γιατί ο αριθμός που εκφράζει το σύνολο της ικανότητας παραγωγής της πηγής είναι ίσος με το σύνολο της ζήτησης όπου έχουν οι προορισμοί και αυτό σημαίνει πως υπάρχει ένα δυνατό σχέδιο διανομής.

2.6 Μοντελοποίηση Προβλήματος Μεταφοράς

Παράδειγμα: «Εργοστάσιο»

Ένα εργοστάσιο διαθέτει τρία παραρτήματα τα Α, Β, Γ που παράγουν το ίδιο προϊόν που όμως τοποθετούνται σε τρεις διαφορετικές που η απόστασή τους είναι μεγάλη. Οι ενδιαφερόμενοι αγοραστές βρίσκονται σε πέντε διαφορετικές μεταξύ τους πόλεις. Οι ποσότητες των προϊόντων τα παραρτήματα μπορούν α παράγουν είναι 150, 350 και 280 μονάδες αντίστοιχα. Οι απαιτήσεις των αγοραστών είναι 150, 130, 160, 210 και 150 μονάδων των προϊόντων. Το κόστος μεταφοράς δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα:

Παραρτήματα	Αγοραστές				
	1	2	3	4	5
Α	10	22	8	14	9
Β	12	16	26	20	19
Γ	18	21	15	11	17

Πρέπει να υπολογιστούν οι απαραίτητες ποσότητες χ_0 που είναι απαραίτητο να μεταφερθούν από το παράρτημα i στον αγοραστή j με σκοπό να βρεθεί το ελάχιστο κόστος μεταφοράς.

Η αντικειμενική συνάρτηση έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος μεταφοράς είναι:

$$z = 10\chi_{A1} + 22\chi_{A2} + 8\chi_{A3} + 14\chi_{A4} + 9\chi_{A5} + 12\chi_{B1} + 16\chi_{B2} + 26\chi_{B3} + 20\chi_{B4} + 19\chi_{B5} + 18\chi_{\Gamma1} + 21\chi_{\Gamma2} + 15\chi_{\Gamma3} + 11\chi_{\Gamma4} + 17\chi_{\Gamma5}$$

Επόμενο βήμα είναι να καθοριστούν οι περιορισμοί έτσι ώστε να πραγματοποιηθεί η καλύτερη δυνατή διανομή. Οι περιορισμοί που αφορούν τη παραγωγή είναι:

$$\chi_{A1} + \chi_{A2} + \chi_{A3} + \chi_{A4} + \chi_{A5} \leq 150$$

$$\chi_{B1} + \chi_{B2} + \chi_{B3} + \chi_{B4} + \chi_{B5} \leq 350$$

$$\chi_{\Gamma1} + \chi_{\Gamma2} + \chi_{\Gamma3} + \chi_{\Gamma4} + \chi_{\Gamma5} \leq 280$$

Όμως κάθε αγοραστής έχει συγκεκριμένες απαιτήσεις που προσδιορίζονται από τους ακόλουθους περιορισμούς:

$\chi_{A1} + \chi_{B1} + \chi_{\Gamma 1} = 100$

$\chi_{A2} + \chi_{B2} + \chi_{\Gamma 2} = 130$

$\chi_{A3} + \chi_{B3} + \chi_{\Gamma 3} = 160$

$\chi_{A4} + \chi_{B4} + \chi_{\Gamma 4} = 210$

$\chi_{A5} + \chi_{B5} + \chi_{\Gamma 5} = 150$

Τέλος πρέπει να οριστούν:

$\chi_{ij} \geq 0, \mu\varepsilon\ i = A, B, \Gamma\ \kappa\alpha\iota\ j = 1{,}2{,}3{,}4{,}5$

2.7 Μεθοδολογία Επίλυσης

Στις προηγούμενεςενότητες έχουν παρουσιαστεί τι είναι πρόβλημα μεταφοράς, ποια είναι τα μέρη που το αποτελούν, ποια η μαθηματική διατύπωση και τέλος ποιος είναι ο σκοπός επίλυσής του. Η επίλυση λοιπόν του προβλήματος μεταφοράς μπορεί να χωριστεί σε τρία κύρια βήματα:

- Ο ορισμός αρχικής βασικής δυνατής λύσης
- Ο ορισμός της εκφυλισμένης αρχικής λύσης
- Η εύρεση της άριστης λύσης

2.7.1 Αρχική Βασική Δυνατή Λύση

Για την επίλυση λοιπόν ενός προβλήματος μεταφοράς είναι απαραίτητο να οριστεί μια πρώτη λύση που ονομάζεται αρχική βασική δυνατή λύση και αυτό θα οριστεί ως σημείο εκκίνησης για τη διαδικασία εύρεσης λύσης. Υπάρχουν ποικίλες μέθοδοι προσδιορισμού της αρχικής βασικής δυνατής λύσης, κάποιες λοιπόν από αυτές έχουν τη δυνατότητα εύρεσης της αρχικής λύσης να γίνει με ένα γρήγορο τρόπο, πραγματοποιώντας βελτιώσεις στην αρχική βασική δυνατή λύση μέσα από μια επαναληπτική διαδικασία. Από την άλλη, υπάρχουν μέθοδοι που είναι πιο αργοί χρονικά αλλά ο προσδιορισμός της αρχικής λύσης δεν απέχει συνήθως πολύ από την άριστη λύση που η συνολική διαδικασία θα δώσει ως αποτέλεσμα.

Ένα βασικό κριτήριο για την επιλογή της μεθόδου που θα ακολουθηθεί είναι για το ποιο θα είναι το μέσο εκτέλεσής της είτε με το χαρτί και το μολύβι είτε με τη χρήση κάποιου προγράμματος μέσω του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Εάν η αρχική λύση προσδιορίζεται γρήγορα είναι προτιμότερη η γραφική επίλυσή της ενώ η διαδικασία που απαιτεί διαδοχικές επαναλήψεις και βελτιώσεις της αρχικής λύσης η εκτέλεση της γίνεται από τον υπολογιστή.

2.7.2 Μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας

Ίσως να θεωρείται από τις μεθόδους που είναι πιο δημοφιλής και η πιο διαδεδομένη χρησιμοποιούμενη μέθοδος για την εύρεση και το προσδιορισμό μιας αρχικής δυνατής λύσης. Είναι η πιο απλή και το βασικό κριτήριο για το προσδιορισμό των τιμών που παίρνουν οι βασικές μεταβλητές είναι η εφικτότητα. Και αυτό έχει ως επακόλουθο το γεγονός ότι οι συντελεστές που προσδιορίζουν το κόστος της αντικειμενικής συνάρτησης δεν είναι σημαντικοί στην εξέλιξη του αποτελέσματος. Η μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας (TheNorth-WestCornerMethod) ονομάστηκε έτσι από το γεγονός ότι το σημείο εκκίνησης της μεθόδου ορίζεται η επάνω αριστερή (βορειοδυτική) γωνία,όταν τα δεδομένα οργανώνονται στη τυποποιημένη μορφή του πίνακα μεταφοράς. Το τετράγωνο λοιπόν η τιμή του αντιστοιχεί στο δρομολόγιο το οποίο ξεκινά από τη πρώτη θέση παραγωγής εξυπηρετεί το πρώτο προορισμό.[10]

Είναι απαραίτητο να γίνει μια περιγραφή για το πώς λειτουργεί, πως εκτελείται και ποια είναι τα κριτήρια και ποιες οι συνθήκες για την εκτέλεσή της. Στη βορειοδυτική γωνία του πίνακα που αυτό «μεταφράζεται» στη θέση (1,1), τοποθετείται η μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα. Η ποσότητα λοιπόν αντιστοιχεί στη τιμή της x_{11} που αυτό σημαίνει πως είναι ίση με τη μικρότερη από τη σύγκριση μεταξύ της ζητούμενης ποσότητας a_1 και της ποσότητας που προσφέρεται b_1. Το επόμενο βήμα είναι να οριστεί $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$ να είναι στη θέση (1,1) και διαγράφεται η στήλη ή η σειρά στο πίνακα αναλόγως αν ισχύει η συνθήκη $x_{11} = a_1$ δηλαδή $a_1 < b_1$ ή $a_1 > b_1$ αντίστοιχα. Στη συνέχεια αναθεωρείται η τιμή του a_1 ή b_1 ως εξής: Αν ισχύει $a_1 < b_1$ τότε ορίζεται ως $b_1 \leftarrow b_1 - a_1$ ενώ αν ισχύει $a_1 > b_1$ τότε το a_1 παίρνει τη τιμή $a_1 \leftarrow a_1 - b_1$. Εάν η παρακάτω συνθήκη ισχύει $a_1 = b_1$ τότε αυτό σημαίνει ότι η ζήτηση στο κέντρο 1 μηδενίζεται η ποσότητα στο κέντρο προσφοράς 1. Όταν αυτό ισχύει έχει σαν αποτέλεσμα ότι διαγράφεται η πρώτη στήλη

[10] ΛΟΥΚΑΚΗ Μ, (1990), Επιχειρησιακή Έρευνα :Τόμος Α, Εκδοτικό Κέντρο Βορείου Ελλάδος, Θεσσαλινίκη

ή σειρά του πίνακα και r τιμή του a_1 ή b_1 έχει τιμή 0 ανάλογα εάν διαγραφεί ή η πρώτη στήλη ή η πρώτη σειρά.

Τα βήματα της μεθόδου συστηματοποιούνται και μπορούν να οριστούν ως ο αλγόριθμος της βορειοδυτικής γωνίας. Παρακάτω δίνονται τα βήματα σε γλώσσα ψευδοκώδικα και ορίζεται ο αλγόριθμος NWC συνοψίζονται στα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1. Θέσε $i = 1, j = 1$*και προχώρα στο 2*

Βήμα 2. Θέσε $x_{ij} \leftarrow min\ (a_1, b_j)$.

Αν i=m *και* j=n *τερμάτισε .*

Αν $a_i \geq b_j$ *διέγραψε τη στήλη* j, *θέσε* $a_i \leftarrow a_i - b_j$ *και προχώρα στο 3.*

Διαφορετικά (δηλαδή $a_i < b_j$*) διέγραψε τη σειρά* i, *θέσε* $b_j \leftarrow b_j - a_i$ *και προχώρα στο 3.*

Βήμα 3. Προσδιόρισε τις τιμές των i *και* j *έτσι η (i,j) να είναι η θέση της βορειοδυτικής γωνίας του πίνακα που δεν έχει διαγραφεί και επέστρεψε στο βήμα 2.*

Πρέπει όμως να υπάρξει και μια διατύπωση του αλγορίθμου πιο κοντά στη γώσσα της μηχανής που και ο υπολογιστής θα μπορέσει να εκτελέσει. Ο αλγόριθμος NWC σε γλώσσα προγραμματισμού ακολουθεί:

Βήμα 1. Θέσε i=1, j=1, $S = a_1, D = b_1$ *και προχώρα στο 2.*

Βήμα 2. Θέσε $x_{ij} \leftarrow min\{S, D\}$. *Αν* $i = m$ *και* $j = n$ *τερμάτισε.*

Διαφορετικά προχώρα στο 3.

Βήμα 3. Αν $x_{ij} = S$, *θέσε* $D \leftarrow D - S, \quad i \leftarrow i + 1, \quad S = a_1$ *και πήγαινε στο 2.*

Διαφορετικά θέσε $S \leftarrow D - S, \quad i \leftarrow j + 1, \quad D \leftarrow b_j$ *και πήγαινε στο 2.*

Ο πραγματικός λόγος όπου η έναρξη της μεθόδου πραγματοποιείται από την επάνω αριστερή γωνία είναι απλός γιατί έτσι ξεκινά η ανάγνωση μιας σελίδας κειμένου. Πραγματοποιείται εξίσου αποτελεσματικά εάν οριστεί οποιοδήποτε άλλο σημείο στο πίνακα μεταφοράς. Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα της μεθόδου είναι ότι είναι εύκολη στην εκτέλεσή της και ταχύτερη στην εφαρμογή της. Όμως το γεγονός ότι δε συμπεριλαμβάνεται ο παράγοντας του κόστους αποτελεί ένα κύριο μειονέκτημα αυτής της μεθόδου. Αυτό σημαίνει ότι η αρχική βασική δυνατή λύση διαφέρει πολύ από την άριστη λύση και για να υπολογιστεί η καλύτερη δυνατή τιμή απαιτούνται πολλά επαναληπτικά βήματα. Συνίσταται λοιπόν η χρήση της βορειοδυτικής γωνίας να γίνεται μέσω του ηλεκτρονικού υπολογιστή, κυρίως λόγω της εκτέλεσης των επαναληπτικών βημάτων.

2.7.2.1 Παράδειγμα Ιατροφαρμακευτικής Εταιρείας

Πρόβλημα: « Ιατροφαρμακευτική εταιρεία»
Μια ιατροφαρμακευτική εταιρεία παράγει καθετήρες και τους συσκευάζει σε τρείς διαφορετικούς σταθμούς παραγωγής και αποστέλλει τις συσκευασίες αυτές από τις εγκαταστάσεις παραγωγής σε τέσσερις αποθήκες. Επόμενο βήμα της διαδικασίας είναι η διανομή αυτών από τις αποθήκες απευθείας στις εγκαταστάσεις όπου τα συνεργαζόμενα νοσοκομεία βρίσκονται. Ο παρακάτω πίνακας αναπαριστά το κόστος μεταφοράς ανά συσκευασία σε μία από τις τέσσερις αποθήκες.[22]

Από το εργοστάσιο παραγωγής	Προς Αποθήκες			
	Seattle	New York	Phoenix	Miami
Juarez	19	7	3	11
Seoul	15	21	18	6
Tel Aviv	11	14	15	22

Πίνακας 1: Κόστος Μεταφοράς Ανά Μονάδα

Χωρητικότητα	
Juarez	100
Seoul	300
Tel Aviv	200

Πίνακας 2: Χωρητικότητα Εργοστασίων

Απαιτήσεις	
Seattle	150
New York	100
Phoenix	200
Miami	150

Πίνακας 3:Απαιτήσεις Αποθηκών

[22] http://www.scribd.com/doc/142094103/72370309-Transportation-Problems-1

Λύση

Πρώτο βήμα είναι η πραγματοποίηση ενός κενού χρονοδιαγράμματος μεταφοράς. Στο πίνακα που απεικονίζεται παρακάτω στη επάνω δεξιά γωνία κάθε κελιού απεικονίζονται τα έξοδα αποστολής.

Προς / Από	S	N	P	M	Capacity
J	19	7	3	21	100
S	15	21	18	6	300
T	11	14	15	22	200
Απαιτήσεις	150	100	200	150	600

Πίνακας 4: Αρχικός πίνακας της μεθόδου βορειοδυτικής γωνίας.

Η έναρξη της μεθόδου πραγματοποιείται με τη τοποθέτηση της μεγαλύτερης ποσότητας της χωρητικότητας και των απαιτήσεων που είναι διαθέσιμη για το κελί (1,1).Οι απαιτήσεις της αποθήκης στο Seattle είναι 150 και η χωρητικότητα του εργοστασίου που τοποθετείται στο Juarez είναι 100.

Προς / Από	S	N	P	M	Capacity
J	19 100	7	3	21	100
S	15	21	18	6	300
T	11	14	15	22	200
Απαιτήσεις	150	100	200	150	600

Πίνακας 5:Πρώτη επανάληψη

Δεδομένου ότι η χωρητικότητα του εργοστασίου έχει εξαντληθεί, τότε κινείται προς τα κάτω και έτσι επαναλαμβάνεται η παραπάνω διαδικασία και αφορά πια το κελί (2,1) και το εργοστάσιο της Seoul και την αποθήκη του Seattle. Το εργοστάσιο της Seoul έχει επαρκή χωρητικότητα σε αντίθεση με την αποθήκη του Seattle οι απαιτήσεις περιορίζονται στις 50 μονάδες συσκευασίας.

Προς Από	S	N	P	M	Capacity
J	19 100	7	3	21	100
S	15 50	21	18	6	300
T	11	14	15	η22	200
Απαιτήσεις	150	100	200	150	600

Πίνακας 6:**Δεύτερη επανάληψη**

Επόμενο βήμα στη διαδικασία είναι μετακίνηση στα επόμενα κελιά που τοποθετούνται στη δεξιά μεριά του πίνακα και η ανάθεση της χωρητικότητας του εργοστασίου της Seoul έως ότου οι απαιτήσεις των αποθηκών έχουν εξαντληθεί. Στη συνέχεια η μετακίνηση πραγματοποιείται προς τα κάτω στο κελί (3,3) και η διαδικασία συνεχίζει να επαναλαμβάνεται.

Προς Από	S	N	P	M	Capacity
J	19 100	7	3	21	100
S	15 50	21 100	18 150	6	300
T	11	14	15 50	22 150	200
Απαιτήσεις	150	100	200	150	600

Πίνακας 7:**Τρίτη επανάληψη**

Αφού ολοκληρωθεί η διαδικασία που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς και έτσι επιτρέπεται να ξεκινήσει η εύρεση της αρχικής εφικτής λύσης. Τελευταίο βήμα είναι ο πολλαπλασιασμός της ποσότητας με το κόστος σε κάθε κελί της διαδικασίας.

Προς Από	S	N	P	M	Capacity
J	19 1900	7	3	21	100
S	15 750	21 2100	18 2700	6	300
T	11	14	15 750	22 3300	200
Απαιτήσεις	150	100	200	150	600

Πίνακας 8: Η αρχική λύση με βάση τη μέθοδο της βορειοδυτικής γωνίας

2.7.3. Η Μέθοδος του Ελάχιστου Κόστους

Η μέθοδος του ελάχιστου κόστους θεωρείται μια πολύ αποτελεσματική μέθοδος για να βρεθεί γρήγορα η αρχική βασική δυνατή λύση. Η μέθοδος αυτή λοιπόν λειτουργεί με τον εξής τρόπο: Πρώτο βήμα γίνεται ο εντοπισμός του συνδυασμού που αντιστοιχεί του συνόλου πηγής-προορισμού που είναι σε ένα από τα τετράγωνα του πίνακα μεταφοράς με τη μικρότερη τιμή που το κόστος μπορεί να πάρει και αυτό κατανέμεται στη μέγιστη δυνατή ποσότητα και αυτό σημαίνει ότι είτε ικανοποιείται η δυναμικότητα της πηγής, είτε η ζήτηση του προορισμού. Επόμενο βήμα είναι η κατανομή του συνδυασμού στο αμέσως επόμενο μικρότερο κόστος ή στη μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα, χωρίς να πραγματοποιείται καμία παραβίαση των περιορισμών της αντίστοιχης στήλης και γραμμής. Ο τρόπος με τον οποίο συμπληρώνεται ο πίνακας είναι ο ίδιος και η διαδικασία είναι αυτή που έχει αναλυθεί παραπάνω και αυτό γίνεται μέχρι την ολοκλήρωση της κατανομής έτσι ώστε να ισχύουν οι ικανότητες των πηγών i και οι ανάγκες των προορισμών j.

Η μέθοδος του ελάχιστου κόστους έχει πολύ σημαντικά πλεονεκτήματα. Κύριο χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι είναι εύχρηστη στην εφαρμογή της και η συμπλήρωσή της γίνεται «αυτόματα» και πολύ εύκολα.[1] Ένα βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ο παράγοντας κόστους παίζει σημαντικό ρόλο στο πρόβλημα της μεταφοράς. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός δε πως παρότι τα πλεονεκτήματα της μεθόδου δεν χρησιμοποιείται τόσο συχνά. Κάποιοι από τους λόγους που αυτό συμβαίνει είναι το γεγονός ότι δεν είναι ευρέως γνωστή και ακόμη ότι ο κίνδυνος

[1]ECKER.J.G- KUPRERSOMID.M,(1998), IntroductiontoOperationResearch, WileyPublishing, NewYork

πριν της κατανομής να δοθεί υποχρεωτικά σε ακριβά δρομολόγια πολύ μεγάλες τιμές. Ίσως το μεγάλο κόστος που θα βρεθεί να απέχει πολύ από την άριστη λύση. Τέλος είναι σημαντικό να αναφερθεί πως κάποιοι επιστήμονες θεωρούν ότι η μέθοδος αυτή για την εύρεση της αρχικής βασικής δυνατής λύσης είναι απαραίτητο να χρησιμοποιείται πιο συχνά και είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για ένα πιο γρήγορο και ικανοποιητικό τρόπο της λύσης.

Τα βήματα της μεθόδου μπορούν να διατυπωθούν με τη μορφή ενός αλγορίθμου. Ο αλγόριθμος ονομάζεται MC και δίνεται παρακάτω:

Βήμα 1. Έστω η θέση (p,q) που ικανοποιεί

$$C_{pq} = min\ \{c_{ij} : \eta\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ (i,j)\ \delta\varepsilon\nu\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \delta\iota\alpha\gamma\rho\alpha\varphi\varepsilon\acute{\iota}\}$$

Θέσε $x_{pq} \leftarrow min\{a_p, b_q\}$ *και προχώρα στο 2.*

Βήμα 2. Διάγραψε τη σειρά p αν $a_p \leq b_q$ *και θέσε* $b_q \leftarrow b_q - a_p$.

Διέγραψε τη στήλη q αν $a_p > b_q$ *και θέσε* $a_p \leftarrow a_p - b_q$

Αν κάθε στήλη και σειρά του πίνακα έχουν διαγραφεί τερμάτισε.

Διαφορετικά επέστρεψε στο 1.

2.7.3.1 Παράδειγμα Εταιρείας Παραγωγής Τηλεοράσεων

Παράδειγμα : «Εταιρεία παραγωγής τηλεοράσεων.»

Μια εταιρεία η οποία παράγει τηλεοράσεις πρέπει να πραγματοποιήσει ένα σχέδιο για τη μεταφορά προϊόντων από τις αποθήκες στα καταστήματα με τα οποία αυτή συνεργάζεται.[23] Τα δεδομένα απεικονίζονται στους παρακάτω πίνακες:

1	Cincinnati	300
2	Atlanta	200
3	Pittsburgh	200
	Σύνολο	700

Πίνακας 1: Οι προμήθειες τηλεοράσεων που έχουν οι αποθήκες

[23] *www.hkbu.edu.hk/~vwschow/lectures/bus2420/2420lecture05.ppt*

A	New York	150
B	Dallas	250
C	Detroit	200
	Σύνολο	600

Πίνακας 2:Οι απαιτήσεις που τα καταστήματα έχουν ανά πόλη

Αποθήκες	Καταστήματα		
	A	B	C
1	16 $	18$	11$
2	14$	12$	13$
3	13$	15$	17$

Πίνακας 3:Το κόστος μεταφοράς ανά μονάδα προϊόντος

Λύση

Η μοντελοποίηση του προβλήματος πραγματοποιείται ως εξής:

Minimize $Z = 16x_{1A} + 18x_{1B} + 11x_{1C} + 14x_{2A} + 12x_{2B} + 13x_{2C} + 13x_{3A} + 15x_{3B} + 17x_{3C}$

subject to

$x_{1A} + x_{1B}+ x_{1} \leq 300$

$x_{2A}+ x_{2B} + x_{2C}\leq 200$

$x_{3A}+ x_{3B} + x_{3C}\leq 200$

$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 150$

$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 250$

$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 200$

$x_{ij}\geq 0$

Για την εύρεση της αρχικής εφικτής λύσης μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του ελαχίστου κόστους και παρακάτω απεικονίζονται τα βήματα της διαδικασίας.

Βήμα 1^{ο}. Η εύρεση του κελιού με τη μικρότερη τιμή κόστους. Στο κελί αυτό θα κατανεμηθεί όσο το δυνατό περισσότερες μονάδες ποσότητας.

Προς / Από	A	B	C	Απαιτήσεις
1	6	8	10	150
2	7	11	11	175
3	4	5	12	275
Απαιτήσεις	200	100	300	600

Πίνακας 4: Επιλογή σημείου εκκίνησης

Βήμα 2ο. Στο κελί (1,3) εκχωρείται η μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα η οποία είναι 200 μονάδες που αντιστοιχούν στις απαιτήσεις των καταστημάτων της NewYork.

Προς / Από	A	B	C	Απαιτήσεις
1	6	8	10	150
2	7	11	11	175
3	4 200	5	12	275
Απαιτήσεις	200	100	300	600

Πίνακας 5:Εκχώρηση ποσότητας στο αντίστοιχο κελί

Βήμα 3ο. Στο βήμα αυτό πραγματοποιείται ο αποκλεισμός στα κελιά εκείνα που δε μπορούν να διατεθούν πια.

Προς Από	A	B	C	Απαιτήσεις	
1	6 --	8	10	150	
2	7 --	11	11	175	
3	4 200	5	12	~~275~~	75
Απαιτήσεις	~~200~~	100	300	600	
	0				

Πίνακας 6:Αποκλεισμός των κελιών με βάση τη συνθήκη

Βήμα 4ο. Επανάληψη όλων των βημάτων μέχρι η κατανομή τω ν ποσοτήτων να ολοκληρωθεί. Πραγματοποιείται η δεύτερη επανάληψη.

Προς Από	A	B	C	Απαιτήσεις
1	6	8	10	150
2	7	11	11	175
3	4 200	5 75	12	275
Απαιτήσεις	~~200~~	100	300	600

Πίνακας 7: Δεύτερη επανάληψη της μεθόδου

Τέλος απεικονίζεται ο πίνακας ο οποίος δείχνει την αρχική εφικτή λύση. Εδώ ολοκληρώνει η διαδικασία επειδή όλες οι δυνατές διανομές ποσότητας έχουν πραγματοποιηθεί.

Προς / Από	A	B	C	Απαιτήσεις	
1	6	8 25	10 125	150	
2	7	11	11 175	175	
3	4 200	5 75	12	275	75
Απαιτήσεις	200	100	300	600	

Πίνακας 8:Η αρχική εφικτή λύση.

2.7.4. Η Μέθοδος Vogel

Στις προηγούμενες ενότητες αναπτύχθηκαν διάφορες μέθοδοι όπως της βορειοδυτικής γωνίας και του ελάχιστου κόστους για την εύρεση της αρχικής βασικής δυνατής λύσης. Η μέθοδος Vogel αναπτύχθηκε και ονομάστηκε έτσι λόγω του ερευνητή της. Αποτελεί λοιπόν ένας τρόπος που μπορεί να οδηγήσει σε μια ιδιαίτερα ικανοποιητική αρχική λύση. Ακολουθεί λοιπόν μια παρόμοια τεχνική με εκείνη της μεθόδου του ελάχιστου κόστους και ο παράγοντας κόστος παίζει σημαντικό ρόλο. Η ιδέα λοιπόν της τεχνικής που ακολουθείται σε αυτή τη μέθοδο είναι ότι κάθε φορά που δε χρησιμοποιείται το δρομολόγιο εκείνο με τη μικρότερη τιμή τότε επιβαρύνεται με κάποιο «πρόστιμο». Αυτό σημαίνει πως ισούται με το μικρότερο κόστος που προκύπτει από την επιβολή του «προστίμου» όταν δε πραγματοποιείται η κατανομή των ποσοτήτων προς τη μεταφορά στο δρομολόγιο που έχει τη μικρότερη τιμή στο κόστος.

Επόμενο βήμα στη διαδικασία είναι η προσθήκη μιας ακόμα στήλης και μιας γραμμής στο πίνακα του προβλήματος μεταφοράς. Η συμπλήρωση λοιπόν γίνεται με τις διαφορές που προκύπτουν από τα μικρότερα συγκριτικά κόστη μεταξύ τους της κάθε στήλης και γραμμής του πίνακα μεταφοράς(tableau). Οι διαφορές αυτές σημαίνουν ότι είναι τα ευκαιριακά κόστη. Ευκαιριακό κόστος ορίζεται λοιπόν το κόστος μιας μη βασικής δραστηριότητας να είναι το ποσό κατά το οποίο ελαττώνεται η αντικειμενική συνάρτηση, αν η ποσότητα της δραστηριότητας αυτής αυξηθεί κατά μια μονάδα.[12] Οι τιμές που αντιπροσωπεύουν τα κόστη αυτά είναι οι τιμές που παίρνουν οι ποινές για το σύστημα που δημιουργείται, ο σκοπός της όλης διαδικασίας είναι η εύρεση της καλύτερης διαδρομής. Όταν βρεθεί το μικρότερο κόστος μεταφοράς τότε το επόμενο βήμα είναι η εκχώρηση τότε πραγματοποιείται η εκχώρηση όσο το περισσότερο δυνατό μονάδες της προσφοράς και ζήτησης. Βασικός σκοπός της μεθόδου αυτής είναι η ικανοποίηση ταυτόχρονα τόσο ένα σταθμό προέλευσης και το σταθμό προορισμού με σκοπό την εύρεση της εκφυλισμένης λύσης.

Η μέθοδος αυτή πραγματοποιείται μέσα από μια επαναληπτική διαδικασία. Τα βήματα αυτής της διαδικασίας συνοψίζονται σε έναν αλγόριθμο και τα βήματα εκτέλεσής του αναλύονται παρακάτω:

Βήμα 1^{o}:Το πρόβλημα πρέπει να είναι τυποποιημένο σύμφωνα με το γενικό πρότυπο του προβλήματος μεταφοράς. Αυτό σημαίνει πως γίνεται προσθήκη κάτω δεξιά μιας νέας γραμμής και μιας νέας στήλης στο πίνακα μεταφοράς.

Βήμα 2^{o}: Ο υπολογισμός κάθε ποινής που αντιστοιχεί σε κάθε γραμμή και στήλη του πίνακα.

- Η ποινή που αντιστοιχεί σε κάθε γραμμή i είναι η τιμή της διαφοράς από τα κόστη που είναι μικρότερα συγκριτικά, της συγκεκριμένης γραμμής
- Πρέπει να υπολογιστεί η ποινή της κάθε στήλης j είναι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των δυο μικρότερων τιμών που τα κόστη παίρνουν της συγκεκριμένης στήλης.

Βήμα 3^{o}: Στο βήμα αυτό γίνεται η επιλογή της γραμμής ή της στήλης με τη ποινή που έχει τη μεγαλύτερη τιμή. Εάν υπάρχει παραπάνω από μια μεγαλύτερη τιμή η επιλογή της γίνεται τυχαία.

Βήμα 4^{o}: Πραγματοποιείται η κατανομή της τιμής $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$ στο δρομολόγιο που προορίζεται στη θέση που βρίσκεται το μικρότερο στοιχείο. Αυτό γίνεται για να ικανοποιηθεί η ικανότητα που μια πηγή i μπορεί να παράγει ή η κατανάλωση που ένας προορισμός μπορεί να έχει.

Βήμα 5^{o} .

[12]ΤΣΑΝΤΑΣ Ν.Δ-ΒΑΣΙΛΙΕΟΥ Π.Γ.Χ, (2000), Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη

- Εάν εξαντλήθηκε η προσφορά η προσφορά του i σταθμού προέλευσης διέγραψε τον.
- Εάν οι ανάγκες της ζήτησης του προορισμού j έχουν εξαντληθεί τότε αυτός πρέπει να διαγραφεί.
- Εάν έχουν εξαντληθεί είτε η προσφορά του i, είτε η ζήτηση του j, τότε διέγραψε είτε το σταθμό i, είτε το σταθμό j αλλά όχι και τους δυο μαζί

Βήμα $6^{ο}$: Εάν έχει μείνει μόνο μια γραμμή ή μόνο μία στήλη, τότε πραγματοποίησε την εκχώρηση των ποσοτήτων που έχουν μείνει στα κελιά. Σε κάθε κελί πρέπει να εκχωρηθεί μια τιμή έστω και αν αυτή είναι μηδενική.

Αλλιώς Επέστρεψε στο Βήμα $2^{ο}$.

Ο αλγόριθμος αυτός κάθε φορά που εξαντλείται η ικανότητα που έχει μια πηγή να παράγει εξαντλείται ή ικανοποιούνται οι ανάγκες του προορισμού j. Η εκτέλεση του αλγόριθμου σταματά όταν ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι συνθήκες τόσο για τη τελευταία γραμμή i και τη τελευταία στήλη j. Η λύση που προκύπτει μετά την ολοκλήρωση του αλγορίθμου θεωρείται αρκετά ικανοποιητική γιατί ικανοποιεί όλες τις ανάγκες και τις δυναμικότητες. Ένα πολύ σημαντικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι το γεγονός ότι η αρχική βασική εφικτή λύση από τη λύση του προβλήματος μεταφοράς και δε χρειάζονται πολλοί μετασχηματισμοί για την εύρεσή της. Είναι δύσκολο να αποτυπωθεί η διαδικασία αυτή στο χαρτί, γιατί είναι δύσκολο να σχεδιάζεται νέος πίνακας μεταφοράς κάθε φορά που ικανοποιείται μια συνθήκη και αυτό προκαλεί καθυστέρηση. Κάθε επαναληπτικός κύκλος αναπαρίσταται από δύο πίνακες: ο πρώτος λοιπόν ορίζεται ως η επιλογή του βέλτιστου δρομολογίου κάθε φορά, ενώ ο δεύτερος πίνακας αντιστοιχεί στην ικανοποίηση της πηγής που είναι η καλύτερη και η μείωση των απαιτήσεων που αντιστοιχούν. Τέλος μελετώντας τη μέθοδο Vogel προκύπτει ότι η μηχανογράφηση είναι εύκολη και μπορεί να τυποποιηθεί και θεωρείται αποτελεσματική στην εύρεση μιας ιδιαίτερα ικανοποιητικής αρχικής βασικής δυνατής λύσης.

2.7.4.1 Παράδειγμα: «Μεταλλευτική Εταιρία»

Σε μία μεγάλη μεταλλευτική εταιρεία εξορύσσει το βασικό προϊόν που εμπορεύεται από τρία λατομεία, έστω $\varLambda_1, \varLambda_2 και \varLambda_3$. Η εβδομαδιαία παραγωγή του κάθε λατομείου είναι 75, 150 και 75 τόνοι χαλικιού αντίστοιχα. Η πρώτη ύλη που εξορύσσεται πρέπει να μεταφερθεί σε πέντε κύριους καταναλωτές, έστω $K_1, K_2 K_3 K_4 \kappa\alpha\iota K_5$ οι οποίοι χρειάζονται για τις ανάγκες τους 100, 60, 40, 75 και 25 τόνους χαλικιού ανά εβδομάδα αντίστοιχα. Το θέμα που απασχολεί τη διοίκηση της εταιρείας είναι ο περιορισμός του κόστους μεταφοράς των προϊόντων στους καταναλωτές.[24]

Λύση:

		Καταναλωτές				
		K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
Λατομεία	Λ_1	3	2	3	4	1
	Λ_2	4	1	2	4	2
	Λ_3	1	0	5	3	2

Πίνακας 1: Κόστος Μεταφοράς Χαλικιού

Η μοντελοποίηση του προβλήματος έχει ως εξής :

$\min C = 3x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + x_{15} +$

$4x_{21} + x_{22} + 2x_{23} + 4x_{24} +$

$2x_{25} + x_{31} + 5x_{33} + 3x_{34} + 2x_{35}$

$subject\ to$

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 75$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 150$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 75$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 100$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 40$

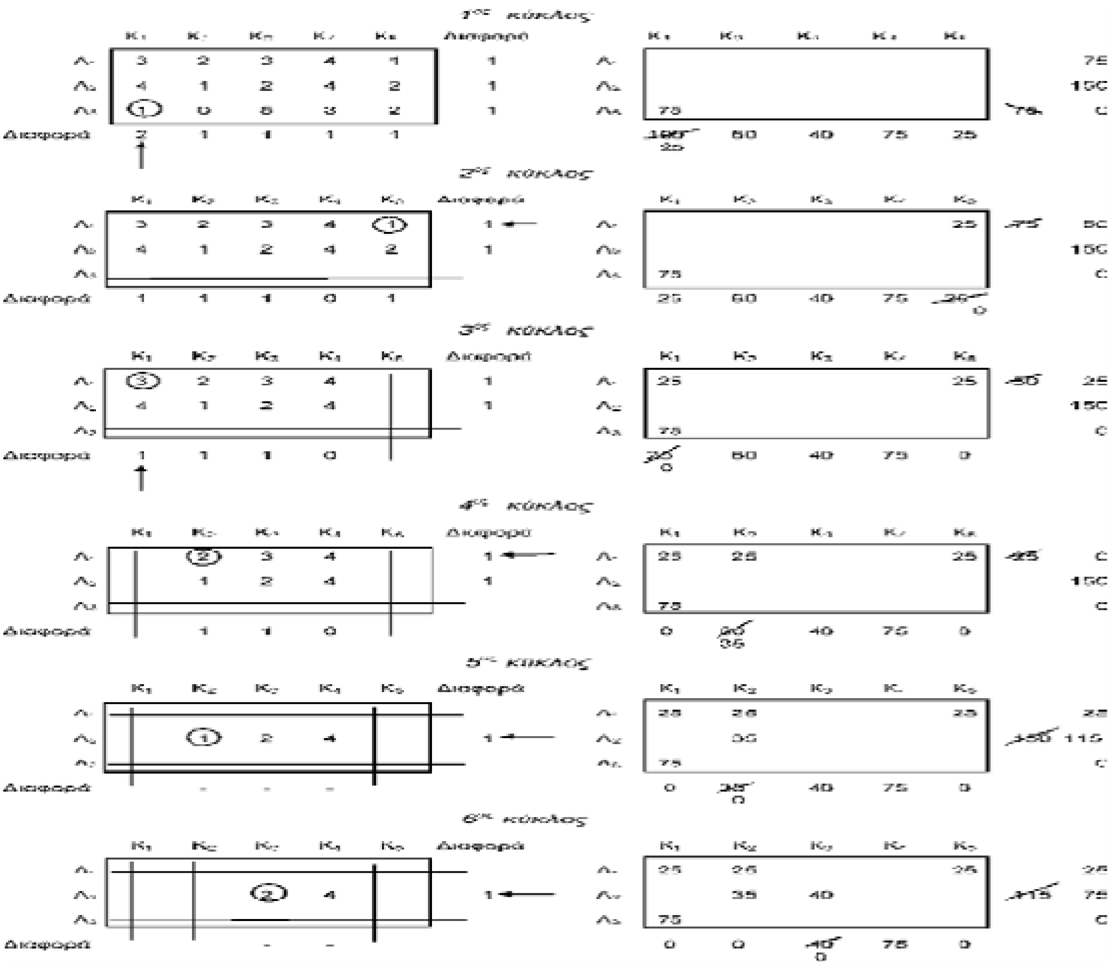
$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 75$

$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 25$

Σύμφωνα με τη περιγραφή της μεθόδου Vogel ακλουθώντας τα βήματα μέσα από τις διαδοχικές επαναλήψεις προκύπτουν οι παρακάτω πίνακες

[24] http://aetos.it.teithe.gr/~vkostogl/files/Epixeirisiaki/Transportation%20problems_GR_27-5-2012.pdf

:



Εικόνα:Αναπαράσταση εκτέλεσης της μεθόδου Vogel

2.7.5 Εκφυλισμένη λύση

Στη διαδικασία λοιπόν που πραγματοποιείται για την εύρεση της άριστης λύσης υπάρχει πιθανότητα να εμφανιστεί μια εκφυλισμένη λύση. Σε ένα πρόβλημα μεταφοράς με m πηγές παραγωγής και n θέσεις κατανάλωσης, η αρχική λύση για να είναι βασική πρέπει να περιέχει $m+n-1$ μεταβλητές x_{ij}με θετικές τιμές. Εκφυλισμένη λύση μπορεί να εμφανιστεί για δύο λόγους: Αν η τιμή μιας μεταβλητής σε κάποιο στάδιο στη διαδικασία για την εύρεση που αφορά την αρχική βασική εφικτή λύση πρέπει να ικανοποιεί ταυτόχρονα τόσο τις δυνατότητες που ένας σταθμός παραγωγής έχει όσο και τις απαιτήσεις ενός σταθμού όπου τα προϊόντα προορίζονται. Η δεύτερη αιτία όπου η εκφυλισμένη λύση μπορεί να εμφανιστεί, στη διαδικασία του εντοπισμού του εξερχόμενου κελιού στο μονοπάτι ανακατανομής προκύπτουν μεγαλύτερο σε αριθμό από ένα κελιά με πρόσημο (-) που έχουν την ίδια μικρότερη τιμή εκχώρησης θ.

Εκφυλισμένη αρχική λύση μπορεί να οριστεί, η αρχική λύση της οποίας μια ή περισσότερες από $m + n - 1$ μεταβλητές παίρνει τη τιμή μηδέν. Είναι πιθανό να συμβεί όταν η ικανότητα που έχει μια πηγή να παράγει ισούται με τις ανάγκες ζήτησης που ένας προορισμός έχει ή στη γενικότερη περίπτωση όταν μαθηματικά ισχύει όπου κάποιο μερικό σύνολο αθροισμάτων γραμμών είναι ίσο με κάποιο μερικό σύνολο αθροισμάτων των στηλών.

Θεώρημα: Για την ύπαρξη των εκφυλισμένων λύσεων σε ένα πρόβλημα μεταφοράς, είναι απαραίτητο να ισχύει η ακόλουθη συνθήκη όπου πρέπει να υπάρχει ένα υποσύνολο από $r<m$ σταθμούς προέλευσης με μερική παραγωγή όση και η μερική ζήτηση $t<n$ σταθμών προορισμού.

Όταν σε ένα πρόβλημα μεταφοράς ισχύει η ακόλουθη συνθήκη υπάρχει μια εκφυλισμένη λύση:

$$\sum_{h=1}^{r} s_{i_h} = \sum_{k=1}^{t} d_{j_k} \quad (1)$$

Η εμφάνιση μια εκφυλισμένης λύσης στη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος μεταφοράς, σε όποιο στάδιο και αν εμφανιστεί μπορεί να αποτελέσει εμπόδιο για τη μετάβαση στο επόμενο στάδιο προσδιορισμού της άριστης λύσης. Όταν αυτή υπάρχει σε οποιαδήποτε βήμα του αλγορίθμου επίλυσης δεν επηρεάζει το κόστος μεταφοράς το οποίο παραμένει αμετάβλητο για το επόμενο βήμα, το οποίο προκαλεί επιπλοκές. Για να αντιμετωπιστεί το φαινόμενο αυτό, η εμφάνιση της εκφυλισμένης αρχικής λύσης πραγματοποιείται η μεταβολή των αθροισμάτων που αντιστοιχούν στις γραμμές και τις στήλες κατά μια μικρή ποσότητα, με σκοπό να μην υπάρχουν πλέον ίσα μερικά σύνολα. Θεωρείται λοιπόν ότι σε ένα δρομολόγιο όπου δε συμμετέχουν στη τρέχουσα λύση που ονομάζεται μη βασικό δρομολόγιο, μεταφέρεται σε αυτή μια απειροστή θετική ποσότητα η οποία συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα ε. Η ικανότητα που έχει μια πηγή i να παράγει και οι ανάγκες για τη ζήτηση που ο προορισμός j έχει αποτελούν το δρομολόγιο αυτό πρέπει να αυξηθούν κατά ε και έτσι προκύπτουν $a_i + \varepsilon$ και $b_j + \varepsilon$. Το νέο αποτέλεσμα που αντιστοιχεί στη $x_{ij} = \varepsilon$ είναι πλέον μια βασική μεταβλητή και η τρέχουσα λύση δεν είναι πια εκφυλισμένη, οπότε η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος μεταφοράς συνεχίζεται κανονικά. Με αυτό τον τρόπο λοιπόν αντιμετωπίζεται η εμφάνιση μιας εκφυλισμένης λύσης στα αρχικά στάδια της επίλυσης του προβλήματος .

Για να αποτραπεί το φαινόμενο υπάρχουν διάφορες τεχνικές που μπορούν να εφαρμοστούν και ο πιο διαδεδομένος τρόπος είναι αυτός της διαταραχής. Η τεχνική της διαταραχής λειτουργεί με τον ακόλουθο τρόπο, πρώτο βήμα είναι η δημιουργία ενός νέου προβλήματος μεταφοράς θέτοντας :

$$s'_i = s_i + \varepsilon \qquad\qquad i = 1,2,\ldots,m$$

$$d'_j \begin{cases} d_j & j = 1,2,\ldots,n-1 \\ & d_j + m\varepsilon j = n \end{cases}$$

Στο πρόβλημα που έχει δημιουργηθεί η σχέση (1) ισχύει μόνο για r=m και t=n, συνεπώς αυτό σημαίνει πως δεν είναι δυνατό να υπάρχουν εκφυλισμένες λύσεις. Στο επόμενο βήμα θα υπάρχουν $m + n - 1$ βασικές μεταβλητές που είναι μεγαλύτερες του μηδενός που απορρέουν από το νέο πρόβλημα και αυτό πραγματοποιείται θέτοντας $\varepsilon = 0$ και έτσι το αποτέλεσμα είναι μια λύση του αρχικού προβλήματος με τις ίδιες βασικές μεταβλητές όμως κάποιες έχουν πάρει τη τιμή μηδέν. Άρα υπάρχει πια αντιστοιχία μια προς μια μεταξύ των βασικών εφικτών λύσεων μεταξύ των δύο προβλημάτων. Όταν όμως η ποσότητα ε δεν μπορεί να απαλειφθεί σε κάποιο από τα ενδιάμεσα στάδια και υπάρχει ακόμα η άριστη λύση, τότε απλά διαγράφεται ως μη υπάρχουσα. Η τελική λύση που θα βρεθεί είναι η καλύτερη δυνατή έστω και αν περιέχει μόνο $m + n - 2$ λιγότερες βασικές μεταβλητές. Η επίλυση όταν γίνεται με τη χρήση προγράμματος Η/Υ για την εύρεση της άριστης λύσης με το ε παίρνει μια μικρή αριθμητική τιμή όπως $\varepsilon = 0.001$ και όταν βρεθούν οι τιμές των μεταβλητών τότε στρογγυλοποιούνται και όταν προσδιοριστεί η άριστη λύση στρογγυλοποιούνται στο πλησιέστερο ακέραιο.

2.7.6. Εύρεση της Άριστης Λύσης.

Στις προηγούμενες ενότητες αναπτύχθηκαν διαφορετικά στάδια όπως ο προσδιορισμός του προβλήματος, τι είναι βασική δυνατή λύση, ποιες μέθοδοι ακολουθούνται για τον προσδιορισμό αρχικής λύσης, τι είναι εκφυλισμένη λύση. Στην ενότητα αυτή θα δοθεί ο ορισμός τι είναι η άριστη λύση και ποιες είναι οι τεχνικές που ακολουθούνται για την εύρεση της.

2.7.6.1 **Μέθοδος** SteppingStone

Η μέθοδος SteppingStone θεωρείται μια επαναληπτική διαδικασία που μπορεί να προσδιορίσει την άριστη λύση ξεκινώντας τη διαδικασία από μια αρχική λύση. Βασικός παράγοντας στη πραγματοποίηση της είναι η μείωση του κόστους μιας συγκεκριμένης λύσης που έχει προσδιοριστεί σε προηγούμενα βήματα από τη χρήση διαδρομών που δεν έχουν οριστεί στη τρέχουσα λύση. Κάθε φορά εξετάζεται το γεγονός να βρεθεί μια καλύτερη λύση και αυτό επιτυγχάνεται με το να πραγματοποιηθεί αλλαγή μιας από τις διαδρομές που χρησιμοποιούνται με μια άλλη η οποία δε χρησιμοποιείται.[9]

Υπάρχει μια διαδικασία για να υπολογιστούν οι οριακές αλλαγές στο κόστος μεταφοράς και τα βήματά της μπορούν να αναλυθούν παρακάτω:

Βήμα 1^{ο}: *Επιλογή ενός άδειου κελιού προς αξιολόγηση. Επιλέγεται δηλαδή η διαδρομή εκείνη στην οποία δε συμπεριλαμβάνεται η τρέχουσα λύση.*
Βήμα 2^{ο}: *Εντοπισμός ενός κλειστού μονοπατιού. Αυτό σημαίνει πως έχοντας ως αφετηρία το κελί που έχει ήδη επιλεχθεί από το προηγούμενο βήμα, δημιουργώντας έτσι ένα κλειστό βρόγχο, ο οποίος αποτελείται μπορεί να είναι είτε κάθετη που πάντα επιστρέφει στο ίδιο κελί.*
Βήμα 3^{ο}: *Τοποθέτησε εναλλάξ συν (+) και πλην (-) στο μονοπάτι. Ξεκινώντας λοιπόν βάζοντας (+) στο κελί που επιλέξαμε για την έναρξη της διαδρομής τοποθετώντας εναλλάξ τα σημεία (-) και (+) σε κάθε γωνία του βρόγχου. Πρέπει να διασφαλιστεί το*

[9] ΚΩΣΤΟΓΛΟΥ Β, (2002), Επιχειρησιακή Έρευνα: Μεθοδολογία Εφαρμογές και Προβλήματα Πληροφοριακά Συστήματα Διοίκησης, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη

γεγονός τα συν (+) και πλην (-) είναι ίσα σε αριθμό σε κάθε σειρά και κάθε στήλη του πίνακα.

Βήμα 4^{o}: *Πραγματοποίησε τον υπολογισμό της μεταβολής του δείκτη, αυτό επιτυγχάνεται αθροίζοντας τα μοναδιαία κόστη στα κελιά που έχουν επισημανθεί. Αυτό σημαίνει πως όταν υπολογίζεται η οριακή μεταβολή του κόστους στη διαδρομή που έχει επιλεχθεί, τότε όταν υπάρχει το πρόσημο (+) τότε τα κόστη αθροίζονται ενώ σε αντίθετη περίπτωση αφαιρείται το κόστος όλων των διαδρομών που φέρουν το πρόσημο (-).*

Βήμα 5^{o}: *Επανάληψη της διαδικασίας για κάθε άδειο κελί στο* tableau. *Επαναλαμβάνονται λοιπόν τα βήματα 1 έως 4 για εκείνες τις διαδρομές που δεν περιλαμβάνονται στη λύση, έτσι ώστε να υπολογιστεί η οριακή αλλαγή του κόστους για καθεμία ξεχωριστά αφού θα υπάρξουν στη λύση. Στη περίπτωση όπου η οριακή αλλαγή του κόστους είναι θετική (+) για όλες τις διαδρομές που συμπεριλαμβάνονται στη λύση, δηλαδή υπάρχει αύξηση κόστους, τότε η τρέχουσα λύση είναι η πλέον καλύτερη λύση.*

Τοποθετώντας τα πρόσημα +/- στη μέθοδο SteppingStone σημαίνει πως ο κλειστός βρόγχος που υπάρχει αρχίζει και τελειώνει σε ένα κελί που δεν έχει επιλεχθεί ακόμα όμως περνάει μόνο από κελιά που έχουν ήδη επιλεγεί. Τα κελιά επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι πάντα εφικτό το γεγονός τα συν (+) και πλην (-) να είναι τα ίδια σε αριθμό σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη ξεχωριστά. Στη μέθοδο αυτή, τα βήματα της επαναληπτικής διαδικασίας είναι παρόμοια ίσως και αντίστοιχα με εκείνα της *μεθόδου* Simplex. Για κάθε διαδρομή που δεν έχει εκμεταλλευθεί στη τρέχουσα λύση, οι συντελεστές της οριακής μεταβολής του κόστους μεταφοράς ισοδυναμούν στις τιμές της γραμμής $C_j - Z_j$ σε περίπτωση που το πρόβλημα έχει λυθεί με τη μέθοδο Simplex.

Είναι σημαντικό πως η οικονομική ερμηνεία της μεθόδου SteppingStone είναι παρόμοια με εκείνη της μεθόδου Simplex. Τα κοινά στοιχεία που φέρουν οι δύο αυτές μεθόδοι εμφανίζονται στα βήματα των διαδικασιών. Σε κάθε βήμα της διαδικασίας η τρέχουσα λύση βελτιώνεται, όταν υπάρξει αλλαγή σε κάποια διαδρομή που χρησιμοποιείται με μία από αυτές που δε χρησιμοποιούνται. Οι χρησιμοποιούμενες διαδρομές αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές, ενώ εκείνες που δε χρησιμοποιούνται είναι οι μη-βασικές μεταβλητές στο πίνακα της μεθόδου Simplex. Ένα βασικό χαρακτηριστικό της μεθόδου SteppingStone είναι το γεγονός ότι οι υπολογισμοί είναι απλούστεροι και αυτό οφείλεται στο φαινόμενο ότι οι μεταβλητές των συντελεστών στους περιορισμούς είναι είτε μοναδιαίοι(παίρνουν τη τιμή 1) είτε μηδενικοί (παίρνουν τη τιμή 0).

1.1Πρόβλημα Μεταφοράς Σιταριού

Το σιτάρι συλλέγεται στις δυτικές πολιτείες της Αμερικής και φυλάσσονται σε αποθήκες όπου διαθέτουν ειδικά μηχανήματα όπου ονομάζονται ανελκυστήρες σιτηρών, βρίσκονται σε τρεις διαφορετικές πόλεις: KansasCity, Omaha, DesMoines. Τα παρέχουν προμήθειες σε τρεις διαφορετικούς αλευρόμυλους που τοποθετούνται στις πόλεις Chicago, St.Louis και Cincinnati.
Κάθε μηχάνημα είναι ικανό να παρέχει τις ακόλουθες ποσότητες:

Μηχάνημα Σιτηρών	Προμήθειες
Kansas City	150
Omaha	175
Des Moines	275
Σύνολο	600

Πίνακας 1: Δυνατότητες Σταθμών Παραγωγής

Αλευρόμυλοι	Απαιτήσεις
Chicago	200
St. Louis	100
Cincinnati	300
Σύνολο	600

Πίνακας 2: Απαιτήσεις Προορισμών

Το κόστος της μεταφοράς ενός τόνου σιταριού από τη πηγή στο προορισμό διαφέρουν σύμφωνα με την απόσταση και το σιδηροδρομικό δίκτυο.

Ανελκυστήρας Σιτηρών	Αλευρόμυλοι		
	A. Chicago	B. St. Louis	C. Cincinnati
1. Kansas City	6	8	10
2. Omaha	7	11	11
3. Des Moines	4	5	12

Πίνακας 3: Κόστος Μεταφοράς Ανά Μονάδα

Το πρώτο βήμα για την επίλυση ενός προβλήματος μεταφοράς είναι η μοντελοποίηση αυτού. Άρα έχουμε:

$$minimixze\ z = 6x_{1A} + 8x_{1B} + 10x_{1C} + 7x_{2A} + 11x_{2B} + 11x_{2c} + 4x_{3A} + 5x_{3B} + 12x_{3C}$$

Subject to

$x_{1B} + x_{1C} 150$

$x_{2A} + x_{2B} + x_{2c} = 175$

$x_{3A} + x_{3B} + x_{3c} = 275$

$x_{1A} + x_{2A} + x_{3a} = 200$

$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 100$

$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 300$

$x_{ij} \geq 0$

Έχοντας βρει λοιπόν την αρχική εφικτή λύση με τη μέθοδο της Βορειοδυτική Γωνίας, επόμενο βήμα είναι η επίλυση του προβλήματος για την εύρεση της βέλτιστης λύσης. Επειδή η αρχική εφικτή λύση έχει βρεθεί με τη μέθοδο ελαχίστου κόστους, αυτό σημαίνει πως ο αυτός ο πίνακας είναι ο πρώτος στη μέθοδο SteppingStone.

Προς / Από	A	B	C	Προμήθειες
1	6	8 25	10 125	150
2	7	11	11 175	175
3	4 200	5 75	12	275
Απαιτήσεις	200	100	300	600

Πίνακας 4: Αρχική Λύση με Βάση τη Μέθοδο Βορειοδυτικής Γωνίας

Το πρώτο βήμα για μέθοδο SteppingStoneείναι η εκτίμηση των «άδειων» κελιών του πίνακα έτσι ώστε να υπάρχει ή όχι η πιθανότητα κάποιο από αυτά να μπορέσει να μειώσει το κόστος. Ακολουθώντας τα βήματα της μεθόδου έχουμε:

	v_j	$v_A = 6$	$v_B = 7$	$v_C = 10$	
u_i	Προς / Από	A	B	C	Προμήθειες
$u_1 = 0$	1	6 25	8	10 125	150
$u_2 = 1$	2	7	11	11 175	175
$u_3 = -2$	3	4 175	5 100	12	275
	Απαιτήσεις	200	100	300	600

Πίνακας 5:Οι Τιμές των u_i και v_j για τη Δεύτερη Επανάληψη.

Για να υπολογιστούν οι αλλαγές που θα υποστούν υπολογίζονται από το παρακάτω τύπο : $c_{ij} - u_i - v_j = k_{ij}$. Άρα έχουμε:

$x_{1B} \rightarrow k_{1B} = c_{1B} - u_1 - v_B = 8 - 0 - 7 = 1$
$x_{3C} \rightarrow k_{3C} = c_{2C} - u_3 - v_C = 12 — 2 - 10 = 4$
$x_{2B} \rightarrow k_{2B} = c_{2B} - u_2 - v_B = 11 - 1 - 7 = 3$
$x_{2A} \rightarrow k_{2A} = c_{2A} - u_2 - v_A = 7 - 1 - 6 = 0$

Εξαιτίας του γεγονότος ότι οι παραπάνω τιμές των k_{ij} είναι όλες θετικές αυτό σημαίνει πως ο πίνακας 4 δίνει τη βέλτιστη λύση. Ωστόσο, επειδή η τιμή του k_{2A} είναι 0 αυτό για τη μέθοδο SteppingStone σημαίνει πως η αλλαγή του περιλαμβάνει πολλές πιθανές λύσεις. Για τη παραμετροποίηση αυτής ακολουθούνται τα βήματα όπως έχουν αναλυθεί στη προηγούμενη ενότητα.

2.7.6.2 Η Μέθοδος Αναθεωρημένης Εκχώρησης MODI (ModifiedDistributionMethod)

Για την εύρεση της άριστης λύσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Αναθεωρημένης Εκχώρησης (MODI). Η μελέτη αυτής της μεθόδου οδηγεί σε κάποια απλά συμπεράσματα. Η χρήση της μεθόδου γίνεται με καθαρά αλγεβρικό τρόπο και είναι πιο απλός από τη χρήση της SteppingStone μεθόδου. Δεν είναι απαραίτητη η χρήση των κλειστών βρόγχων παρά μόνο όταν φτάσουμε στάδιο εκείνο της μεθοδολογίας που το απαιτεί. Επομένως η μέθοδος MODI πραγματοποιεί τον υπολογισμό των οριακών μεταβολών στο κόστος μεταφοράς στο σύνολό του για κάθε διαδρομή που δεν έχει επιλεχθεί με αλγεβρικό τρόπο. Όταν φτάσουμε στο σημείο εκείνο όπου είναι εφικτό να προσδιοριστεί η διαδρομή εκείνη που μπορεί να πετύχει τη μεγαλύτερη δυνατή μείωση στο συνολικό κόστος της μεταφοράς, τότε θα γίνει η χάραξη του μοναδικού κλειστού βρόγχου που είναι μόνο για τη συγκεκριμένη ως αποτέλεσμα διαδρομή και με αυτό τον τρόπο θα γίνει γνωστό το μέγεθος της ποσότητας που είναι απαραίτητο να μεταφερθεί σε αυτή.

Η εκτέλεση της μεθόδου MODI έχει ως σημείο εκκίνησης την επιλογή μιας οποιαδήποτε αρχικής λύσης και σαν αποτέλεσμα φέρει του προσδιορισμού μιας νέας λύσης που δίνει το ελάχιστο δυνατό κόστος μεταφοράς. Τα βήματα που ακολουθούνται στη διαδικασία αυτή περιγράφονται παρακάτω:

Βήμα 1. Πραγματοποιείται ο ορισμός των απαραίτητων για την εκτέλεση της μεθόδου μεταβλητών ως εξής:

- R_i= μεταβλητή για τη σειρά i. Η σειρά στο tableau είναι αυτή που αντιστοιχεί στη πηγή από όπου τα προϊόντα προέρχονται ή παράγονται αντίστοιχα.
- K_j= μεταβλητή για τη στήλη j. Οι στήλες αντιπροσωπεύουν τις πηγές όπου τα προϊόντα προορίζονται ή οι αποθήκες αυτών.
- $C_{i\,j}$ = το κόστος της διαδρομής που αντιστοιχεί στο συνδυασμό της πηγής προέλευσης και της πηγής προορισμού. Οι τιμές προέρχονται από το πίνακα του κόστους μεταφοράς.

Βήμα 2. Για την εύρεση των τιμών που αντιστοιχούν στις $R_i\ και\ K_j$ μεταβλητές διατυπώνονται οι εξισώσεις που έχουν τη μορφή:$R_i + K_j = C_{i\,j}$ και δηλώνονται με αυτό τον τρόπο οι διαδρομές εκείνες που έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί στη τρέχουσα λύση. Με το παραπάνω τρόπο δημιουργείται ένα μαθηματικά αλγεβρικό σύστημα με $m + n - 1$ εξισώσεις και $m + n$ αγνώστους.

Βήμα 3. Υπολογίζονται οι τιμές των μεταβλητών R_i και K_j. Αυτό είναι εφικτό θέτοντας $R_1 = 0$ και λύνοντας το σύστημα που έχει δημιουργηθεί ως προς τις υπόλοιπες εξισώσεις που αποτελούν το σύστημα.

Βήμα 4. Πραγματοποιείται ο υπολογισμός του δείκτη βελτίωσης για κάθε διαδρομή που δεν έχει χρησιμοποιηθεί στη τρέχουσα λύση της διαδρομής. Ο δείκτης βελτίωσης ορίζεται ως η οριακή μεταβολή του συνολικού κόστους μεταφοράς.

$$\Delta\varepsilon\acute{\iota}\kappa\tau\eta\varsigma\ B\varepsilon\lambda\tau\acute{\iota}\omega\sigma\eta\varsigma = C_{ij} - (R_i + K_j)$$

Βήμα 5. Γίνεται η επιλογή της διαδρομής με κριτήριο το μικρότερο αρνητικό δείκτη. Έτσι ώστε να γίνει η χρήση του στη νέα βελτιωμένη λύση. Πρέπει να αναφερθεί πως αν δεν υπάρχει αρνητικός δείκτης, το συμπέρασμα είναι πως στο σημείο αυτό η λύση υπάρχει να είναι και η βέλτιστη λύση.

Βήμα 6. Τα φορτία των διαδρομών τροποποιούνται με τρόπο που είναι παρόμοιος με εκείνον της μεθόδου SteppingStone.

2.1Πρόβλημα της Arizona Plumbing

Για τη καλύτερη κατανόηση της μεθόδου MODI παρακάτω δίνεται το παράδειγμα της εταιρείας ArizonaPlumbing.

Υπάρχει η εταιρεία που ονομάζεται ArizonaPlumbing, η οποία παράγει μεταξύ άλλων προϊόντων μια ολοκληρωμένη σειρά από είδη υγιεινής και πιο συγκεκριμένα μπανιέρες. Στο πρόβλημα που θα εξεταστεί, η εταιρεία πρέπει να αποφασίσει ποια είναι τα εργοστάσια θα πρέπει να προμηθεύσουν στις αποθήκες που έχουν απαιτήσεις. Τα σχετικά δεδομένα για την επωνυμία ArizonaPlumbing πίνακες 1 και 2. Ο πίνακας 1 δείχνει για παράδειγμα κοστίζει στην εταιρεία 5$ να μεταφέρει μια μπανιέρα από το εργοστάσιοο που βρίσκεται στη τοποθεσία DesMoines στην αποθήκη του Albuquerque, 4$ στην αποθήκη του Boston, 3$ στην αποθήκη του Cleveland αντίστοιχα.[25]Παρακάτω παρουσιάζονται τα δεδομένα αυτά:

Εργοστάσια (Χωρητικότητα Ανά Μονάδα)		**Αποθήκες(Απαιτήσεις Ανά Μονάδα)**	
Des Moines	100	Albuquerque	300
Evansville	300	Cleveland	200
Fort Lauderdale	300	Boston	200

Πίνακας 1: **Δεδομένα της** Arizona Plumbing

[25]http://wps.pearsoned.co.uk/wps/media/objects/9566/9796522/online_tutorials/heizer10e_tut4.pdf

Προς / **Από**	Albuquerque	Boston	Cleveland
Des Moines	5$	4$	3$
Evansville	8$	4$	3$
Fort Lauderdale	9$	7$	5$

Πίνακας 2: Κόστος Μεταφοράς Για Κάθε Μονάδα Μπανιέρας για την ArizonaPlumbing

Έχοντας λύσει τη μέθοδο της Βορειοδυτικής Γωνίας τα αποτελέσματά εμφανίζονται παρακάτω και βοηθούν στη μέθοδο MODI:

Από	**Προς**	**Μπανιέρες**	**Κόστος ανά Μονάδα ($)**	**Συνολικό Κόστος ($)**
D	A	100	5	500
E	A	200	8	1,600
E	B	100	4	400
F	B	100	7	700
F	C	200	5	1000
				4,200

Πίνακας 3:Κόστος Μεταφοράς

Πρώτο βήμα στην μέθοδο MODI είναι ο υπολογισμός των K_iκαι R_iαντίστοιχα λύνοντας τις αλγεβρικές εξισώσεις:

$$R_1 + K_1 = 5 \qquad R_3 + K_2 = 7$$

$$R_2 + K_1 = 8 \qquad R_3 + K_3 = 5$$

$$R_2 + K_2 = 4$$

Θέτοντας το $R_1 = 0$ εύκολα λύνονται οι παραπάνω εξισώσεις δημιουργώντας συστήματα παρακάτω:

$R_1 + K_1 = 5 \Rightarrow 0 + K_1 = 5 \Rightarrow K_1 = 5$

$R_2 + K_1 = 8 \Rightarrow R_2 + 5 = 8 \Rightarrow R_2 = 3$

$R_2 + K_2 = 4 \Rightarrow 3 + K_2 = 4 \Rightarrow K_2 = 1$

$R_3 + K_2 = 7 \Rightarrow R_3 + 1 = 7 \Rightarrow R_3 = 6$

$R_3 + K_3 = 5 \Rightarrow R_3 + K_3 = 5 \Rightarrow K_3 = -1$

	K_j	K_1	K_2	K_{3j}	
R_i	**Από / Προς**	**Albuquerque**	**Boston**	**Cleveland**	**Χωρητικότητα Εργοστάσιου**
R_1	**Des Moines**	5 100	4	3	100
R_2	**Evansville**	8 200	4 100	3	300
R_3	**Fort Lauderdale**	9	7 100	5 200	300
	Απαιτήσεις Αποθηκών	300	200	200	700

Πίνακας 4: **Αρχική Λύση στο πρόβλημα της** ArizonaPlumbing **στη** MODI **Μεθοδολογία**

Επόμενο βήμα στη μέθοδο MODI είναι ο υπολογισμός του δείκτη βελτίωσης, ο δείκτης είναι αυτός που αποδίδει την οριακή μεταβολή του συνολικού κόστους για κάθε διαδρομή που δεν χρησιμοποιείται στη τρέχουσα λύση και εκφράζεται από τον ακόλουθο τύπο: $I_{i\,j} = C_{i\,j} - R_i + K_j$,όπου σύμφωνα με το τύπο υπολογίζονται οι δείκτες για τις διαδρομές παρακάτω:

- Des Moines- Boston **à** $I_{DB} = C_{12} - R_1 - K_2 = 4 - 0 - 1 = 3\$$
- Des Moines- Cleveland **à** $I_{DC} = C_{13} - R_1 - K_3 = 3 - 0 - (-1) = 4\$$
- Evansville- Cleveland **à** $I_{EC} = C_{23} - R_2 - K_3 = 3 - 3 - (-1) = 1\$$
- Fort Lauderdale- Albuquerque **à** $I_{FA} = C_{31} - R_3 - K_1 = 9 - 6 - 5 = -2\$$

Έχοντας υπολογίσει τους δείκτες βελτίωσης, διαπιστώνεται πως υπάρχει αρνητικός δείκτης στη διαδρομή FortLauderdale-Albuquerque και αυτό σημαίνει πως η τρέχουσα λύση δεν είναι η βέλτιστη. Για το λόγο αυτό είναι απαραίτητο να βελτιωθεί η τρέχουσα λύση και αυτό επιτυγχάνεται με τη βελτίωση των δεικτών. Ακολουθώντας τα βήματα της μεθόδου που έχουν αναλυθεί παραπάνω παρακάτω αποτυπώνονται οι πίνακες που προκύπτουν από την επαναληπτική αυτή διαδικασία.

Προς / Από	A	B	C	Εργοστάσιο
D	5$ 100	4$	3$	100
E	8$ 100	4$ 200	3$	300
F	9$ 100	7$	5$ 200	300
Αποθήκη	300	200	200	700

Πίνακας 5:**Δεύτερη Επανάληψη στο Πρόβλημα της** Arizona Plumbing

Προς / Από	A	B	C	Εργοστάσιο
D	5$ 100	4$	3$	100
E	8$	4$ 200	3$ 100	300
F	9$ 200	7$	5$ 100	300
Αποθήκη	300	200	200	700

Πίνακας 6:**Τρίτη επανάληψη στο Πρόβλημα της** ArizonaPlumbing. **Η βέλτιστη λύση του προβλήματος**

2.7.7Η Μέθοδος Simplex για την επίλυση του Προβλήματος Μεταφοράς

Στη διαδικασία για να προσδιοριστεί ποια είναι η βέλτιστη λύση σε ένα πρόβλημα μεταφοράς ακολουθείται ένας αλγόριθμος που μέσα από μια διαδικασία που επαναλαμβάνεται εως ότου βρεθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα, η διαδικασία αυτή μια άλλη εκδοχή της μεθόδου Simplex. Ο αλγόριθμος αυτός εκτελείται με τον ακόλουθο τρόπο: το μοναδιαίο κόστος μέσα σε ένα δρομολόγιο χωρίζεται δυο υποθετικά κομμάτια που ονομάζονται κόστος αποστολής και υποδοχής αντίστοιχα. Το κόστος αποστολής είναι ίσο με το ποσό που ξοδεύεται μια μονάδα από το προϊόν για να αποσταλεί από μια πηγή όπου τα προϊόντα παράγονται, σε αντίθεση το κόστος υποδοχής ορίζεται ως το ποσό που δαπανά ένας προορισμός για να αποκτήσει τα προϊόντα αυτά. Στο πίνακα μεταφοράς αυτό απεικονίζεται ότι κάθε γραμμή i ισοδυναμεί με το κόστος αποστολής και συμβολίζεται με u_i , ενώ σε κάθε στήλη j αντιστοιχεί σε κάθε ένα κόστος υποδοχής και συμβολίζεται με v_j.

Τα νέα κόστη που μόλις έχουν οριστεί ο υπολογισμός τους προκύπτει από τα δρομολόγια που αναφέρονται στη τρέχουσα λύση, στον υπολογισμό απαραίτητο για να πραγματοποιηθεί είναι η εκτέλεση της εξίσωσης $u_i + v_j = c_{i\,j}$ όπου ορίζονται $i = 1, .., m$,$j = 1, \dots, n$, ο συνδυασμός κάθε i με j αναφέρεται στο κάθε ένα δρομολόγιο ξεχωριστά όπου όμως η $x_{i\,j} > 0$. Μέσα από αυτή τη διαδικασία προκύπτει λοιπόν ένα αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων που σε πλήθος είναι $m + n - 1$ και το πλήθος των αγνώστων αριθμητικά είναι $m + n$, μελετώντας αυτό προκύπτει το συμπέρασμα ότι είναι δύσκολο και δε μπορεί να προσδιοριστεί η λύση μέσα από αυτό το σύστημα. Για να ξεπεραστεί λοιπόν το πρόβλημα που έχει προκύψει καθορίζονται οι τιμές που αντιστοιχούν στα u_i *και* v_j, το βήμα που απαιτείται είναι η απόδοση σε μια οποιαδήποτε από τις μεταβλητές μια αυθαίρετη τιμή όπου συνηθισμένο φαινόμενο είναι να αποδοθεί η τιμή μηδέν στη μεταβλητή u_1, $u_1 = 0^1$. Έχοντας λοιπόν η u_1 τη τιμή 0^1 με το να αντικατασταθεί η τιμή αυτή σε όλες τις εξισώσεις της μορφής $u_i + v_j = c_{i\,j}$ που εμφανίζονται στο σύστημα, αυτό έχει σαν αποτέλεσμα όταν εμφανίζεται η u_1 είναι πολύ εύκολο το γεγονός να οριστούν και οι τιμές των u_i και των v_j αντίστοιχα. Στο tableau πραγματοποιείται η προσθήκη μιας στήλης που αντιστοιχούν στις τιμές των u_i που ορίζονται ως κόστη αποστολής και ακόμη η προσθήκη μιας γραμμής όπου εκεί καταγράφονται οι τιμές v_j που αντιστοιχούν στα κόστη υποδοχής, οι οποίες προσθήκες τοποθετούνται αριστερά και πάνω από το πίνακα μεταφοράς.

Μετά από την ολοκλήρωση της συμπλήρωσης των πρόσθετων στοιχείων στο πίνακα μεταφοράς είναι ευκολότερο να βρεθεί και να υποστεί αλλαγή η τρέχουσα λύση με σκοπό να μειωθεί το συνολικό κόστος μεταφοράς. Για να ολοκληρωθεί λοιπόν αυτός ο σκοπό το βήμα που απαιτείται είναι να διανεμηθεί κάποια ποσότητα θετικού βαθμού που έχει προσδιοριστεί σε ένα δρομολόγιο το οποίο όμως δεν είναι βασικό αλλά χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι το μοναδιαίο κόστος που εμφανίζεται ως $c_{i\,j}$ είναι μικρότερο από το συνολικό άθροισμα που το απαρτίζουν, δηλαδή ισχύει η συνθήκη $c_{i\,j} < u_i + v_j$. Αντικαθιστώντας μια βασική μεταβλητή με μία η οποία δεν είναι βασική μεταβλητή με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνεται η μεταβολή της τρέχουσας λύσης. Η εισερχόμενη μεταβλητή είναι αυτή όπου το δρομολόγιο έχει τη μεγαλύτερη αρνητική διαφορά και ορίζεται ως $\boldsymbol{c_{i\,j} - u_i - v_j}$ με τη συμμετοχή της μεταβλητής στη λύση προκαλείται η μεγαλύτερη εφικτή μείωση κόστους.

Το αποτέλεσμα της διαδικασίας ως τώρα είναι να προσδιοριστεί ποιο είναι το δρομολόγιο εκείνο που θα προστεθεί στη νέα λύση προστίθεται σε αυτό η μεγαλύτερη δυνατή τιμή ποσότητας που αντιστοιχεί. Επόμενο βήμα είναι να αλλάζουν την ίδια στιγμή και οι τιμές που αντιστοιχούν στις άλλες βασικές μεταβλητές έτσι ώστε να μπορούν να ισχύουν ακόμα οι τιμές που αντιστοιχούν στη θέση πηγής όπου τα προϊόντα παράγονται και προορισμού όπως ο χώρος όπου καταναλώνονται τα προϊόντα. Για να προσδιοριστεί πρέπει να σχεδιαστεί ο μοναδικός κλειστός βρόγχος ο οποίος έχει ως σημείο εκκίνησης το δρομολόγιο που εισέρχεται στη νέα λύση οι κορυφές του εμφανίζονται να είναι μόνο βασικές μεταβλητές και αφού πραγματοποιήσει το κύκλο επιστρέφει από το σημείο όπου ξεκίνησε.

Το επόμενο βήμα στη μέθοδο Simplex που αφορά την επίλυση του προβλήματος αφορά μια θετική ποσότητα που ορίζεται ως $\boldsymbol{\theta}$ η οποία κατανέμεται στο δρομολόγιο αυτό. Η ποσότητα αυτή είναι απαραίτητο να προστεθεί ή να αφαιρεθεί αντίστοιχα στις τιμές εκείνων των δρομολογίων που εμφανίζονται ως κορυφές του βρόγχου με απώτερο σκοπό να μην παραβιασθούν οι συνθήκες που ορίζονται στους ήδη υπάρχοντες περιορισμούς. Ο βρόγχος λοιπόν που έχει σχεδιαστεί είναι κλειστός και αυτό σημαίνει πως ο αριθμός των κορυφών είναι πάντα άρτιος αυτό σημαίνει πως είτε προστεθεί, είτε αφαιρεθεί η ποσότητα $\boldsymbol{\theta}$ σε κάθε κορυφή του βρόγχου ξεχωριστά.

Αυτό δεν επιδρά στις ποσότητες που μεταφέρονται στις πηγές και τους περιορισμούς έτσι ώστε πάντα να διατηρείται η ισορροπία η οποία απαιτείται. Δρομολόγια-δότες είναι εκείνα από τα οποία έχει αφαιρεθεί η ποσότητα $\boldsymbol{\theta}$ σε αντίθεση με τα δρομολόγια-λήπτες ορίζονται ως εκείνα έχει προστεθεί σε αυτά η ποσότητα $\boldsymbol{\theta}$**.** Τα δρομολόγια που απεικονίζονται ως κορυφές στο κλειστό βρόγχο που έχει σχεδιαστεί προσδιορίζουν τη τιμή εκείνη που μπορεί να απορροφήσει η ζητούμενη ποσότητα $\boldsymbol{\theta}$. Η ποσότητα $\boldsymbol{\theta}$ είναι ίση με τη μικρότερη ποσότητα που μπορεί να μεταφερθεί στα δρομολόγια-δότες.

Η διαδικασία που έχει αναλυθεί παραπάνω έχει ως σκοπό τη τροποποίηση της τρέχουσας λύσης με το αντικατασταθεί μια βασική με μία μη-βασική μεταβλητή σε πρόβλημα μεταφοράς. Ο τρόπος όπου η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται συνεχώς έτσι ώστε να βελτιωθεί σταδιακά η τρέχουσα λύση μέχρι το αποτέλεσμα που θα προκύψει να είναι η άριστη λύση. Δυστυχώς δεν υπάρχει τρόπος να προσδιοριστεί ο αριθμός ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτούνται, εμπειρικά όμως μπορεί να προκύψει το συμπέρασμα πως ο αριθμός είναι είτε σχεδόν ίσος, είτε δεν είναι σημαντικά μεγαλύτερος από το πλήθος των δρομολογίων που δεν είναι βασικά που στην αρχή της μεθόδου να έχουν αρνητική ποσότητα και να ισχύει η συνθήκη $c_{ij} - u_i - v_j$.

Παρακάτω δίνονται περιληπτικά τα βήματα της μεθόδου Simplex και συνοπτικά η απεικόνιση της εκτέλεσής της:

Βήμα 1°. Σε περίπτωση που το πρόβλημα είναι μη ισορροπημένο είναι απαραίτητο να ισορροπηθεί.

Βήμα 2°. Είναι υποχρεωτική η χρήση μια από τις μεθόδου για την εύρεση της αρχικής λύσης.

Βήμα 3°. Καθορισμός των μεταβλητών που θα εισαχθούν στο πίνακα μέσα από ένα κριτήριο που έχει αναπτυχθεί με σύντομο τρόπο.

Βήμα 4°. Βρες το βρόγχο εκείνο που αφορά την εισαγωγή των μεταβλητών και κάποιες από τις βασικές μεταβλητές.

Βήμα 5°. Η καταμέτρηση πραγματοποιείται μόνο στα κελιά που περιέχονται στο βρόγχο.

Βήμα 6°. Βρες το περιττό κελί όπου οι μεταβλητές προϋποθέτουν να έχουν τη μικρότερη αξία. Η αξία ονομάζεται θ. Η μεταβλητή που αντιστοιχεί στο περιττό κελί θα φεύγει από τη βάση. Μείωσε την αξία σε κάθε περιττό κελί κατά θ_1 και αύξησε την αξία σε κάθε άρτιο κελί κατά θ. Οι τιμές των μεταβλητών που δεν είναι στο βρόγχο παραμένουν ίδιες. Εάν το $\theta = 0$, τότε οι εισερχόμενες μεταβλητές θα ισούται με 0 ενώ οι περιττές μεταβλητές που έχουν τρέχουσα αξία ο, θα φύγουν από τη βάση.

Πρόβλημα της PowerCo company.

Η εταιρεία PowerCo κατέχει τρείς (3) σταθμούς παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας που παρέχουν την ενέργεια για τις ανάγκες τεσσάρων (4) πόλεων. Κάθε σταθμός παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας μπορεί να παρέχει τους ακόλουθους αριθμούς μετρημένους σε κιλοβατώρες (kwh) ενέργειας: σταθμός 1- 35 εκατομμύρια, σταθμός 2- 50 εκατομμύρια, σταθμός 3- 40 εκατομμύρια. Οι ανάγκες κάθε πόλης έχουν μετρηθεί την ίδια ώρα και τα δεδομένα είναι τα ακόλουθα : πόλη 1- 45 εκατομμύρια, πόλη 2- 20 εκατομμύρια , πόλη 3-30 εκατομμύρια, πόλη 4- 30 εκατομμύρια. Το κόστος αποστολής ενός (1) εκατομμυρίου από την απόσταση όπου η ενέργεια πρέπει να «ταξιδέψει».[3]Παρακάτω δίνεται ο πίνακας όπου αναγράφεται το κόστος μεταφοράς ανά μονάδα.

Προς / Από	Πόλη 1	Πόλη 2	Πόλη 3	Πόλη 4	Προσφορά
Εργοστάσιο 1	8	6	10	9	35
Εργοστάσιο 2	9	12	13	7	50
Εργοστάσιο 3	14	9	16	5	40
Απαιτήσεις	45	20	30	30	

Λύση:

Πρώτο βήμα για την επίλυση του προβλήματος μεταφοράς είναι ο προσδιορισμός των μεταβλητών και η μοντελοποίηση του προβλήματος. Η αντικειμενική συνάρτηση για την μοντελοποίηση του προβλήματος μεταφοράς που αφορά την PowerCoCompany έχει ως εξής:

$\min z = 8_{x\,11} + 6_{x\,12} 10_{x\,13} + 9_{x\,14}$

$+9_{x\,21} 12_{x\,22} + 13_{x\,23} + 7_{x\,24}$

$+14_{x\,31} + 9_{x\,32} + 16_{x\,33} + 5_{x\,34}$

$s.t x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 35$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 50$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 40$

[3]WINSTONL.W,(1991), OperationResearchApplicationandAlgorithms 2nd Edition, DuxlouryPress

$\chi_{11} + \chi_{21} + \chi_{31} \geq 45$

$\chi_{12} + \chi_{22} + \chi_{32} \geq 20$

$\chi_{13} + \chi_{23} + \chi_{33} \geq 30$

Στο παρασκήνιο λοιπόν έχουν επιλυθεί τα βήματα της μεθοδολογίας που όμως δεν αφορούν η ανάλυσή τους την ενότητα αυτή. Μέσα από την μέθοδο της βορειοδυτικής γωνίας προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας:

35				35
10	20	20		50
		10		40
45	20	30	30	

Πίνακας 1: Βασική Λύση για την PowerCo : Μέθοδος Βορειοδυτικής Γωνίας

Επόμενο βήμα στη διαδικασία είναι ο προσδιορισμός του $\boldsymbol{C_{BV}B^{-1}}$ που ορίζεται ως $[\boldsymbol{u_2 u_3 \dots u_m v_1 v_2 \dots v_n}]$ όπου τα $\boldsymbol{u_m}$ ορίζονται ως οι συντελεστές των περιορισμών προμήθειας, ενώ τα $\boldsymbol{v_n}$ ορίζονται ως οι συντελεστές των περιορισμών απαιτήσεων. Με την εύρεση του $\boldsymbol{C_{BV}B^{-1}}$ χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι σε κάθε μεταβλητή $\boldsymbol{x_{ij}}$ πρέπει να ισχύει $\boldsymbol{C_{ij} = 0}$. Άρα για κάθε $\boldsymbol{m + n - 1}$ μεταβλητές ισχύει το γεγονός:

$$\boldsymbol{C_{BV}B^{-1}a_{ij} - C_{ij} = 0 \ (1)}$$

Με την εφαρμογή της μεθόδου της βορειοδυτικής γωνίας για την εύρεση της βέλτιστης αρχικής λύσης στο παράδειγμα έχουμε:

8 35	6	10	9	35
9 10	12 20	13 20	7	50
14	9	16 10	5 30	40
45	20	30	30	

Πίνακας 2

Στη συνέχεια είναι απαραίτητο να υπολογιστεί το διάνυσμα
$BV = \{\chi_{11}, \chi_{21}, \chi_{22}, \chi_{23}, \chi_{33}, \chi_{34}\}$, εφαρμόζοντας την (1) προκύπτει:

$$c_{11} = [u_2 u_3 v_1 v_2 v_4]\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} - 8 = v_1 - 8 = 0$$

$$c_{21} = [u_2 u_3 v_1 v_2 v_4]\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} - 9 = u_2 + v_1 - 9 = 0$$

$$c_{22} = [u_2 u_3 v_1 v_2 v_4]\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix} - 12 = u_2 + v_2 = 0$$

$$c_{23} = [u_2 u_3 v_1 v_2 v_4]\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix} - 13 = u_2 + v_3 = 0$$

$$c_{33} = [u_2 u_3 v_1 v_2 v_4]\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix} - 16 = u_3 + v_3 - 16 = 0$$

$$c_{34} = [u_2 u_3 v_1 v_2 v_4]\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix} - 5 = u_3 + u_4 - 5 = 0$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $C_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ παρακάτω υπολογίζονται τα αντίστοιχα C_{ij}

$C_{12} = 0 + 11 - 6 = 5$ $\quad$ $C_{13} = 0 + 12 - 10 = 2$

$C_{14} = 0 + 1 - 9 = -8$ $\quad$ $C_{24} = 1 + 1 - 7 = -5$

$C_{31} = 4 + 8 - 14 = -2$ $\quad$ $C_{32} = 4 + 11 - 9 = 6$

Επειδή τη μεγαλύτερη θετική τιμή την έχει C_{32} και αυτό σημαίνει θα είναι η χ_{32} η εισερχόμενη μεταβλητή. Αυτό οικονομικά σημαίνει κάθα μονάδα που εκφράζεται από την χ_{32} και θα εισέρχεται στη βάση θα μειώνει το κόστος της εταιρείας κατά 6 νομισματικές μονάδες. Σο πίνακα 3 απεικονίζεται ο βρόγχος που δημιουργείται και αποτελείται από τις βασικές μεταβλητές που βρίσκονται στις θέσεις (3,2)-(3,3)-(2,3)-2,2) αυτό σημαίνει πως η εισερχόμενη μεταβλητή θα είναι η χ_{32}.

8 35	6	10	9	35
9 10	12 20	13 20	7	50
14	9	16 10	5 30	40
45	20	30	30	

Πίνακας 3

Έχοντας υπολογίσει τα C_{ij} παρατηρείται πως τα μόνα που έχουν θετικές τιμές είναι τα $C_{12} = 5$, $C_{13} = 2$, $C_{24} = 1$. Άρα η τιμή που θα εισαχθεί στο πίνακα είναι η x_{12} και δημιουργείται ο βρόγχος που συμπεριλαμβάνει τις εξής θέσεις (1,2)-(2,2)-(2,1)-(1,1), επειδή η τιμή του x_{22} και x_{11}θα μειωθούν κατά 10 μονάδες ενώ τα x_{12} και x_{21} θα αυξηθούν κατά 10 μονάδες αντίστοιχα.

$v_{j=}$	**8**	**11**	**12**	**7**	
$u_i = 0$	8 35	6	10	9	35
1	9 10	12 10	13 30	7	50
-2	14	9 10	16	5 30	40
	45	20	30	30	

Πίνακας 4

Στη συνέχεια η εισερχόμενη είναι η x_{13}. Ο βρόγχος εκτός από τη x_{13} θα περιλαμβάνει και τις εξής μεταβλητές που βρίσκονται στις εξής θέσεις: (1,3)-(2,3)-(2,1)-(1,1). Εξαιτίας του γεγονότος ότι η x_{11} έχει τη τιμή 25 που είναι η μικρότερη που έχει εισαχθεί αυτό σημαίνει πως τα x_{23} και x_{11} θα μειωθούν κατά 25 μονάδες ενώ τα χ_{13} και x_{12} θα αυξηθούν κατά τις ίδιες μονάδες. Αυτό απεικονίζεται στο πίνακα 5.

v_j=	8	6	12	2	
$u_i = 0$	8 25	6 10	10	9	35
1	9 20	12	13 30	7	50
3	14	9 10	16	5 30	40
	45	20	30	30	

Πίνακας 5 :Η χ_{13} εισέρχεται στο πίνακα

Τέλος για την επίλυση του προβλήματος είναι αναγκαίο ο υπολογισμός των παρακάτω:

$u_1 = 0$ $\quad$ $u_2 + v_3 = 13$

$u_2 + v_1 = 9$ $\quad$ $u_1 + v_3 = 10$

$u_3 + v_4 = 5$ $\quad$ $u_3 + v_2 = 9$

$u_1 + v_2 = 6$

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η βέλτιστη λύση για το πρόβλημα μεταφοράς που αφορά την εταιρεία PowerCo είναι $x_{12} = 10$, $x_{13} = 25$, $x_{21} = 45$, $x_{23} = 5$, $x_{32} = 10$, $x_{34} = 30$ και η συνάρτηση κόστους δίνει το αποτέλεσμα:

$$z = 6(10) + 10(25) + 9(45) + 13(5) + 9(10) + 5(30) = 1.020$$

Ο τελικός πίνακας που δίνει τις βέλτιστες λύσεις είναι ο παρακάτω:

v_j=	**6**	**6**	**10**	**2**	
$u_i = 0$	8	6 10	10 25	9	35
3	9 45	12	13 5	7	50
3	14	9 10	16	5 30	40
	45	20	30	30	

Πίνακας 6: Τελικός Πίνακας Βέλτιστων Λύσεων για την PowerCo.

Κεφάλαιο 3^{o}: Παραδείγματα και εφαρμογές του προβλήματος μεταφοράς.

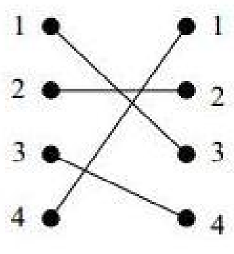
3.1ΠρόβλημαΕκχώρησης(The assignment problem)

Το πρόβλημα εκχώρησης ανήκει στις ειδικές περιπτώσεις του προβλήματος μεταφοράς στην οποία διατύπωσή του υπάρχουν ίδια σε αριθμό κέντρα προμηθειών και απαιτήσεων και το γεγονός ότι οι απαιτήσεις και οι προμήθειες ισούται με τη μονάδα. Αφορά λοιπόν στην ερώτηση πως εκχωρηθούν παντικείμενα σε mάλλα αντικείμενα με το καλύτερο δυνατό τρόπο. Το πρόβλημα χαρακτηρίζεται κυρίως από δύο παράγοντες: τις αναθέσεις οι οποίες είναι αυτές που παρουσιάζουν τη βασική συνδυαστική δομή, ενώ η αντικειμενική συνάρτηση παρουσιάζει τα μοντέλα εκείνα που με το καλύτερο δυνατό τρόπο οδηγούν στη βελτιστοποίηση του προβλήματος.[11]

Μαθηματικά μιλώντας ο όρος «ανάθεση» δε σημαίνει κάτι παραπάνω από μια αμφιμονοσήμαντη χαρτογράφηση ενός πεπερασμένου συνόλου. Η απεικόνιση των δικτύων αυτών μπορούν να μοντελοποιηθούν και να αναπαρασταθούν με διαφορετικούς τρόπους. Κάθε πίνακας σε διανυσματική μορφή φ όπου $N = \{1, n\}$ αντιστοιχεί με ένα μοναδικό τρόπο σε ένα διάνυσμα $\chi_{\varphi} = (\chi_{ij}), όπου\ x_{ij} = 1, j = \varphi(i), x_{ij} \neq 0\ και\ j \neq \varphi(i)$. Το παραπάνω μπορεί να διατυπωθεί σε μορφή γραφήματος που ορίζεται ως εξής:$G_{\varphi} = (V, W: E)$ όπου κάθε κορυφή αντιστοιχεί στα σύνολα Vκαι Wέχουν n ακμές $|V| = |W| = n$και ισχύει για κάθε κορυφή(εικόνα 1)

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_{\phi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Εικόνα 1: **Αποτύπωση ενός δικτύου εκχώρησης**

[11]ΜΠΟΤΣΑΡΗΣ Χ.Ε, Επιχειρησιακή Έρευνα Μέθοδοι & Προβλήματα, Εκδόσεις Ελλήν

Το πρόβλημα εκχώρησης μπορεί να διατυπωθεί ως ένα πρόβλημα, όπου υπάρχουν διαφορετικές θέσεις εργασίας που θα μπορούν να διατίθενται σε διαφορετικά μηχανήματα με κριτήριο το κόστος που θα επιφέρει στη πραγματοποίηση των εργασιών αυτών. Ένας βασικός περιορισμός για την υλοποίηση της ειδικής αυτής κατηγορίας είναι το γεγονός ότι μόνο μια εργασία σε ένα μηχάνημα, δηλαδή αυτό σημαίνει πως πρέπει να είναι ένα-προς-ένα μοντέλο για την ανάθεση. Τα δεδομένα κόστους δίνονται στη μορφή πίνακα, όπου οι σειρές αντιστοιχούν στις εργασίες που πρέπει να πραγματοποιηθούν, ενώ ο αριθμός των στηλών απεικονίζει τον αριθμό των μηχανών. Ο αριθμός των σειρών είναι ο ίσος με τον αριθμό των στηλών αυτό πρακτικά σημαίνει πως ο αριθμός των εργασιών πρέπει να εξισώνεται με τον αριθμό των μηχανημάτων.

Το πρόβλημα εκχώρησης θεωρείται μια ειδική κατηγορία διότι κάθε εργασία απαιτεί διαφορετικές δεξιότητες και είναι διαφορετική ικανότητα ή αποτελεσματικότητα για κάθε άτομο για την εργασία που θα πρέπει να ολοκληρώσει. Το φαινόμενο δημιουργεί διαφορές στο κόστος. Αν κάθε άτομο είναι σε θέση να εκτελεί όλες τις εργασίες εξίσου αποτελεσματικό τότε όλα τα έξοδα θα είναι ίδια σε αριθμό για κάθε εργασία άρα σημαίνει πως η εργασία μπορεί να αποδοθεί σε οποιοδήποτε άτομο. Όταν η ανάθεση θεωρηθεί ως πρόβλημα τότε μετατρέπεται σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να συγκριθεί με ένα πρόβλημα μεταφοράς.

3.1.1 Κατηγορίες προβλημάτων εκχώρησης

Τα προβλήματα εκχώρησης διαθέτουν κάποια κύρια χαρακτηριστικά που δηλώνουν τη συμπεριφορά τους και διαχωρίζονται στις παρακάτω κατηγορίες:

- Ισορροπημένο Πρόβλημα Εκχώρηση
    - Στη κατηγορία ανήκουν εκείνα τα προβλήματα τα οποία ο αριθμός των στηλών είναι ίσος με τον αριθμό των σειρών και αυτό ισοδυναμεί με ένα ισορροπημένο πρόβλημα μεταφοράς όπου εκεί η συνολική ζήτηση είναι ίδια με τη συνολική προσφορά.

- Μη Ισορροπημένο Πρόβλημα Εκχώρησης
  - Ένα πρόβλημα εκχώρησης θεωρείται ως μη ισορροπημένο όταν ο αριθμός των στηλών δεν είναι ίδιος με εκείνον των σειρών. Δηλαδή πρακτικά αυτό ίσως να σημαίνει πως ο αριθμός των μηχανημάτων μπορεί να είναι μεγαλύτερος από εκείνον των εργασιών ή και αντίστροφα. Στη περίπτωση αυτή ο τρόπος επίλυσης είναι η εισαγωγή μιας εικονικής γραμμής ή στήλης στη μήτρα. Η εισαγωγή της εικονικής γραμμής ή στήλης τοποθετούνται έτσι ώστε να έχουν μηδενικό κόστος. Με αυτό τον τρόπο πραγματοποιείται η εξισορρόπηση του προβλήματος και το επόμενο βήμα είναι η χρήση του Ουγγρικού αλγόριθμου(HungarianMethod) για την εύρεση της βέλτιστης λύσης.

- «Απαγορευμένο» Πρόβλημα Εκχώρησης
  - Ένα «απαγορευμένο» πρόβλημα εκχώρησης συμβαίνει όταν ένα μηχάνημα μπορεί να μην είναι σε θέση να αποδώσει τη συγκεκριμένη εργασία που του έχει ανατεθεί λόγω κάποιων τεχνικών δυσκολιών για την ολοκλήρωση της εργασίας. Σε αυτή τη περίπτωση η ανάθεση περιορίζεται από τα δοσμένα γεγονότα κάθε φορά. Για την επίλυση των προβλημάτων που ανήκουν σε αυτή τη κατηγορία είναι απαραίτητη η εκχώρηση μιας πολύ μεγάλης τιμής κόστους, αυτό εξασφαλίζει ότι ο περιορισμένος συνδυασμός δε φέρει ευθύνη για το σχέδιο βελτιστοποίησης που αποσκοπεί στην ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους.

3.1.2Τρόποι επίλυσης ενός προβλήματος εκχώρησης

- ΠλήρηςΜέθοδοςΚαταμέτρησης (Complete Enumeration Method)
  - Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται κυρίως σε μικρού μεγέθους προβλήματα εκχώρησης. Σε αυτή τη περίπτωση μι α ολοκληρωμένη καταγραφή αι αξιολόγηση όλων των προσώπων και των θέσεων εργασίας είναι εφικτή. Η χρήση της μεθόδου καταμέτρησης δεν είναι

εύκολη στη χρήση για μεγάλα δεδομένα που περιγράφουν πραγματικές καταστάσεις.

- Ημέθοδος Simplex(Simplex Method)
  - Το πρόβλημα της εκχώρησης μπορεί να μοντελοποιηθεί ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού ως εκ τούτου, μπορεί να θεωρηθεί ως τρόπος επίλυσης η μέθοδος Simplex. Ωστόσο η χρήση της είναι αρκετά κουραστική και επίπονη στην επίλυση του προβλήματος.

- Transportation Method
  - Το πρόβλημα ανάθεσης θεωρείται μια ειδική περίπτωση του προβλήματος μεταφοράς ως αποτέλεσμα αυτό σημαίνει ότι μπορεί να η μέθοδος μεταφοράς (transportationmethod) για την εύρεση της βέλτιστης κατανομής. Ωστόσο κύριο πρόβλημα αποτελεί το γεγονός ότι η κατανομή γίνεται με κριτήριο ένα-προς-ένα άτομο, ή ανά θέση εργασίας.

- Ουγγρικός Αλγόριθμος(HungarianMethod)
  - Ο Ουγγρικός αλγόριθμος είναι η πιο διαδεδομένη μέθοδος που ακολουθείται για τη επίλυση ενός προβλήματος εκχώρησης. Το όνομά του οφείλεται στη καταγωγή των επιστημόνων οι οποίοι τον ανέπτυξαν και του έδωσαν μορφή. Η ουγγρικής λοιπόν καταγωγής μαθηματικοί D.Konig και J.Egevrary πραγματοποίησαν μια εργασία η οποία στάθηκε για τον Kuhn από το 1955 έως το 1956 να την αναπτύξει και να δημιουργήσει έναν εξειδικευμένο τρόπο επίλυσης ενός προβλήματος εκχώρησης.[26]Ο ουγγρικός αλγόριθμος είναι μια διαδικασία που λειτουργεί εκτελώντας τα παρακάτω βήματα:
    - § 1ο Βήμα. Δημιουργία ενός πίνακα όπου θα περιέχει τα ακόλουθα δεδομένα οι «άνθρωποι» στην αριστερή στήλη και η «δραστηριότητα» τοποθετείται κατά μήκος της κορυφής και το «κόστος» που αντιστοιχεί σε κάθε ζεύγος στη μέση.

[26]http://tom.host.cs.st-andrews.ac.uk/CS3052-CC/Practicals/Kuhn.pdf

- 2ο Βήμα. Ο πίνακας είναι απαραίτητο να είναι τετραγωνικός και αυτό αν είναι απαραίτητο η προσθήκη μιας εικονικής σειράς ή στήλης. Συνήθως, κάθε στοιχείο στην εικονική σειρά ή στήλη είναι το ίδιο με το μεγαλύτερο αριθμό στο πίνακα.
- 3ο Βήμα. Μείωση των γραμμών αφαιρώντας την ελάχιστη τιμή κάθε γραμμής από αυτή τη γραμμή.
- 4ο Βήμα. Μείωση των στηλών αφαιρώντας την ελάχιστη τιμή κάθε στήλης από αυτή τη στήλη.
- 5ο Βήμα. Η κάλυψη των στοιχείων μηδέν με τον ελάχιστο αριθμό των γραμμών εάν είναι πιθανό να καλυφθούν με αυτά. (Εάν ο αριθμός των γραμμών είναι ίσος με τον αριθμό των στηλών πήγαινε στο βήμα 9.
- 6ο Βήμα. Είναι απαραίτητη η προσθήκη του ελάχιστου ακάλυπτου στοιχείου για κάθε στοιχείο που καλύπτεται. Εάν το στοιχείο καλύπτεται δύο φορές, πρέπει να προστεθεί το ελάχιστο στοιχείο σε αυτό δύο φορές.
- 7ο Βήμα. Η αφαίρεση του ελάχιστου στοιχείου από κάθε στοιχείο του πίνακα.
- 8ο Βήμα. Η κάλυψη των μηδενικών στοιχείων και πάλι. Εάν ο αριθμός των γραμμών που καλύπτουν τα στοιχεία μηδέν δεν είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών, επιστροφή στο βήμα 6.
- 9ο Βήμα. Επιλογή ενός ζεύγους που ταιριάζουν με κριτήριο την επιλογή μιας σειράς από μηδενικά έτσι ώστε κάθε γραμμή ή στήλη έχει μόνο μία επιλογή.
- 10ο Βήμα. Εφαρμογή του ζεύγους που ταιριάζουν με τον αρχικό πίνακα αγνοώντας τις εικονικές σειρές. Αυτό δείχνει ποιος θα πρέπει να εκτελέσει ποια δραστηριότητα και προσθέτοντας το κόστος θα δώσει σαν αποτέλεσμα το ελάχιστο κόστος.

3.2 Πρόβλημα Μεταφόρτωσης(Transhipmentproblem)

Σε ένα πρόβλημα θεωρείται ότι αποτελείται από μια πηγή(εργοστάσιο, εγκαταστάσεις) ενεργεί μόνο ως αποστολέας των αγαθών σε ένα προορισμό (αγορά, καταστήματα) που δρα μόνο σαν παραλήπτης. Στην ευρύτερη κατηγορία του προβλήματος της μεταφοράς ανήκει το πρόβλημα της μεταφόρτωσης στην ειδική αυτή περίπτωση αυτή ανήκουν τα προβλήματα τα οποία επιτρέπουν την αποστολή των εμπορευμάτων τόσο από τη μία πηγή στην άλλη και από τον έναν προορισμό στον άλλον. Έτσι επιτρέπεται λοιπόν η δυνατότητα της μεταφόρτωσης, τα προϊόντα που παράγονται είναι διαθέσιμα από μια πηγή και έναν προορισμό σε κάποιο σημείο προορισμού μπορούν αυτές οι ποσότητες να φτάσουν εκεί μέσω κάποιων άλλων πηγών ή άλλους προορισμούς και έτσι μεταφορτώθηκαν στα σημεία αυτά. Αυτό ίσως θεωρηθεί μια πιο ρεαλιστική δήλωση του προβλήματος κατανομής που αντιμετωπίζεται σε επιχειρήσεις ή στο χώρο της βιομηχανίας.[2]

Ένα πρόβλημα μεταφοράς μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε ένα πρόβλημα μεταφόρτωσης και αυτό επιτυγχάνεται ε τη χαλάρωση των περιορισμών για τη λήψη και την αποστολή των μονάδων σχετικά με τις πηγές και τους προορισμούς αντίστοιχα. Σε ένα πρόβλημα μεταφοράς υπάρχουν m-σταθμοί προέλευσης και n-σταθμοί προορισμού για να γίνει ένα διευρυμένο πρόβλημα: με m+nσταθμούς προέλευσης και ίσος αριθμός των σταθμών προορισμού. Με κάποιες τροποποιήσεις το πρόβλημα μεταφόρτωσης μπορεί να λυθεί κάνοντας χρήση της μεθόδου μεταφοράς. Αν οι πηγές και οι προορισμοί οριστούν ως T, τότε το x_{ij} θα αντιπροσωπεύει το ποσό των εμπορευμάτων που αποστέλλονται από τον i-οστό αποδέκτη (T_i) προς το j-οστό τερματικό (T_j)και c_{ij}που αυτό θα αντιπροσωπεύει το κόστος ανά μονάδα της εκάστοτε αποστολής. Φυσικά x_{ii} θα είναι ίσο με το μηδέν επειδή καμία μονάδα δεν αποστέλλεται από ένα σταθμό στον εαυτό του.

Ένα πρόβλημα μεταφόρτωσης μπορεί να διατυπωθεί στη γενική του μαθηματική του μορφή ως εξής:

[2]NASH S.G- SOFER.A, (1996), Linear and No Linear Programming, McGraw-Hill, New York

$$minimize\ z = \sum_{i=j}^{m+n} \sum_{j=i}^{m+n} c_{ij}\, x_{ij}$$

subject to:

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{i,i-1} + x_{i,i+1} + \cdots + x_{i,m+n} - t_i = a_i\,(i = 1,2,..,m)$$

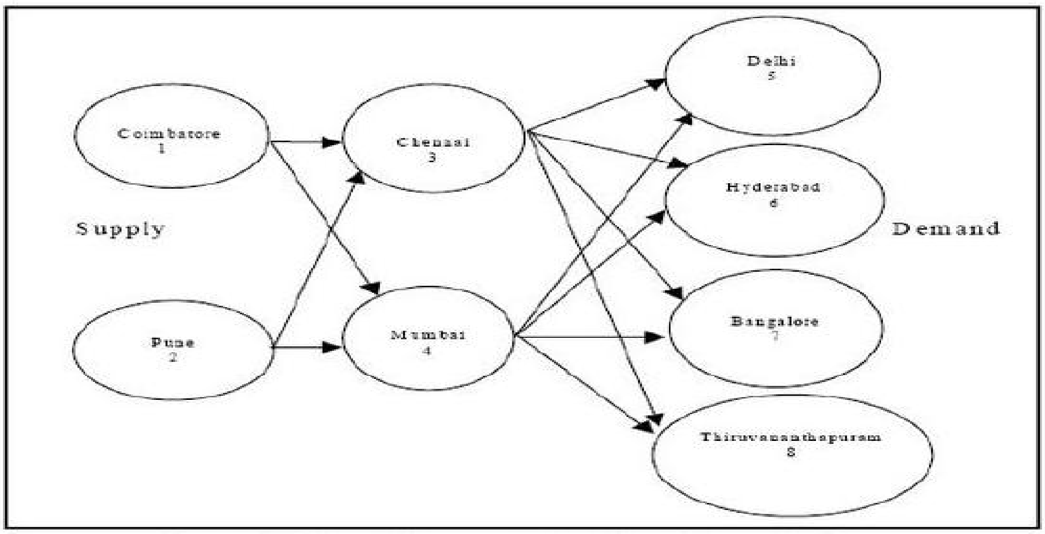
$$x_{1i} + x_{21} + \cdots + x_{i-1,i} + x_{i+1,1} + \cdots + x_{m+n,i} = t_i(i = 1,2,\ldots,m)$$

$$x_{ij} + x_{2j} + \cdots + x_{j-1,j} + x_{j+1,j} + \cdots + x_{m+n,j} - t_j = b_j\,(j = m+1, m+2,..,m+n)$$

$$x_{j1} + x_{j2} + .. + x_{j,j-1} + x_{j,j+1} + \cdots + x_{j,m+n} = t_j(j = m+1, m+2, \ldots, m+n)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=m+1}^{m} b_j$$

Το πρόβλημα μεταφόρτωσης θεωρείται ως μια επέκταση του προβλήματος μεταφοράς στο οποίο το εμπόρευμα μπορεί να μεταφερθεί σε ένα συγκεκριμένο προορισμό μέσω ενός ή περισσότερων ενδιάμεσων κόμβων μεταφόρτωσης. Κάθε ένας από τους κόμβους με τη σειρά τους προμηθεύουν σε άλλους προορισμούς. Ο σκοπός του προβλήματος μεταφόρτωσης είναι να καθοριστεί το μέγεθος των μονάδων που είναι απαραίτητο να σταλεί σε κάθε κόμβο, έτσι ώστε όλες οι απαιτήσεις της ζήτησης να συμβαδίζουν με το ελάχιστο κόστος μεταφοράς.



Εικόνα 2: Παράδειγμα ενός δικτύου μεταφόρτωσης.

Ένα πρόβλημα μεταφοράς επιτρέπει μόνο αποστολές που πηγαίνουν απευθείας από τα σημεία προμηθειών σε σημεία ζήτησης. Στο πρόβλημα μεταφόρτωσης, μερικές φορές μπορεί να υπάρχουν σημεία τα οποία ονομάζονται σημεία μεταφόρτωσης μέσω του οποίου τα εμπορεύματα πρόκειται να μεταφορτωθούν κατά την αποστολή τους από σημείο προμηθειών σε ένα σημείο ζήτησης. Η βέλτιστη λύση σε ένα πρόβλημα μεταφόρτωσης μπορεί να βρεθεί επιλύοντας ένα πρόβλημα μεταφοράς.

Η διαδικασία που ακολουθείται για να επιλυθεί ένα πρόβλημα μεταφόρτωσης περιγράφεται από τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1^{o}.Εάν θεωρηθεί απαραίτητο πραγματοποιείται η προσθήκη ενός εικονικού σημείου ζήτησης(όπου οι προμήθειες είναι μηδέν (0) εξίσου και οι απαιτήσεις ζήτησης είναι είτε ίσες είτε πλεονάζουσες σε σχέση με τη προσφορά του προβλήματος) με σκοπό να εξισορροπήσει το πρόβλημα. Οι αποστολές πραγματοποιούνται προς το εικονικό στοιχείο και από ένα σημείο στον εαυτό του θα είναι μηδέν. Θωρείται λοιπόν έστω $s = συνολική\ διαθέσιμη\ προσφορά$

Βήμα 2^{o}. Στο δεύτερο βήμα της διαδικασίας ανήκει η δημιουργία ενός tableauμεταφοράς. Ο πίνακας θα περιέχει μια σειρά όπου θα περιέχονται κάθε σημείο προμήθειας και το σημείο μεταφόρτωσης και μια στήλη όπου θα συμπληρωθεί με τα σημεία ζήτησης και το σημείο μεταφόρτωσης. Κάθε σημείο προμήθειας θα έχει τιμή που ισούται με την αρχική προμήθεια και κάθε σημείο ζήτησης θα έχει τη αρχική ζήτησή του. Κατόπιν, κάθε σημείο μεταφόρτωσης θα έχει τιμή προσφοράς ίση με το αρχικό σημείο προσφοράςS (+) και η τιμή των απαιτήσεων είναι ίση με το αρχικό σημείο προσφοράς S(+).

3.3. Λογισμικό MSExcelSolver.

Το λογισμικό φύλλο (MicrosoftExcel) είναι ικανό να επιλύσει ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και κατά συνέπεια εα πρόβλημα μεταφοράς. Πρώτο βήμα αποτελεί η δημιουργία ενός «φύλλου» όπου θα περιέχονται τα δεδομένα των αντικειμενικών συντελεστών και των περιορισμών.[12]

Με τη χρήση των κατάλληλων συναρτήσεων επέρχεται η λύση. Ο επιλυτής παράγει τρεις αναφορές για το γραμμικό προγραμματισμό την αναφορά αποτελεσμάτων, την αναφορά αποτελεσμάτων και τέλος την αναφορά των ορίων.

- Η αναφορά αποτελεσμάτων δίνει σαν αποτέλεσμα την αρχική και τη τελική τιμή για το κελί «στόχο» και όλα τα «μεταβαλλόμενα» κελιά ως μια καταχώριση για κάθε ένα από τους περιορισμούς.
- Η αναφορά ευαισθησίας παράγει τη βέλτιστη λύση για κάθε ένα «μεταβαλλόμενο» κελί, το ευκαιριακό κόστος, τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης και αυξομειώσεις που επιτρέπεται να μεταβληθούν έτσι ώστε η παρούσα λύση να παραμείνει βέλτιστη λύση. Επίσης οι σκιώδης τιμές και οι αυξομειώσεις που επιτρέπονται.
- Η αναφορά ορίων δίνει τα άνω και κάτω όρια για κάθε «μεταβαλλόμενο» κελί έτσι ώστε να ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί.

Ο επιλυτής εξισώσεων είναι ένα ισχυρό εργαλείο λόγω της πληρότητας των αποτελεσμάτων που εμφανίζει.

2.7.6 Παράδειγμα 1ο.

Ένα εργοστάσιο παράγει και διανέμει ένα προϊόν στους αγοραστές της μέσω παραγγελιών. Αυτήν την εβδομάδα οι αγοραστές τους 1, 2 και 3 έχουν παραγγείλει τις εξής ποσότητες 150, 200 και 250 μονάδες προϊόντος αντίστοιχα. Το προϊόν μπορεί να σταλεί στους αγοραστές από τρία παραρτήματα του εργοστασίου Α, Β και Γ που έχουν διαθέσιμες ποσότητες 125, 175 και 300 μονάδες προϊόντος αντιστοίχως. Το κόστος μεταφοράς από κάθε παράρτημα προς κάθε αγοραστή δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

[12] ΤΣΑΝΤΑΣ Ν.Δ-ΒΑΣΙΛΙΕΟΥ Π.Γ.Χ, (2000), Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη

Παραρτήματα	Αγοραστής			
	1	2	3	Προμήθειες
Α	8	10	7	125
Β	9	5	14	175
Γ	6	12	8	300
Απαιτήσεις	150	200	250	

Λύση:

Λύνοντας ένα πρόβλημα με τον solverέχουμε μια ποικιλία αποτελεσμάτων όπως έχει ήδη αναφερθεί. Με βάση το παρακάτω πίνακα δίνεται ένα στιγμιότυπο από τη προσπάθεια του χρήστη να λύσει το πρόβλημα μεταφοράς έτσι ώστε να βρει ποιο είναι το ιδανικό σχέδιο δράσης που θα πρέπει να ακολουθηθεί.

			προς			
		αγορ_1	αγορ_2	αγορ_3	Προσφορά	Σύνολο
	υποκατάστημα Α	0	50	75	125	125
από	υποκατάστημα Β	0	0	175	175	175
	υποκατάστημα Γ	150	150	0	300	300
	Ζήτηση	150	200	250		
	Σύνολο	150	200	250		
	Συνολικό Κόστος	55450				
			προς			
		αγορ_1	αγορ_2	αγορ_3	Προσφορά	
	υποκατάστημα Α	8	2	3	125	
από	υποκατάστημα Β	6	10	14	175	
	υποκατάστημα Γ	9	12	8	300	
	Ζήτηση	150	200	250		

Microsoft Excel 12.0 **Αναφορά απάντησης**
Φύλλο εργασίας: **[Βιβλίο1]Φύλλο1**
Ημερομηνία δημιουργίας αναφοράς: 17/8/2013 4:43:00 **μμ**

Κελί προορισμού (Ελάχιστο)

Κελί	Όνομα	Αρχική τιμή	Τελική τιμή
$C$8	Συνολικό Κόστος αγοραστής 1	0	55450

Ρυθμιζόμενα κελιά

Κελί	Όνομα	Αρχική τιμή	Τελική τιμή
$C$3	υποκατάστημα Α αγοραστής 1	0	0
$D$3	υποκατάστημα Α αγοραστής 2	0	50
$E$3	υποκατάστημα Α αγοραστής 3	0	75
$C$4	υποκατάστημα Β αγοραστής 1	0	0
$D$4	υποκατάστημα Β αγοραστής 2	0	0
$E$4	υποκατάστημα Β αγοραστής 3	0	175
$C$5	υποκατάστημα Γ αγοραστής 1	0	150
$D$5	υποκατάστημα Γ αγοραστής 2	0	150
$E$5	υποκατάστημα Γ αγοραστής 3	0	0

Περιορισμοί

Κελί	Όνομα	Τιμή κελιού	Τύπος	Κατάσταση	Απόκλιση
$G$3	υποκατάστημα Α Σύνολο	125	$G$3<=$F$3	Υποχρεωτικός	0
$G$4	υποκατάστημα Β Σύνολο	175	$G$4<=$F$4	Υποχρεωτικός	0
$G$5	υποκατάστημα Γ Σύνολο	300	$G$5<=$F$5	Υποχρεωτικός	0
$C$7	Σύνολο αγοραστής 1	150	$C$7>=$C$6	Υποχρεωτικός	0
$D$7	Σύνολο αγοραστής 2	200	$D$7>=$D$6	Υποχρεωτικός	0
$E$7	Σύνολο αγοραστής 3	250	$E$7>=$E$6	Υποχρεωτικός	0

Στον ανωτέρω πίνακα εμφανίζονται τα **αποτέλεσματα αναφοράς** που περιέχει το **Κελί προορισμού (Ελάχιστο)**, τα **Ρυθμιζόμενα κελιά**, και τους **Περιορισμούς**. Στο κελί C8 βρίσκεται η αντικειμενική συνάρτηση η οποία προσδιορίζει το συνολικό κόστος το οποίο είναι ίσο με 55.450. Στο κελί που εμφανίζεται η αρχική τιμή η οποία ισούται με 0 θα μας ενδιαφέρει μόνο στην περίπτωση που θελήσουμε να κάνουμε κάποιες παραλλαγές στο μοντέλο που έχουμε.

Ρυμιζόμενα Κελιά: Τα κελιά από το C3 μέχρι το E5 περιέχουν την **άριστη λύση,** γι' αυτό είναι εμφανής η αντιστοιχεία που υπάρχει. Η απάντηση που έχουμε για την άριστη λύση μας δείχνει ότι πρέπει να σταλθούν από το υποκατάστημα Α 50 ποσότητες στον αγοραστή 2 και 75 στον αγοραστή 3, από το υποκατάστημα Β 175 ποσότητες στον αγοραστή 3 και απο τό υποκατάστημα Γ 150 στον αγοραστή 1 και στον αγοραστή 2.

Στην συνέχεια εμφανίζεται ο πίνακας με τις πληροφορίες για τους **περιορισμούς**. Σε αυτό τον πίνακα μας δείχνει το **όνομα**, από την αριστερή μεριά το **κελί** και από την δεξιά μεριά δίπλα από το όνομα την **τιμή κελιού** (άριστη λύση), στο κελί όπου ονομάζεται **τύπος** καταγράφεται ο περιορισμός με ακρίβεια. Επίσης το κελί που ονομάζεται **κατάσταση** εμφανίζει αν είναι υποχρεωτικό ή χαλαρό. Στην τελευταία στήλη όπου εμφανίζεται η **απόκλιση** είναι αυτό που περιλαμβάνει τις τιμές των περιθώριων μεταβλητών.

Microsoft Excel 12.0 **Αναφορά ευαισθησίας**
Φύλλο εργασίας: [**Βιβλίο**1]**Φύλλο**1
Ημερομηνία δημιουργίας αναφοράς: 17/8/2013 4:43:00 **μμ**

Ρυθμιζόμενα κελιά

Κελί	Όνομα	Τελική τιμή	Μειωμένο κόστος	Αντικειμενικός συντελεστής	Επιτρεπόμενη αύξηση	Επιτρεπόμενη μείωση
$C$3	υποκατάστημα Α αγοραστής 1	0	46	6	1E+30	46
$D$3	υποκατάστημα Α αγοραστής 2	50	0	10	8	46
$E$3	υποκατάστημα Α αγοραστής 3	75	0	14	46	8
$C$4	υποκατάστημα Β αγοραστής 1	0	55	9	1E+30	55
$D$4	υποκατάστημα Β αγοραστής 2	0	8	12	1E+30	8
$E$4	υποκατάστημα Β αγοραστής 3	175	0	8	8	1E+30
$C$5	υποκατάστημα Γ αγοραστής 1	150	0	150	46	150
$D$5	υποκατάστημα Γ αγοραστής 2	150	0	200	46	46
$E$5	υποκατάστημα Γ αγοραστής 3	0	46	250	1E+30	46

Περιορισμοί

Κελί	Όνομα	Τελική τιμή	Σκιώδης τιμή	Περιορισμός R.H. Side	Επιτρεπόμενη αύξηση	Επιτρεπόμενη μείωση
$G$3	υποκατάστημα Α Σύνολο	125	-190	125	150	0
$G$4	υποκατάστημα Β Σύνολο	175	-196	175	75	0
$G$5	υποκατάστημα Γ Σύνολο	300	0	300	1E+30	0
$C$7	Σύνολο αγοραστής 1	150	150	150	0	150
$D$7	Σύνολο αγοραστής 2	200	200	200	0	150
$E$7	Σύνολο αγοραστής 3	250	204	250	0	75

Ο πίνακα που αναφέρθηκε ανωτέρω αναπαριστά την αναφορά ευαισθησίας περιλαμβάνοντας πληροφορίες για τις αλλαγές των παραμέτρων του προβλήματος. Όπως απεικονίζεται ο πίνακας παρατηρείται ότι ε η αναφορά ανάλυσης αποτελείται από τα **ρυθμιζόμενα κελιά** και τους **περιορισμούς.**

Στην συνέχεια αναλύεται το πρώτο τμήμα του πίνακα που αφορά τα ρυθμιζόμενα κελιά περιέχει τα εξής κελιά:

Το **κελί,** το **όνομα**, η **τελική τιμή,** το **μειωμένο κόστος**, ο **αντικειμενικός συντελεστής**, η **επιτρεπόμενη αύξηση** και η **επιτρεπόμενη μείωση.**

Τα κελιά από το C3 μέχρι το E5 περιέχουν την τελική τιμή. Όσο αφορά τη λύση της τελικής τιμής και του μειωμένου κόστους, μας δείχνει ότι πρέπει να σταλθούν από το υποκατάστημα Α 50 ποσότητες στον αγοραστή 2 και 75 στον αγοραστή 3, από το υποκατάστημα Β 175 ποσότητες στον αγοραστή 3 και απο το υποκατάστημα Γ 150 στον αγοραστή 1 και στον αγοραστή 2. Ενώ αν το κόστος πώλησεις των ποσοτήτων του αγοραστή 1 μειωθεί κατά 46 τότε το υποκατάστημα Α θα το συμφέρει να συνεχίσει σε αυτήν την αγορά. Αντίστοιχα θα γίνουν τα αποτελέσματα και για τους υπόλοιπους συντελεστές.

Στην συνέχεια εμφανίζεται το δεύτερο τμήμα του πίνακα με τις πληροφορίες για τους **περιορισμούς**. Σε αυτό τον πίνακα μας δείχνει το **όνομα**, από την αριστερή μεριά του κελιού όνομα εμφανίζεται το **κελί** και από την δεξιά μεριά του κελιού όνομα την **τιμή κελιού** (άριστη λύση), στο κελί όπου ονομάζεται **σκιώδης τιμή** εμφανίζει την δυϊκή τιμή. Επίσης το κελί που ονομάζεται **περιορισμός R.H.Side** είναι η τιμή του δεξιού μέλους περιορισμού και τα διαστήματα εφικτότητα. Η σκιώδης τιμή ερμηνεύεται ως το επιπλέον κόστος που θα έχει το υποκατάστημα για την μεταφορά ενός προϊόντος. Επομένως από το σύνολο του υποκαταστήματος Α έαν είναι απαραίτητο να μεταφερθεί ένα επιπλέον/λιγότερο προϊόν αυτό θα αυξήσει/μειωθεί το κόστος κατά -190 μονάδες. Ανάλογα θα γίνουν και για τις υπόλοιπες δυϊκές τιμές (σκιώδης τιμή).

Στην συνέχεια αναφέρεται ο πίνακας **αναφορά ορίων** ο οποίος μας ενημερώνει κατά πόσο μπορούν να αυξομειωθούν οι τιμές των ρυθμιζόμενων κελιών, χωρίς να παραβιαστούν οι περιορισμοί του προβλήματος. Στην συνέχεια ακολουθεί ο πίνακας με τις ονομασίες του κάθε ρυθμιζόμενου κελιού. Η αναφορά ορίων εμφανίζει την ελάχιστη/μέγστη τιμή που μπορεί να χρησιμοποιηθεί καθώς και την αντικειμενική συνάρτηση. Στην περίπτωση του κατωτέρω πίνακα δεν υπάρχουν περιθώρια αυξομείωσης στις ακόλουθες μεταβλητές από εμφανίζονται στο πίνακα.

Microsoft Excel 12.0 **Αναφορά ορίων**
Φύλλο εργασίας: [**Βιβλίο**1]**Αναφορά ορίων** 1
Ημερομηνία δημιουργίας αναφοράς: 17/8/2013 4:43:00 **μμ**

	Επιθυμητές τιμές	
Κελί	**Όνομα**	**Τιμή**
$C$8	Συνολικό Κόστος αγοραστής 1	55450

	Ρυθμιζόμενα		**Κάτω**	**Επιθυμητό**	**Άνω**	**Επιθυμητό**
Κελί	**Όνομα**	**Τιμή**	**όριο**	**αποτέλεσμα**	**όριο**	**αποτέλεσμα**
$C$3	υποκατάστημα Α αγοραστής 1	0	0	55450	0	55450
$D$3	υποκατάστημα Α αγοραστής 2	50	50	55450	50	55450
$E$3	υποκατάστημα Α αγοραστής 3	75	75	55450	75	55450
$C$4	υποκατάστημα Β αγοραστής 1	0	0	55450	0	55450
$D$4	υποκατάστημα Β αγοραστής 2	0	0	55450	0	55450
$E$4	υποκατάστημα Β αγοραστής 3	175	175	55450	175	55450
$C$5	υποκατάστημα Γ αγοραστής 1	150	150	55450	150	55450
$D$5	υποκατάστημα Γ αγοραστής 2	150	150	55450	150	55450
$E$5	υποκατάστημα Γ αγοραστής 3	0	0	55450	0	55450

3.3.2 Παράδειγμα 2^{ο}

Μια εταιρεία παράγει και διανέμει ένα προϊόν στους πελάτες της μέσω παραγγελιών. Για την τρέχουσα εβδομάδα έχει πάρει παραγγελιές από τους πελάτες 1, 2 και 3 για ποσότητες 180, 170 και 150 μονάδες προϊόντος, αντίστοιχα. Το προϊόν μπορεί να σταλεί στους πελάτες από δύο αποθήκες Α και Β που έχουν διαθέσιμες ποσότητες 200 μονάδες προϊόντος η κάθε μια. Το κόστος μεταφοράς από κάθε αποθήκη προς κάθε πελάτη δίνεται στον παρακάτω πίνακα Αν μείνει αδιάθετο προϊόν στις αποθήκες έχει μηδενικό κόστος, ενώ το κόστος ανά μονάδα ελλείψεων για τους πελάτες 1, 2 και 3 ίσο με 6, 6 και 5 αντίστοιχα.

Να βρεθεί τρόπος μεταφοράς των προϊόντων από τις αποθήκες στους πελάτες που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

Αποθήκη	Αγοραστής			Προμήθειες
	1	2	3	
Α	8	9	4	200
Β	5	12	2	200
Γ	6	6	5	100
Απαιτήσεις	180	170	150	

Λύση:

Μοντελοποιώντας το πρόβλημα μεταφοράς είναι εύκολο πια να εκχωρηθούν οι τιμές και να γίνει ο γραμμικός προγραμματισμός με τη χρήση του solver. Συμπληρώνεται ο πίνακας και το επόμενο στάδιο είναι να ενημερωθεί και το φύλο εργασίας excel. Παρακάτω παρουσιάζεται το στιγμιότυπο από τη προσπάθεια επίλυσης. Και στη συνέχεια οι σημαντικές για πληροφορίες αναφορές που ο solverείναι δυνατό και παράγει.

			προς			
		πελάτης 1	πελάτης 2	πελάτης 3	Προσφορά	Σύνολο
	αποθήκη Α	0	70	130	200	200
από	αποθήκη Β	180	0	20	200	200
	αποθήκη Γ	0	100	0	100	100
	Ζήτηση	180	170	150		
	Σύνολο	180	170	150		
	Συνολικό Κόστος	2690				
			προς			
		πελάτης 1	πελάτης 2	πελάτης 3	Προσφορά	
	αποθήκη Α	8	9	4	200	
από	αποθήκη Β	5	12	2	200	
	αποθήκη Γ	6	6	5	100	
	Ζήτηση	180	170	150		

Στον παρακάτω πίνακα εμφανίζονται τα **αποτέλεσματα αναφοράς** που περιέχει το **Κελί προορισμού (Ελάχιστο)**, τα **Ρυθμιζόμενα κελιά**, και τους **Περιορισμούς**. Στο κελί C8 βρίσκεται η αντικειμενική συνάρτηση η οποία προσδιορίζει το συνολικό κόστος το οποίο είναι ίσο με 2.690. Στο κελί που εμφανίζεται η αρχική τιμή, η οποία ισούται με 0, θα μας ενδιαφέρει μόνο στην περίπτωση που θελήσουμε να κάνουμε κάποιες παραλλαγές στο μοντέλο που έχουμε.

Microsoft Excel 12.0 **Αναφορά απάντησης**
Φύλλο εργασίας: [**Βιβλίο**1]**Φύλλο**3
Ημερομηνία δημιουργίας αναφοράς: 17/8/2013 5:22:53 **μμ**

Κελί προορισμού (Ελάχιστο)

Κελί	Όνομα	Αρχική τιμή	Τελική τιμή
$C$8	Συνολικό Κόστος πελάτης 1	0	2690

Ρυθμιζόμενα κελιά

Κελί	Όνομα	Αρχική τιμή	Τελική τιμή
$C$3	αποθήκη Α πελάτης 1	0	0
$D$3	αποθήκη Α πελάτης 2	0	70
$E$3	αποθήκη Α πελάτης 3	0	130
$C$4	αποθήκη Β πελάτης 1	0	180
$D$4	αποθήκη Β πελάτης 2	0	0
$E$4	αποθήκη Β πελάτης 3	0	20
$C$5	αποθήκη Γ πελάτης 1	0	0
$D$5	αποθήκη Γ πελάτης 2	0	100
$E$5	αποθήκη Γ πελάτης 3	0	0

Περιορισμοί

Κελί	Όνομα	Τιμή κελιού	Τύπος	Κατάσταση	Απόκλιση
$G$3	αποθήκη Α Σύνολο	200	$G$3<=$F$3	Υποχρεωτικός	0
$G$4	αποθήκη Β Σύνολο	200	$G$4<=$F$4	Υποχρεωτικός	0
$G$5	αποθήκη Γ Σύνολο	100	$G$5<=$F$5	Υποχρεωτικός	0
$C$7	Σύνολο πελάτης 1	180	$C$7>=$C$6	Υποχρεωτικός	0
$D$7	Σύνολο πελάτης 2	170	$D$7>=$D$6	Υποχρεωτικός	0
$E$7	Σύνολο πελάτης 3	150	$E$7>=$E$6	Υποχρεωτικός	0

Ρυμιζόμενα Κελιά: Τα κελιά από το C3 μέχρι το E5 περιέχουν την **άριστη λύση (τελική τιμή),** γι' αυτό είναι εμφανής η αντιστοιχεία που υπάρχει. Η απάντηση που έχουμε για την άριστη λύση μας δείχνει ότι πρέπει να σταλθούν από την αποθήκη Α 70 ποσότητες στον πελάτη 2 και 130 στον πελάτη 3, από την αποθήκη Β 180 ποσότητες στον πελάτη 1 και 20 στον πελάτη 3 και απο την αποθήκη Γ 100 στον πελάτη 2.

Στην συνέχεια εμφανίζεται ο πίνακας με τις πληροφορίες για τους **περιορισμούς**. Σε αυτό τον πίνακα μας δείχνει το **όνομα**, από την αριστερή μεριά το **κελί** και από την δεξιά μεριά δίπλα από το όνομα την **τιμή κελιού** (άριστη λύση), στο κελί όπου ονομάζεται **τύπος** καταγράφεται ο περιορισμός με ακρίβεια. Επίσης το κελί που ονομάζεται **κατάσταση** εμφανίζει αν είναι υποχρεωτικό ή χαλαρό. Στην τελευταία στήλη όπου εμφανίζεται η **απόκλιση** είναι αυτό που περιλαμβάνει τις τιμές των περιθώριων μεταβλητών

Microsoft Excel 12.0 **Αναφορά ευαισθησίας**
Φύλλο εργασίας: [**Βιβλίο**1]**Φύλλο**3
Ημερομηνία δημιουργίας αναφοράς: 17/8/2013 5:22:53 **μμ**

Ρυθμιζόμενα κελιά

Κελί	Όνομα	Τελική τιμή	Μειωμένο κόστος	Αντικειμενικός συντελεστής	Επιτρεπόμενη αύξηση	Επιτρεπόμενη μείωση
$C$3	αποθήκη Α πελάτης 1	0	1	8	1E+30	1
$D$3	αποθήκη Α πελάτης 2	70	0	9	5	2
$E$3	αποθήκη Α πελάτης 3	130	0	4	1	2
$C$4	αποθήκη Β πελάτης 1	180	0	5	1	7
$D$4	αποθήκη Β πελάτης 2	0	5	12	1E+30	5
$E$4	αποθήκη Β πελάτης 3	20	0	2	2	1
$C$5	αποθήκη Γ πελάτης 1	0	2	6	1E+30	2
$D$5	αποθήκη Γ πελάτης 2	100	0	6	2	1E+30
$E$5	αποθήκη Γ πελάτης 3	0	4	5	1E+30	4

Περιορισμοί

Κελί	Όνομα	Τελική τιμή	Σκιώδης τιμή	Περιορισμός R.H. Side	Επιτρεπόμενη αύξηση	Επιτρεπόμενη μείωση
$G$3	αποθήκη Α Σύνολο	200	0	200	1E+30	0
$G$4	αποθήκη Β Σύνολο	200	-2	200	130	0
$G$5	αποθήκη Γ Σύνολο	100	-3	100	70	0
$C$7	Σύνολο πελάτης 1	180	7	180	0	130
$D$7	Σύνολο πελάτης 2	170	9	170	0	70
$E$7	Σύνολο πελάτης 3	150	4	150	0	130

Ο πίνακα που αναφέρθηκε ανωτέρω αναπαριστά την αναφορά ευαισθησίας περιλαμβάνοντας πληροφορίες για τις αλλαγές των παραμέτρων του προβλήματος. Όπως απεικονίζεται ο πίνακας παρατηρείται ότι ε η αναφορά ανάλυσης αποτελείται από τα **ρυθμιζόμενα κελιά** και τους **περιορισμούς.**

Στην συνέχεια αναλύεται το πρώτο τμήμα του πίνακα που αφορά τα ρυθμιζόμενα κελιά περιέχει τα εξής κελιά:

Το **κελί,** το **όνομα**, η **τελική τιμή,** το **μειωμένο κόστος**, ο **αντικειμενικός συντελεστής**, η **επιτρεπόμενη αύξηση** και η **επιτρεπόμενη μείωση.**

Τα κελιά από το C3 μέχρι το E5 περιέχουν την τελική τιμή. Όσο αφορά τη λύση της τελικής τιμής και του μειωμένου κόστους, μας δείχνει ότι πρέπει να σταλθούν από την αποθήκη Α 70 ποσότητες στον πελάτη 2 και 130 στον πελάτη 3, από την αποθήκη Β 180 ποσότητες στον πελάτη 1 και 20 στον πελάτη 3 και απο την αποθήκη Γ 100 στον πελάτη 2. Ενώ αν το κόστος πώλησεις των ποσοτήτων του αγοραστή 1 μειωθεί κατά 1 τότε την αποθήκη Α θα την συμφέρει να συνεχίσει σε αυτήν την αγορά. Αντίστοιχα θα γίνουν τα αποτελέσματα και για τους υπόλοιπους συντελεστές.

Στην συνέχεια εμφανίζεται το δεύτερο τμήμα του πίνακα με τις πληροφορίες για τους **περιορισμούς**. Σε αυτό τον πίνακα μας δείχνει το **όνομα**, από την αριστερή μεριά του κελιού όνομα εμφανίζεται το **κελί** και από την δεξιά μεριά του κελιού όνομα την **τιμή κελιού** (άριστη λύση), στο κελί όπου ονομάζεται **σκιώδης τιμή** εμφανίζει την δυϊκή τιμή. Επίσης το κελί που ονομάζεται **περιορισμός R.H.Side** είναι η τιμή του δεξιού μέλους περιορισμού και τα διαστήματα εφικτότητα. Η σκιώδης τιμή ερμηνεύεται ως το επιπλέον κόστος που θα έχει η αποθήκη για την μεταφορά ενός προϊόντος. Επομένως από το σύνολο της αποθήκης Β έαν είναι απαραίτητο να μεταφερθεί ένα επιπλέον/λιγότερο προϊόν αυτό θα αυξήθει/μειωθεί το κόστος κατά -2 μονάδες. Ανάλογα θα γίνουν και για τις υπόλοιπες δυϊκές τιμές (σκιώδης τιμή).

Αμέσω μετά αναφέρεται ο πίνακας **αναφορά ορίων** ο οποίος μας ενημερώνει κατά πόσο μπορούν να αυξομειωθούν οι τιμές των ρυθμιζόμενων κελιών, χωρίς να παραβιαστούν οι περιορισμοί του προβλήματος. Στην συνέχεια ακολουθεί ο πίνακας με τις ονομασίες του κάθε ρυθμιζόμενου κελιού. Η αναφορά ορίων εμφανίζει την ελάχιστη/μέγστη τιμή που μπορεί να χρησιμοποιηθεί καθώς και την αντικειμενική συνάρτηση. Στην περίπτωση του κατωτέρω πίνακα δεν υπάρχουν περιθώρια αυξομείωσης στις ακόλουθες μεταβλητές από εμφανίζονται στο πίνακα.

Microsoft Excel 12.0 **Αναφορά ορίων**
Φύλλο εργασίας: [**Βιβλίο**1]**Αναφορά ορίων** 3
Ημερομηνία δημιουργίας αναφοράς: 17/8/2013 5:22:53 **μμ**

Κελί	Επιθυμητές τιμές Όνομα	Τιμή
$C$8	Συνολικό Κόστος πελάτης 1	2690

Κελί	Ρυθμιζόμενα Όνομα	Τιμή	Κάτω όριο	Επιθυμητό αποτέλεσμα	Άνω όριο	Επιθυμητό αποτέλεσμα
$C$3	αποθήκη Α πελάτης 1	0	0	2690	0	2690
$D$3	αποθήκη Α πελάτης 2	70	70	2690	70	2690
$E$3	αποθήκη Α πελάτης 3	130	130	2690	130	2690
$C$4	αποθήκη Β πελάτης 1	180	180	2690	180	2690
$D$4	αποθήκη Β πελάτης 2	0	0	2690	0	2690
$E$4	αποθήκη Β πελάτης 3	20	20	2690	20	2690
$C$5	αποθήκη Γ πελάτης 1	0	0	2690	0	2690
$D$5	αποθήκη Γ πελάτης 2	100	100	2690	100	2690
$E$5	αποθήκη Γ πελάτης 3	0	0	2690	0	2690

3.4 Λογισμικό LINDO

Το λογισμικό LINDO(LinearInteractiveandDiscreteOptimizer) είναι το πλέον διαδεδομένο λογισμικό για την επίλυση όχι μόνο προβλημάτων γραμμικού μα και ακέραιου ή τετραγωνικού προγραμματισμού. Από το 1979, η LINDOSystems ενδιαφέρεται στην έκδοση και βελτίωση λογισμικών που βοηθούν την οικονομική και εκπαιδευτική κοινότητα.[27] Ως χρήστης, υπάρχει πολυτέλεια η εμφάνιση των αριθμητικών αποτελεσμάτων και κάνει εύκολη τη σύγκρισή τους και τη περαιτέρω τους ανάλυση. Το πρόγραμμα παράγει πίνακες τιμών όπου καταχωρούνται οι τιμές της βέλτιστης λύσης, των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης, το εύρος των αυξομειώσεων που είναι επιτρεπτό μα μεταβληθούν οι συντελεστές έτσι ώστε να μην αλλάξει η βέλτιστη λύση. Ακόμα εμφανίζονται στοιχεία για τη δυϊκότητα των τιμών. Βασικός αλγόριθμος που «τρέχει» πίσω από τη LINDO είναι η μέθοδος Simplex.

[27] http://www.lindo.com/index.php?option=com_content&view=article&id=1&Itemid=9

3.4.1Παράδειγμα 1ο

Το πρόβλημα της «Μακεδονικής Εταιρείας Αναψυκτικών» παράγει ένα αναψυκτικό ευρείας κατανάλωσης. Το προϊόν παράγεται σε τρεις παραγωγικές μονάδες. Μεγάλες ποσότητες (κιβώτια) αποστέλλονται μία φορά την εβδομάδα σε τέσσερις πόλεις-κέντρα διανομής στην υπόλοιπη χώρα. Το σχετικό κόστος μεταφοράς ανά κιβώτιο εξαρτάται από την απόσταση, το χρόνο, τα καύσιμα και τη συντήρηση των οχημάτων, τα διόδια, το κόστος ασφάλισης, τις αμοιβές του προσωπικού κλπ. Στον πίνακα που ακολουθεί δίνεται το κόστος μεταφοράς από τα τρία εργοστάσια Ε1, Ε2, Ε3 στις τέσσερις Πόλεις Π1, Π2, Π3, Π4.

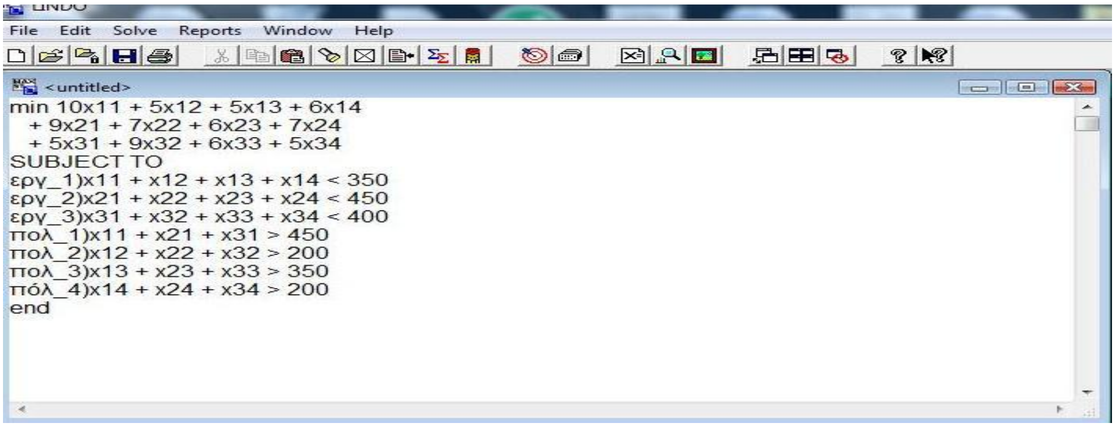
ΑΠΟ \ ΠΡΟΣ	Π1	Π2	Π3	Π4	Προσφορά
Ε1	10	5	5	6	350
Ε2	9	7	6	7	450
Ε3	5	9	6	5	400
Ζήτηση	450	200	350	200	

Στόχος μας είναι να εντοπιστεί το άριστο σχέδιο μεταφοράς δηλαδή εκείνο του ελαχίστου συνολικού κόστους, ώστε να ικανοποιείται η ζήτηση κάθε πόλης.[28]

Λύση:

Η αντικειμενική συνάρτηση εκφράζει το συνδιασμό εκείνων των μεταβλητών όπου δίνει με βάση τους περιορισμούς το καλύτερο δυνατο πλανό έτσι ώτσε το κόστος που θα βρεθεί θα είναι το ελάχιστο. Πρώτο βήμα είναι η γραφή του κώδικα στη LINDO. Με την επιλογή solve από το μενού επιλογών επιλέγεται να δοθεί η ανάλυση ευασιθησίας όπου θα εμφανιστούν αποτελέσματα που αποτελούν βοήθεια στη σχεδάιση του σχεδίου μεταφοράς. Παρακάτω η εκόνα παρουσίαζει το κώδικα:

[28] http://users.uom.gr/~acg/Courses/QA1/material/Ch07slides.pdf.



Εικόνα: **Μοντελοποίηση Προβλήματος στη** LINDO

Το πρόγραμμα της LIDO, εκτελώντας τον αλγόριθμο Simplex, δίνει συγκεντρωτικά τα παρακάτω αποτελέσματα:

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 7

OBJECTIVEFUNCTIONVALUE

1)6800.000

Το τμήμα που αναφέρεται πιο πάνω αφορά την αντικειμενική συνάρτηση.

Variable	**Value**	**Reduced Cost**	**Row**	**Slack or Surplus**	**Dual Prices**
X11	0.000000	2.000000	εργ_1)	0.000000	1. 000000
X12	200.000000	0.000000	εργ_2)	0. 000000	0. 000000
X13	150.000000	0.000000	εργ_3)	0. 000000	4. 000000
X14	0.000000	0.000000	πόλη_1)	0. 000000	-9. 000000
X21	50.000000	0.000000	πόλη_2)	0. 000000	-6. 000000
X22	0.000000	1.000000	πόλη_3)	0. 000000	-6. 000000
X23	200.000000	0.000000	πόλη_4)	0. 000000	-7. 000000
X24	200.000000	0.000000			
X31	400.000000	0.000000			
X32	0.000000	7.000000			
X33	0.000000	4.000000			
X34	0.000000	2.000000			

NO. ITERATIONS= 7

Ο πίνακας που φαίνεται ανωτέρω αφορά τις πληροφορίες για τις μεταβλητές του μοντέλου και για τους περιορισμούς.

Αναλύοντας τον παραπάνω πίνακα αναφέρεται η μεταβλητή **(Variable)** η βέλτιστη τιμή **(Value)** και το ευκαιριακό κόστος **(ReducedCost)** όπου αναπτύχθηκε το πρότυπο με την οικονομικότερη διανομή των προϊόντων στις πόλεις το οποίο αποτελείται από την μεταβλητή X12 αποτελείται από 200 κιβώτια η μεταβλητή X13 από 150 κιβώτια η μεταβλητή X21 από 50 κιβώτια, η μεταβλητή X23 από 200 κιβώτια, μεταβλητή X24 αποτελείται από 200 κιβώτια και η μεταβλητή X31 αποτελείται από 400 κιβώτια, κοστίζει δε 6.800 μονάδες. Επίσης, για να συμμετάσχει η μεταβλητή X11 στην άριστη λύση θα πρέπει η τιμή της να μειωθεί κατά 2, για την μεταβλητή X22 κατά 1, για την μεταβλητή X32 κατά 7, για την μεταβλητή X33 κατά 4 και για την μεταβλητή X34 θα πρέπει η μεταβλητή της να μειωθεί κατά 2.

Επίσης, στον ίδιο παραπάνω πίνακα αναφέρονται κατά αύξουσα σειρά εμφανίζοντας το αντίστοιχο όνομα της μεταβλητής **(Row)**, οι τιμές των περιθώριων μεταβλητών (**SlackorSurplus)** για τον κάθε περιορισμό και δίπλα ακριβώς είναι οι δυϊκές τιμές **(DualPrices)**. Όπως παρατηρείται στις τιμές των περιθωρίων μεταβλητών από τη μια πλευρά είναι αυστηρή γιατί όλες οι μεταβλητές του είναι 0 όμως από την άλλη πλευρά σημαίνει ότι χρεισιμοποιούνται όλοι οι διαθέσιμοι πόροι. Η δυϊκή τιμή ερμηνεύεται ως το επιπλέον κόστος που θα έχει το εργοστάσιο για την μεταφορά ενός κιβωτίου. Επομένως το εργ_1 έαν είναι απαραίτητο να μεταφερθεί ένα επιπλέον/λιγότερο κιβώτιο αυτό θα αυξήσει/μειώσει το κόστος κατά 1 μονάδα. Ανάλογα θα γίνουν και για τις υπόλοιπες δυϊκές τιμές.

Στην συνέχεια ακουλουθεί ο παρακάτω πίνακας που ο χρήστης έχει την δυνατότητα να κάνει ανάλυση ευαισθησίας στους αντικειμενικούς συντελεστές και τα δεξιά μέλη των περιορισμών του μοντέλου του. Αναφέρεται το εύρος αριστότητας των αντικειμενικών συντελεστών και το εύρος της εφικτότητας των δεξιών μελών.

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES				**RIGHTHAND SIDE RANGES**			
Variable	Current Coef.	Allowable Increase	Allowable Decrease	Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
X11	10.000000	Infinity	2.000000	εργ_1)	350.000000	200.000000	0.000000
X12	5.000000	1.000000	6.000000	εργ_2)	450.000000	Infinity	0.000000
X13	5.000000	0.000000	1.000000	εργ_3)	400.000000	50.000000	0.000000
X14	6.000000	Infinity	0.000000	πόλη_1)	450.000000	0.000000	50.000000
X21	9.000000	2.000000	2.000000	πόλη_2)	200.000000	0.000000	200.000000
x22	7.000000	Infinity	1.000000	πόλη_3)	350.000000	0.000000	200.000000
X23	6.000000	1.000000	0.000000	πόλη_4)	200.000000	0.000000	200.00000
X24	7.000000	0.000000	7.000000				
X31	5.000000	2.000000	Infinity				
X32	9.000000	Infinity	7.000000				
X33	6.000000	Infinity	4.000000				
X34	5.000000	Infinity	2.000000				

Στην στήλη CurrentCoef δίνεται ο αντικειμενικός συντελεστής ενώ στις στήλες AllowableIncrease και AllowableDecrease δίνουν την μέγιστη εφικτή αύξηση και μείωση αντίστοιχα η οποία δεν μεταβάλλει την άριστη λύση.

Στην συνέχεια εμφανίζονται τα παρακάτω αποτελέσματα:

2	<	Dc_1		
6	<	Dc_2	<	1
1	<	Dc_3	<	0
0	<	Dc_4		

Ανάλογα πράγματα γίνονται και για τις υπόλοιπες τιμές του συγκεκριμένου πίνακα.

Στην συνέχεια περιγράφονται τα αποτελέσματα του **RIGHTHANDSIDERANGES**όπου δίνεται η ανάλυση ευαισθησίας στα δεξιά μέλη των περιορισμών. Στην στήλη CurrentRHS δίνεται η τρέχουσα τιμή, ενώ οι άλλες στήλες είναι οι AllowableIncrease και AllowableDecrease οι οποίες αναφέρουν την μέγιστη εφικτή αύξηση και μείωση η οποία δεν μεταβάλλει την άριστη βάση και διατηρεί σταθερές τις δυϊκές τιμές.

Στην συνέχεια εμφανίζονται τα παρακάτω αποτελέσματα:

0	<	Db_1	<	200
0	<	Db_2		
0	<	Db_3	<	50
50	<	Db_4	<	0

Ανάλογα πράγματα γίνονται και για τις υπόλοιπες τιμές του συγκεκριμένου πίνακα.

3.4.2 Παράδειγμα 2ο

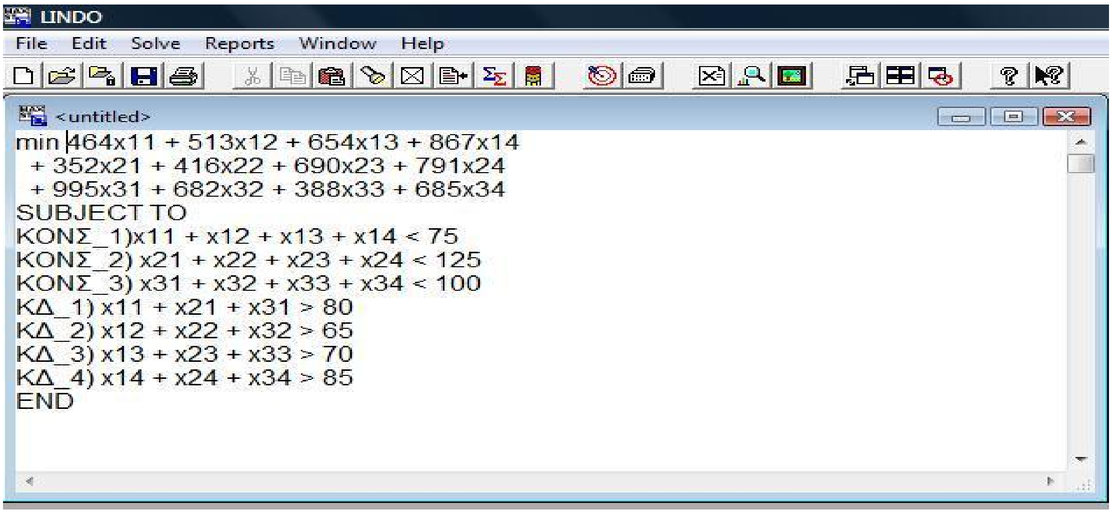
Ένα από τα κύρια προϊόντα της P&T Company, μίας μεγάλης κονσερβοβιομηχανίας, είναι τα φασόλια σε κονσέρβα. Υπάρχουν τρία κονσερβοποιεία τα οποία στέλνουν τα προϊόντα σε τέσσερα κέντρα διανομής. Επειδή το κόστος μεταφοράς είναι, λόγω των μεγάλων αποστάσεων, ιδιαίτερα αυξημένο η διοίκηση αποφάσισε να το μειώσει. Έχουν γίνει κάποιες εκτιμήσεις για την ποσότητα παραγωγής και μεταφοράς στα κέντρα διανομής καθώς και για το κόστος μεταφοράς του κάθε φορτίου (πλήρως φορτωμένου φορτηγού της εταιρείας) εκφρασμένο σε δολάρια Η.Π.Α. Στον πίνακα που ακολουθεί δίνεται το κόστος μεταφοράς από τα τρία κονσερβοποιεία Κ1, Κ2, Κ3 στα τέσσερα κέντρα διανομής ΚΔ1, ΚΔ2, ΚΔ3, ΚΔ4.

ΠΡΟΣ / ΑΠΟ	ΚΔ1	ΚΔ2	ΚΔ3	ΚΔ4	Διαθέσιμες ποσότητες
Κ1	464	513	654	867	75
Κ2	352	416	690	791	125
Κ3	995	682	388	685	100
Απαιτούμενες ποσότητες	80	65	70	85	

Να βρεθεί ο συνδυασμός μεταφοράς των φορτίων που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος μεταφοράς.[29]

Λύση:

Στο παρόν παράδειγμα σκοπός είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς, έστι ώστε η επιχείρηση να καταφέρει να βρει τον άριστο συνδυασμό έτσι ώστε να επιτυγχάνεται ο σκοπός του προβλήματος. Γράφοντας κώδικά επόμενο στάδιο είναι είναι η εμφάνιση της ανάλυσης ευαισθησίας από το πρόγραμμα.



Εικόνα: **Μοντελοποίηση Προβλήματος στη** LINDO

Όταν ο αλγόριθμος «τρέχει» δίνει ένα πίνακα αποτελεσμάτων που έχουν και οικονομική ερμηνεία και δείχνει πως ο χρήστης έχει την ευχέρεια και μέχρι που επιτρέπεται να αλλάξουν τα νούμερα.

[29] http://aetos.it.teithe.gr/~vkostogl/files/Epixeirisiaki/Transportation%20problems_exercises.pdf.

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 7

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 152535.0

Το τμήμα που αναφέρεται πιο πάνω αφορά την αντικειμενική συνάρτηση.

Variable	**Value**	**Reduced Cost**	**Row**	**Slack or Surplus**	**Dual Prices**
X11	0.000000	15.000000	ΚΟΝΣ_1)	0.000000	0. 000000
X12	20.000000	0. 000000	ΚΟΝΣ_2)	0. 000000	97. 000000
X13	0. 000000	84. 000000	ΚΟΝΣ_3)	0. 000000	182. 000000
X14	55. 000000	0. 000000	ΚΔ_1)	0. 000000	-449. 000000
X21	80. 000000	0. 000000	ΚΔ_2)	0. 000000	-513. 000000
X22	45. 000000	0. 000000	ΚΔ_3)	0. 000000	-570. 000000
X23	0. 000000	217. 000000	ΚΔ_4)	0. 000000	-867. 000000
X24	0. 000000	21. 000000			
X31	0. 000000	728. 000000			
X32	0. 000000	351. 000000			
X33	70. 000000	0. 000000			
X34	30. 000000	0. 000000			

NO. ITERATIONS= 7

Ο πίνακας που φαίνεται ανωτέρω αφορά τις πληροφορίες για τις μεταβλητές του μοντέλου και για τους περιορισμούς.

Αναλύοντας τον παραπάνω πίνακα αναφέρεται η μεταβλητή **(Variable)** η βέλτιστη τιμή **(Value)** και το ευκαιριακό κόστος **(ReducedCost)** όπου αναπτύχθηκε το πρότυπο με την οικονομικότερη διανομή των φασολιών σε κονσέρβες από τα κονσεροποιεία στα κέντρα διαμονής το οποίο αποτελείται από την μεταβλητή X12 αποτελείται από 20 κονσέρβες, η μεταβλητή X14 από 55 κονσέρβες, η μεταβλητή

X21 από 80 κονσέρβες, η μεταβλητή X22 από 45 κονσέρβες, η μεταβλητή X33 από 70 κονσέρβες και η μεταβλητή X34 αποτελείται από 30 κονσέρβες, κοστίζει δε 152.535 δολάρια της ΗΠΑ. Επίσης, για να συμμετάσχει η μεταβλητή X11 στην άριστη λύση θα πρέπει η τιμή της να μειωθεί κατά 15, για την μεταβλητή X13 να μειωθεί κατά 84, για την μεταβλητή X23 κατά 217, για την μεταβλητή X24 κατά 21, για την μεταβλητή X31 κατά 728 και για την μεταβλητή X32 θα πρέπει η μεταβλητή της να μειωθεί κατά 351.

Επίσης στον ίδιο παραπάνω πίνακα αναφέρονται κατά αύξουσα σειρά εμφανίζοντας το αντίστοιχο όνομα της μεταβλητής **(Row)**, οι τιμές των περιθώριων μεταβλητών (**SlackorSurplus)** για τον κάθε περιορισμό και δίπλα ακριβώς είναι οι δυϊκές τιμές **(DualPrices)**. Όπως παρατηρείται στις τιμές των περιθωρίων μεταβλητών από τη μια πλευρά είναι αυστηρή γιατί όλες οι μεταβλητές του είναι 0 όμως από την άλλη πλευρά σημαίνει ότι χρεισιμοποιούνται όλοι οι διαθέσιμοι πόροι. Η δυϊκή τιμή ερμηνεύεται ως το επιπλέον κόστος που θα έχουυν τα κοσερβοποιεία για την μεταφορά μιας κονσέρβας. Επομένως, το κονσ_2 έαν είναι απαραίτητο να μεταφερθεί μία επιπλέον κονσέρβα αυτό θα αυξήσει το κόστος κατά 97 μονάδες ενώ αν παρθεί μια λιγότερη κονσέρβα το κόστος της θα μειωθεί κατά 97 μονάδες. Ανάλογα θα γίνουν και για τις υπόλοιπες δυϊκές τιμές.

Στην συνέχεια ακουλουθεί ο παρακάτω πίνακας που ο χρήστης έχει την δυνατότητα να κάνει ανάλυση ευαισθησίας στους αντικειμενικούς συντελεστές και τα δεξιά μέλη των περιορισμών του μοντέλου του.

Επίσης στον ακόλουθω πίνακα αναφέρεται το εύρος αριστότητας των αντικειμενικών συντελεστών και το εύρος της εφικτότητας των δεξιών μελών.

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED

OBJ COEFFICIENT RANGES				**RIGHTHAND SIDE RANGES**			
Variable	Current Coef.	Allowable Increase	Allowable Decrease	Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
X11	464.000000	Infinity	15.000000	ΚΟΝΣ_1)	75.000000	Infinity	0.000000
X12	513.000000	15.00000	21.000000	ΚΟΝΣ_2)	125.000000	20.000000	0.000000
X13	654.000000	Infinity	84.000000	ΚΟΝΣ_3)	100.000000	55.000000	0. 000000
X14	867.000000	21.000000	182.000000	ΚΔ_1)	80.000000	0.000000	0. 000000
X21	352.000000	15.000000	449.000000	ΚΔ_2)	65.000000	0.000000	20.000000
X22	416.000000	21.000000	15.000000	ΚΔ_3)	70.000000	0.000000	55.000000
X23	690.000000	Infinity	217.000000	ΚΔ_4)	85.000000	0.000000	55.00000
X24	791.000000	Infinity	21.000000				
X31	995.000000	Infinity	728.000000				
X32	682.000000	Infinity	351.000000				
X33	388.000000	84.000000	570.000000				
X34	685.000000	182.000000	84.000000				

Στην στήλη CurrentCoef δίνεται ο αντικειμενικός συντελεστής ενώ στις στήλες AllowableIncrease και AllowableDecrease δίνουν την μέγιστη εφικτή αύξηση και μείωση αντίστοιχα η οποία δεν μεταβάλλει την άριστη λύση.

Στην συνέχεια εμφανίζονται τα παρακάτω αποτελέσματα:

15	<	Dc_1		
21	<	Dc_2	<	15
84	<	Dc_3		
182	<	Dc_4	<	21

Ανάλογα πράγματα γίνονται και για τις υπόλοιπες τιμές του συγκεκριμένου πίνακα.

Στην συνέχεια περιγράφονται τα αποτελέσματα του **RIGHTHANDSIDERANGES**όπου δίνεται η ανάλυση ευαισθησίας στα δεξιά μέλη των περιορισμών. Στην στήλη CurrentRHS δίνεται η τρέχουσα τιμή, ενώ οι άλλες στήλες είναι οι AllowableIncrease και AllowableDecrease οι οποίες αναφέρουν την μέγιστη εφικτή αύξηση και μείωση η οποία δεν μεταβάλλει την άριστη βάση και διατηρεί σταθερές τις δυϊκές τιμές.

Στην συνέχεια εμφανίζονται τα παρακάτω αποτελέσματα:

0	<	Db_1		
0	<	Db_2	<	20
0	<	Db_3	<	55
0	<	Db_4	<	0

Ανάλογα πράγματα γίνονται και για τις υπόλοιπες τιμές του συγκεκριμένου πίνακα.

3.5WinQSB

Το QSB(QuantitativeSystemsforBusiness) έχει αναπτυχθεί και διατηρηθεί από τον Yih-LongChang. Αυτό το πακέτο αποτελείται από τους πιο ευρέως διαδεδομένους αλγόριθμους Επιχειρησιακής Έρευνας και Διοικητικής Επιστήμης στην επίλυση των προβλημάτων. Το WinQSB είναι έκδοση των Windows για το QSB πακέτο λογισμικού. Δεν χρειάζονται ιδιαιτέρες μαθησιακές ικανότητες, μόνο μερικά λεπτά έτσι ώστε ο χρήστης να «κατακτήσει» τις χρήσιμες λειτουργίες του. Το πακέτο WinQSB χρησιμοποιεί και αυτό τη μέθοδο Simplex. Το λογισμικό αυτό παράγει την επίλυση του προβλήματος, μια τυπική ανάλυση ευαισθησίας μα και παραμετρική ανάλυση.

3.5.1 Παράδειγμα με τη χρήση του λογισμικού WinQSB

«Μακεδονική Εταιρεία Αναψυκτικών»

Μια εταιρεία παράγει αναψυκτικά ευρείας κατανάλωσης και εδρεύει στην ευρύτερη περιοχή της Μακεδονίας. Η εταιρεία διαθέτει στη κατοχή της τρεις (3) παραγωγικές μονάδες. Μεγάλες ποσότητες αναψυκτικών συσκευασμένες σε κιβώτια αποστέλλονται μία φορά την εβδομάδα σε τέσσερις (4) πόλεις στην υπόλοιπη χώρα που λειτουργούν ως κέντρα διανομής. Το σχετικό κόστος μεταφοράς ανά κιβώτιο εξαρτάται από τους ακόλουθους παράγοντες: την απόσταση, το χρόνο, τα καύσιμα, και τη συντήρηση των οχημάτων, τα διόδια, τις αμοιβές προσωπικού. Στο παρακάτω πίνακα συνοψίζονται τα δεδομένα του προβλήματος.

Προς / Από	Πόλη_1	Πόλη_2	Πόλη_3	Πόλη_4	Προσφορά
Εργοστάσιο_1	10	5	5	6	350
Εργοστάσιο_2	9	7	6	7	450
Εργοστάσιο_3	5	9	6	5	400
Ζήτηση	450	200	350	200	1200

Η μοντελοποίηση του προβλήματος είναι το αρχικό στάδιο της επίλυσης του προβλήματος.

$$minimize z = 10\chi_{11} + 5\chi_{12} + 5\chi_{13} + 6\chi_{14} + 9\chi_{21} + 7\chi_{22} + 6\chi_{23} + 7\chi_{24} + 5\chi_{31} + 9\chi_{32} + 6\chi_{33} + 5\chi_{34}$$

$subjectto$

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 350$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 450$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 400$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 450$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 200$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 350$

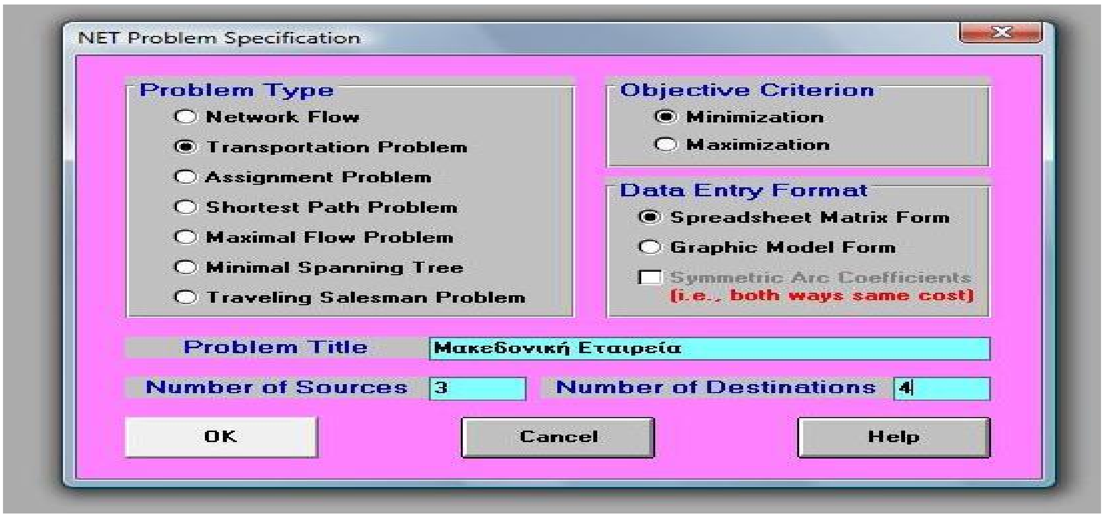
$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 200$

$x_{ij} \geq 0$

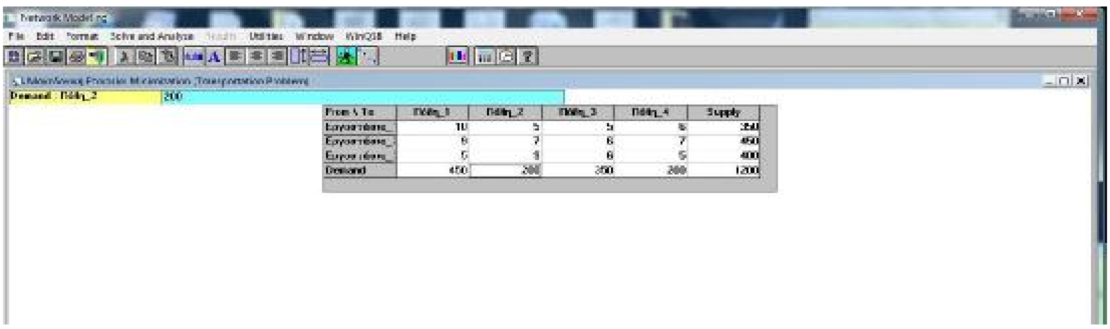
$i = 1,2,3 \; \kappa\alpha\iota j = 1,2,3,4$

Επόμενο βήμα είναι η χρήση του λογισμικού WinQSB που με βάση τα δεδομένα θα δώσει το καλύτερο σχέδιο για την ικανοποίηση των περιορισμών. Στη συνέχεια ακολουθεί μια ανάλυση της διαδικασίας που ακολουθείται στο συγκεκριμένο λογισμικό.

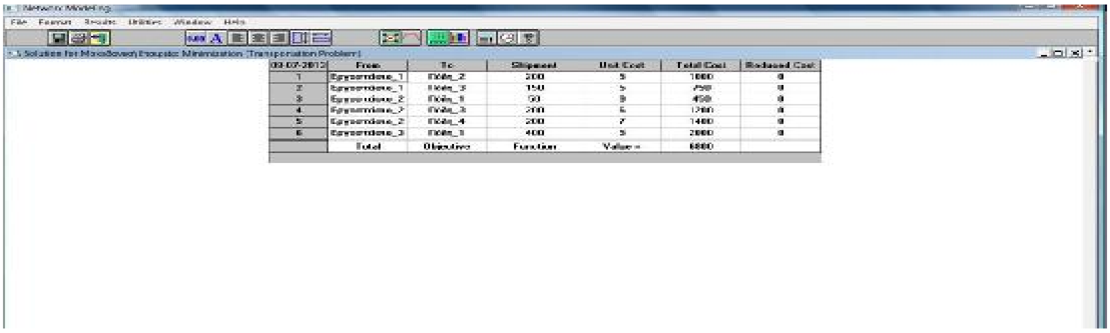
Βήμα 1ο. Είναι η εισαγωγή του προβλήματος στο λογισμικό. Επιλέγεται η λειτουργία «NetworkModule», κάνοντας κλικ στη καρτέλα «File» και στη συνέχεια «NewProblem». Στη συνέχεια πραγματοποιείται η επιλογή της κατηγορίας του δικτύου που θα κάνοντας κλικ «TransportationProblem» και εισάγονται στην καρτέλα τα δεδομένα που απαιτούνται



Βήμα 2ο. Είναι η εισαγωγή των δεδομένων του προβλήματος μεταφοράς και η συμπλήρωση του πίνακα μεταφοράς.



Βήμα 3ο. Κάνοντας κλικ στη καρτέλα «SolveandAnalyse» και έπειτα η επιλογή του «Solvetheproblem». Παρακάτω εμφανίζονται τα αποτελέσματα.



03-07-2013	From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Εργοστάσιο_1	Πόλη_2	200	5	1000	0
2	Εργοστάσιο_1	Πόλη_3	150	5	750	0
3	Εργοστάσιο_2	Πόλη_1	50	9	450	0
4	Εργοστάσιο_2	Πόλη_3	200	6	1200	0
5	Εργοστάσιο_2	Πόλη_4	200	7	1400	0
6	Εργοστάσιο_3	Πόλη_1	400	5	2000	0
	Total	Objective	Function	Value =	6800	

Από τα αποτελέσματα του πίνακα μπορούμε εύκολα να βρούμε τους συντελεστές και να βρούμε το συνολικό κόστος μεταφοράς:

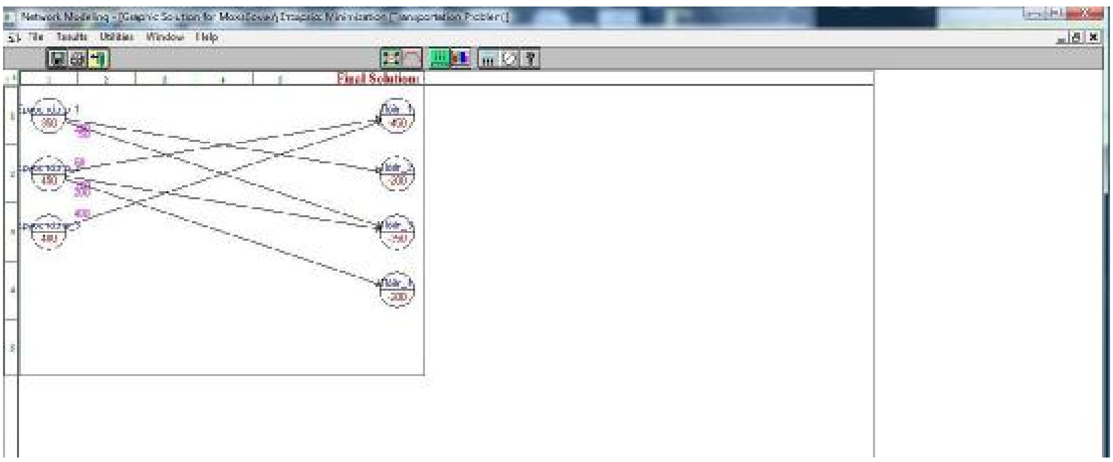
$$minimize\ z = 10\chi_{11} + 5\chi_{12} + 5\chi_{13} + 6\chi_{14} + 9\chi_{21} + 7\chi_{22} + 6\chi_{23} + 7\chi_{24} + 5\chi_{31} + 9\chi_{32} + 6\chi_{33} + 5\chi_{34}$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν από τα αποτελέσματα από το πίνακα στην αντικειμενική συνάρτηση μπορούμε να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα που το συνολικό κόστος δίνει. Άρα έχουμε:

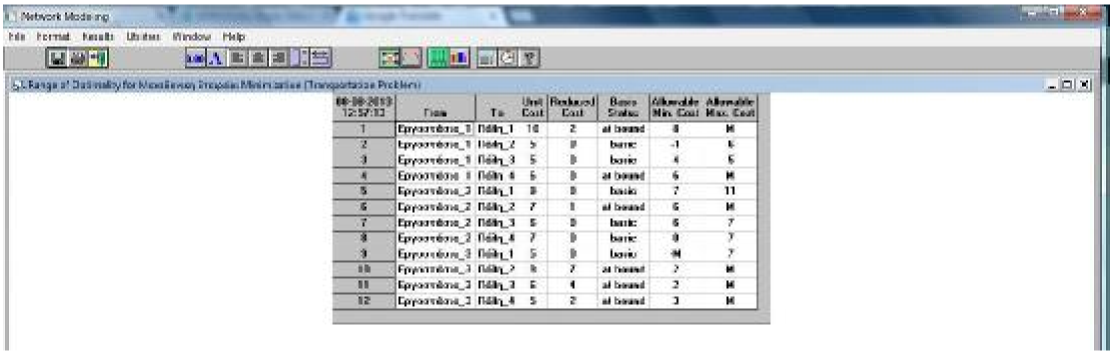
$$10 \times 0 + 5 \times 200 + 5 \times 150 + 6 \times 0 + 9 \times 50 + 7 \times 0 + 6 \times 200 + 7 \times 200 + 5 \times 400 + 9 \times 0 + 6 \times 0 + 5 \times 0 = 6800.$$

Άρα επαληθεύονται τα αποτελέσματα του πίνακα με την αντικειμενική συνάρτηση.

Βήμα 4ο. Μια ακόμα δυνατότητα που δίνει το λογισμικό είναι η γραφική αναπαράσταση του δικτύου. Στη καρτέλα αποτελέσματα «Results» από το υπομενού επιλέγεται η επιλογή «GraphicSolution”. Παρακάτω δίνεται η γραφική αναπαράσταση του δικτύου στο παράδειγμα που μελετάμε.

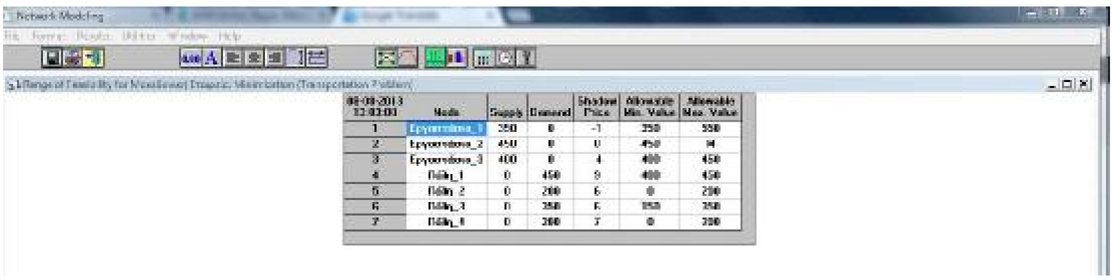


Βήμα 5ο. Υπάρχει μια επιλογή η οποία είναι η «RangeOptimality» η οποία δίνει ένα εύρος των βέλτιστων λύσεων. Η ανάλυση αυτή δίνει σαν αποτέλεσμα τους συντελεστές σε μια αντικειμενική συνάρτηση (όπου αντιστοιχεί στο κόστος μεταφοράς ανά μονάδα). Παρέχεται λοιπόν ένα εύρος που αποτελείται από τις επιτρεπτές τιμές μέγιστες ή ελάχιστες που ένας συντελεστής μπορεί να αυξομειωθεί και παρόλα αυτά να δίνεται η ίδια λύση μόνο που το ελάχιστο κόστος θα είναι διαφορετικό. Συγκεκριμένα οι basic μεταβλητές είναι αυτές που συμμετέχουν στην αντικειμενική συνάρτηση σε αντίθεση με τις atbound μεταβλητές οι οποίες είναι οι μη βασικές μεταβλητές.



08-08-2013 12:57:13	From	To	Unit Cost	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. Cost	Allowable Max. Cost
1	Εργοστάσιο_1	Πόλη_1	10	2	at bound	8	M
2	Εργοστάσιο_1	Πόλη_2	5	0	basic	-1	6
3	Εργοστάσιο_1	Πόλη_3	5	0	basic	4	6
4	Εργοστάσιο_1	Πόλη_4	6	0	at bound	6	M
5	Εργοστάσιο_2	Πόλη_1	8	0	basic	7	11
6	Εργοστάσιο_2	Πόλη_2	7	1	at bound	6	M
7	Εργοστάσιο_2	Πόλη_3	6	0	basic	6	7
8	Εργοστάσιο_2	Πόλη_4	7	0	basic	0	7
9	Εργοστάσιο_3	Πόλη_1	5	0	basic	-M	7
10	Εργοστάσιο_3	Πόλη_2	9	7	at bound	2	M
11	Εργοστάσιο_3	Πόλη_3	6	4	at bound	2	M
12	Εργοστάσιο_3	Πόλη_4	5	2	at bound	3	M

Βήμα 6ο. Μια παραπάνω ανάλυση που υπάρχει δυνατότητα να πάρουμε αποτελέσματα είναι η «RangeFeasibility» όπου δείχνει το εύρος των τιμών όπου οι εφικτές λύσεις μπορούν να πάρουν. Είναι λοιπόν οι δυνατότητες που τα σημεία εφοδιασμού και ζήτησης έχουν. Δίνει λοιπόν ένα εύρος από ελάχιστες και μέγιστες τιμές όπου η παραγωγική δυνατότητα μπορεί να αλλάξει παρόλα αυτά να έχουν την ίδια βάση(που αυτό σημαίνει πως από το πλοίο από τον έναν κόμβο στον άλλον) αλλά με διαφορετικές ποσότητες μεταφοράς και ελάχιστο κόστος.



08-08-2013	Node	Supply	Demand	Shadow Price	Allowable Min. Value	Allowable Max. Value
1	Εργοστάσιο_1	350	0	-1	350	550
2	Εργοστάσιο_2	450	0	0	450	M
3	Εργοστάσιο_3	400	0	4	400	450
4	Πόλη_1	0	450	9	400	450
5	Πόλη_2	0	200	6	0	200
6	Πόλη_3	0	350	6	350	350
7	Πόλη_4	0	200	7	0	200

3.6 Περίπτωση Χρήσης « Θαλάσσιες Μεταφορές»

Η περίπτωση χρήσης αναφέρει ένα σοβαρό θέμα συζήτησης για την ελληνική κοινωνία, είναι η απελευθέρωση των θαλάσσιων μεταφορών στην Ευρωπαϊκή Ένωση και ειδικότερα στα νησιά της ελληνική επικράτειας. Για τη καλύτερη κατανόηση είναι η μοντελοποίηση του σε ένα τυπικό πρόβλημα μεταφοράς και να εξετασθούν όλοι οι παράγοντες οι οποίοι παίζουν σημαντικό ρόλο στην εξέλιξή του. Πρέπει να εξετασθούν οι παρούσες συνθήκες οι οποίες ισχύουν στην Ευρωπαϊκή Ένωση και τις χώρες που έχουν την ίδια νομοθεσία, ένα παρόμοιο πλαίσιο θα πρέπει να βρεθεί και για το ελληνικό κράτος έτσι ώστε να καλυφθούν οι οικονομικές και κοινωνικές απαιτήσεις του κράτους. Ένας ακόμα λόγος για της μελέτης της περίπτωσης χρήσης έχει σα σκοπό τη παροχή μιας ποικιλίας μέτρων και πολιτικών που να προσαρμόζονται στις ιδιαιτερότητες κάθε νησιού.

Η απελευθέρωση των θαλάσσιων μεταφορών περιλαμβάνει την έκδοση άδειας ελεύθερης χρήσης στην αγορά των μεταφορών και αυτό επιτυγχάνεται με την άρση διάφορων περίπλοκων ελέγχων επί των τιμών, που αφορά στους μεταφορείς που θα εισέλθουν ή θα εγκαταλείψουν τις αγορές κατά βούληση. Το δίκαιο μεταφοράς αφορά στο τομέα του δικαίου με τις μεταφορές. Οι νόμοι αυτοί λοιπόν μπορούν να εφαρμοστούν σε ένα μεγάλο βαθμό σε επίπεδο συστήματος μεταφοράς ώστε να μεταφέρουν τα πράγματα ή υπηρεσίες εκτός του εν λόγω δικτύου. Η ρύθμιση PSO(Υποχρέωση Δημόσιας Υπηρεσίας) είναι μία ρύθμιση κατά την οποία ένα κυβερνητικό σώμα ή μια άλλη αρχή να πραγματοποιεί μια δημοπρασία για τις επιδοτήσεις να ορίζουν η νικήτρια εταιρεία να είναι ως μονοπώλιο για να λειτουργήσει μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο για τη συγκεκριμένη επιδότηση. Στις χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης όπως η Γαλλία, Ιταλία, Ελλάδα, Πορτογαλία και Ισπανία οι ενδομεταφορείς στην ηπειρωτική χώρα απελευθερώθηκαν σταδιακά σύμφωνα με ένα συγκεκριμένο χρονοδιάγραμμα για κάθε τύπο υπηρεσίας μεταφορών. Τα νησιά έχουν ενδογενή χαρακτηριστικά που επηρεάζουν άμεσα την οικονομία του κράτους και κατ' επέκταση της οικονομία της Ευρωπαϊκής Ένωσης. Συγκεκριμένοι λόγοι όπως το μέγεθος, η εξάρτηση από την απόσταση φέρει συνέπειες και οι ιστορικοί σημασίας λόγοι φέρουν άμεσα ευθύνη για την οικονομική ανάπτυξη.

3.6.1 Οι υπηρεσίες πορθμείων στα νησιά και στα κράτη της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Οι υπηρεσίες που προσφέρουν τα πορθμεία στη γενικότερη περιφέρεια της Ευρωπαϊκής Ένωσης προσδιορίζονται από τους διαφορετικούς δείκτες που τις επηρεάζουν. Υπάρχουν περιφερειακοί δείκτες ανισότητας σε έκθεση που έχει διεξαχθεί για χάρη της Ευρωπαϊκής Ένωσης υπάρχουν τρεις πηγές που επηρεάζουν τη διαπεριφερειακή συνοχή:

- Ανισότητες που συνδέονται με τις φυσικές συνθήκες και τα φυσικά χαρακτηριστικά
- Ανισότητες οι οποίες είναι ενδεικτικές μιας άνισης ανάπτυξης του δυναμικού παραγωγής
- Ανισότητες οι οποίες τονίζουν τις μεγάλες διαφορές στο εισόδημα και το βιοτικό επίπεδο από τη μια περιοχή σε μία άλλη.

Το πρώτο κριτήριο ανισότητας είναι προφανώς καθοριστικής σημασίας για τα νησιά. Το κριτήριο αυτό λοιπόν ασχολείται με το νησιωτικό χαρακτήρα όπως και το φαινόμενο της φυσικής συνέχειας. Παρόλα αυτά οι νησιωτικές περιοχές προσδιορίζονται από μια ιδιαίτερη κληρονομιά, ένας τρόπος πρόκειται να εκτιμηθεί σημαντικά και να αξιολογηθεί. Εξαιτίας λοιπόν της περιφερειακής θέσης τους είναι δύσκολο να μοιράζονται ισότιμα στην οικονομική ζωή αντιμετωπίζοντας όμως ιδιαίτερα εμπόδια στη διασφάλιση της πλήρους συμμετοχής που απορρέουν από τη θέση τους.

Έχει παρατηρηθεί ότι λόγω της γεωγραφικής τους θέσης (δηλαδή απομόνωσης) οι υποδομές των μεταφορών θεωρούνται ανεπαρκείς και οι παράνομες μεταφορές που αφορούν τις νησιωτικές κοινότητες έχουν μεγαλύτερη δυσκολία να ταξιδεύουν και να φέρουν σχετικά υψηλότερο κόστος μεταφοράς. Πιθανές λύσεις για την επίλυση της ανισότητας του πρώτου κριτηρίου είναι οι ακόλουθες:

- Η παροχή ενός κοινωνικού επιθυμητού επιπέδου τουλάχιστον των μεταφορών για να αποτελεί προτεραιότητα για όλα αυτά τα νησιά
- Θα πρέπει να παρέχονται όλο το χρόνο ότι οι υπηρεσίες εξασφαλίζονται από την εισαγωγή των βασικών πορθμείων.

- Είναι απαραίτητο να παρέχεται ένα αξιόπιστο μέσο εξαγωγής προϊόντων των νησιών.
- Είναι η απόκτηση της πρόσβασης στην ηπειρωτική χώρα για παράγοντες όπως: κοινωνικούς, οικονομικούς(απασχόλησης) και εκπαιδευτικούς.

Ωστόσο, ερευνάται συχνά η σπουδαιότητα των υπηρεσιών που τα πορθμεία παρέχουν στα νησιά, είναι ζωτικής σημασίας για τις νησιωτικές περιοχές η παροχή των συγκεκριμένων υπηρεσιών σε αυτές. Διερευνούνται λοιπόν οι προοπτικές από οικονομικής και κοινωνικής πλευράς παρακάτω δίνονται:

- Το βιοτικό επίπεδο των κατοίκων που επηρεάζονται
- Απαραίτητη είναι η μείωση της σχετικής απόστασης
- Σημαντικός είναι ο εμπλουτισμός της ζωής του πληθυσμού του νησιού με σκοπό να διατηρηθεί η κοινότητα των νησιών
- Από τουριστικής άποψης είναι η διαθεσιμότητα δωματίων μας υπηρεσίας οχηματαγωγών προωθεί μια ενεργή τουριστική βιομηχανία η οποία συμβάλει σημαντικά, ίσως και καθοριστικά στη τοπική οικονομική ευημερία.

Σημαντικό κεφάλαιο-παράγοντας στη διαχείριση των θαλάσσιων μεταφορών είναι οι διαχειριστές των πλοίων (εταιρίες) και πως θα αποσπάσουν τις επιδοτήσεις με την προϋπόθεση να τηρούνται οι θαλάσσιοι κανονισμοί, όπως κανονισμοί που αφορούν την υγεία και ασφάλεια και να ακολουθούν πάντοτε την εκάστοτε νομοθεσία και τις τοπικές αρχές. Οι φορείς λοιπόν θα πρέπει να ορίσουν έναν σχεδιασμό για τον ελάχιστο αριθμό των δρομολογίων που θα πραγματοποιούνται και θα πρέπει να λάβουν υπόψη τους ακόλουθους παράγοντες:

- Καθορίζουν τη συχνότητα των υπηρεσιών για τη προσφορά, με ένα ελάχιστο αριθμό εβδομαδιαίων δρομολογίων για τη μεταφορά των υπηρεσιών, ωστόσο απαραίτητη προϋπόθεση είναι να περιλαμβάνεται ένα δεκαπενθήμερο δρομολόγιο μεταξύ των νησιών.
- Οι φορείς λοιπόν είναι απαραίτητο να υποχρεώνουν τις εταιρίες πλοίων, τα πλοία τους να προβαίνουν σε στάση σε όλα τα νησιά ή να παρέχονται υπηρεσίες εκτός της νησιωτικής περιοχής.
- Οι υπηρεσίες που παρέχονται με τη προγραμματισμένη τακτική είναι απαραίτητο να ακολουθούνται για ένα έτος.

- Πρέπει να συμμορφώνονται με τη κοινοτική νομοθεσία
- Είναι υποχρεωτική η αποκλειστική χρήση πληρώματος που αποτελείται από υπηκόους των μελών κρατών της Ευρωπαϊκής Ένωσης.

3.6.2 Η περίπτωση της Ελλάδας

Η Ελλάδα αποτελεί μια καθαρά ναυτιλιακή χώρα και αυτό οφείλεται στο γεωγραφικό σκηνικό το οποίο αποτελείται από ένα μεγάλο αριθμό σκηνικών. Ως κράτος-μέλος της Ευρωπαϊκής Ένωσης είναι υπόχρεη να ακολουθεί τους νόμους που είναι στο κοινοτικό πλαίσιο που αφορά τις θαλάσσιες μεταφορές. Ωστόσο είναι γνωστό ότι η νομοθεσία στην Ελλάδα είναι τόσο αυστηρή ίσως και να θεωρείται απαρχαιωμένη και αυτό έρχεται σε σύγκρουση με το πνεύμα του κανονισμού της Ευρωπαϊκής Ένωσης. Οι υπηρεσίες πορθμείων στην Ελλάδα εξακολουθούν να έχουν σα πάροχο άδειας από τους εγχώριους φορείς οι οποίοι θα συνεχίσουν τις παραδοσιακές διαδρομές τους, παρόλα αυτά σε ορισμένες περιπτώσεις επεκτείνονται σε άλλους φορείς. Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι κατά τη χειμωνιάτικη περίοδο τα νησιά δεν είναι εμπορικά βιώσιμα λόγω της χαμηλής ζήτησης, όμως υπάρχουν άλλοι σημαντικοί κοινωνικοί και ανθρωπιστικοί λόγοι θα πρέπει να τα κάνουν.

Οι απαιτήσεις των νησιών πρέπει να ικανοποιούνται από μια δημόσια υπηρεσία παροχής υπηρεσιών. Οι απαιτήσεις για τη παροχή από μια δημόσια αρχή είναι οι ακόλουθες:

- Η συχνότητα η οποία καθορίζεται από τον αριθμό των διελεύσεων ανά εβδομάδα
- Η περίοδος του πλοίου που πρέπει να είναι τουλάχιστον δέκα μήνες το χρόνο
- Ένα πλοίο αντικατάστασης πρέπει να βγει εκτός λειτουργίας μέσα σε δύο μήνες τουλάχιστον
- Πρότυπα πλοίου, αφορά τη χωρητικότητα των επιβατών, των οχημάτων
- Η ασφάλεια που αφορά το πλοίο να είναι κατάλληλο για ασφαλή χρήση από τις εγκαταστάσεις των λιμανιών
- Η ναύλωση, τη μέγιστη τιμή ναύλου για την οικονομική/ κλασσική θέση και οι απαραίτητες εκπτώσεις για τις ευπαθείς ομάδες των επιβατών.

- Η ηλικία των πλοίων, είναι απαραίτητο να είναι κάτω από την ηλικία των 35 χρόνων

Όπως έχει ήδη αναφέρει η ηλικία των πλοίων είναι σημαντικός παράγοντας για τη παροχή αδείας. Κεντρικό πρόβλημα είναι η ηλικία των σκαφών που σύμφωνα με έρευνα που πραγματοποιήθηκε το 2006 βγαίνουν εύκολα τα συμπεράσματα πως η ηλικία των πλοίων έχει μειωθεί σημαντικά αυτό έχει ως άμεση συνέπεια το γεγονός ότι η μέση ταχύτητα των πλοίων να αυξάνεται συνεχώς. Είναι πολύ θετική η εξέλιξη ότι βάση της νομοθεσίας ότι τα πλοία άνω των «35 χρόνων» θα πρέπει να αποσύρονται, από την άλλη πλευρά αυτή η εξέλιξη αποτελεί πρόβλημα γιατί αυτό σημαίνει πως θα επιτρέπονται μόνο 350 πλοία όλων των ειδών για να εξυπηρετήσουν τις απαιτήσεις των ακτοπλοϊκών αρχών. Ακόμα ένα σημαντικό ζήτημα που θα πρέπει να βρεθεί λύση είναι πως οι απαιτήσεις των ακτοπλοϊκών υπηρεσιών μειώνονται δραματικά περίπου κατά 80% σε σχέση με τη καλοκαιρινή περίοδο. Συνεπώς μόνο γύρω το 40% των γραμμών δεν είναι πια σε λειτουργία το χειμώνα. Για την αντιμετώπιση αυτής της κατάστασης, η κυβέρνηση επιχορηγεί ορισμένα δρομολόγια όπου πηγές χρηματοδότησης βοηθούν τότε το 3% του κρατικού προϋπολογισμού οφείλεται στη κατά 3% αύξηση της τιμής του εισιτηρίου, ωστόσο το ποσό της επιδότησης είναι άμεσα εξαρτώμενο από την απόσταση που το δρομολόγιο «εκτελεί».

3.6.3 Ένα σχέδιο δράσης για τη πραγματοποίηση της απελευθέρωσης

Η κυβέρνηση είναι υπεύθυνη για την εκπλήρωση των αναγκών της κοινωνίας που αφορά τις νησιωτικές περιοχές σε διάφορους τομείς όπως η μεταφορά των δημοσίων αγαθών, η παροχή ενέργειας, ύδρευσης και τηλεπικοινωνιακών αναγκών. Σύμφωνα λοιπόν με την έκθεση της GILA που πραγματοποιήθηκε το 2006 οι στόχοι της «Καθολικής Υπηρεσίας» καθορίζονται από τις ακόλουθες απαιτήσεις:

- Η διαθεσιμότητα και η επάρκεια των παρεχόμενων υπηρεσιών
- Βασική πρόσβαση στα αγαθά και τις υπηρεσίες
- Οικονομική προσβασιμότητα
- Πρόβλεψη της ποιότητας των υπηρεσιών
- Επαρκής παροχής της δημόσιας υπηρεσίας μέσω των γραμμών.

Στην Ευρωπαϊκή Ένωση όλα τα βασικά δίκτυα μεταφοράς εξυπηρετούν τη μεταφορά των υπηρεσιών τηλεπικοινωνίας, της ενέργειας. Η Ευρωπαϊκή Ένωση δεν έχει όμως καθορίσει τις υποχρεώσεις που θα έχει η «Καθολική Υπηρεσία» στη θαλάσσια μεταφορά των επιβατών. Υπάρχει ανάγκη λοιπόν για την ύπαρξη μιας διάταξης έτσι ώστε να καλύπτονται και οι ανάγκες του ελληνικού κράτους, έτσι ώστε να δημιουργηθεί ένα ικανοποιητικό επίπεδο παροχής. Αυτό σημαίνει πως οι διαπραγματεύσεις με τους άμεσα ενδιαφερόμενους φορείς όπως είναι οι ναυτιλιακές εταιρίες, οι τοπικές αρχές και τα αρμόδια υπουργεία είναι ευκολότερες.

Η λύση του προβλήματος μεταφοράς στις νησιώτικες περιοχές και στην εφαρμογή μια αποτελεσματικότητας μα και εξίσου αποδοτικής στρατηγικής, απαιτείται μια ολοκληρωμένη προσέγγιση. Η οποία προσέγγιση εξετάζοντας πολιτικό και κοινωνικό περιβάλλον τόσο σε ευρωπαϊκό επίπεδο με σκοπό την αναζήτηση λύσεων σε βασικές παραμέτρους έχοντας σα κριτήριο τις επιπτώσεις σχετικά με την οικονομική ανάπτυξη μα και τη κοινωνική ζωή του πληθυσμού του νησιού. Οι παράμετροι που πρέπει να ληφθούν υπόψη είναι δύο: η οικονομική ανάπτυξη μα και οι πολιτικοί σκοποί. Υπάρχουν διάφορα εναλλακτικά σενάρια τα οποία εξετάζουν συγκεκριμένες γραμμές μα και τις προϋποθέσεις για τις διαφορετικές οικονομικές βιώσιμες λύσεις. Τα σενάρια δημιουργούν έναν «οδικό χάρτη» με έναν αριθμό εναλλακτικών λύσεων έτσι ώστε να είναι εφικτό να ανταποκριθούν στις διαφορετικές κάθε φορά περιπτώσεις . Ωστόσο, εξαιτίας της παρούσας κατάστασης ότι δεν υπάρχει μια πολιτική διαδικασία και επίσης δεν υπάρχει σαφή πολιτική εντολή από την Ευρωπαϊκή Ένωση.

Απαραίτητο είναι η κατασκευή των κριτηρίων, ποιοι παράγοντες είναι τόσο σημαντικοί έτσι ώστε να αποτελέσουν κριτήριο στη μαθηματική διατύπωση. Αρχικά ορίζονται 3 κριτήρια που θεωρούνται βασικά όπου αντιστοιχούν σε τύπους ή ομάδες φορέων που είναι σημαντικά για το χρήστη.

- Η ποιότητα της προσφοράς: σημαίνει πως αντιπροσωπεύει τις απαιτήσεις του χρήστη, κάθε ρύθμιση του δικτύου παρέχει γρηγορότερη, ασφαλέστερη μα και πιο αξιόπιστη σύνδεση.

- Αποτελεσματικότητα του δικτύου: το κριτήριο αυτό αξιολογεί αν το δίκτυο Α είναι τουλάχιστον τόσο καλή όσο το δίκτυο Β συγκρίνοντας τους παράγοντες του δικτύου τους πλοιοκτήτες και την αυτοδιοίκηση
- Ικανοποίηση της ζήτησης: το κριτήριο αυτό εξετάζει το πόσο ικανοποιούνται οι χρήστες του δικτύου, οι τουρίστες, οι κάτοικοι των νησιών και οι φορείς.

Μέσα από αυτή την ανάλυση θα πρέπει να ληφθούν υπόψη η συχνότητα δρομολογίων, η διαθεσιμότητα των συνδέσεων, το αντιληπτό κόστος, η ποιότητα πλοίου μα και του λιμανιού ανά συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα που έχουν οριστεί. Ακόμα σημαντικό είναι η αποδοτικότητα των δημοσίων και ιδιωτικών παραγόντων, λιμανιών και επιδοτούμενων γραμμών. Σπουδαία είναι η ποσοτική και ποιοτική ικανοποίηση των ομάδων.

3.6.4 Προτεινόμενες Λύσεις

Στην Ευρωπαϊκή Ένωση η άποψη που κυριαρχεί αφορά την ενδυνάμωση του κοινοτικού κράτους, αυτό σημαίνει πως δίνεται ιδιαίτερη σημασία στα άτομα με αναπηρία, σε απομακρυσμένες περιοχές και τη μείωση του αποκλεισμού που δέχονται τα νησιά και αυτό συμβάλει στη κοινωνική συνοχή. Ωστόσο υπάρχει και ένα κίνημα που ενισχύει την ανταγωνιστικότητα στην ευρωπαϊκή αγορά έτσι ώστε να καταφέρει να είναι ανταγωνιστική σε μια απαιτητική παγκόσμια αγορά. Είναι απαραίτητη λοιπόν ότι η ανάγκη για τη δημιουργία ενός διαφορετικού νομοθετικού πλαισίου και διαφορετικές πολιτικές που θα οδηγήσουν στην ανάπτυξη των νησιών.

Είναι πολύ σημαντικό η ενίσχυση του νησιωτικού χαρακτήρα. Αυτό σημαίνει πως οι θαλάσσιες μεταφορές θα πρέπει να γίνονται με τον ίδιο τρόπο για όλα τα νησιά ανεξάρτητα με διάφορα γεωγραφικά στοιχεία που το κάθε νησί έχει. Πρέπει να δοθεί σημασία στη «προτεραιότητα» στην ανισότητα μεταξύ των νησιών και αυτό επιτυγχάνεται μέσα από απλούστερους κανονισμούς και διοικητικές λειτουργίες. Η δημιουργία ενός παρατηρητηρίου όπου μπορεί να καταγράφει συστηματικά δεδομένα που είναι απαραίτητα. Οι ενέργειες που θα είναι ικανό να εκτελεί είναι η παρακολούθηση, ο έλεγχος και η αξιολόγηση των συνθηκών που επικρατούν στην αγορά των μεταφορών με σκοπό την εύρεση διαθρωτικών και αποτελεσματικών λύσεων.

Ένας πολύ σημαντικός στόχος στο τομέα των μεταφορών είναι να υπάρχει ένα είδος «ισότητας» και «δικαιοσύνης» στις απαιτήσεις των πελατών. Οι υπηρεσίες που θα προσφέρονται επηρεάζουν άμεσα τη ποιότητα ζωής, οι τιμές που εφαρμόζονται αποτελούνται από το κόστος παροχής των υπηρεσιών. Συνεπώς, η αρχή της «ισοδύναμης μεταφοράς» θα πρέπει να εγκριθεί από το κράτος, έχοντας σα στόχο την εναρμόνιση του κόστους που ταξιδεύουν δια θαλάσσης με εκείνους που ταξιδεύουν με άλλα μέσα προσφέροντας ικανοποιητική ποιότητα των παρεχόμενων υπηρεσιών. Επιπλέον, πρέπει να υπάρχει να υπάρχει μια μετατόπιση πολιτικής στο σχεδιασμό και τη προκήρυξη νέων υπηρεσιών μακριά από τη «μονότονη» εκδοχή του πλοίου.

Η τρέχουσα πολιτική στην Ελλάδα, όσο αφορά την ίδρυση και λειτουργία μια επιδοτούμενης γραμμής δεν έχει ακόμα αποδοθεί ένα νομικό πλαίσιο για τη παροχή της κατάλληλης προσβασιμότητας για τους κατοίκους των νησιών, έστω και αν τα δημόσια κεφάλαια έχουν αυξηθεί σημαντικά. Οπότε είναι σημαντικό να διευκολυνθούν οι απαραίτητες διαδικασίες και να ληφθεί υπόψη τη σπουδαιότητα της νησιωτικής της Ελλάδας όσο και στην Ευρωπαϊκή Ένωση όπου και ανήκει.[5,6]

[5] The liberation of maritime transport and the island regions in EU Evidendce from Greece, Chlomoudis C.I, Pallis P.L, Papadimitriou S, Tzanatos E.S

[6] A Real case study on transportation scenario comparison, Tsoukias A- Papayannakis A

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ-ΑΡΘΟΓΡΑΦΙΑ

ΞΕΝΗΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] ECKER.J.G- KUPRERSOMID.M, (1998), IntroductiontoOperationResearch, WileyPublishing, NewYork

[2] NASH S.G- SOFER.A, (1996), Linear and No Linear Programming, McGraw-Hill, New York

[3] WINSTONL.W, (1991), OperationResearchApplicationandAlgorithms 2nd Edition, DuxlouryPress

ΞΕΝΗΑΡΘΟΓΡΑΦΙΑ

[4] A Real case study on transportation scenario comparison, Tsoukias A- Papayannakis A

[5] HITCHOCK F.L,(1941), The distribution of a Product From Several Sources to Numerous Localities

[6] The liberation of maritime transport and the island regions in EU Evidendce from Greece, Chlomoudis C.I, Pallis P.L, Papadimitriou S, Tzanatos E.S

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[7] LEVITINA,(2008), Εισαγωγή στην Ανάλυση & Σχεδίαση Αλγορίθμων, Εκδόσεις Τζιόλα

[8] F.SHILLER-LIEBERMANG.J, (1985), Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα: Τόμος Α, Β' Έκδοση, Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα

[9] ΚΩΣΤΟΓΛΟΥ Β, (2002), Επιχειρησιακή Έρευνα: Μεθοδολογία Εφαρμογές και Προβλήματα Πληροφοριακά Συστήματα Διοίκησης, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη

[10] ΛΟΥΚΑΚΗ Μ, (1990), Επιχειρησιακή Έρευνα :Τόμος Α, Εκδοτικό Κέντρο Βορείου Ελλάδος, Θεσσαλινίκη

[11] ΜΠΟΤΣΑΡΗΣ Χ.Γ, (1996), Επιχειρησιακή Έρευνα Μέθοδοι & Προβλήματα, Εκδόσεις Έλλην, Αθήνα

[12] ΤΣΑΝΤΑΣ Ν.Δ-ΒΑΣΙΛΙΕΟΥ Π.Γ.Χ, (2000), Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη

[13] ΥΨΗΛΑΝΤΗΣ Π.Γ,(2005), Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις ΕΛΛΗΝ, Αθήνα

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ

[14]http://libkas.teikoz.gr/2009/ptyxiakes/OIKONOMOU_KALLIOPI.pdf

[15]http://www.math.ntua.gr/~coletsos/Documents/linearprogramming.pdf

[16]http://dspace.lib.uom.gr/bitstream/2159/14402/6/KolliasDimitriosMsc2010.pdf

[17]http://dspace.lib.uom.gr/bitstream/2159/13888/1/Glavelis_Msc2009.pdf

[18]http://www.math.ntua.gr/~coletsos/Documents/Summary_of_OR.pdf

[19] http://mathbooksgr.files.wordpress.com/2011/06/669-ypologistikes-methodoi-sti-thewria-apofasewn-simeioseis.pdf

[20]http://oai.cwi.nl/oai/asset/10084/10084A.pdf

[21]http://www.ams.org/notices/200703/fea-cottle.pdf

[22]http://www.scribd.com/doc/142094103/72370309-Transportation-Problems-1

[23]*www.hkbu.edu.hk/~vwschow/lectures/bus2420/2420lecture05****.ppt***

[24]http://aetos.it.teithe.gr/~vkostogl/files/Epixeirisiaki/Transportation%20problems_GR_27-5-2012.pdf

[25]http://wps.pearsoned.co.uk/wps/media/objects/9566/9796522/online_tutorials/heizer10e_tut4.pdf

[26] http://tom.host.cs.st-andrews.ac.uk/CS3052-CC/Practicals/Kuhn.pdf

[27]http://www.lindo.com/index.php?option=com_content&view=article&id=1&Itemid=9

[28]http://users.uom.gr/~acg/Courses/QA1/material/Ch07slides.pdf

[29]http://aetos.it.teithe.gr/~vkostogl/files/Epixeirisiaki/Transportation%20problems_exercises.pdf