ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗ ЄΠΙΧЄΙΡΗΣЄΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η ανάλυση ευαισθησίας στο γραμμικό προγραμματισμό

The sensitivity analysis in linear programming

Σπουδαστές: Μαρία Κανιού

Παντελεήμων Νίκας

Εισηγητής: Μαρία Μιχοπούλου

ΠΑΤΡΑ 2014

Contents

Περίληψη

Η εργασία έχει θέμα την παρουσίαση της ανάλυσης ευαισθησίας στο γραμμικό προγραμματισμό και ποια είναι η σημασία της ανάλυσης ευαισθησίας με εφαρμογές και παραδείγματα.

Στόχος της είναι η αποτύπωση της σημασίας της ανάλυσης ευαισθησίας μέσα από παραδείγματα και εφαρμογές μέσω της θεωρητικής προσέγγισης.

Θα γίνει περιγραφή της ανάλυσης ευαισθησίας στο γραμμικό προγραμματισμό. Θα δειχτεί η ανάλυση ευαισθησίας για τους αντικειμενικούς συντελεστές, τα δεξιά και αριστερά μέλη των περιορισμών, ταυτόχρονες μεταβολές παραμέτρων, ανάλυση ευαισθησίας στο δυϊκό πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού. Θα υπογραμμισθούν τα πλεονεκτήματα της ανάλυσης ευαισθησίας με παραδείγματα και εφαρμογές. Και θα γίνει παρουσίαση αποτελεσμάτων και εξαγωγή συμπερασμάτων.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα της εργασίας είναι η παρουσίαση των πλεονεκτημάτων της ανάλυσης ευαισθησίας μέσα από παραδείγματα.

Abstract

The work is the presentation of and sensitivity analysis in linear programming and what is the importance of sensitivity analysis with applications and examples. Its aim is to capture the importance of sensitivity analysis through examples and applications through the theoretical approach.

Will be described to sensitivity analysis in linear programming. Will be dealt sensitivity analysis for objective coefficients, the right and left members of constraints, simultaneous parameter changes, sensitivity analysis in dual problem of linear programming. Will highlight the advantages of the sensitivity analysis with examples and applications. And we will show the results and draw conclusions.

Expected results of this work is to present the advantages of the sensitivity analysis through examples.

Εισαγωγή

Γραμμικός Προγραμματισμός είναι η διαδικασία εύρεσης μιας βέλτιστης λύσης μιας γραμμικής συνάρτησης, η οποία να είναι συμβατή με ένα πεπερασμένο σύνολο γραμμικών ανισοτήτων, δηλαδή, ο γραμμικός προγραμματισμός περιγράφει ένα μοντέλο που αφορά τη μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση μιας γραμμικής συνάρτησης κάτω από κάποιους γραμμικούς περιορισμούς. Από την οικονομική σκοπιά, ο γραμμικός προγραμματισμός είναι μια τεχνική που ασχολείται με το πρόβλημα της κατανομής των περιορισμένων πόρων ενός συστήματος σε ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο (καθώς και με άλλα προβλήματα με ανάλογη ή παραπλήσια διαμόρφωση). Θεωρείται σαν μια από τις πιο σπουδαίες μαθηματικές ανακαλύψεις των μέσων χρόνων του εικοστού αιώνα και στις μέρες μας αποτελεί ένα μοντέλο ευρείας χρήσης για καθημερινά ζητήματα των περισσότερων μεσαίου και μεγάλου μεγέθους εμπορικών - βιομηχανικών εταιρειών. Ο όρος «προγραμματισμός» δεν έχει την έννοια του «προγραμματισμού ηλεκτρονικών υπολογιστών» αλλά αυτήν του «σχεδιασμού». Ο γραμμικός προγραμματισμός ασχολείται με τη σχεδίαση των δραστηριοτήτων του συστήματος που περιγράφει για να προκύψει το άριστο αποτέλεσμα, το αποτέλεσμα δηλαδή εκείνο, που μεταξύ όλων των δυνατών εναλλακτικών λύσεων πραγματώνει τον προκαθορισμένο σκοπό κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Ο γραμμικός προγραμματισμός παρουσιάζει, επίσης, ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη θεωρητική πληροφορική. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μοντελοποίηση και την επίλυση πολλών συνδυαστικών προβλημάτων τα οποία εκ πρώτης όψεως δεν σχετίζονται με το γραμμικό προγραμματισμό. Έτσι, ο ελλειψοειδής αλγόριθμος (ο πρώτος αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για το γραμμικό προγραμματισμό) ή οι πιο πρόσφατες μέθοδοι των εσωτερικών σημείων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αποδοτική επίλυση πολλών συνδυαστικών προβλημάτων, όπως για παράδειγμα ο υπολογισμός βέλτιστων ροών σε ένα δίκτυο, η εύρεση ενός μέγιστου ταιριάσματος (maximal matching) σε ένα γράφο, ή ενός χρωματισμού σε ένα τέλειο γράφημα. Η αρχική μαθηματική διατύπωση του προβλήματος καθώς και μια συστηματική διαδικασία λύσης του, η μέθοδος Simplex, οφείλεται στον G. B. Dantzig στα 1947.

Νωρίτερα διάφορα προβλήματα τύπου γραμμικού προγραμματισμού είχαν διαμορφωθεί και επιλυθεί. Τα σημαντικότερα από αυτά αφορούν το πρόβλημα μεταφοράς (Hitchcock 1941, Koopmans 1949) και το πρόβλημα της δίαιτας (Stigler 1945). O Dantzig ήταν όμως ο άνθρωπος που κατασκεύασε το γενικό πλαίσιο και ταυτόχρονα ανακάλυψε μέθοδο επίλυσης του.

Πολλά από τα προβλήματα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε ανάγονται σε γραμμικά προβλήματα. Κλασικά παραδείγματα αποτελούν τα προβλήματα προγραμματισμού των πληρωμάτων σε μια αεροπορική εταιρία, ο υπολογισμός του συνδυασμού πρώτων υλών σε ένα εργοστάσιο που μεγιστοποιεί το κέρδος του τελικού προϊόντος, ή ο υπολογισμός των ροών αυτοκινήτων σε ένα οδικό δίκτυο, ή του φόρτου πληροφοριών σε ένα δίκτυο επικοινωνίας.

Ύ́Στα κεφάλαια που ακολουθούν θα γίνει περιγραφή της ανάλυσης ευαισθησίας στο γραμμικό προγραμματισμό. Θα υπογραμμίσουμε την ανάλυση ευαισθησίας για τους αντικειμενικούς συντελεστές, τις ταυτόχρονες μεταβολές παραμέτρων ειδικά στο δυϊκό πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού. Θα τονισθούν τα πλεονεκτήματα της ανάλυσης ευαισθησίας με παραδείγματα και εφαρμογές.

1 ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

1.1 Ιστορική αναδρομή

Πολλοί πιστεύουν ότι η ανάπτυξη του γραμμικού προγραμματισμού είναι μια από τις πιο σπουδαίες επιστημονικές ανακαλύψεις των μέσων χρόνων του εικοστού αιώνα. Η επίδρασή του από το 1950 ήταν πράγματι πολύ σημαντική. Σήμερα, ο γραμμικός προγραμματισμός έχει γίνει ένα πρότυπο εργαλείο, που χρησιμοποιείται από τις περισσότερες μεσαίου και μεγάλου μεγέθους εμπορικές και βιομηχανικές επιχειρήσεις των βιομηχανικών χωρών. Η χρησιμοποίηση του σε άλλους τομείς της κοινωνίας έχει επεκταθεί με ταχύτατο ρυθμό. Δεκάδες βιβλία έχουν γραφτεί για το γραμμικό προγραμματισμό και εκατοντάδες άρθρα έχουν δημοσιευτεί με σπουδαίες εφαρμογές του. Πάρα πολλοί επιστημονικοί υπολογισμοί σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές στηρίχτηκαν στο γραμμικό προγραμματισμό και άλλες τεχνικές στενά συνδεδεμένες με αυτόν.

Ως ορόσημο της ραγδαίας εξέλιξης του γραμμικού προγραμματισμού θεωρείται ο Β΄ Παγκόσμιος πόλεμος, όπου για πρώτη φορά εφαρμόστηκαν μέθοδοι ανεφοδιασμού των συμμαχικών δυνάμεων στην Ευρώπη. Πολλοί ερευνητές εκείνης της εποχής “διεκδικούν” τον τίτλο του θεμελιωτή της επιστήμης με τις ανακαλύψεις τους σε θεωρητικό κυρίως επίπεδο αλλά με τεράστιες εφαρμογές σήμερα ειδικότερα με τη χρήση των υπολογιστών όπου κατέστη δυνατή η επίλυση επίπονων σε υπολογισμούς προβλημάτων σε σύντομο χρονικό διάστημα.

Ένας εξαίρετος Σοβιετικός Μαθηματικός ο Kantorovich (1939) δημοσίευε στη Ρωσία την εργασία του για το πρόβλημα της οργάνωσης και σχεδιασμού της παραγωγής. Αργότερα το πρόβλημα αυτό ονομάσθηκε Πρόβλημα μεταφοράς του Hitchcock (1941), ενός επίσης σημαντικού Αμερικανού μελετητή.

Ο Koopmans με τις εργασίες του (1947,1951) συνέβαλε σημαντικά στην εξέλιξη του γραμμικού προγραμματισμού και μάλιστα σύμφωνα με τον Dantzig (1963) είναι αυτός που πρότεινε το όνομα Γραμμικός Προγραμματισμός για τη νέα επιστήμη που άρχισε να ορθοποδεί.

Κορυφαία στιγμή αναμφίβολα θεωρείται το 1947, όπου ο G.B.Dantzig ανακάλυψε τον γνωστό έως και σήμερα Αλγόριθμο Simplex για την επίλυση του γραμμικού προβλήματος. Η πρώτη παρουσίαση του αλγορίθμου με τη χρήση της γεωμετρίας στο χώρο των μεταβλητών δεν έπεισε τους επιστήμονες για την σημαντική ανακάλυψη. Ακολούθησε η δεύτερη παρουσίαση με τη χρήση της γεωμετρίας στο χώρο των περιορισμών, με αποτέλεσμα να πεισθεί η επιστημονική κοινότητα για το μέγεθος της αξίας της ανακάλυψης. Η πρώτη δημοσίευση του αλγορίθμου έγινε το 1949. Ήταν ως τότε ο πιο αποτελεσματικός τρόπος επίλυσης γραμμικών προβλημάτων βελτιστοποίησης και έμελλε να αποτελέσει το υπόβαθρο για την ανακάλυψη και άλλων μεθόδων επίλυσης γραμμικών προβλημάτων μέχρι και σήμερα. Αμέσως μετά την ανακάλυψη του αλγορίθμου Simplex και την ευφορία που επικράτησε σχετικά με την πρακτική αποτελεσματικότητά του καταβλήθηκαν σοβαρές προσπάθειες για τη βελτίωσή του.

Η βιβλιογραφία των δεκαετιών ΄50 και ΄60 είναι γεμάτη από μελέτες σημαντικών επιστημόνων που συνέβαλαν και αυτοί στη επίλυση διαφόρων άλλων προβλημάτων που προέκυψαν από την εφαρμογή στην πράξη του Αλγόριθμου Simplex. Έγιναν οι ανακαλύψεις του Δυϊκού Αλγορίθμου, της Δυϊκής Θεωρίας, της Θεωρίας της δικτυακής βελτιστοποίησης, καθώς και άλλα αποτελέσματα σχετικά με την πραγματοποίηση υπολογιστικών μελετών.

Πολλοί ερευνητές ακολούθησαν την κατεύθυνση της χαλάρωσης των συνθηκών εφικτότητας. Το πρώτο βήμα σε αυτή την κατεύθυνση έγινε από τους Gass και Saaty (1955), οι οποίοι κατασκεύασαν τον αποκαλούμενο παραμετρικό αυτό-δυϊκό αλγόριθμο (parametric self-dual algorithm).

Αποδείχτηκε αργότερα από τον Lustig (1987) ότι ο αυτοδυϊκός αλγόριθμος μπορεί να ερμηνευτεί σαν ειδική περίπτωση του αλγορίθμου του Lamke (1965) για το αντίστοιχο γραμμικό συμπληρωματικό πρόβλημα (linear complementarity problem).

Η αρχή της χαλάρωσης των συνθηκών εφικτότητας εφαρμόστηκε και σε ειδικά γραμμικά προβλήματα. Στο χώρο της δικτυακής βελτιστοποίησης αναπτύχθηκε πολύ νωρίς ο αλγόριθμος των διαδοχικών ελαχίστων δρόμων (successive shortest path algorithm). Οι αλγόριθμοι αυτοί δεν είναι μόνο αποτελεσματικοί αλλά συνδυαζόμενοι με την τεχνική των κλιμακώσεων των Ermonds και Karp (1972) αποτέλεσαν τη βάση για την ανάπτυξη των ισχυρά πολυωνυμικών αλγορίθμων του Orlin (1984 και 1989).

Οι Dosios και Paparrizos (1995) απέδειξαν ότι οι αλγόριθμοι των διαδοχικών δρόμων και μερικές παραλλαγές τους, Dijkstra (1959), Akgul (1987), Hung και Rom (1980), είναι ειδικές περιπτώσεις των αλγόριθμων εξωτερικών σημείων.

Όλοι οι παραπάνω αλγόριθμοι είναι τύπου Simplex. Τεχνικές χαλάρωσης εφαρμόστηκαν και σε διαφορετικούς Simplex αλγόριθμους. Η βασική ιδέα που εφαρμόστηκε είναι απλή. Ένα σύνολο περιορισμών αγνοείται και λύνεται το προκύπτον πρόβλημα με μικρότερο αριθμό περιορισμών. Χρησιμοποιώντας την παρούσα βέλτιστη λύση ένα νέο σύνολο περιορισμών προσδιορίζεται και η διαδικασία επαναλαμβάνεται. Ο πρώτος αλγόριθμος αυτού του τύπου κατασκευάστηκε από τους Motzkin και Schoenberg (1954), οι οποίοι χρησιμοποίησαν παρόμοιους αλγόριθμους για επίλυση συστημάτων ισοτήτων, Southwell (1940) και Allen (1954), και ανισοτήτων, Agmon (1954). Η ιδέα αυτή επεκτάθηκε αργότερα σε πολύ πιο γενικά προβλήματα.

Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του αλγορίθμου Simplex είναι ο απεριόριστος αριθμός επιλογών στην εισερχόμενη και στην εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή. Αυτό το χαρακτηριστικό κατέστησε δυνατή την ανάπτυξη αμέτρητων παραλλαγών, όπως για παράδειγμα των Bland (1977), Goldfarb και Reid (1977), Clausen (1987), Terlaky (1985), Zhang (1989) και Zionts (1969).

Παρά την πρακτική αποτελεσματικότητά του ο αλγόριθμος Simplex είναι εκθετικός. Οι εργασίες των Avis και Chatal (1978), Goldfarb (1983), Goldfarb και Sit (1979), Jeroslow (1973), Klee και Minty (1980), Murty (1980) και Roos (1990) αποτελούν μια μικρή λίστα εργασιών στις οποίες αποδεικνύεται εκθετική πολυπλοκότητα όμως είναι πολυωνυμική.

Ο χρόνος επίλυσης των μεγάλων προβλημάτων με τον αλγόριθμο Simplex αποτέλεσε σημείο τριβής μεταξύ των ερευνητών, με ζητούμενο την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου, το μεγαλύτερο ανοικτό πρόβλημα της εποχής εκείνης. Το 1972 οι μαθηματικοί Klee και Minty με την εργασία τους, απέδειξαν ότι, για την υπολογιστική συμπεριφορά της χειρότερης περίπτωσης, ο αλγόριθμος είναι εκθετικός και όχι πολυωνυμικός.

Τελευταία, παρουσιάστηκε στη βιβλιογραφία ένας νέος τύπος χαρακτηριστικών αλγορίθμων τύπου Simplex, οι αποκαλούμενοι σήμερα αλγόριθμοι εξωτερικών σημείων. Οι νέοι αλγόριθμοι κατασκευάζουν μια ακολουθία από μη εφικτά σημεία και για αυτό το λόγο ονομάζονται αλγόριθμοι εξωτερικών σημείων. Η πρώτη εργασία στην οποία εμφανίζεται ο όρος αλγόριθμος εξωτερικών σημείων, είναι από ότι γνωρίζουμε, η εργασία στην οποία περιγράφεται μία βελτίωση ενός προηγούμενου παρόμοιου αλγορίθμου για το πρόβλημα μεταφοράς. Οι αλγόριθμοι αυτοί βελτιώθηκαν στο γενικό γραμμικό πρόβλημα.

1.2 Εξέλιξη της μεθόδου του γραμμικού προγραμματισμού

Ο γραμμικός προγραμματισμός (linear programming) αποτελεί αναμφίβολα το δημοφιλέστερο μοντέλο στο χώρο της επιχειρησιακής έρευνας αλλά και της διοικητικής επιστήμης (management science) γενικότερα. Η μεγάλη επιτυχία που είχαν οι εφαρμογές του σε προβλήματα λήψης αποφάσεων των ιδιωτικών και δημόσιων επιχειρήσεων και οργανισμών αποδίδεται, από την μια πλευρά στα επιτεύγματα της έρευνας μαθηματικών και οικονομολόγων σε θεωρητικό επίπεδο και από την άλλη πλευρά στην επαναστατική ανάπτυξη της πληροφορικής επιστήμης και τεχνολογίας.

Κυριαρχεί σήμερα η αντίληψη ότι, τρεις στις τέσσερις εφαρμογές μοντέλων επιχειρησιακής έρευνας σε πραγματικά προβλήματα διοίκησης παραμένουν στο γραμμικό προγραμματισμό. Ποια είναι η φύση του εργαλείου και σε τι είδους προβλήματα απευθύνεται;

Η απάντηση σε αυτές τις ερωτήσεις θα γίνει πιο κατανοητή από τα παραδείγματα που παρουσιάζονται πιο κάτω. Ωστόσο μια σύντομη περίληψη θα βοηθούσε σε μια πρώτη θεώρηση. Με λίγα λόγια ο γραμμικός προγραμματισμός ασχολείται με το πρόβλημα της κατανομής των περιορισμένων πόρων μεταξύ ανταγωνιζόμενων δραστηριοτήτων κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Πρόκειται για το γνωστό πρόβλημα κατανομής της 'πίτας' (resource allocation problem). Αυτό το πρόβλημα της κατανομής μπορεί να προκύψει όταν κάποιος πρέπει να επιλέξει το επίπεδο ορισμένων δραστηριοτήτων ανταγωνιστικών για περιορισμένους πόρους, που είναι αναγκαίοι για την εκτέλεσή τους. Οι περιπτώσεις κατανομής των πόρων σε δραστηριότητες είναι πολλές, όπως π.χ. είναι η κατανομή των μέσων παραγωγής στα προϊόντα, η κατανομή των εθνικών πόρων στις εγχώριες ανάγκες, η επιλογή του χαρτοφυλακίου, ο προγραμματισμός της γεωργικής παραγωγής μιας χώρας. Το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα αυτών των αποφάσεων (κριτήρια απόφασης) μπορεί να αφορά τη μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους από πωλήσεις, την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους παραγωγής, τη μεγιστοποίηση της απασχόλησης, την ελαχιστοποίηση των αρνητικών επιπτώσεων στο περιβάλλον και άλλα. Το κοινό χαρακτηριστικό όλων αυτών των περιπτώσεων είναι η ανάγκη για την κατανομή των περισσότερων πόρων στις ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες.

Ο γραμμικός προγραμματισμός χρησιμοποιεί ένα μαθηματικό πρότυπο για να περιγράψει το πρόβλημα που εξετάζεται. Ο όρος 'γραμμικός ' σημαίνει ότι όλες οι μαθηματικές συναρτήσεις στο πρότυπο πρέπει να είναι γραμμικές. Η λέξη προγραμματισμός δεν αναφέρεται στον προγραμματισμό των ηλεκτρονικών υπολογιστών, αλλά είναι συνώνυμη της λέξης 'σχεδίαση'. Έτσι ο γραμμικός προγραμματισμός ασχολείται με την σχεδίαση των δραστηριοτήτων για να προκύψει το 'άριστο' αποτέλεσμα, δηλαδή το αποτέλεσμα εκείνο, που μεταξύ όλων των δυνατών εναλλακτικών λύσεων, ικανοποιεί τον προκαθορισμένο σκοπό κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Σήμερα ο γραμμικός προγραμματισμός έχει γίνει ένα πρότυπο εργαλείο, που χρησιμοποιείται από τις περισσότερες μεσαίου και μεγάλου μεγέθους εμπορικές και βιομηχανικές επιχειρήσεις των βιομηχανικών χωρών. Η χρησιμοποίησή του σε άλλους τομείς της κοινωνίας έχει επεκταθεί με ταχύτατο ρυθμό. Πάρα πολλοί επιστημονικοί υπολογισμοί σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές στηρίχτηκαν στο γραμμικό προγραμματισμό και άλλες τεχνικές στενά συνδεδεμένες με αυτόν. (Hillier F.S. - Lieberman G.J. : 1984, σελ.20)

Πολλές αποφάσεις που λαμβάνονται σε έναν οργανισμό ή σε μια επιχείρηση αφορούν την αποτελεσματική αξιοποίηση και χρήση πόρων της επιχείρησης. Ως πόροι μιας επιχείρησης εννοούνται ο μηχανικός εξοπλισμός της επιχείρησης, οι εργαζόμενοι (εργατοώρες), τα επενδεδυμένα κεφάλαια καθώς και τα κεφάλαια κινήσεως, οι διαθέσιμοι χώροι της επιχείρησης, οι πρώτες ύλες κ.α. Οι πόροι της επιχείρησης είναι δυνατόν να διατεθούν για την παραγωγή προϊόντων (όπως οι πρώτες ύλες, ο μηχανολογικός και άλλος εξοπλισμός) ή υπηρεσιών (όπως ο χρόνος των εργαζομένων), τη διάθεση και διανομή των προϊόντων (π.χ. μεταφορικά μέσα), τη διαφήμιση, διάφορες επενδυτικές αποφάσεις (π.χ. κεφάλαια) της επιχείρησης. (Υψηλάντης Π. : 1998, σελ 31)

Επομένως, ο γραμμικός προγραμματισμός διαπραγματεύεται προβλήματα στα οποία, δύο ή περισσότερες δραστηριότητες ή προϊόντα, συναγωνίζονται για την απόκτηση των περιορισμένων πόρων. Η κατανομή αυτών επιτυγχάνεται με την μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση μιας αντικειμενικής συνάρτησης ή συνάρτηση στόχων. Ο γραμμικός προγραμματισμός θα μας βοηθήσει να καθορίσουμε την άριστη στρατηγική εκείνη που θα μας δώσει τον καλύτερο συνδυασμό των διαφόρων πόρων, για να πετύχουμε τους στόχους μας, κινούμενοι πάντα στα όρια ορισμένων περιορισμών και δυνατοτήτων της επιχείρησης. Μερικά παραδείγματα εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού είναι η κατανομή της εργασίας και άλλων πόρων, ο καθορισμός στα προγράμματα παραγωγής μηχανών (Scheduling) ή άλλων εγκαταστάσεων, ο καθορισμός του αρίστου μείγματος προϊόντων, η διανομή εμπορευμάτων, η ανάθεση έργων, το πρόβλημα της μεταφοράς, ο καθορισμός των κέντρων διανομής των προϊόντων, ο καθορισμός βασικών τροφών δίαιτας, η εκλογή μέσων διαφήμισης, η εκλογή του χαρτοφυλακίου επενδύσεων, οι συμμετοχές και ομολογίες, ο προγραμματισμός μεταφορικών μέσων κλπ.

Ο όρος «Γραμμικός» χρησιμοποιείται για να περιγράψει την σχέση μεταξύ δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών, μια σχέση η οποία είναι ακριβώς αναλογική (κατ' ευθείαν, με ένα προς ένα αντιστοιχία). Η γραμμική σχέση σημαίνει π .χ. ότι εάν διπλασιάσουμε τον αριθμό των εργατών μιας επιχείρησης (input) ο αριθμός των παραγόμενων προϊόντων (output) θα διπλασιαστεί. Γενικότερα εάν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό των εργατών μιας επιχείρησης με οποιονδήποτε αριθμό, η παραγωγή των προϊόντων της επιχείρησης αυτής θα πολλαπλασιαστεί με τον ίδιο αριθμό. Ανάλογη επίσης θα είναι η σχέση μεταξύ οποιουδήποτε άλλου συντελεστή της παραγωγής (μηχανές, κεφάλαιο κλπ) και των παραγόμενων προϊόντων.

Η σχέση αυτή της γραμμικότητας, είναι μια απλοποιημένη παρουσίαση της πραγματικότητας και θα πρέπει να θεωρηθεί σαν μια υπόθεση, μια παραδοχή, γιατί στην πραγματικότητα οι διάφορες επιχειρηματικές σχέσεις και οι οικονομικές συναλλαγές είναι μη γραμμικές (μη αναλογικές). Παρόλα αυτά χρησιμοποιούμε την σχέση αυτή της γραμμικότητας σαν μια καλή προσέγγιση της πραγματικότητας. Η προσέγγιση αυτή είναι πολύ καλή και σχετική ακριβής όταν εξετάζουμε μια βραχυχρόνια περίοδο. Βραχυχρόνια ή σε ορισμένο χρονικό σημείο, όλες οι σχέσεις μπορεί να θεωρηθούν γραμμικές. (Τσακλάγκανος Α. : 1980, σελ 1-2,4)

1.3 Κατηγορίες προβλημάτων που επιλύονται με την μέθοδο SIMPLEX

Η μέθοδος Simplex αποτελεί μια αλγεβρική επαναληπτική διαδικασία η οποία επιλύει ακριβώς κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού σε ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων. Τα βήματα αυτά θα αναφερθούν αναλυτικά παρακάτω. (Κολέτσος)

1.3.1 Η Μέθοδος Simplex για Προβλήματα σε Κανονική Μορφή

1. Ανάγουμε τους περιορισμούς που εκφράζονται με ανισώσεις σε εξισώσεις, εισάγοντας νέες μη αρνητικές μεταβλητές, οι οποίες ονομάζονται χαλαρές μεταβλητές και εκφράζουμε την αντικειμενική συνάρτηση σε κατάλληλη μορφή.

2. Κατασκευάζουμε τον αρχικό πίνακα Simplex.

3. Εφαρμόζουμε τον έλεγχο της μέγιστης λύσης. Αν η βασική εφικτή λύση είναι μέγιστη, τότε το πρόβλημα έχει λυθεί. Αν όχι τότε προχωράμε στο επόμενο βήμα.

4. Κατασκευάζουμε ένα νέο πίνακα Simplex ακολουθώντας την εξής διαδικασία:

i. Επιλέγουμε την στήλη άξονα

ii. Επιλέγουμε την σειρά άξονα

iii. Εφαρμόζουμε τη διαδικασία οδήγησης γύρω από την καταχώριση άξονα.

5. Επαναλαμβάνουμε το βήμα 3.

1.3.2 Η Μέθοδος Simplex για Προβλήματα σε Μη-Κανονική Μορφή

1. Αν το πρόβλημα ζητά την ελαχιστοποίηση της m, τότε δουλεύουμε με το πρόβλημα της μεγιστοποίησης της – m.

2. Αν οι περιορισμοί είναι της μορφής (γραμμικό πολυώνυμο) ≥ α, όπου α ≥ 0 τότε πολλαπλασιάζοντας επί -1 λαμβάνουμε την επιθυμητή μορφή.

3. Αν δεν εμφανιστεί αρνητικός αριθμός στην τελευταία στήλη, εκτός από το τελευταίο της στοιχείο, τότε πηγαίνουμε κατευθείαν στο βήμα 6, αλλιώς συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.

4. Μετατρέπουμε τον αρνητικό αριθμό σε θετικό με τον ακόλουθο τρόπο:

i. Διαλέγουμε ένα αρνητικό στοιχείο που βρίσκεται στην ίδια σειρά με τον αρνητικό αριθμό της τελευταίας στήλης. Η στήλη του θα γίνει στήλη οδηγός.

ii. Υπολογίζουμε όλους τους λόγους, συμπεριλαμβανομένων και αυτών που αντιστοιχούν στους αρνητικούς αριθμούς της στήλης οδηγό. Τότε η σειρά οδηγός θα είναι αυτή με το μικρότερο θετικό λόγο.

iii. Εφαρμόζουμε τη διαδικασία οδήγησης γύρω από το στοιχείο οδηγό.

5. Επαναλαμβάνουμε το βήμα 3 έως ότου να μην υπάρχει άλλη αρνητική καταχώριση στην τελευταία στήλη.

6. Τελικά ο πίνακας που προκύπτει είναι σε κανονική μορφή και χρησιμοποιούμε κατά τα γνωστά τη μέθοδο Simplex για την επίλυση προβλήματος σε κανονική μορφή. (Κολέτσος)

Παράδειγμα προβλήματος σε μη-κανονική μορφή :

Ελαχιστοποίηση της m= x+y υπό περιορισμούς

$2x - y \geq 30$

$-x + y \geq 50$

Οπότε ακολουθώντας τα βήματα ζητάμε την μεγιστοποίηση της -m= -x-y

Υπό περιορισμούς

$-2x + y \leq -30$

$x - y \leq -50$

Ο αρχικός Simplex πίνακας θα είναι

x	y	s_1	s_2	m	
-2	1	1	0	0	-30
1	-1	0	1	0	-50
1	1	0	0	1	0

Υπάρχουν 2 αρνητικοί αριθμοί στην τελευταία στήλη επιλέγουμε τυχαία τον -50 της δεύτερης σειράς. Τότε η δεύτερη στήλη γίνεται στήλη άξονας λόγω της ύπαρξης του -1 και οι λόγοι θα είναι ίσοι με -80/(-1) για την πρώτη σειρά και 50/(-1) για την δεύτερη σειρά. Οπότε το στοιχείο άξονας θα είναι το (2,2)= -1.

Με πράξεις θα προκύψει ο πίνακας:

x	y	s_1	s_2	m		
-1	0	1	1	0	-80	R2+R1
-1	1	0	-1	0	50	(-1)R2
2	0	0	1	1	-50	R2+R3

Παρατηρούμε ότι πάλι εμφανίζεται αρνητικός αριθμός -80 στην τελευταία στήλη, οπότε με επανάληψη των παραπάνω βημάτων θα καταλήξουμε στον πίνακα:

x	y	s_1	s_2	m		
1	0	-1	-1	0	80	(-1)R1
0	1	-1	-2	0	130	(-1)R1+R2
0	0	2	3	-1	-210	2R1+R3

Δεν υπάρχει άλλο αρνητικό στοιχείο, ο πίνακάς μας περνά τον έλεγχο μέγιστης τιμής και η λύση θα είναι x=80 , y=130 , s1 =s2 =0 , -m=-210 οπότε η ελάχιστη τιμή του m θα είναι: **m = 210.**

1.3.3 **Το Δυϊκό πρόβλημα** (Dual Problem)

Αν ένα πρόγραμμα γραμμικού προγραμματισμού έχει τη μορφή: (Κολέτσος)

Ελαχιστοποίηση m = RX

Υπό περιορισμούς

$AX \geq C$

$X \geq 0$

Τότε το dual πρόβλημα του θα έχει τη μορφή:

Μεγιστοποίηση m = C’U

Υπό περιορισμούς

$A'U \geq R'$

$U \geq 0$, όπου:

R: πίνακας σειρά με στοιχεία τους συντελεστές των μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση

X: πίνακας στήλη με στοιχεία τις μεταβλητές στην αντικειμενική συνάρτηση

A: πίνακας με σειρές τους συντελεστές των μεταβλητών σε κάθε περιορισμό

C: πίνακας στήλη με στοιχεία τους σταθερούς όρους στο δεξί μέλος των περιορισμών και με C': ανάστροφος πίνακα του C (Κολέτσος)

U: πίνακας στήλη με ίδιο μέγεθος με τον C που περιλαμβάνει νέες μεταβλητές

A': ανάστροφος πίνακας του A

R': ανάστροφος πίνακας του R.

Ένας άλλος τρόπος να εκφραστεί πιο αποτελεσματικά το dual πρόβλημα είναι ως εξής :

1. Αρχικά σχηματίζουμε τον αρχικό πίνακα T, του οποίου η τελευταία σειρά προέρχεται από την αντικειμενική συνάρτηση και οι υπόλοιπες από τους περιορισμούς.

2. Στην συνέχεια φτιάχνουμε τον ανάστροφο του πίνακα T'.

3. Ξαναγράφουμε την αντικειμενική συνάρτηση με συντελεστές μεταβλητών όμως να προέρχονται από την τελευταία σειρά του T' και από τις υπόλοιπες σειρές για τους περιορισμούς.

4. Το πρόβλημα που προκύπτει βρίσκεται σε βασική κατάσταση και το λύνουμε κατά τα γνωστά.

Παράδειγμα dual προβλήματος:

Ελαχιστοποίηση της m= 4x+2y υπό περιορισμούς

5x+y ≥ 5

5x+3y ≥10

x≥0 , y≥0

Σχηματίζουμε τον αρχικό πίνακα T και τον ανάστροφο του:

$$T=\begin{bmatrix}5 & 1 & 5\\ 5 & 3 & 10\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix} \qquad T'=\begin{bmatrix}5 & 5 & 4\\ 1 & 3 & 2\\ 5 & 10 & 0\end{bmatrix}$$

Μετατροπή σε dual πρόβλημα

Μεγιστοποίηση της m= 5u+10υ υπό περιορισμούς

5u+5υ ≤ 4

u+3υ ≤2

u≥0 , υ≥0

Ο αρχικός πίνακας του dual προβλήματος θα είναι:

u	υ	s_1	s_2	m	
5	5	1	0	0	4
1	3	0	1	0	2
-5	-10	0	0	1	0

Ο οποίος καταλήγει στον τελικό πίνακα:

u	υ	s_1	s_2	m	
1	0	3/10	-1/2	0	1/5
0	1	-1/10	1/2	0	3/5
0	0	1/2	5/2	1	7

Και η λύση του θα είναι u=1/5 , υ=3/5 , m=7.

Η τιμή m=7 είναι η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του dual προβλήματος και η ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του αρχικού μας προβλήματος. Οι τιμές των x, y βρίσκονται στην τελευταία σειρά του τελικού πίνακα στις στήλες των χαλαρών μεταβλητών, οπότε $x=1/2$ και $y=5/2$. (Κολέτσος)

2 ΚΛΑΣΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

2.1 Το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού

Ο γραμμικός προγραμματισμός (linear programming) είναι μια από τις πιο σπουδαίες μαθηματικές ανακαλύψεις των μέσων χρόνων του 20ου αιώνα. Πρόκειται για μια μεθοδολογία - μαθηματικό μοντέλο - της Επιχειρησιακής Έρευνας που επιλύει το πρόβλημα κατανομής των περιορισμένων πόρων ενός συστήματος (χρόνος εργασίας, πρώτες ύλες, κ.λπ) σε ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες (προϊόντα, υπηρεσίες, κ.α.) με το καλύτερο δυνατό τρόπο. (Πολυτεχνείο)

Μέσα σε αυτό το γενικό πλαίσιο εντάσσονται πάμπολα οικονομικά (και όχι μόνο) προβλήματα, όπως:

- Το πρόβλημα επιλογής συνδυασμού παραγωγής προϊόντων (The Product Mix Problem). Τα προβλήματα αυτά αναφέρονται σε συστήματα τα οποία εκμεταλλευόμενα τους περιορισμένους πόρους που έχουν στη διάθεσή τους, παράγουν διάφορα προϊόντα. Η (βέλτιστη) απόφαση που αναζητείται αφορά τον εντοπισμό του πλήθους των τεμαχίων που πρέπει να παράγονται από το κάθε προϊόν ώστε να βελτιστοποιείται κάποιο κριτήριο επίδοσης του συστήματος (π.χ. μεγιστοποίηση των κερδών του για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο).

- Το πρόβλημα της μεταφοράς (The Transportation Problem). Είναι μια από τις πρώτες εφαρμογές του γραμμικού προγραμματισμού όπου αναζητείται η οικονομικότερη διακίνηση προϊόντος από ορισμένους σταθμούς παραγωγής (εργοστάσια, βιομηχανίες) σε ορισμένους σταθμούς προορισμού (αποθήκες, σημεία πώλησης).

- Το πρόβλημα της μίξης (The Blending Problem). Εδώ, δύο ή περισσότερα υλικά αναμειγνύονται προκειμένου να δημιουργήσουν κάποια προϊόντα. Τα υλικά αυτά πρέπει να αναμειχθούν σε τρόπο ώστε τα τελικά προϊόντα να περιέχουν συγκεκριμένες αναλογίες από τα συστατικά τους. Αποτελεί μια από τις διαδεδομένες εφαρμογές του γραμμικού μοντέλου (στη βιομηχανία πετρελαίου, τη χημική βιομηχανία, τη βιομηχανία τροφίμων, κ.λπ).

- Το πρόβλημα της επιλογής χαρτοφυλακίου (The Portfolio Selection Problem). Εμφανίζεται σε θέματα που αφορούν την εύρεση των καλύτερων δυνατών επενδύσεων (μετοχές, ομόλογα) για ένα προκαθορισμένο κεφάλαιο. Στα προβλήματα αυτού του είδους ενδιαφερόμαστε για τη μεγιστοποίηση του αναμενόμενου κέρδους ή την ελαχιστοποίηση των κινδύνων επένδυσης σε μια ορισμένη χρονική περίοδο. Οι περιορισμοί μπορεί να προέρχονται από το είδος των παραδεκτών επενδύσεων, τους νόμους, την επιθυμητή πολιτική του επενδυτή, το μέγιστο επιτρεπτό ρίσκο, κ.λπ.

- Το πρόβλημα επιλογής της (άριστης) σύνθεσης των μέσων μιας διαφημιστικής καμπάνιας (The Media Selection Problem). Αφορά τον προσδιορισμό του αριθμού των καταχωρήσεων/προβολών που πρέπει να γίνουν σε διάφορα μέσα όπως, τηλεόραση, εφημερίδες, διαφημιστικές πινακίδες, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το πλήθος των ατόμων που θα έρθουν σε «επαφή» με το διαφημιζόμενο προϊόν. Παράγοντες που συνήθως λαμβάνονται υπόψη είναι ο συνολικός προϋπολογισμός της εκστρατείας, ο μέγιστος/ελάχιστος αριθμός καταχωρήσεων που μπορούν να γίνουν, κ.α.

- Το πρόβλημα της δίαιτας (The Diet Problem). Στόχος είναι ο υπολογισμός των ποσοτήτων ορισμένων ειδών διατροφής που πρέπει να καταναλωθούν, έτσι ώστε να ικανοποιούνται δοσμένες διατροφικές απαιτήσεις με το ελάχιστο δυνατόν κόστος.

- Το πρόβλημα καταμερισμού της εργασίας (The Assignment Problem) το οποίο αναφέρεται στην ανάθεση εργασιών σε άτομα, σε τρόπο ώστε να μεγιστοποιείται η συνολική απόδοση (παραγωγικότητα) ενός συστήματος. (Πολυτεχνείο)

Δίνοντας μαθηματική ερμηνεία στον όρο γραμμικός προγραμματισμός, εννοούμε τις υπολογιστικές τεχνικές οι οποίες προσδιορίζουν το μέγιστο ή το ελάχιστο μιας γραμμικής συνάρτησης της οποίας οι άγνωστοι (μεταβλητές) απαιτείται να ικανοποιούν ένα σύστημα γραμμικών ανισώσεων ή/και εξισώσεων. Σε κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (π .γ.π.) διακρίνουμε τα εξής βασικά στοιχεία:

- ένα σύνολο δραστηριοτήτων (n πλήθος) σε κάθε μία από τις οποίες αντιστοιχούμε μια μεταβλητή x_j, j=1, …, n ένα σύνολο πόρων ή μέσων που διατίθενται σε περιορισμένες ποσότητες για την εκτέλεση των ανωτέρω δραστηριοτήτων
- ένα σύνολο τεχνικών περιορισμών οι οποίοι εκφράζουν τους νόμους λειτουργίας των δραστηριοτήτων
- ένα σύνολο θεσμολογικών περιορισμών οι οποίοι εκφράζουν διοικητικής και οργανωτικής φύσεως αποφάσεις
- ένα μέτρο z της αποδοτικότητας (επίδοσης) του συστήματος που μοντελοποιείται. (Πολυτεχνείο)

Το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού αφορά τη βελτιστοποίηση του μέτρου αποδοτικότητας του συστήματος (αντικειμενικός στόχος) με την προϋπόθεση ότι οι τιμές των μεταβλητών απόφασης είναι μη αρνητικές ή δεν έχουν περιορισμό στο πρόσημο.

Ας είναι α_{ij} η ποσότητα του πόρου i η οποία καταναλώνεται για την παραγωγή μιας μονάδας της δραστηριότητας j και έστω c_j η μεταβολή που θα προκύψει στο μέτρο αποδοτικότητας z του συστήματος από τη μεταβολή κατά μία μονάδα της τιμής της μεταβλητής x_j . Έστω επίσης $b_i \; i=1,...,m$ οι διαθέσιμες ποσότητες των πόρων. Τότε, τα αθροίσματα $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ και $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ παριστάνουν, αντίστοιχα, τη συνολική ποσότητα του πόρου i που θα χρησιμοποιηθεί (η οποία φυσικά δεν μπορεί να ξεπερνά τη διαθέσιμη) και το μέτρο της αποδοτικότητας του συστήματος. Έτσι η γενική μορφή του γραμμικού μοντέλου είναι η εξής: (Πολυτεχνείο)

Max $z=c_1x_1+c_2+x_2+….+c_n+x_n$

υπό τους περιορισμούς

$a_{11}+X_1+…+a_{1j}X_j+…+a_{1n}X_n[<=ή>=]b_1$

$a_{m1}+X_1+…+a_{mj}X_j+…+a_{mn}X_n[<=ή>=]b_m$

Xj>=0 j=1,….,n

ή ισοδύναμα με την μορφή πινάκων max z=c'x

υπό τους περιορισμούς

Ax<=b ή>=b ή=b

x>=0

όπου

$$A = \begin{pmatrix} a11 \ldots a1n \\ \ldots \\ am1 \ldots amn \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ \ldots \\ xn \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ \ldots \\ bn \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c1 \\ c2 \\ \ldots \\ cn \end{pmatrix}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1. Κάθε πρόβλημα ελαχιστοποίησης μετατρέπεται εύκολα σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα μεγιστοποίησης min(c'x) = -[max(− c 'x)].

2. Οι συντελεστές c_jονομάζονται αντικειμενικοί συντελεστές.

3. Το ποσό ενός πόρου που δεν χρησιμοποιείται ονομάζεται περιθώρια τιμή και έχει κάτω όριο το μηδέν. Τότε ο αντίστοιχος περιορισμός καλείται δεσμευτικός (ενεργός) διαφορετικά καλείται χαλαρός (μη ενεργός).

4. Συμφωνούμε στις κατωτέρω παραδοχές (αξιώματα του γραμμικού μοντέλου):

- Αναλογικότητα : σε ότι αφορά την αντικειμενική συνάρτηση αυτό σημαίνει ότι η συνεισφορά στη συνολική τιμή του z από μια μεταβλητή απόφασης είναι γραμμικά ανάλογη της τιμής που παίρνει η εν λόγω μεταβλητή. Δηλαδή αν c_j το κέρδος από μια μονάδα της j-δραστηριότητας, τότε η συμβολή των x_j μονάδων είναι $c_j x_j$. Σχετικά, με τους περιορισμούς, η παραδοχή της αναλογικότητας σημαίνει ότι η κατανάλωση ενός πόρου i για την εκτέλεση της j-δραστηριότητας είναι ανάλογη του επιπέδου x_jτης παραγωγής της.

- Προσθετικότητα : σε ότι αφορά την αντικειμενική συνάρτηση η προσθετικότητα εξασφαλίζει ότι η συνεισφορά κάθε μεταβλητής απόφασης στην τιμή του z είναι ανεξάρτητη από τις τιμές που παίρνουν οι υπόλοιπες ενώ, σχετικά με τους περιορισμούς, ότι η κατανάλωση $α_{ij}$ ενός πόρου i για την εκτέλεση της j-δραστηριότητας είναι ανεξάρτητη από την κατάνάλωση του συγκεκριμένου πόρου για την εκτέλεση οποιασδήποτε άλλης δραστηριότητας.
- Διαιρετότητα : μέσω αυτής εξασφαλίζεται νόημα στην ύπαρξη κλασματικών τιμών στις μεταβλητές του προβλήματος.
- Προσδιοριστικότητα : όλες οι τιμές των παραμέτρων θεωρείται ότι είναι γνωστές σταθερές.

5. Η ολοκληρωμένη μαθηματική διατύπωση επίλυσης του προβλήματος έγινε από τον Dantzig (1947). Νωρίτερα διάφορα προβλήματα τύπου γραμμικού προγραμματισμού, είχαν διατυπωθεί και επιλυθεί όπως π.χ. το πρόβλημα της δίαιτας (Stigler 1945) και το πρόβλημα μεταφοράς (Hitchcock 1941, Koopmans 1949). Ο Dantzig κατασκεύασε ένα γενικό πλαίσιο, τη μέθοδο Simplex, η οποία παρέχει έναν αποτελεσματικό, γρήγορο και αξιόπιστο αλγόριθμο για την επίλυση οποιουδήποτε π.γ.π.

6. Ένα π.γ.π. είναι σε τυπική μορφή όταν (i) είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης, (ii) όλοι οι περιορισμοί είναι εξισώσεις με μη αρνητικούς τους σταθερούς όρους, (iii) όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές, και (iv) rank(A)=m<n. (Πολυτεχνείο)

2.2 **Η μέθοδος** SIMPLEX

Προτού προχωρήσουμε στην μέθοδο επίλυσης Simplex του προβλήματος θυμίζουμε τους κατωτέρω συμβολισμούς ή/και ορισμούς.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ - ΟΡΙΣΜΟΙ:

1. Συμβολίζουμε με P_j τη j-στήλη του πίνακα A. Τότε οι περιορισμοί του γραμμικού μοντέλου γράφονται και ως $x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_nP_n=b$.
2. Επιλέγουμε m γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες του πίνακα A, θέτουμε τις n-m μεταβλητές οι οποίες αντιστοιχούν στις εναπομείνασες στήλες ίσες με μηδέν και επιλύουμε ως προς τις υπόλοιπες m μεταβλητές. Η λύση που προκύπτει

τότε $x=(0,\ldots,0,x_{i1}, 0,\ldots,0,xi_{12},0,\ldots,0,x_{im},0,\ldots,0)$ ονομάζεται βασική λύση του π.γ.π. και οι αντίστοιχες μεταβλητές, βασικές μεταβλητές.

3. Κάθε βασική λύση με όλες τις μεταβλητές μη αρνητικές ονομάζεται βασική εφικτή λύση.
4. Μια βασική εφικτή λύση που έχει τουλάχιστον μια από τις βασικές μεταβλητές ίση με μηδέν ονομάζεται εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση.
5. Άριστη ή βέλτιστη λύση ενός π.γ.π. λέγεται κάθε εφικτή λύση που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.
6. Η επίλυση ενός π.γ.π. μπορεί να καταλήξει σε τρεις περιπτώσεις:

- αδύνατο, όταν δεν υπάρχουν τιμές των μεταβλητών απόφασης οι οποίες να ικανοποιούν ταυτόχρονα όλους τους περιορισμούς.
- σε μη φραγμένη λύση, εννοώντας ότι αν θέλουμε μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης, η τιμή της θα αυξάνει αόριστα χωρίς να παραβιάζεται κάποιος περιορισμός.
- να έχει τουλάχιστον μια βέλτιστη λύση.

Η ιδέα της μεθόδου Simplex είναι σχετικά απλή: δημιουργεί βασικές εφικτές λύσεις $x^0,x^1,\ldots,x^k$ με $c'x^o<=c'x^1<=\ldots c;x^k$, οι οποίες συγκλίνουν στην άριστη λύση (αν υπάρχει) σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων. Έστω x μια μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση. Συμβολίζουμε με Bx και Nx τα διανύσματα των βασικών και μη βασικών μεταβλητών αντίστοιχα. Έστω B ο mxn πίνακας που σχηματίζεται από τις στήλες που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές (βασικές στήλες) και N ο mx(n-m) πίνακας που δημιουργείται από τις εναπομείνασες στήλες του πίνακα A. Εκ κατασκευής, οι στήλες του B δημιουργούν μια βάση του υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας (Πολυτεχνείο)

2.3 **Θεωρήματα μεθόδου** SIMPLEX

Κανόνες μεθόδου ψ

- Κριτήριο εισόδου της βάσης.

Επιλέγεται η μη-βασική μεταβλητή που θα αυξήσει περισσότερο την ΑΣ (κέρδος). Είναι αυτή που έχει το μεγαλύτερο συντελεστή στον υπολογισμό του P (ή μικρότερο αρνητικό στον πίνακα). (Πολυτεχνείο)

- Κριτήριο εξόδου από τη βάση

Επιλέγεται η βασική μεταβλητή που περιορίζει περισσότερο τη μη-βασική μεταβλητή που διαλέξαμε. Η εξερχόμενη μεταβλητή είναι αυτή που έχει τον μικρότερο θετικό λόγο.

- Κριτήριο Τερματισμού διαδικασίας

Όλα τα στοιχεία της γραμμής της αντικειμενικής συνάρτησης είναι θετικά ή μηδέν.

$$\max\{c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n\}$$
$$\overline{P}_1x_1 + \overline{P}_2x_2 + ... + \overline{P}_nx_n = \overline{b}$$
$$x_i \geq 0, i = 1,2,...,n, \overline{b} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{P}_i x_i = \overline{b}$$

$$\overline{P}_j = \sum_{i=1}^{m} m_{ij}\overline{P}_i, \ j = 1,2,...,n$$

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} m_{ij}c_i, \ j = 1,2,...,n$$

2.3.1 **Παράδειγμα προβλήματος** Simplex

Αν z_j-$c_j \geq 0$ για κάθε j=1,2,…,n τότε η x είναι η βέλτιστη λύση του προβλήματος. (Πολυτεχνείο)

Απόδειξη

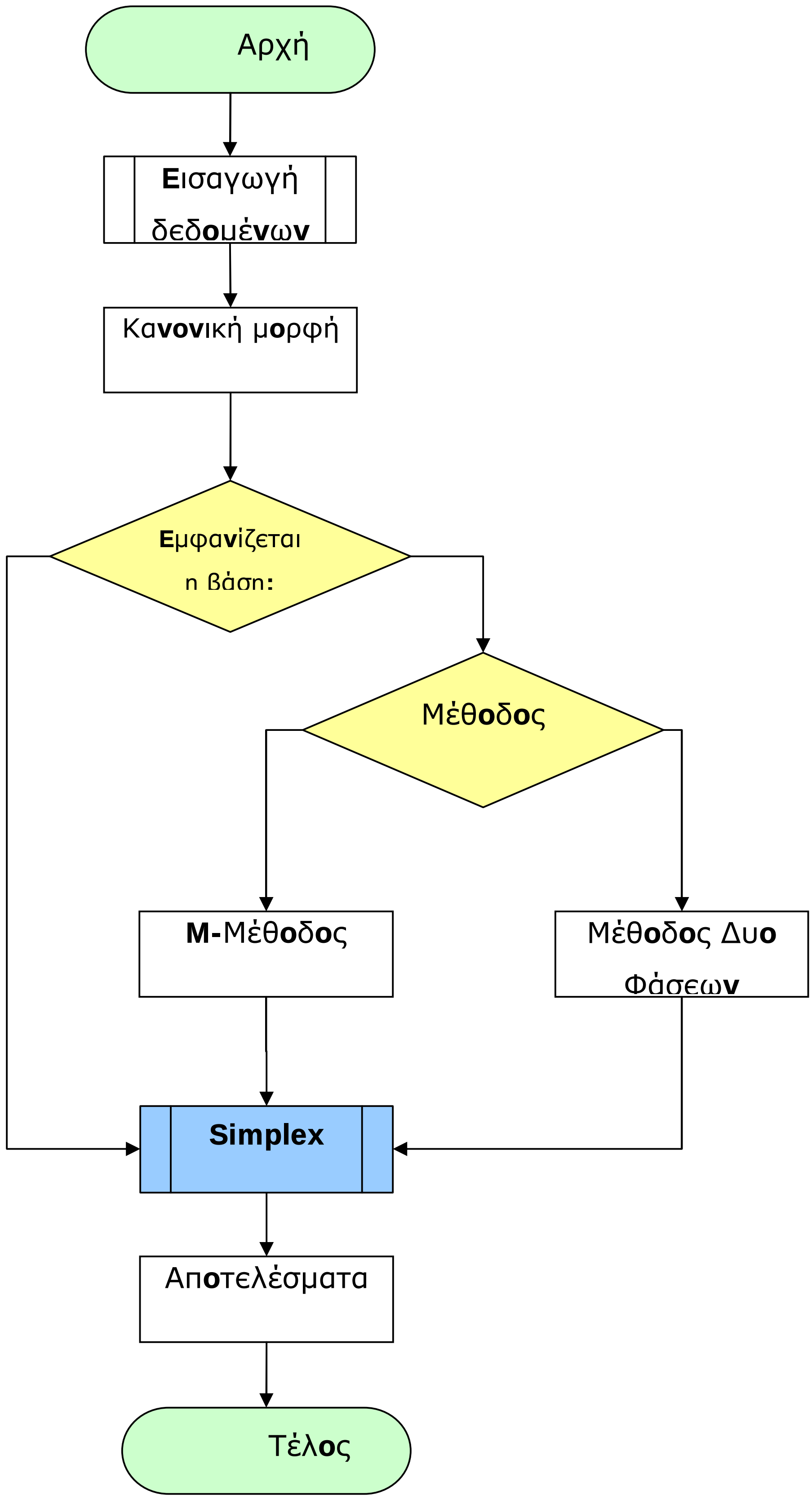
Έστω y=col(y_1,y_2,…y_n) μια άλλη βασική εφικτή λύση του προβλήματος τότε ισχύει

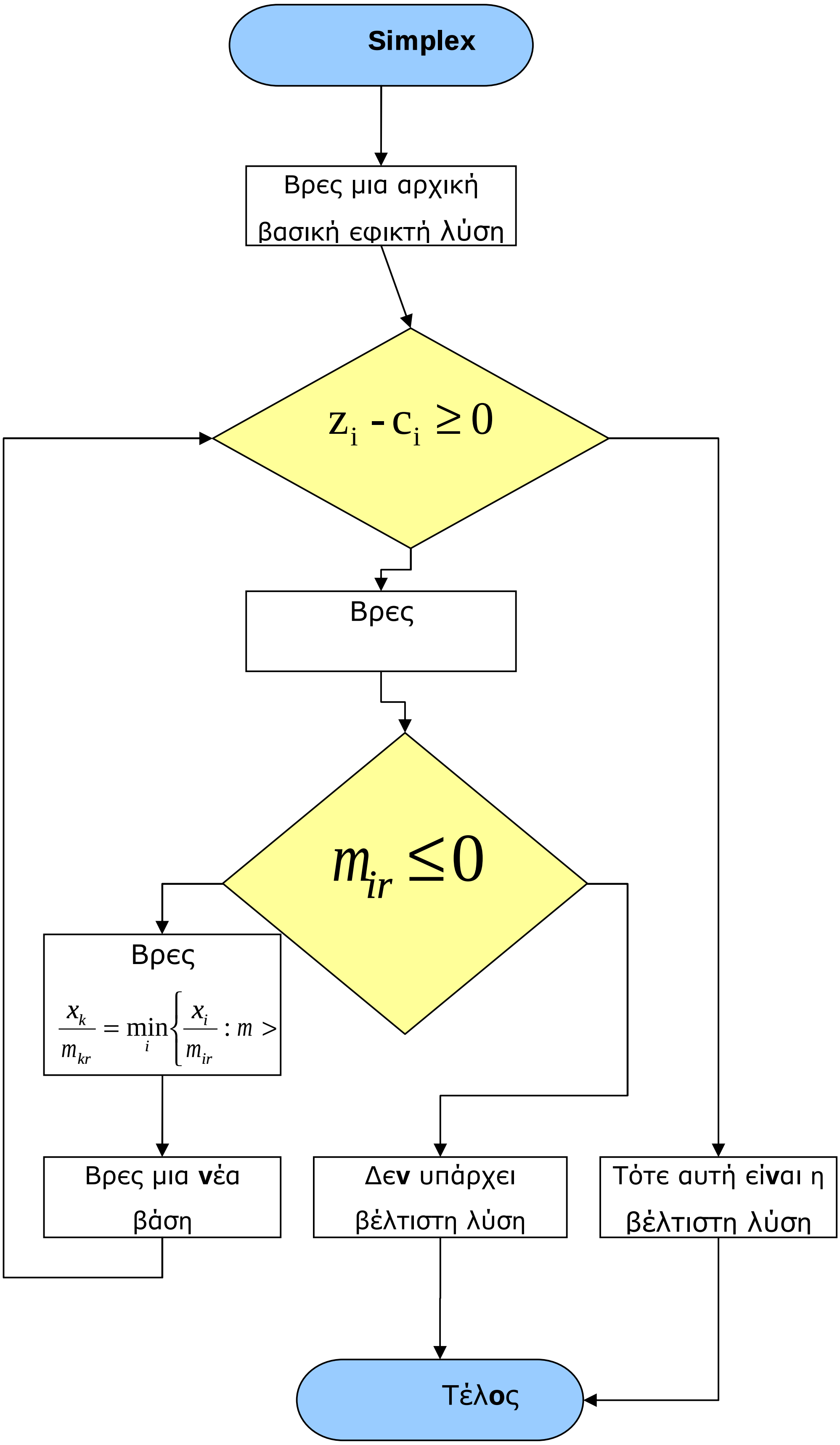
$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i y_i = \overline{b}$$

2.3.2 **Αλγόριθμος** Simplex

	Βάση	**x1**	**x2**	**…**	**x(n)**	**b**
1	xb(1)	a(1,1)	a(1,2)	…	a(1,n)	b(1)
2	xb(2)	a(2,1)	a(2,2)	…	a(2,n)	b(2)
…	…	…	…	…	…	…
m	xb(m)	a(m,1)	a(m,2)	…	a(m,n)	b(m)
z(i)-c(i)		z(1)-c(1)	z(2)-c(2)	…	z(n)-c(n)	f(b)

	Βάση	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**b**
1	xb(1)	2	-3	1	0	b(1)
2	xb(2)	a(2,1)	a(2,2)	…	a(2,n)	b(2)
3	…	…	…	…	…	…
4	xb(m)	a(m,1)	a(m,2)	…	a(m,n)	b(m)
z(i)-c(i)		z(1)-c(1)	z(2)-c(2)	…	z(n)-c(n)	f(b)


Αρχή
Εισαγωγή δεδομένων
Κανονική μορφή
Εμφανίζεται η βάση:
Μέθοδος
Μ-Μέθοδος
Μέθοδος Δυο Φάσεων
Simplex
Αποτελέσματα
Τέλος


Simplex
Βρες μια αρχική βασική εφικτή λύση
$z_i - c_i \geq 0$
Βρες
$m_{ir} \leq 0$
Βρες
$\frac{x_k}{m_{kr}} = \min_i \left\{ \frac{x_i}{m_{ir}} : m > \right.$
Βρες μια νέα βάση
Δεν υπάρχει βέλτιστη λύση
Τότε αυτή είναι η βέλτιστη λύση
Τέλος

2.4 Κόστος ευκαιρίας

Θεωρούμε το π.γ.π. σε τυπική μορφή: Z=maxc'x, Ax=b, x>=0 όπου, $\mathbf{A}\in\mathbb{R}_{mxn}$, $\mathbf{x},\mathbf{c}\in\mathbb{R}_{nx1}$, $\mathbf{b}\in\mathbb{R}_{mx1}$, $\mathbf{b}\geq\mathbf{0}$ και $rank(\mathbf{A})=m<n$. Τότε για την τυχαία μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση x έχουμε (Μακεδονιας)

$$\mathbf{b}=\mathbf{A}\mathbf{x}=\left[\mathbf{B},\mathbf{N}\right]\begin{pmatrix}\mathbf{x}_{\mathbf{B}}\\ \mathbf{x}_{\mathbf{N}}\end{pmatrix}=\mathbf{B}\mathbf{x}_{\mathbf{B}}+\mathbf{N}\mathbf{x}_{\mathbf{N}}\Rightarrow$$

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_{\mathbf{N}} \qquad (1)$$

και

$$\begin{aligned} z&=\mathbf{c}'\mathbf{x}=\mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{x}_{\mathbf{B}}+\mathbf{c}'_{\mathbf{N}}\mathbf{x}_{\mathbf{N}}=\mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_{\mathbf{N}}\right)+\mathbf{c}'_{\mathbf{N}}\mathbf{x}_{\mathbf{N}}=\\ &=\mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}-\left(\mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}-\mathbf{c}'_{\mathbf{N}}\right)\mathbf{x}_{\mathbf{N}}\end{aligned} \qquad (2)$$

Είναι όμως $x\geq 0$ με $X_N=0$, οπότε από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_{\mathbf{B}}\\ \mathbf{x}_{\mathbf{N}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\geq\mathbf{0}$$

$$z=\mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Συμβολίζουμε με U το σύνολο των δεικτών για τις μη βασικές μεταβλητές. Τότε οι εξισώσεις (1) και (2) γράφονται:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{\mathbf{B}}&=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}-\sum_{j\in U}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)x_j\\ z&=\mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}-\sum_{j\in U}(\mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j-c_j)x_j\end{aligned} \qquad (3)$$

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της τιμής z ως προς τη μη βασική μεταβλητή x_j ισούται με

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = -(\mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - c_j) .$$

Εάν $\frac{\partial z}{\partial x_j} \geq 0,$, τότε αύξηση της x_j κατά μία μονάδα συνεπάγεται αύξηση της αντικειμενικής συνάρτησης κατά την ποσότητα $(\mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - c_j)$.

Η ποσότητα αυτή καλείται κόστος ευκαιρίας της x_j (μη βασικής) μεταβλητής και συμβολίζεται συνήθως ως $(z_j - c_j)$.

2.5 Έλεγχός αριστότητας

Η μέθοδος ελέγχει τοπικά, εάν η βασική εφικτή λύση x είναι άριστη, αν δηλαδή ισχύει

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = -(\mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - \mathbf{c}_j) \leq 0, \quad \forall j \in U .$$

Τότε, η τιμή z της αντικειμενικής συνάρτησης δεν είναι δυνατό να βελτιωθεί (μεγαλώσει) περισσότερο, και η λύση x είναι η βέλτιστη. Εάν όμως υπάρχει μια μη βασική μεταβλητή x_j με κόστος ευκαιρίας $z_j - c_j \prec 0$, τότε $\frac{\partial z}{\partial x_j} \succ 0$

και η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να βελτιωθεί εάν η x_j πάρει κάποια θετική τιμή. (Μακεδονιας)

2.6 Βελτίστη της υπάρχουσας λύσης

Η μη βασική μεταβλητή x_k η οποία ικανοποιεί το κριτήριο $\left|z_k - c_k\right| = \max_{j \in U}\left\{\left|z_j - c_j\right| : z_j - c_j \prec 0\right\}$

επιλέγεται ως εισερχόμενη μεταβλητή: η τιμή της πρέπει να αυξηθεί από μηδέν σε κάποια θετική ποσότητα. Άμεσα διερευνάται πόσο μεγάλη μπορεί να είναι αυτή η αύξηση σε σχέση με τον περιορισμό της μη αρνητικότητας των μεταβλητών.

Ας είναι $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ και $\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j$

Τότε το διάνυσμα των βασικών μεταβλητών (3) γράφεται

$$\mathbf{x}_B = \boldsymbol{\beta} - \sum_{j \in U} \mathbf{y}_j x_j \ .$$

Όλες όμως οι μεταβλητές $x_j,\ j \in U$, εκτός της xy, έχουν τιμή 0. Κατά συνέπεια

$$\mathbf{x}_B = \boldsymbol{\beta} - x_k \mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} - x_k \begin{pmatrix} y_{1,k} \\ y_{2,k} \\ \vdots \\ y_{m,k} \end{pmatrix}$$

κι επομένως η τιμή της X_κ μπορεί να αυξηθεί τόσο, όσο να διατηρείται η σχέση $x_\kappa \geq 0$ (minimum ratio test):

$$x_k \leq \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\beta_i}{y_{i,k}} : y_{i,k} \succ 0 \right\}$$

Σημειώνουμε τέλος, ότι εάν $y_{ik} \leq 0$ για κάθε i, τότε το πρόβλημα είναι μη φραγμένο.

2.7 Το SIMPLEX TABLEAU

Το Simplex tableau είναι ένας πίνακας στον οποίο, αφενός μεν καταγράφονται όλα τα δεδομένα του μοντέλου, αφετέρου δε, υλοποιούνται όλοι οι υπολογισμοί της ομώνυμης μεθόδου. Για το (αρχικό) π.γ.π. στην τυπική του μορφή, το Simplex tableau διαμορφώνεται ως ακολούθως: (Μακεδονιας)

$\mathbf{x}_N$	$\mathbf{x}_B$	Δεξιά Μέλη	
$\mathbf{c}'_{\mathbf{B}}$	$\mathbf{c}'_N$	$\mathbf{0}$	Μηδενική γραμμή
$\mathbf{B}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{b}$	Γραμμή 1 έως m

Στο tableau δεν καταγράφεται απλά η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $\mathbf{c}'_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ και των βασικών μεταβλητών $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, αλλά υπάρχουν και όλες οι απαιτούμενες πληροφορίες για την εφαρμογή της μεθόδου Simplex. Το κόστος ευκαιρίας που είναι μηδενικό για τις βασικές μεταβλητές και $\mathbf{c}'_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}-\mathbf{c}'_N$ για τις μη βασικές εμφανίζεται στη μηδενική γραμμή. Δηλαδή, η μηδενική γραμμή μας πληροφορεί εάν έχουμε βέλτιστη λύση $(z_j - c_j \geq 0)$, ή ποιάς μη βασικής μεταβλητής πρέπει να αυξήσουμε την τιμή. Αυξάνοντας την τιμή της x_k, το διάνυσμα $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_k$ BP το οποίο υπάρχει στο tableau στη στήλη που υποδεικνύει η μεταβλητή x_k (γραμμές 1 έως m), θα μας υποδείξει πόσο μεγάλη μπορεί να είναι η αύξηση αυτή. Το minimum ratio test, το οποίο μπορεί να υλοποιηθεί μια και οι ποσότητες $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ και y_k είναι διαθέσιμες στο tableau, θα υποδείξει την εξερχόμενη μεταβλητή.

Η εφαρμογή της διαδικασίας που μόλις περιγράφηκε, προϋποθέτει ότι ο αρχικός βασικός πίνακας είναι ο μοναδιαίος B=I, γεγονός το οποίο δε προκύπτει πάντοτε από τις στήλες του A. Τότε, δεν θα υπάρχει μια προφανής αρχική βασική εφικτή λύση για να ξεκινήσει ο αλγόριθμος Simplex. Σε μια τέτοια περίπτωση καταφεύγουμε στη χρήση των τεχνητών μεταβλητών. (Μακεδονιας)

2.8 Ανάλυση ευαισθησίας. Η κλασσική προσέγγιση

Η βέλτιστη λύση ενός π.γ.π. προσδιορίζεται για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων του. Επομένως αν μετά την επίλυση του προβλήματος οι τιμές μιας ή περισσότερων παραμέτρων μεταβληθούν, ενδέχεται να διαταραχθεί και η βέλτιστη λύση. Έτσι προκύπτει η ανάγκη για αυτό που ονομάζεται ανάλυση ευαισθησίας της βέλτιστης λύσης.

Η μελέτη ευαισθησίας της βέλτιστης λύσης, δεδομένου ότι κάθε μεταβολή γίνεται σε μία και μόνο παράμετρο διατηρώντας τους άλλους σταθερούς, διακρίνεται στις εξής περιπτώσεις: (Μακεδονιας)

- μεταβολή των αντικειμενικών συντελεστών c_j
- μεταβολή των σταθερών όρων b_i
- μεταβολή των συντελεστών a_{ij} του συστήματος των περιορισμών
- προσθήκη/αφαίρεση μεταβλητών
- προσθήκη/αφαίρεση περιορισμών

ΟΡΙΣΜΟΙ:

1. Το διάστημα μέσα στο οποίο κυμαίνεται η τιμή ενός αντικειμενικού συντελεστή χωρίς να μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση του π.γ.π., καλείται εύρος αριστότητας.

2. Η ανάλυση ευαισθησίας για το δεξιό μέλος bi ενός περιορισμού αποσκοπεί στον καθορισμό ενός διαστήματος τιμών που ονομάζεται εύρος εφικτότητας. Όσο ο όρος b_i λαμβάνει τιμές στο διάστημα αυτό η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό, (δυϊκή ή σκιώδης τιμή του πόρου που αυτός αντιπροσωπεύει. Η σκιώδης τιμή ενός πόρου που χρησιμοποιήθηκε πλήρως (δεσμευτικός περιορισμός) είναι μη μηδενική ενώ κάποιου που έχει πλεόνασμα (χαλαρός περιορισμός) είναι μηδενική.

2.9 **Παραμετρική ανάλυση**

Ο παραμετρικός προγραμματισμός χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού των οποίων οι παράμετροι αποτελούν γραμμικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής λ, που ονομάζεται παράμετρος της μεταβολής. Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού εμφανίζεται συνήθως παραμετρικοποιημένο είτε προς την αντικειμενική συνάρτηση, είτε ως προς το διάνυσμα των διαθέσιμων πόρων. Η βασική ιδέα αυτού συνίσταται στον προσδιορισμό των διαστημάτων τιμών της παραμέτρου λ εντός των οποίων έχουμε την ίδια βέλτιστη βάση. (Μακεδονιας)

3 ΜΗ ΚΛΑΣΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

Σε πολλές περιπτώσεις οι βασικές παράμετροι ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, όπως τα κέρδη ή το απόθεμα των πόρων, μεταβάλλονται και ο αποφασίζων θα πρέπει να γνωρίζει πως θα δράσει στη περίπτωση τέτοιων αλλαγών. Η λύση σε αυτούς τους προβληματισμούς είναι η ανάλυση ευαισθησίας, όπως ήδη έχουμε προαναφέρει, στόχος της οποίας είναι η ανάλυση των αποτελεσμάτων που επιφέρουν στη λύση του μοντέλου οι αλλαγές των δεξιών μελών των περιορισμών ή των αντικειμενικών συντελεστών. (Αιγαίου)

Αναμφισβήτητα το είδος των λύσεων του προβλήματος επηρεάζουν τόσο τον τρόπο διεξαγωγής της ανάλυσης ευαισθησίας όσο και τα αποτελέσματά της.

Χαρακτηριστικότερο παράδειγμα είναι η περίπτωση των εκφυλισμένων λύσεων. Τότε η βέλτιστη βάση δεν είναι μοναδική, καθώς περισσότερες από μία βέλτιστες βάσεις αντιστοιχούν στην άριστη εκφυλισμένη λύση γεγονός που δημιουργεί προβλήματα στην ανάλυση ευαισθησίας και την παραμετρική ανάλυση.

3.1 Τύποι ανάλυσης ευαισθησίας

Σύμφωνα με τους Koltai και Terklay η ανάλυση ευαισθησίας διακρίνεται σε τρεις τύπους. Η ανάλυση ευαισθησίας τύπου Ι (κλασική ανάλυση ευαισθησίας), η οποία γενικά προσδιορίζει τις τιμές εκείνων των παραμέτρων του μοντέλου για τις οποίες η βέλτιστη βάση παραμένει βέλτιστη. Ειδικότερα, για τους αντικειμενικούς συντελεστές της συνάρτησης, προσδιορίζει το διάστημα τιμών εκάστου εκ των συντελεστών, στο οποίο παραμένει αμετάβλητη η βέλτιστη βάση, καθώς επίσης και τη μεταβολή της βέλτιστης τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης, όταν η τιμή του αντικειμενικού συντελεστή βρίσκεται εντός του διαστήματος αυτού. Για τα δεξιά μέλη, προσδιορίζει το διάστημα τιμών ενός από τα δεξιά μέλη, μέσα στο οποίο η βέλτιστη βάση παραμένει βέλτιστη καθώς και τον ρυθμό μεταβολής (δυική τιμή) της αντικειμενικής συνάρτηση εντός του καθορισμένου διαστήματος. (Αιγαίου)

Η ανάλυση ευαισθησίας τύπου Ι εφαρμόζεται σε όλα τα λογισμικά πακέτα επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Όμως, στην περίπτωση των εκφυλισμένων λύσεων δίνει διαφορετικά διαστήματα ευαισθησίας και διαφορετικούς ρυθμούς μεταβολής εφόσον διαφορετικές βάσεις δύναται να αντιστοιχούν στην ίδια άριστη λύση. Από μαθηματικής απόψεως, τα αποτελέσματα είναι σωστά όμως αν η ερμηνεία αυτών δεν γίνει σωστά, οι πληροφορίες για τον αποφασίζοντα μπορεί να είναι παραπλανητικές.

Βελτίωση στο θέμα αυτό επιχειρείται με την ανάλυση ευαισθησίας τύπου ΙΙ προσδιορίζει τις τιμές των παραμέτρων του μοντέλου για τις οποίες οι θετικές μεταβλητές παραμένουν θετικές και οι μηδενικές παραμένουν μηδενικές, είτε είναι του πρωτεύοντος, είτε του δυϊκού. Ειδικότερα, για μια άριστη λύση x, όχι απαραίτητα βασική, με σύνολο θετικών μεταβλητών {i/xi>0 }, αναζητούμε τις τιμές των παραμέτρων, για τις οποίες μία άριστη λύση έχει ακριβώς το ίδιο σύνολο θετικών μεταβλητών. Οι πληροφορίες που παίρνουμε από την ανάλυση ευαισθησίας τύπου ΙΙ για τους αντικειμενικούς συντελεστές και τα δεξιά μέλη, ταυτίζονται με αυτά της ανάλυσης τύπου Ι. Η ανάλυση ευαισθησίας τύπου ΙΙ εξαρτάται από την άριστη λύση που παράγεται, αλλά όχι από τη βάση που την αντιπροσωπεύει, όπως συμβαίνει με την ανάλυση τύπου Ι.

Η ανάλυση ευαισθησίας τύπου ΙΙΙ προσδιορίζει τις τιμές εκείνες των παραμέτρων του μοντέλου για τις οποίες ο ρυθμός μεταβολής της βέλτιστης τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ο ίδιος. Όταν πραγματοποιούμε ανάλυση ευαισθησίας τύπου ΙΙΙ, αναζητούμε τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης της βέλτιστης τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης και τα διαστήματα στα οποία αυτή μεταβάλλεται γραμμικά, γνωρίζοντας ότι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μία τμηματικά γραμμική συνάρτηση της παραμέτρου που μεταβάλλεται. Επίσης, η ανάλυση τύπου ΙΙΙ είναι ανεξάρτητη των βάσεων και εξαρτημένη μόνο από τα δεδομένα του προβλήματος.

Ο υπολογισμός των τριών τύπων ευαισθησίας εξαρτάται από το είδος της βέλτιστης λύσης που παράγεται. Εξαιτίας της ύπαρξης εκφυλισμένων λύσεων, μπορούν να παρατηρηθούν οι παρακάτω περιπτώσεις:

• Στη περίπτωση που, τόσο η άριστη λύση του πρωτεύοντος, όσο και του δυϊκού είναι μη εκφυλισμένες, τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε από την ανάλυση ευαισθησίας και των τριών τύπων είναι ίδια (αφού υπάρχει μία και μοναδική βάση που αντιστοιχεί στην άριστη λύση). (Αιγαίου)

• Στην περίπτωση που η άριστη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος είναι εκφυλισμένη, οπότε θα υπάρχουν αντιστοιχούν διάφορες βέλτιστες βάσεις, οι αναλύσεις ευαισθησίας των τύπων I και II είναι δυνατόν να δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα, καθώς οι πληροφορίες που λαμβάνουμε από την τύπου I ανάλυση ευαισθησίας διαφέρουν για κάθε βέλτιστη βάση. Στην περίπτωση μιας αύξησης ή ελάττωσης ενός από τα δεξιά μέλη των περιορισμών, λαμβάνουμε διαφορετικούς ρυθμούς μεταβολής για την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, με αποτέλεσμα να εισάγουμε αριστερές και δυϊκές τιμές για τις οποίες θα μιλήσουμε αναλυτικότερα παρακάτω. Δεδομένου ότι οι αναλύσεις τύπου II και III δεν εξαρτώνται από τις βάσεις, επομένως δίνουν τα ίδια αποτελέσματα στην περίπτωση των εκφυλισμένων λύσεων του πρωτεύοντος.

• Όταν η άριστη δυϊκή λύση είναι εκφυλισμένη, υπάρχουν αρκετές διαφορετικές βασικές και μη βασικές λύσεις για το πρωτεύον, με διαφορετικά σύνολα θετικών μεταβλητών, ενώ η δυϊκή άριστη λύση είναι μοναδική. Σε αυτή τη περίπτωση οι αναλύσεις ευαισθησίας τύπου I και II σε κάθε εναλλακτική άριστη βασική λύση του πρωτεύοντος είναι ταυτόσημες, με τη διαφορά ότι η τύπου II μπορούν να υπολογισθούν και από τις μη βασικές λύσεις.

• Όταν οι άριστες λύσεις τόσο του πρωτεύοντος όσο και του δυϊκού είναι εκφυλισμένες, τότε και οι τρεις τύποι αναλύσεις δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα. Σε αυτή την περίπτωση σε κάθε βέλτιστη βάση αντιστοιχούν διαφορετικά αποτελέσματα ανάλυσης τύπου I. Οι άριστες λύσεις με διαφορετικά σύνολα θετικών μεταβλητών έχουν διαφορετικά διαστήματα τύπου II. Λόγω ότι η τύπου III ανάλυση ευαισθησίας είναι ανεξάρτητη της άριστης λύσης, τα διαστήματα που αποκτώνται από τις τύπου I και II είναι υπο διαστήματα των τύπου III.

Ο Gal εισήγαγε την θεωρία του εκφυλισμού και την έννοια της κρίσιμης περιοχής η οποία μπορεί να προσδιοριστεί από μερικές βέλτιστες βάσεις. Ο προσδιορισμός όλων των βέλτιστων βάσεων είναι χρονοβόρος και οι προτάσεις που έχουν γίνει είναι προς βελτίωση αυτής της προσέγγισης. Το διάστημα ευαισθησίας τύπου II είναι υπερσύνολο των διαστημάτων τύπου I και τα δύο όμως εξαρτώνται καθαρά από το τρέχον βέλτιστο ακραίο σημείο. Στη περίπτωση όπου το πρόβλημα έχει πολλαπλά βέλτιστα σημεία (άριστη λύση) αυτά αντιστοιχούν σε διαφορετικού τύπου II διαστήματα ευαισθησίας.

3.2 Το πρόβλημα καταμερισμού της εργασίας

Στη συνέχεια ακολουθεί η μελέτη ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, το οποίο παρουσιάζει έντονα το φαινόμενο του εκφυλισμού και η κλασική ανάλυση ευαισθησίας (τύπου Ι), δεν έχει πρακτική αξία. Πρόκειται για την ειδική περίπτωση προβλήματος μεταφοράς, το πρόβλημα καταμερισμού εργασίας (εκχώρησης), το οποίο ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, ορίζεται ως εξής: (Αιγαίου)

$$\min A = \begin{pmatrix} a11....a1n \\ ... \\ am1...amn \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ ... \\ xn \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ ... \\ bn \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c1 \\ c2 \\ ... \\ cn \end{pmatrix}$$

υπό τους περιορισμούς

$$\sum_{i=1}^{n} xij = 1, \text{ i =1,2,….,n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} xij = 1, \text{ i =1,2,….,n}$$

$X_{ij} > 0$

Λόγω της ιδιαίτερης μορφής των περιορισμών του, το προαναφερθέν πρόβλημα αντιμετωπίζεται είτε ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, είτε ως 0-1 πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού. Στην πρώτη περίπτωση ο Ουγγρικός αλγόριθμος (Kuhn, 1955 και 1956) είναι αυτός που χρησιμοποιείται προς επίλυση του προβλήματος.

3.3 Ούγγρικος αλγόριθμος

Β1. Διαμόρφωσε ένα ισορροπημένο πρόβλημα εκχώρησης δηλαδή το σύνολο των διαθέσιμων πόρων να ισούται με το σύνολο των απαιτούμενων.

Β2. Κατασκεύασε τον πίνακα κόστος ευκαιρίας αφαιρώντας το μικρότερο στοιχείο κάθε γραμμής από όλα τα στοιχεία αυτής, οπότε και δημιουργείται τουλάχιστον ένα μηδενικό στοιχείο στην κάθε γραμμή. Αντίστοιχα, αφαιρώντας το μικρότερο στοιχείο κάθε στήλης από όλα τα στοιχεία αυτής δημιουργείται τουλάχιστον ένα μηδενικό στοιχείο στην κάθε στήλη. (Αιγαίου)

Β3. Σύμφωνα με το θεώρημα της συμπληρωματικής χαλαρότητας, εκχωρήσεις γίνονται μόνο στα κελιά του πίνακα κόστους ευκαιρίας των οποίων οι τιμές είναι μηδενικές. Συνεπώς, διαμόρφωσε μια εκχώρηση στο μηδενικό κελί κάθε γραμμής η οποία περιέχει μόνο ένα μηδενικό στοιχείο. Ταυτοποίησε αυτήν με ένα τετράγωνο γύρω από το μηδέν του κελιού και διέγραψε όποια μηδενικά στοιχεία της στήλης περιέχονται εντός του τετραγώνου. Αντίστοιχη διαδικασία πράττεται για κάθε στήλη και επανέλαβε τα βήματα αυτά έως ότου καμία εκχώρηση να είναι δυνατή. Εάν πραγματοποιήθηκαν m εκχωρήσεις τότε η διαδικασία σταματά και τα κελιά με τα τετράγωνα υποδεικνύουν τη βέλτιστη εκχώρηση, διαφορετικά αν έγιναν $k<m$ καταχωρήσεις πήγαινε στο βήμα 4.

Β4. Καταμέτρησε το πλήθος των μη καλυμμένων μηδενικών σε κάθε γραμμή και στήλη του πίνακα κόστους ευκαιρίας του προβλήματος. Χάραξε μια γραμμή κατά μήκος της γραμμής ή στήλης με το μεγαλύτερο πλήθος μη καλυμμένων μηδενικών και επανέλαβε τα βήματα αυτά έως ότου «καλυφθούν» όλα τα μηδενικά.

Β5. Έστω c0 το μικρότερο μη καλυμμένο στοιχείο του πίνακα. Αφαίρεσε το c0 από όλα τα μη καλυμμένα στοιχεία του πίνακα, στη συνέχεια πρόσθεσέ το σε όλα τα στοιχεία του πίνακα που βρίσκονται στην τομή δύο γραμμών κάλυψης και επέστρεψε στο βήμα 3.

Για την επαρκή επίλυσή του έχουν αναπτυχθεί και διάφοροι οι αλγόριθμοι, που χρησιμοποιούν τον πίνακα των αντικειμενικών συντελεστών στη μορφή

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} \cdots & c_{1j} \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{i1} \cdots & c_{ij} \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \\ c_{n1} \cdots & c_{nj} \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

όπου, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, θεωρείται ότι είναι $c_{ji}>0$ Μετά την εύρεση της άριστης λύσης, ο αποφασίζων πραγματοποιεί την ανάλυση ευαισθησίας, ώστε να γνωρίζει τις συνέπειες από πιθανές μεταβολές των παραμέτρων του προβλήματος. Δυστυχώς το φαινόμενο του εκφυλισμού που προκύπτει στο πρόβλημα καταμερισμού της εργασίας είναι η ύπαρξη μεγάλου βαθμού εκφυλισμένων λύσεων που με τη σειρά τους αντιστοιχούν σε διαφορετικές άριστες βάσεις. Στη συνέχεια πραγματοποιείται ανάλυση ευαισθησίας για το πρόβλημα (2.1), στη περίπτωση όπου ένας από τους αντικειμενικούς συντελεστές c_j αλλάζει και η μεταβολή αυτή συμβολίζεται με Δc_j (Αιγαίου)

4 ΛΟΓΙΣΜΙΚΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

4.1 Σχετικά με τα λογισμικά επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού

Η όλη διαδικασία διαχείρισης ενός γραμμικού προγράμματος προϋποθέτει την ύπαρξη ηλεκτρονικού υπολογιστή και εξειδικευμένου λογισμικού. Στην συνέχεια έρχεται το κομμάτι να δώσει την τεχνολογική συνιστώσα του γραμμικού προγραμματισμού.

Η σύγχρονη τεχνολογία των πληροφοριακών συστημάτων προσφέρει αρκετές και σημαντικές εναλλακτικές λύσεις για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Τελευταία, έχει αναπτυχθεί σημαντικός αριθμός πακέτων λογισμικού με στόχο τη διευκόλυνση του χρήστη στη μοντελοποίηση και επίλυση γραμμικού προγραμματισμού. Τα συστήματα αυτά παρουσιάζουν σημαντικές βελτιώσεις σε παραμέτρους, όπως:

- Ταχύτητα επίλυσης προβλημάτων
- Μέγεθος προβλημάτων
- Φιλικότητα επικοινωνίας με τον χρήστη
- Ευελιξία

Σε γενικές γραμμές υπάρχουν τρεις βασικοί τρόποι για να αναπτυχθεί και να επιλυθεί ένα μοντέλο Γραμμικού προγραμματισμού, και αυτοί είναι:

1) Λογισμικά Φύλλα

Τα λογισμικά φύλλα χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού με ικανοποιητικά αποτελέσματα. Ο συγκεκριμένος τρόπος αποτελεί την οικονομικότερη εναλλακτική λύση, αλλά απαιτεί μεγάλη επένδυση χρόνου από την πλευρά του χρηστή, για την ανάπτυξη του προβλήματος. Επιπρόσθετα, η επεξεργασία και διόρθωση του μοντέλου γίνεται δυσκολότερη, όσο το μέγεθος του προβλήματος αυξάνει, δεδομένου ότι το μοντέλο βρίσκεται “κρυμμένο” μέσα στα κελιά του λογιστικού φύλλου.

2) Γλώσσες Μοντελοποίησης (Modeling Languages)

Οι γλώσσες μοντελοποίησης προσφέρουν ένα αυτόματο φιλικό περιβάλλον εργασίας για την ανάπτυξη ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού. Είναι συνήθως εξειδικευμένα προγράμματα στα οποία περιλαμβάνονται τα εξής μέρη:

- Διαχείριση δεδομένων
- Αλγόριθμοι βελτιστοποίησης
- Παρουσίαση αποτελεσμάτων

Τα συγκεκριμένα προγράμματα είναι η λιγότερο οικονομική λύση αλλά ο πλέον εύκολος τρόπος για την ανάπτυξη και επίλυση ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού.

Τέλος πρέπει να σημειωθεί ότι τα προβλήματα που αναπτύσσονται από τις γλώσσες μοντελοποίησης μπορούν να είναι μεγάλων διαστάσεων (εκατοντάδες χιλιάδες περιορισμοί και μεταβλητές) αλλά δεν έχουν τα χαρακτηριστικά της ευελιξίας και της αυτονομίας.

3) Γλώσσες Προγραμματισμού (Programming Languages)

Η τελευταία εναλλακτική λύση αφορά τη χρησιμοποίηση οποιασδήποτε γλώσσας προγραμματισμού για την ανάπτυξη και επίλυση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα της επιλογής αυτής εστιάζονται κυρίως στην ταχύτητα επίλυσης, την ευελιξία και την αυτονομία των μοντέλων που αναπτύσσονται. Οι γλώσσες προγραμματισμού βέβαια απαιτούν σημαντικό χρόνο για την ανάπτυξη του μοντέλου, καθώς και εξειδικευμένες γνώσεις.

4.2 Λογισμικό επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού με την βοήθεια του EXCEL

Η εμφάνιση των φύλλων εργασίας γίνεται από τα πρώτα χρόνια της εμφάνισης και διάδοσης των προσωπικών υπολογιστών. Πρώτη αξιόλογη προσπάθεια, που έμελλε να αποτελέσει και το πρότυπο για τις μεγαλύτερες εταιρείες ανάπτυξης λογισμικού για τα επόμενα χρόνια, ήταν αυτή της Lotus Corporation που με το προϊόν της “Lotus 123” δημιούργησε ένα τεράστιο πλήθος εγκατεστημένων εφαρμογών λογιστικών φύλλων παγκοσμίως.

Με την εμφάνιση των Windows από την Microsoft και την καθιέρωση ενός νέου τρόπου εργασίας με τον ηλεκτρονικό υπολογιστή, παρουσιάστηκαν νέα προγράμματα λογιστικών φύλλων το ίδιο ισχυρά και ολοκληρωμένα με το "Lotus 123" αλλά και περισσότερο εύχρηστα όπως αυτό του Excel της Microsoft.

Το λογισμικό Excel της Microsoft είναι ένα γενικό περιβάλλον δημιουργίας Φύλλων Εργασίας (Spreadsheets). Ένα λογισμικό φύλλο είναι περιβάλλον εργασίας όπου ο χρήστης μπορεί να εισάγει δεδομένα, να τα επεξεργάζεται βάσει απλών ή και πολύπλοκων μαθηματικών τύπων, σχέσεων με τα οποία συσχετίζει τα δεδομένα του σύμφωνα με τις ανάγκες του και να εξάγει (να εμφανίζει ή να εκτυπώνει) αποτελέσματα, συμπεράσματα σε σχέση με αυτά.

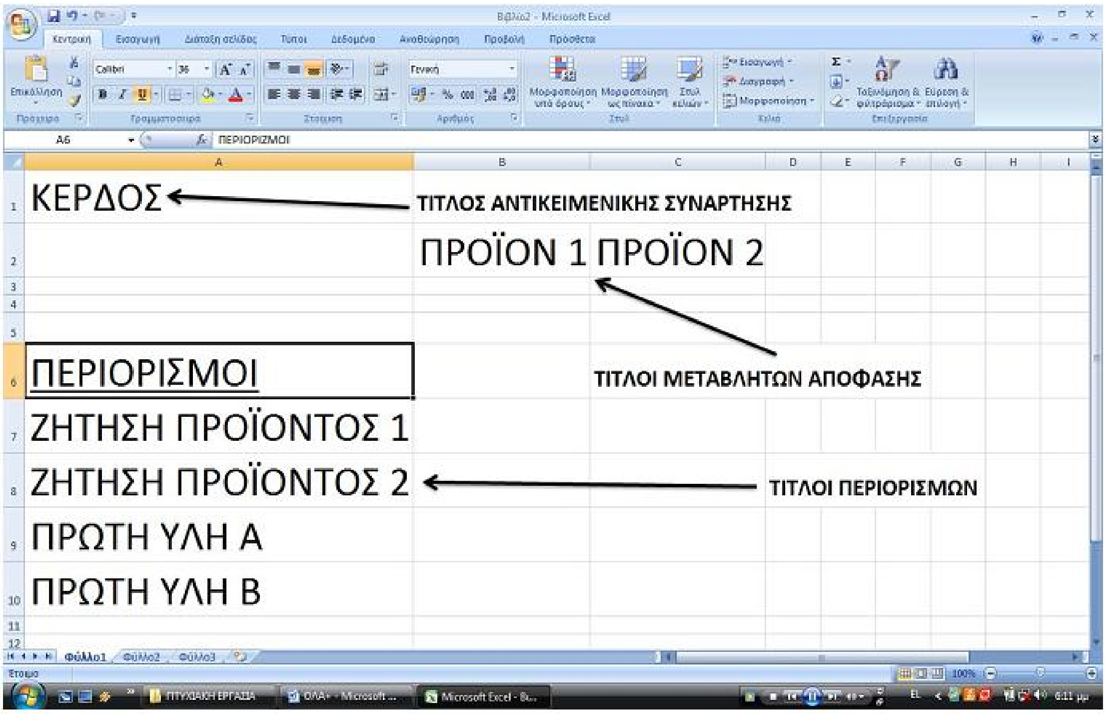
Το Excel αποτελεί σήμερα το πιο εύχρηστο και ολοκληρωμένο λογιστικό φύλλο και η διάδοσή του είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με αυτή των Windows.

Περιλαμβάνει ένα μεγάλο αριθμό βοηθητικών προγραμμάτων που αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο για κάθε επαγγελματία.

Η έκδοση, EXCEL 97, περιλαμβάνει το επιπρόσθετο (add-in) πρόγραμμα επίλυσης (solver), το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης, όπως για παράδειγμα προβλημάτων γραμμικού, ακέραιου και μη γραμμικού προγραμματισμού. (Παπαρρίζος Κ. : 1999, σελ.41-48) Τα λογισμικά φύλλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν με επιτυχία για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού δεδομένου ότι αποτελούν προγράμματα γενικής χρήσης και ευρείας διάδοσης. Στην συνέχεια παρουσιάζεται η χρήση ενός τέτοιου λογισμικού φύλλου, για την επίλυση ενός απλού και μικρού σε μέγεθος προβλήματος. Η διαδικασία επίλυσης γίνεται με τη βοήθεια των εξής βημάτων:

1) Εισαγωγή βοηθητικών τίτλων στο λογισμικό φύλλο

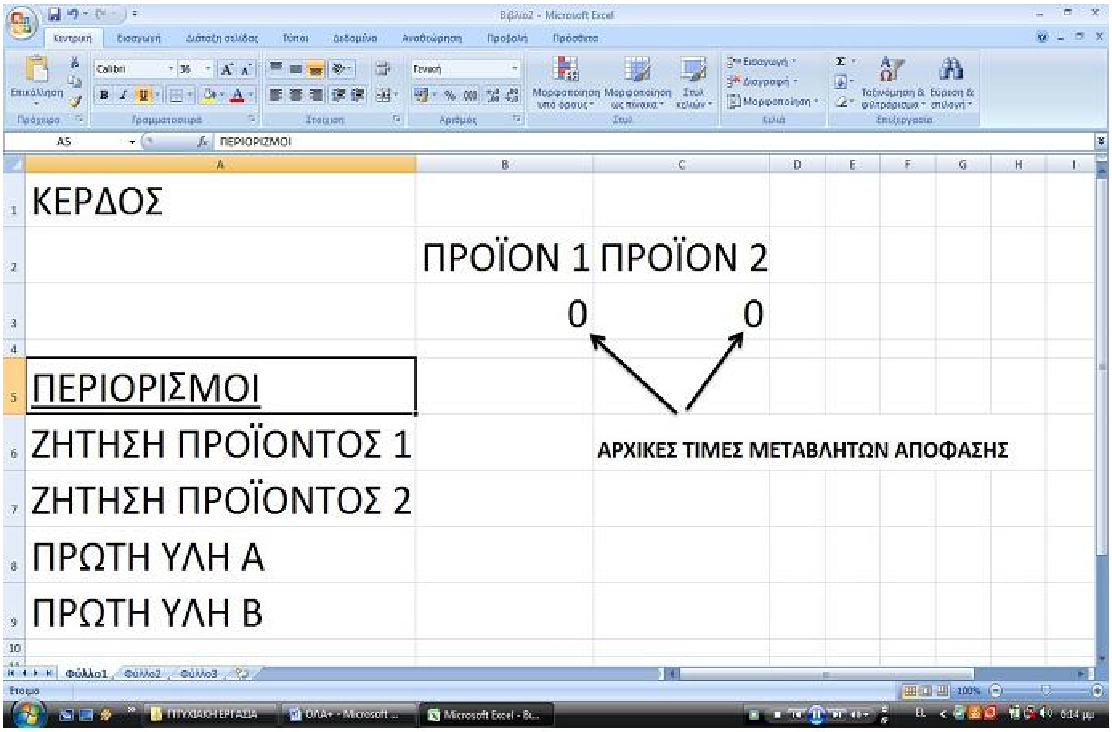
Το αρχικό βήμα αφορά την εισαγωγή των τίτλων της αντικειμενικής συνάρτησης, των περιορισμών και των μεταβλητών απόφασης. Το βήμα αυτό αν και δεν είναι απολύτως απαραίτητο μπορεί να βοηθήσει τόσο στην παρουσίαση, όσο και στην κατανόηση του λογισμικού φύλλου. (βλέπε εικόνα 1)



Εικόνα 1 Εισαγωγή βοηθητικών τίτλων στο λογιστικό φύλλο

2) Εισαγωγή αρχικών τιμών στις μεταβλητές απόφασης

Για την εφαρμογή του αλγορίθμου επίλυσης του γραμμικού προγραμματισμού απαιτείται η εισαγωγή κάποιων αρχικών τιμών στις μεταβλητές απόφασης (συνήθως μηδενικές τιμές). (βλέπε εικόνα 2)



Εικόνα 2 Εισαγωγή αρχικών τιμών στις μεταβλητές απόφασης

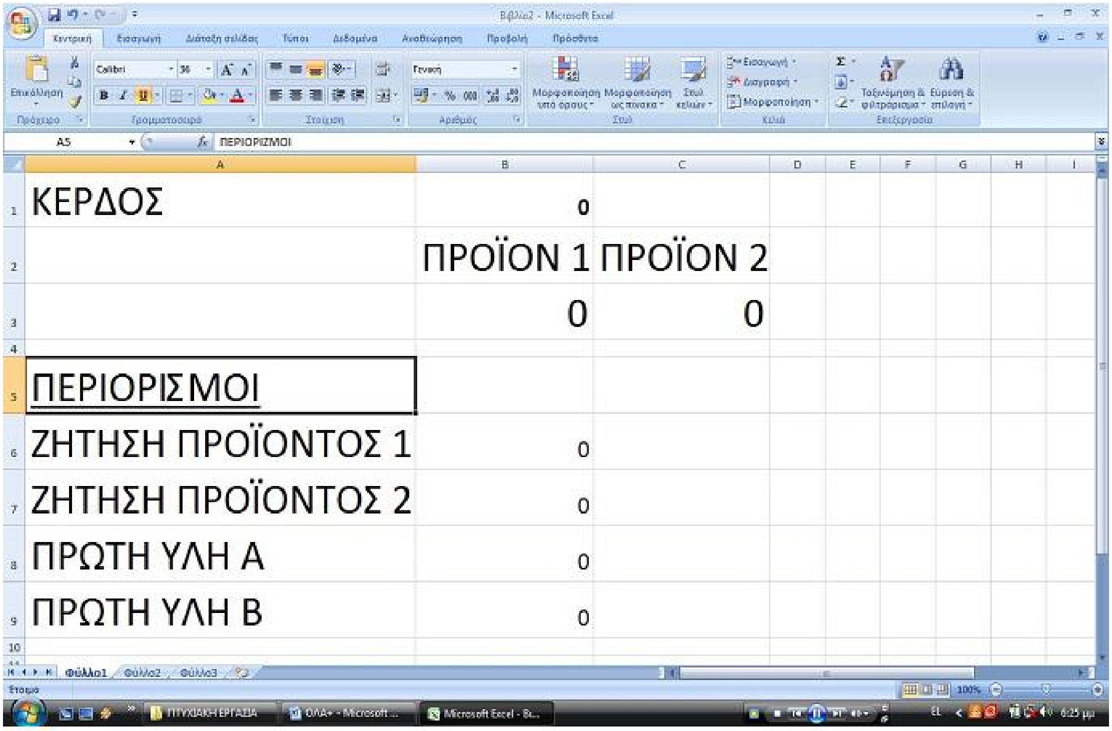
3)Εισαγωγή αντικειμενικής συνάρτησης

Η εισαγωγή αντικειμενικής συνάρτησης γίνεται συνάρτηση των κελιών του λογισμικού φύλλου που αντιστοιχούν στις μεταβλητές αποφάσεις.

4)Εισαγωγή Α μέρους περιορισμών

Ομοίως με το προηγούμενο βήμα, θα πρέπει να γραφεί και το Α μέρος των γραμμικών περιορισμών του προβλήματος, συνάρτηση και πάλι των κελιών που αντιστοιχούν στις μεταβλητές απόφασης.

Μετά την ολοκλήρωση των παραπάνω αρχικών βημάτων, το λογιστικό φύλλο θα πρέπει να έχει τη μορφή που απεικονίζεται στην εικόνα 3.

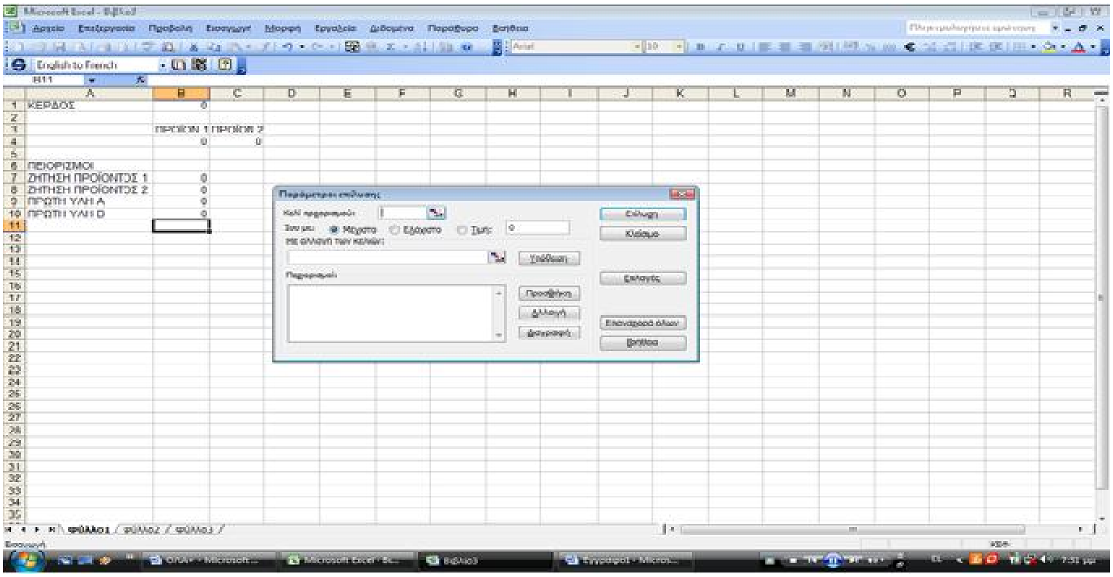


Εικόνα 3 Το λογισμικό φύλλο μετά την ολοκλήρωση των αρχικών βημάτων

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι, όλες οι τιμές του λογισμικού φύλλου είναι μηδενικές, δεδομένου ότι οι αρχικές τιμές των μεταβλητών απόφασης είναι μηδενικές.

5) Εντολή ‘Εργαλεία – Επίλυση’

Για να ολοκληρωθεί η εισαγωγή των παραμέτρων επίλυσης, δίνεται η εντολή ‘Εργαλεία-Επίλυση’, η οποία ανοίγει το παράθυρο ‘Παράμετροι επίλυσης’. (βλέπε εικόνα 4.)



Εικόνα 4 Το παράθυρο 'Παράμετροι Επίλυσης'

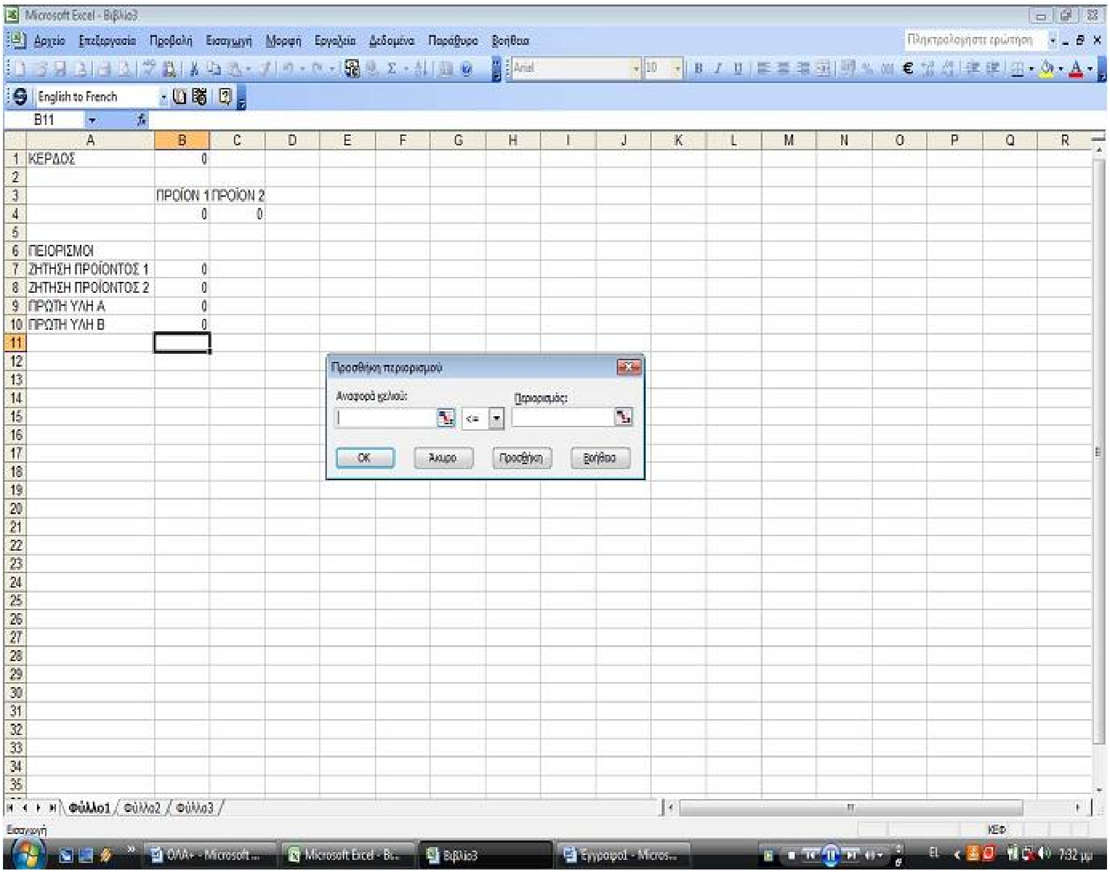
6) Ορισμός αντικειμενικής συνάρτησης και μεταβλητών απόφασης

Στο συγκεκριμένο βήμα ορίζεται το κελί του λογισμικού φύλλου που αντιπροσωπεύει την αντικειμενική συνάρτηση στο πλαίσιο κειμένου 'Ορισμός κελιού προορισμού'. Επίσης ορίζεται ο στόχος (ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση) του γραμμικού προγράμματος. Τέλος, στο βήμα αυτό επιλέγεται η περιοχή των κελιών που αντιστοιχούν στις μεταβλητές απόφασης του γραμμικού προγραμματισμού ($B1$4:$C$4 για το παράδειγμα).

7) Εισαγωγή πρόσημου και Β μέρους περιορισμών

Στο βήμα αυτό ολοκληρώνεται η εισαγωγή των περιορισμών του γραμμικού προγραμματισμού του κουμπί 'Προσθήκη', εισάγονται διαδοχικά όλοι οι περιορισμοί του προβλήματος, ορίζοντας κάθε φορά:

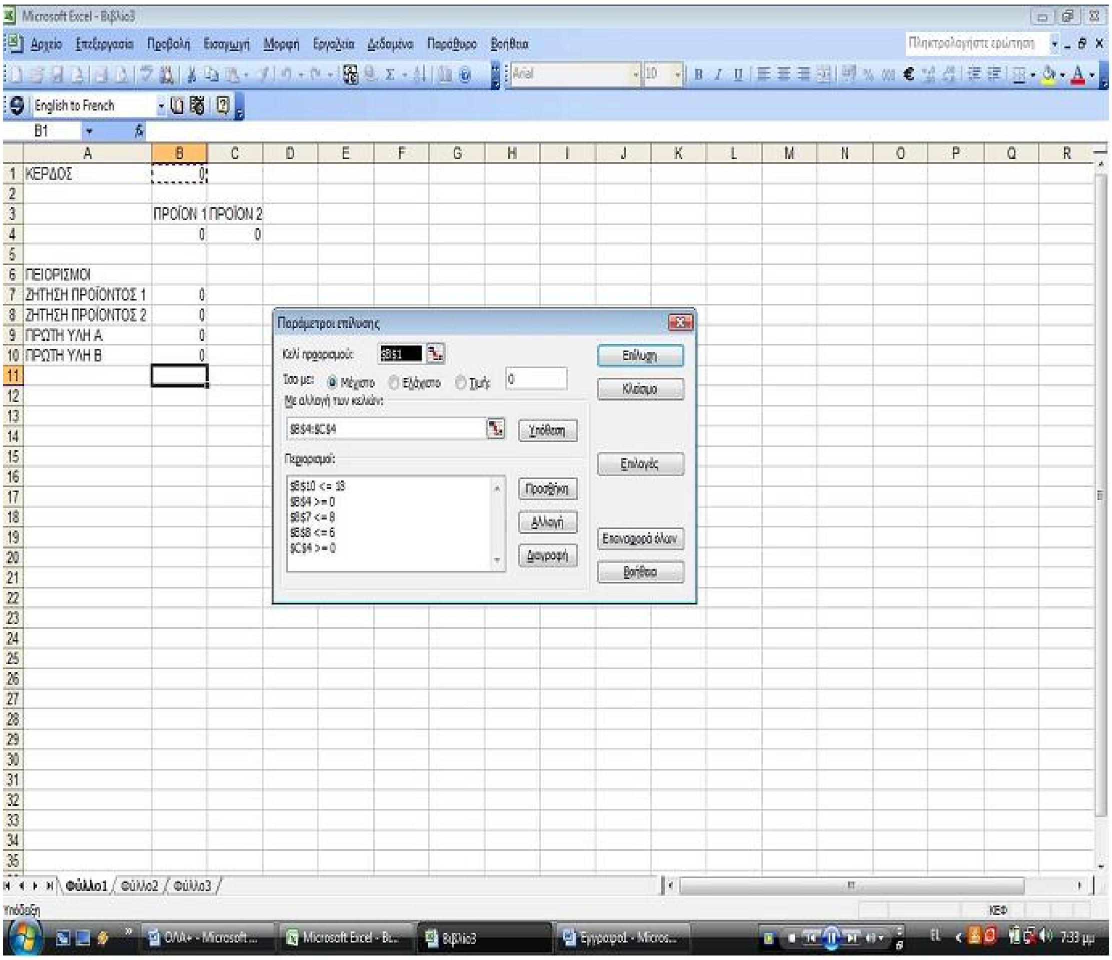
- Το κελί που αντιστοιχεί στο Α μέρος του περιορισμού
- Τον τύπο του περιορισμού
- Το Β μέρος του περιορισμού (βλέπε εικόνα 5)



Εικόνα 5 Το παράθυρο 'Προσθήκη περιορισμού'

Αξίζει να σημειωθεί στο συγκεκριμένο σημείο ότι, θα πρέπει να εισαχθούν και οι περιορισμοί μη αρνητικότητας των μεταβλητών απόφασης.

Με την ολοκλήρωση των προηγούμενων βημάτων, το παράθυρο 'Παράμετροι επίλυσης' θα πρέπει να έχει μια μορφή όπως παρουσιάζονται στην εικόνα 6. (βλέπε εικόνα 6)

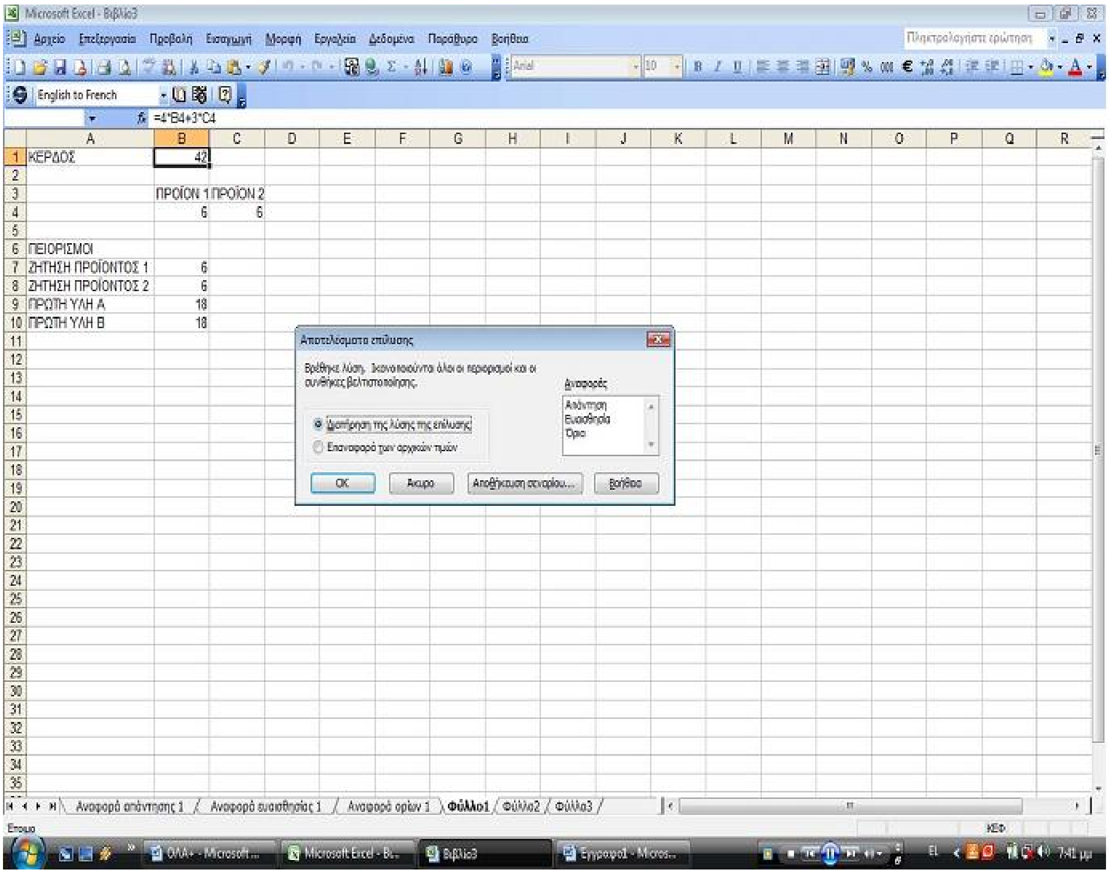


Εικόνα 6 Το παράθυρο 'Παράμετροι Επίλυσης' μετά την ολοκλήρωση ορισμού του προβλήματος Γραμμικού προγραμματισμού

8) Επίλυση γραμμικού προγράμματος

Εφόσον έχει ολοκληρωθεί η εισαγωγή των απαιτούμενων πληροφοριών, η βέλτιστη λύση του προβλήματος υπολογίζεται με το κουμπί 'Επίλυση'. Σε περίπτωση ύπαρξης βέλτιστης λύσης θα πρέπει να επιλέγουν οι επιθυμητές αναφορές που θα δημιουργηθούν από το πρόγραμμα. Οι αναφορές αυτές περιλαμβάνουν:

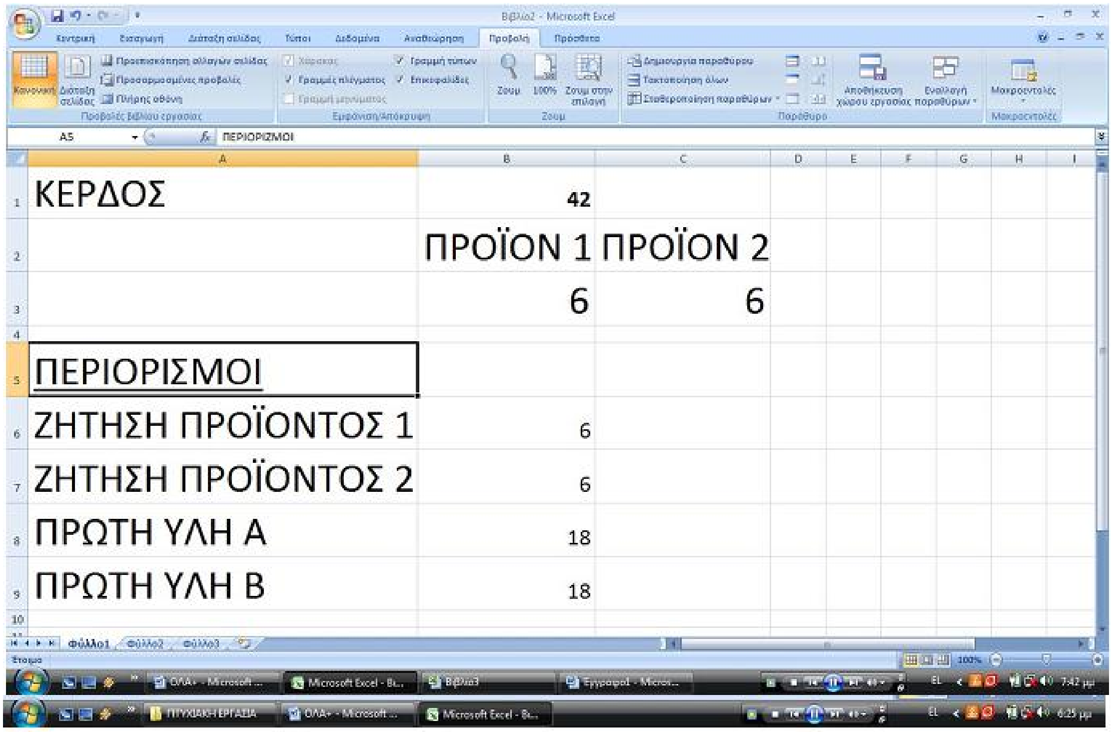
- Απάντηση
- Ευαισθησία
- Όρια (βλέπε εικόνα 3.7.)



Εικόνα 7 Το παράθυρο 'Αποτελέσματα Επίλυσης'

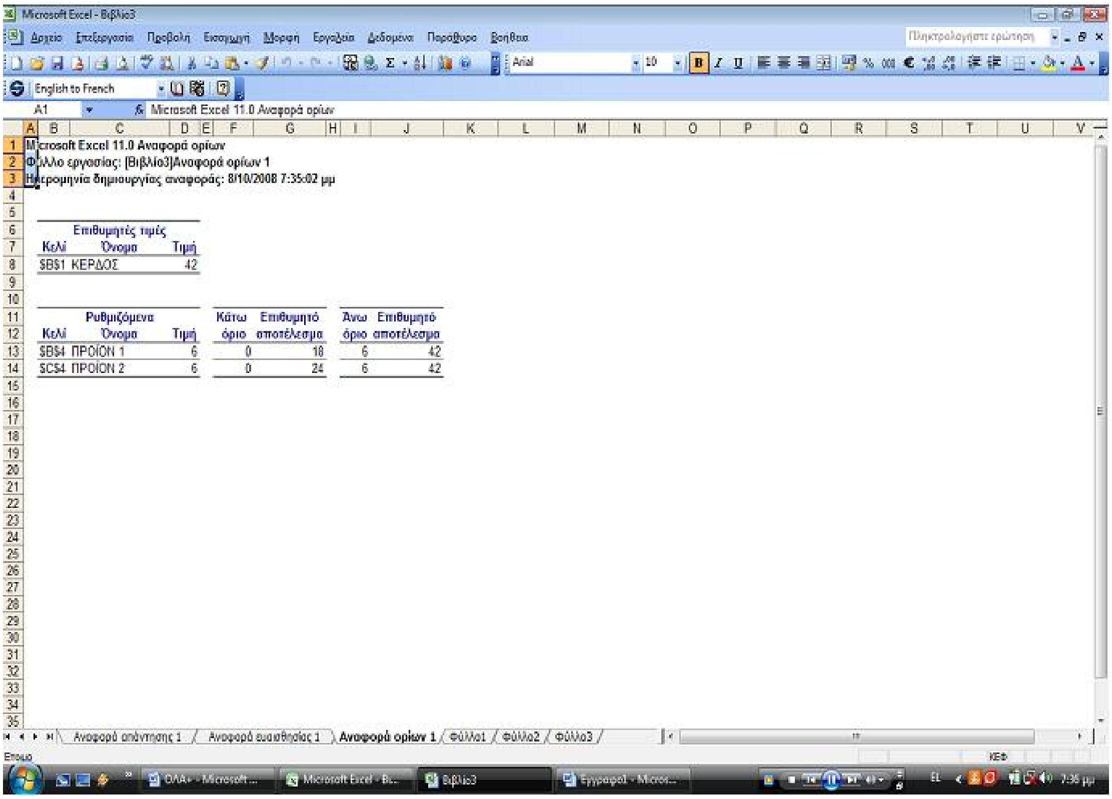
Σε περίπτωση μη ύπαρξη βέλτιστης λύσης (αδύνατο γραμμικό προγραμματισμό, μη φραγμένη λύση, κλπ.) υπάρχει αντίστοιχο μήνυμα σφάλματος από το λογιστικό φύλλο.

Μετά τη φάση επίλυσης του γραμμικού προγράμματος, λογισμικό φύλλο είναι ενημερωμένο με τη βέλτιστη λύση (x1*=7, x2*=4, z*=40), όπως φαίνεται στην εικόνα 8. (βλέπε εικόνα 8)



Εικόνα 8 Το λογισμικό φύλλο μετά την επίλυση του Γραμμικού Προγραμματισμού

Στην εικόνα 9 που ακολουθούν παρουσιάζονται ενδεικτικά οι διάφορες αναφορές που δημιουργούνται μετά την επίλυση ενός γραμμικού προγράμματος (βλέπε εικόνα 9)



Εικόνα 9 Η αναφορά ορίων

4.2.1 Πλεονεκτήματα - Μειονεκτήματα

Συμπερασματικά, η επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγράμματος με τη βοήθεια λογισμικών φύλλων παρουσιάζει μια σειρά από πλεονεκτήματα, όπως:

1) Τα λογισμικά φύλλα είναι προγράμματα ευρείας χρήσης και συνεπώς αρκετά διαδεδομένα. Με αυτόν τον τρόπο, δεν απαιτείται η αγορά ενός ακριβού και εξειδικευμένου λογισμικού για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγράμματος. Επιπρόσθετα, δεν απαιτούνται εξειδικευμένες γνώσεις από τους χρήστες.

2) Το μέγεθος των προβλημάτων γραμμικού προγράμματος που μπορούν αυτά να χειριστούν είναι αρκετά ικανοποιητικό (το Microsoft Excel μπορεί να επιλύσει προβλήματα γραμμικού προγράμματος έως 800 μεταβλητών περίπου), ενώ ο χρόνος επίλυσης κρίνεται ιδιαίτερα μικρός.

3) Τα παραπάνω χαρακτηριστικά, τόσο το μέγεθος των προβλημάτων όσο και ο χρόνος επίλυσης μπορούν να βελτιωθούν με τη χρήση πρόσθετης βιβλιοθήκης επίλυσης.

Το σημαντικότερο βέβαια μειονέκτημα αποτελεί η πολυπλοκότητα εισαγωγής των απαιτούμενων πληροφοριών για την επίλυση ενός προβλήματος γραμμικού προγράμματος, γεγονός που καθιστά σχεδόν απαγορευτική τη χρήση λογισμικών φύλλων σε πραγματικά μεγάλα προβλήματα.

4.3 Άλλο ένα Παράδειγμα

Μία βιοτεχνία κατασκευάζει κορνίζες τεσσάρων διαφορετικών τύπων K_1, K_2, K_3 και K_4. Οι τέσσερις τύποι διαφέρουν στο μέγεθος, το σχήμα και τα υλικά που απαιτούνται για την παραγωγή τους. Η παραγωγή κάθε τύπου απαιτεί ορισμένες ώρες εργασίας, ορισμένη ποσότητα μετάλλου και ορισμένη ποσότητα γυαλιού, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Στον πίνακα αυτό φαίνεται, επίσης, το κέρδος που αποφέρει στη βιοτεχνία κάθε τύπος κορνίζας, όπου το κέρδος είναι η διαφορά ανάμεσα στην τιμή πώλησης και το κόστος της εργασίας και των υλικών. Στη διάρκεια κάθε εβδομάδας η βιοτεχνία έχει διαθέσιμες 4000 εργατοώρες, 6000 κιλά μετάλλου και 10000 κιλά γυαλιού. Οι συνθήκες της αγοράς υπαγορεύουν ότι η βιοτεχνία δεν μπορεί να πουλήσει περισσότερες από 1000 κορνίζες K_1, 2000 κορνίζες K_2, 500 κορνίζες K_3 και 1000 κορνίζες K_4 την εβδομάδα.

	Εργασία (εργατοώρες)	Μέταλλο (κιλά)	Γυαλί (κιλά)	Κέρδος (χρημ. μον.)
Τύπος K_1	2	4	6	6
Τύπος K_2	1	2	2	2
Τύπος K_3	3	1	1	4
Τύπος K_4	2	2	2	3

Πόσες κορνίζες κάθε τύπου θα παράγει η βιοτεχνία προκειμένου να μεγιστοποιήσει το εβδομαδιαίο κέρδος της;

4.3.1 **Σχεδιασμός μοντέλου στο** Excel

Υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να σχεδιάσουμε ένα μοντέλο στο Excel. Σκοπός αυτών των μαθημάτων δεν είναι να δώσουμε έτοιμες “συνταγές”, αλλά να αποκτήσουμε την εμπειρία που θα μας επιτρέπει να αντιμετωπίζουμε με επιτυχία ρεαλιστικά προβλήματα. Οι διαδικασίες που θα περιγράψουμε στη συνέχεια μπορεί να υλοποιούνται με κάπως διαφορετικό τρόπο σε νεώτερες εκδόσεις του Excel. Σημασία έχει η γενικότερη διαδικασία της επίλυσης προβλημάτων και της ερμηνείας των αποτελεσμάτων.

Μία καλή πρακτική είναι να δίνουμε ονόματα σε κελιά η περιοχές κελιών με βάση το περιεχόμενό τους, ώστε να είναι καλύτερα κατανοητό τι προσπαθούμε να κάνουμε με το συγκεκριμένο μοντέλο. Για παράδειγμα, στο σχετικό αρχείο (OR2011Εργαστήριο1.xls) επιλέξτε τα κελιά F12:F13 και στη συνέχεια επιλέξτε από το μενού «Εισαγωγή»→«Όνομα»→«Δημιουργία» (Insert→Name→Create) ώστε να ονομάσετε το κελί F13 με το όνομα «Συνολικό Κέρδος».

Τα στοιχεία που πρέπει να υπάρχουν σε κάθε μοντέλο που σχεδιάζουμε είναι τα ακόλουθα:

Δεδομένα: Όλα τα αριθμητικά δεδομένα που απαιτούνται για τον υπολογισμό της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών πρέπει να εμφανίζονται σε μία περιοχή του φύλλου. Συνήθως επιδιώκουμε να εμφανίζουμε όλα τα δεδομένα επάνω και αριστερά στο φύλλο και να τα σκιάζουμε, ώστε να ξεχωρίζουν.

Μεταβλητές: Οι τιμές των μεταβλητών, που θα δώσουν την απάντηση στο πρόβλημά μας, είναι αποθηκευμένες σε μια περιοχή του φύλλου. Τα κελιά της περιοχής αυτής λέγονται *κελιά που αλλάζουν (changing cells).* Συνηθίζεται να τα σημειώνουμε με πλαίσιο.

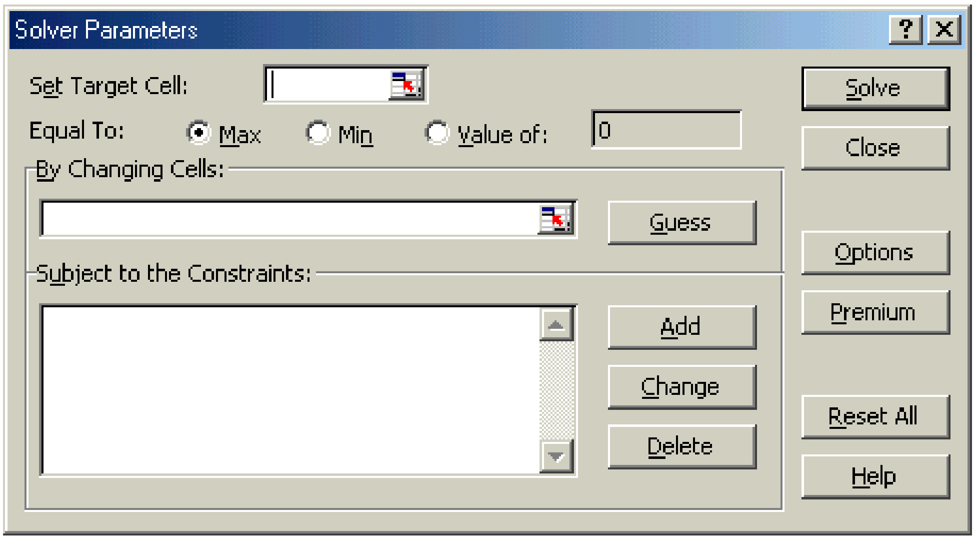
Αντικειμενική συνάρτηση: Η αντικειμενική συνάρτηση υπολογίζεται σε ένα κελί που λέγεται *κελί προορισμού (target cell).* Συνηθίζεται το κελί αυτό να το σημειώνουμε με διπλό πλαίσιο.

Περιορισμοί: Ο μόνος τρόπος να εμφανίσουμε τους περιορισμούς στο Excel είναι να υπολογίσουμε το αριστερό μέρος κάθε περιορισμού σε ένα κελί και να το συγκρίνουμε με το δεξιό μέρος (σταθερό όρο) που θα είναι αποθηκευμένο σε κάποιο άλλο κελί.

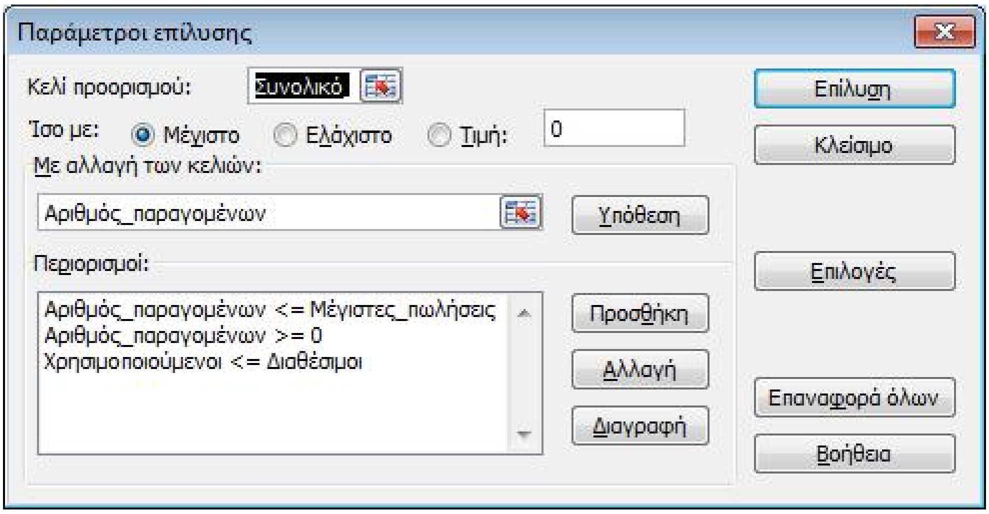
Το επόμενο στάδιο είναι να συνδέσουμε τα περιεχόμενα των κελιών με κατάλληλους τύπους ώστε να υπολογίζεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και το αριστερό μέρος κάθε περιορισμού. Στο σχετικό αρχείο του Excel φαίνονται οι τύποι που συνδέουν τις τιμές των κελιών μεταξύ τους.

4.3.2 **Επίλυση Προβλήματος**

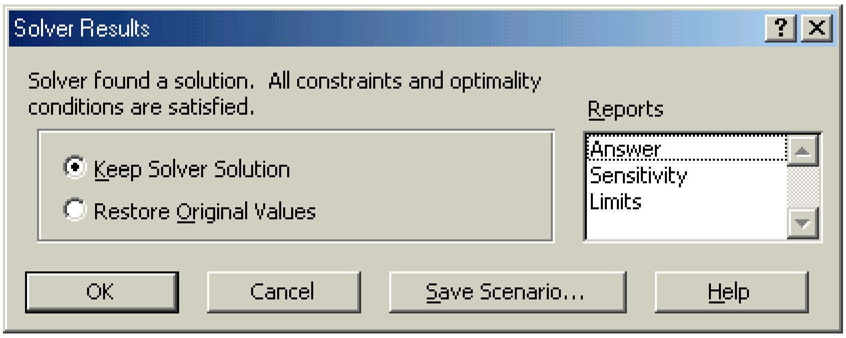
Για να λύσετε το πρόβλημα επιλέξτε «Επίλυση» (Solver) από το μενού «Εργαλεία» (Tools) και θα σας εμφανιστεί το παρακάτω παράθυρο διαλόγου:



Στο πεδίο «Κελί Προορισμού» (Set Target Cell) επιλέξτε το κελί της αντικειμενική συνάρτησης (Συνολικό κέρδος). Στη συνέχεια επιλέξτε «Μεγιστοποίηση» (Max) και στο πεδίο «Με αλλαγή των κελιών» (By Changing Cells) επιλέξτε τα κελιά των μεταβλητών. Τέλος, στο πεδίο «Με τους περιορισμούς» (Subject to the Constraints) προσθέστε διαδοχικά τους περιορισμούς του προβλήματος. Μην παραλείψετε να προσθέσετε τις συνθήκες μη αρνητικότητας των μεταβλητών. Στο τέλος της διαδικασίας, το παράθυρο του Solver θα είναι όπως φαίνεται παρακάτω:



Στη συνέχεια, επιλέξτε «Επιλογές» (Options), πατήστε την επιλογή «Υπόθεση Γραμμικού Μοντέλου» (Assume Linear Model) και ΟΚ. Τέλος, πατήστε «Επίλυση» (Solve) για να λύσετε το πρόβλημα. και αν όλα έχουν γίνει σωστά, θα πρέπει να εμφανιστεί το παρακάτω παράθυρο διαλόγου



Επιλέξτε «Απάντηση», πατήστε «ΟΚ» και το πρόγραμμα θα δημιουργήσει ένα νέο φύλλο, στο οποίο θα φαίνεται αναλυτικά η λύση του προβλήματος. Παρατηρήστε ότι για κάθε περιορισμό αναφέρεται η «Κατάστασή» του (Status), δηλαδή κατά πόσο ο περιορισμός είναι αποτελεσματικός (Binding) ή όχι (Non binding). Θυμίζουμε ότι αποτελεσματικοί είναι οι περιορισμοί που ικανοποιούνται ως ισότητες στη βέλτιστη λύση. Για κάθε περιορισμό η στήλη «Απόκλιση» (Slack) δίνει τη διαφορά ανάμεσα στο αριστερό μέρος και το σταθερό όρο. Όπως είναι αναμενόμενο, η απόκλιση για τους αποτελεσματικούς περιορισμούς είναι μηδέν.

4.3.3 Μειωμένο ή Ανηγμένο Κόστος

Λύστε το πρόβλημα με τη βοήθεια του Solver και επιλέξτε «Ευαισθησία» στο τελικό παράθυρο διαλόγου που εμφανίζεται μετά τον υπολογισμό της λύσης. Έτσι θα δημιουργηθεί ένα νέο φύλλο, τμήμα του οποίου δίνεται παρακάτω.

Παρατηρήστε ότι στη βέλτιστη λύση ορισμένες μεταβλητές (Ρυθμιζόμενα

ιθμιζόμενα κελιά

Κελί	Όνομα	Τελική τιμή	Μειωμένο κόστος	Αντικειμενικός συντελεστής	Επιτρεπόμενη αύξηση	Επιτρεπόμενη μείωση
$B$19	Αριθμός παραγομένων Κ1	1000,00	2,00	6	1E+30	2
$C$19	Αριθμός παραγομένων Κ2	800,00	0,00	2	1	0,25
$D$19	Αριθμός παραγομένων Κ3	400,00	0,00	4	2	0,5
$E$19	Αριθμός παραγομένων Κ4	0,00	-0,20	3	0,2	1E+30

ριορισμοί

Κελί	Όνομα	Τελική τιμή	Σκιώδης τιμή	Περιορισμός R.H. Side	Επιτρεπόμενη αύξηση	Επιτρεπόμενη μείωση
$F$7	Εργατοώρες ανά κορνίζα Χρησιμοποιούμενοι	4000	1,2	4000	250	1000
$F$8	Μέταλο ανά κορνίζα (κιλά) Χρησιμοποιούμενοι	6000	0,4	6000	2000	500
$F$9	Γυαλί ανά κορνίζα (κιλά) Χρησιμοποιούμενοι	8000	0	10000	1E+30	2000

κελιά) έχουν τιμή μηδέν (παραγωγή Κ4) ή βρίσκονται στο πάνω όριό τους (παραγωγή Κ1), ενώ άλλες έχουν τιμή που κυμαίνεται ανάμεσα στο μηδέν και το άνω όριό τους (παραγωγή Κ2 και Κ3). Οι μεταβλητές της δεύτερης κατηγορίας, δηλαδή αυτές που έχουν τιμή ανάμεσα στο μηδέν και το άνω όριό τους λέγονται *βασικές* και οι υπόλοιπες *μη βασικές*.

Στη στήλη «Μειωμένο Κόστος» εμφανίζεται για κάθε μεταβλητή πόσο θα αυξανόταν η αντικειμενική συνάρτηση (αν έχουμε πρόβλημα μεγιστοποίησης) αν εμείς αυξάναμε την τιμή της μεταβλητής κατά μία μονάδα, χωρίς να παραβιάζαμε τις συνθήκες εφικτότητας. Όπως είναι φυσικό, στη βέλτιστη λύση τα μειωμένα (ανηγμένα) κόστη για τις βασικές μεταβλητές θα πρέπει να είναι υποχρεωτικά μηδέν γιατί διαφορετικά θα μπορούσαμε να αυξήσουμε κι άλλο την τιμή τους και να έχουμε καλύτερη λύση. Για τον ίδιο λόγο τα μειωμένα κόστη των μεταβλητών που έχουν τιμή μηδέν είναι αρνητικά. Πράγματι, αν αυξήσουμε την παραγωγή του τύπου Κ4 κατά μία μονάδα, το νέο μέγιστο κέρδος θα είναι 9199,8 χρηματικές μονάδες.

4.3.4 **Ανάλυση Ευαισθησίας** (Sensitivity Analysis)

Στα πραγματικά προβλήματα, εκτός από τις τιμές των μεταβλητών που βελτιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση, είναι πολύ χρήσιμο να ξέρουμε πώς θα επηρεαστεί η λύση μας αν αλλάξουν τα δεδομένα του προβλήματος. Αυτό είναι το αντικείμενο της ανάλυσης ευαισθησίας (sensitivity analysis). Στα πλαίσια αυτά μας ενδιαφέρει η απάντηση σε δύο ερωτήματα:

α) Πόσο μπορεί να μεταβληθούν οι συντελεστές των μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση χωρίς να αλλάξουν οι τιμές των βασικών μεταβλητών;

β) Πόσο μπορεί να μεταβληθούν οι σταθεροί όροι των περιορισμών χωρίς να αλλάξει το σύνολο των βασικών μεταβλητών;

Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα δίνεται στις δύο τελευταίες στήλες του πρώτου τμήματος της εκτύπωσης. Συγκεκριμένα, στις στήλες με επικεφαλίδες «Επιτρεπτή αύξηση» (allowable increase) και «Επιτρεπτή μείωση» (allowable decrease) για κάθε συντελεστή της αντικειμενικής συνάρτησης δίνονται τα όρια μέσα στα οποία μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί, αντίστοιχα, ο συντελεστής αυτός χωρίς να αλλάξουν οι τιμές των μεταβλητών στη βέλτιστη λύση. Προφανώς η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα αλλάξει αν αλλάξει κάποιος συντελεστής μέσα στα όρια μεταβολής του, αλλά οι τιμές των μεταβλητών θα παραμείνουν οι ίδιες. Στο παράδειγμά μας, αν ανά μονάδα κέρδος του Κ3 κυμαίνεται στο διάστημα [3.5, 6] η λύση που βρήκαμε θα εξακολουθήσει να είναι βέλτιστη.

Η απάντηση στο δεύτερο ερώτημα δίνεται στις δύο τελευταίες στήλες του δεύτερου τμήματος της εκτύπωσης. Στις στήλες με επικεφαλίδες «Επιτρεπτή αύξηση» (allowable increase) και «Επιτρεπτή μείωση» (allowable decrease) για κάθε περιορισμό δίνονται τα όρια μέσα στα οποία μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί, αντίστοιχα, ο σταθερός του όρος χωρίς να αλλάξει το σύνολο των βασικών μεταβλητών. Οι συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών στη βέλτιστη λύση θα αλλάξουν και, κατά συνέπεια, θα αλλάξει και η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Δε θα αλλάξει, όμως, το ποιες μεταβλητές είναι βασικές και ποιες όχι.

Στο παράδειγμά μας, αν ο σταθερός όρος του δεύτερου περιορισμού, δηλ. τα διαθέσιμα κιλά μετάλλου, κυμαίνεται στο διάστημα [5500, 8000] θα εξακολουθήσουν να είναι βασικές οι δύο μεταβλητές που αντιστοιχούν στην παραγωγή K2 και K3.

4.4 Άλλα προγράμματα επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού

Σε μεγάλα προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού συνηθίζεται η χρήση εξειδικευμένων πληροφοριακών συστημάτων, όπως είναι το σύστημα LINDO.

Το Lindo είναι ένα πρόγραμμα για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

Παρέχει ένα δυναμικό γραφικό περιβάλλον για την υλοποίηση και επίλυση optimization problems και την επίλυση μεγάλης κλίμακας γραμμικών και integer μοντέλων. Υπευθυνή εταιρία είναι η LINDO Systems, Inc.

Γνωστη για τα προγράμματα σχετικά με Γραμμικό προγραμματισμό, με προγραμματισμό Ακεραίων, με Μη Γραμμικό προγραμματισμό αλλά και Δευτεροβάθμιο (Quadratic) προγραμματισμό.

Η LINDO Systems είναι ο κύριος προμηθευτής λογισμικού βελτιστοποίησης σε επιχειρήσεις, κυβερνητικές υπηρεσίες αλλά και Πανεπιστήμια παγκοσμίως. Επειδή μονίμως διερευνά και ικανοποιεί τις ανάγκες των χρηστών, η LINDO υπήρξε η πρώτη που ανέπτυξε λογισμικό για γραμμικό και μη γραμμικό προγραμματισμό στο PC, καθώς επίσης και λογισμικό βελτιστοποίησης για spreadsheets,

Τα βασικότερα πλεονεκτήματα αυτής της κατηγορίας προγραμμάτων επικεντρώνονται στα εξής σημεία:

- Χειρισμός μεγάλου μεγέθους Γραμμικού Προγραμματισμού
- Ταχύτητα επίλυσης
- Εισαγωγή δεδομένων στη ‘φυσική’ μαθηματική του μορφή

Η εισαγωγή των δεδομένων μπορεί να γίνει είτε άμεσα στο ίδιο το πρόγραμμα, είτε έμμεσα εάν τα δεδομένα έχουν αποθηκευτεί με κάποια εξειδικευμένη μορφοποίηση (π.χ. text, MPS format, κλπ). Στο σημείο αυτό θα πρέπει να προσεχθούν ιδιαίτερα τα εξής:

- Η αντικειμενική συνάρτηση χωρίζεται από τους περιορισμούς με τους χαρακτήρες st (ή subject to).
- Δεν απαιτείται η εισαγωγή των περιορισμών μη αρνητικότητας των μεταβλητών των απόφασης του προβλήματος.
- Μετά το τέλος των περιορισμών απαιτείται η εισαγωγή της λέξης END.

Η διόρθωση, προσθήκη ή αφαίρεση δεδομένων του προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι ιδιαίτερα εύκολη αφού το παράθυρο των δεδομένων έχει πολλές ομοιότητες με έναν απλό επεξεργαστή κειμένου (text editor).

Η επίλυση του προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού γίνεται με την εντολή ‘Solve-Solve’. Το πρόγραμμα δημιουργεί αυτόματα αναφορά επίλυσης και αναφορά ανάλυσης ευαισθησίας εφ όσον ζητηθεί.

4.4.1 Το πρόβλημα και η λύση του

Αλυσίδα super market με καταστήματα στην Περιφέρεια της Ηπείρου θέλει να οργανώσει μια δίμηνη διαφημιστική καμπάνια με σκοπό να αυξήσει το μερίδιο της στην αγορά. Για τον σκοπό αυτό διαθέτει συνολικά €15.000.

Αναθέτει λοιπόν σε διαφημιστική εταιρία να βρει την πιο συμφέρουσα λύση στην επιλογή των μέσων προβολής. Τα διαφημιστικά μέσα που έχει στην διάθεση της και έχει να επιλέξει για να διαφημιστεί είναι το ραδιόφωνο, η τηλεόραση και ο τύπος. Στην περιφέρεια της Ηπείρου υπάρχουν διαθέσιμοι 2 ραδιοφωνικοί σταθμοί, 4 εφημερίδες, 2 περιοδικά και 1 τηλεοπτικό κανάλι.

Στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 1) δίνονται αναλυτικά τα διαφημιστικά μέσα καθώς και οι αναμενόμενες μονάδες ακροαματικότητας για το καθένα από αυτά:

Πίνακας 1 Δεδομένα προβλήματος

Διαφημιστικό Μέσο	Μονάδες ακροαματικότητας
Ραδιοφωνικός Σταθμός 1	200
Ραδιοφωνικός Σταθμός 2	300
Ημερήσια Εφημερίδα 1	150
Ημερήσια Εφημερίδα 2	100
Εβδομαδιαία Εφημερίδα 1	300
Εβδομαδιαία Εφημερίδα 2	350
Εβδομαδιαίο Περιοδικό	300
Μηνιαίο Περιοδικό	400
Τηλεοπτικό Κανάλι	800

Ο Ραδιοφωνικός Σταθμός 1 χρεώνει €300 το πακέτο των 10 πρώτων εκπομπών στο οποίο περιλαμβάνεται και η δημιουργία της διαφήμισης και €20 για κάθε επιπλέον εκπομπή.

Ο Ραδιοφωνικός Σταθμός 2 χρεώνει €280 το πακέτο των 7 πρώτων εκπομπών στο οποίο περιλαμβάνεται και η δημιουργία της διαφήμισης και €25 για κάθε επιπλέον εκπομπή.

Η Ημερήσια Εφημερίδα 1 χρεώνει €70 την καταχώρηση, ενώ η Ημερήσια Εφημερίδα 2 χρεώνει €50 αντίστοιχα.

Η Εβδομαδιαία Εφημερίδα 1 χρεώνει €100 την καταχώρηση, ενώ η Εβδομαδιαία Εφημερίδα 2 χρεώνει €130 αντίστοιχα.

Το κόστος μιας καταχώρησης στο Εβδομαδιαίο Περιοδικό είναι €100, ενώ στο Μηνιαίο Περιοδικό είναι €150.

Τέλος το κόστος δημιουργίας του τηλεοπτικού spot είναι €500 ενώ η κάθε προβολή κοστίζει €200.

Οι ιδιοκτήτες του super market για λόγους ισορροπίας στην αγορά έθεσαν στην διαφημιστική εταιρία τους ακόλουθους περιορισμούς:

- Το ποσό που θα διατεθεί στο ραδιόφωνο να μην υπερβαίνει το 70% του ποσού που θα διατεθεί για την τηλεόραση.
- Να διατεθούν τουλάχιστον €2500 για καταχωρήσεις στις εφημερίδες και τουλάχιστον €1000 για καταχωρήσεις σε περιοδικά.
- Το ποσό που θα διατεθεί στον Ραδιοφωνικό Σταθμό 1 και στο Τηλεοπτικό Κανάλι μαζί, να μην διαφέρει περισσότερο από €1000 με το ποσό που θα διατεθεί συνολικά στον Ραδιοφωνικό Σταθμό 2 και τα περιοδικά.
- Το ποσό που θα διατεθεί στον Ραδιοφωνικό Σταθμό 2 να μην υπερβαίνει το ποσό που θα διατεθεί στον Ραδιοφωνικό Σταθμό 1 περισσότερο από €1800.

Το πρόβλημα που έχει η διαφημιστική εταιρία είναι να κατανείμει το ποσό των €15000 στα μέσα ενημέρωσης με τέτοιο τρόπο ώστε να πετύχει την μέγιστη δυνατή ακροαματικότητα. Για τον σκοπό αυτόν πρέπει να διαμορφωθεί το παραπάνω πρόβλημα σαν ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και στην συνέχεια να βρεθεί, αν υπάρχει, η βέλτιστη λύση.

Για να γίνει η διαμόρφωση του μαθηματικού μοντέλου θα πρέπει πρώτα να οριστούν οι μεταβλητές του προβλήματος, να οριστεί η αντικειμενική συνάρτηση και στην συνέχεια οι περιορισμοί του προβλήματος.

- Ο ραδιοφωνικός σταθμός 1 χρεώνει 300 ευρώ το πακέτο των πρώτων 10 εκπομπών στο οποίο περιλαμβάνεται η δημιουργία της διαφήμισης και 20 ευρώ για κάθε επιπλέον εκπομπή. Άρα ορίζουμε

x_1 = Ο Αριθμός των εκπομπών πέραν των πρώτων 10

Συνεπώς το κόστος για τον ραδιοφωνικό σταθμό 1 θα είναι:

$300+ 20x_1$

- Ο ραδιοφωνικός σταθμός 2 χρεώνει 280 ευρώ το πακέτο των πρώτων 7 εκπομπών στο οποίο περιλαμβάνεται η δημιουργία της διαφήμισης και 25 ευρώ για κάθε επιπλέον εκπομπή. Άρα ορίζουμε

x_2=Ο Αριθμός των εκπομπών πέραν των πρώτων 7

Συνεπώς το κόστος για τον ραδιοφωνικό σταθμό 2 θα είναι:

$280 + 25x_2$

- Το κόστος κάθε καταχώρησης στις εβδομαδιαίες εφημερίδες είναι 100 και 130 ευρώ για τις εφημερίδες 1 και 2 αντίστοιχα.

$x_5 \leq 8$ και

$x_6 \leq 8$

(Εφόσον η διαφήμιση είναι για 2 μήνες και θεωρούμε ότι ο μήνας έχει 4 εβδομάδες)

- Το κόστος κάθε καταχώρησης στις ημερήσιες εφημερίδες είναι 70 και 50 ευρώ για τις εφημερίδες 1 και 2 αντίστοιχα.

$x_3 \leq 40$ και

$x_4 \leq 40$ (Θεωρούμε ότι στο δίμηνο έχουμε 40 καθημερινές)

- Το κόστος μιας καταχώρησης στο εβδομαδιαίο περιοδικό είναι 100 ευρώ, ενώ στο μηνιαίο περιοδικό είναι 150 ευρώ.

$x_7 \leq 8$ και

$x_8 \leq 2$

Με βάση λοιπόν τις μονάδες ακροαματικότητας η αντικειμενική συνάρτηση την οποία θέλουμε να βελτιστοποιήσουμε είναι:

$$200(x_1+10)+300(x_2+7)+150x_3+100x_4+300x_5+350x_6+300x_7+400x_8+800x_9$$

Για τους περιορισμούς έχουμε:

- Συνολικά η εταιρεία έχει να διαθέσει 15.000 ευρώ.

Το κόστος για τον Ραδιοφωνικό Σταθμό 1 είναι: $300+20x_1$

Το κόστος για τον Ραδιοφωνικό Σταθμό 2 είναι: $280+25x_2$

Το κόστος για την Ημερήσια Εφημερίδα 1είναι: $70x_3$

Το κόστος για την Ημερήσια Εφημερίδα 2 είναι: $50x_4$

Το κόστος για την Εβδομαδιαία Εφημερίδα 1 είναι: $100x_5$

Το κόστος για την Εβδομαδιαία Εφημερίδα 2 είναι: $130x_6$

Το κόστος για το Εβδομαδιαίο Περιοδικό είναι $100x_7$

Το κόστος για το Μηνιαίο Περιοδικό είναι $150x_8$

Το κόστος για τον Τηλεοπτικό Σταθμό είναι: $500+200x_9$

Άρα το συνολικό ποσό και ο περιορισμός είναι:

$300+20x_1+280+25x_2+70x_3+50x_4+100x_5+130x_6+100x_7+150x_8+500+200x_9\leq 15000$

Στην συνέχεια πηγαίνουμε στην εντολή του Excel Επίλυση.

Εάν η εντολή Επίλυση δεν είναι διαθέσιμη στο μενού Εργαλεία, πρέπει να εγκαταστήσετε το πρόσθετο προγράμματος Επίλυση. Για να γίνει αυτό ακολουθούμε τα ακόλουθα βήματα:

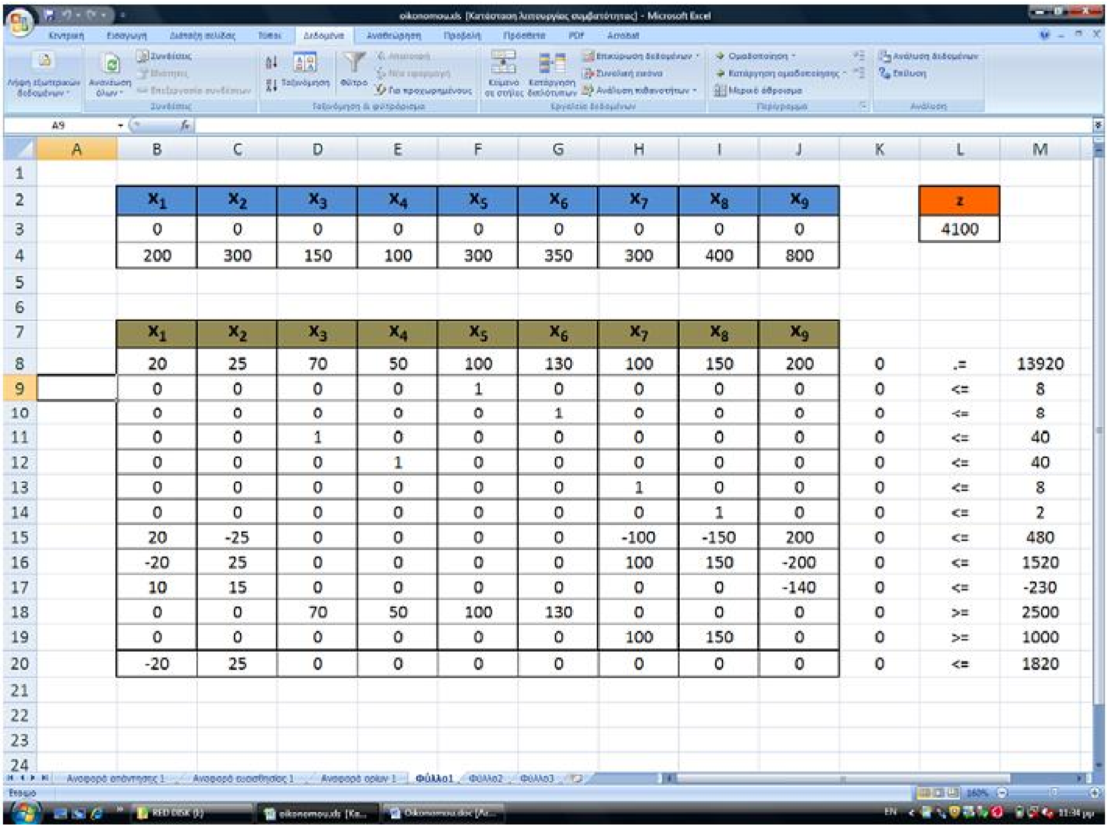
1) Από το μενού Εργαλεία, κάντε κλικ στην εντολή Πρόσθετα.

2) Εάν το πρόσθετο που θέλετε να χρησιμοποιήσετε δεν εμφανίζεται στη λίστα του πλαισίου Διαθέσιμα πρόσθετα, κάντε κλικ στο κουμπί Αναζήτηση, για να εντοπίσετε το πρόσθετο.

3) Στο πλαίσιο Διαθέσιμα πρόσθετα, επιλέξτε το πλαίσιο ελέγχου που βρίσκεται δίπλα στο πρόσθετο που θέλετε να φορτώσετε και μετά κάντε κλικ στο κουμπί OK.

Στην συνέχεια εισάγουμε το παραπάνω πρόβλημα για επίλυση στο Excel και έχουμε την ακόλουθη μορφή: (βλέπε πίνακα 2.)

Πίνακας 2



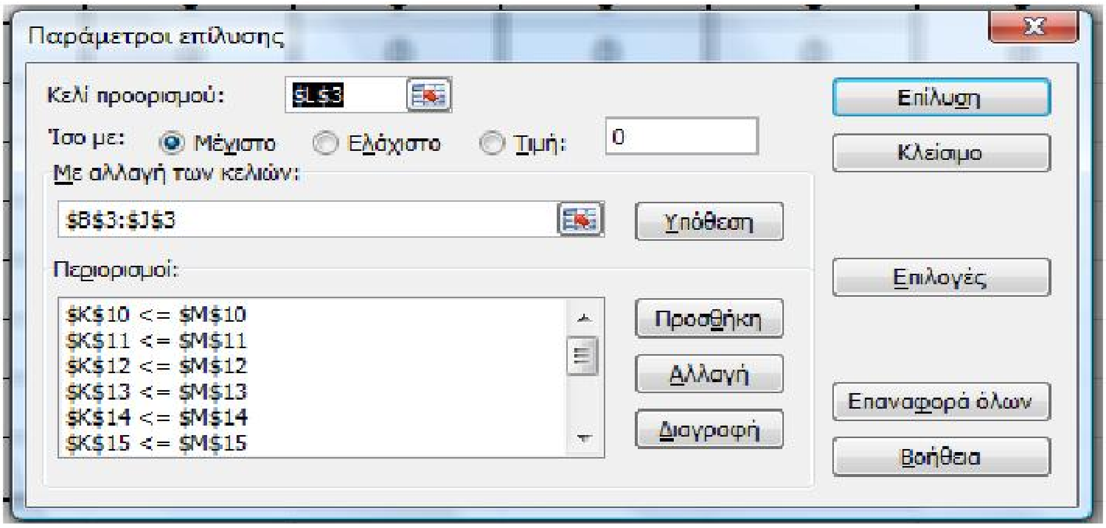
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9		z
	0	0	0	0	0	0	0	0	0		4100
	200	300	150	100	300	350	300	400	800		

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9			
20	25	70	50	100	130	100	150	200	0	.=	13920
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	<=	8
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	<=	8
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	<=	40
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	<=	40
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	<=	8
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	<=	2
20	-25	0	0	0	0	-100	-150	200	0	<=	480
-20	25	0	0	0	0	100	150	-200	0	<=	1520
10	15	0	0	0	0	0	0	-140	0	<=	-230
0	0	70	50	100	130	0	0	0	0	>=	2500
0	0	0	0	0	0	100	150	0	0	>=	1000
-20	25	0	0	0	0	0	0	0	0	<=	1820

Κατόπιν στο πλαίσιο Κελί προορισμού, (εδώ το κελί 'L4') πληκτρολογούμε την αναφορά κελιού. (Στο παράδειγμα μας '=SUMPRODUCT($B$3:$J$3;$B$4:$J$4)').

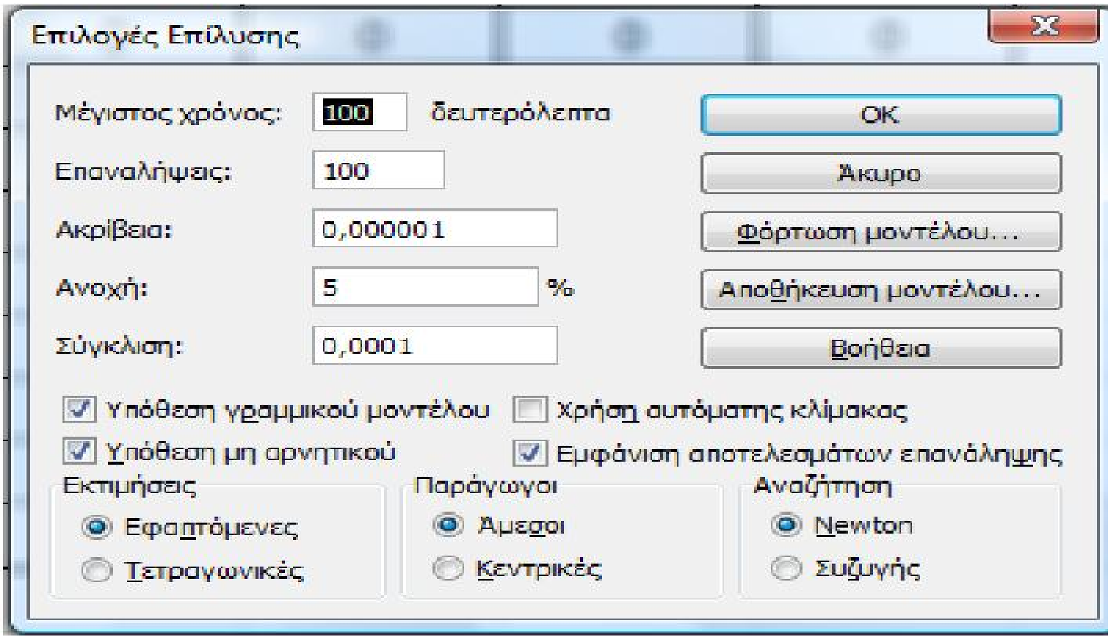
Στην συνέχεια για να λάβει το κελί προορισμού τη μέγιστη δυνατή τιμή του, κάνουμε κλικ στο κουμπί επιλογής Μέγιστο. Στο πλαίσιο Με αλλαγή των κελιών, πληκτρολογούμε το όνομα ή την αναφορά για κάθε ρυθμιζόμενο κελί , διαχωρίζοντας τις μη γειτονικές αναφορές με κόμμα. Τα ρυθμιζόμενα κελιά πρέπει να σχετίζονται άμεσα ή έμμεσα με το κελί προορισμού. (βλέπε πίνακα 3.)

Πίνακας 3



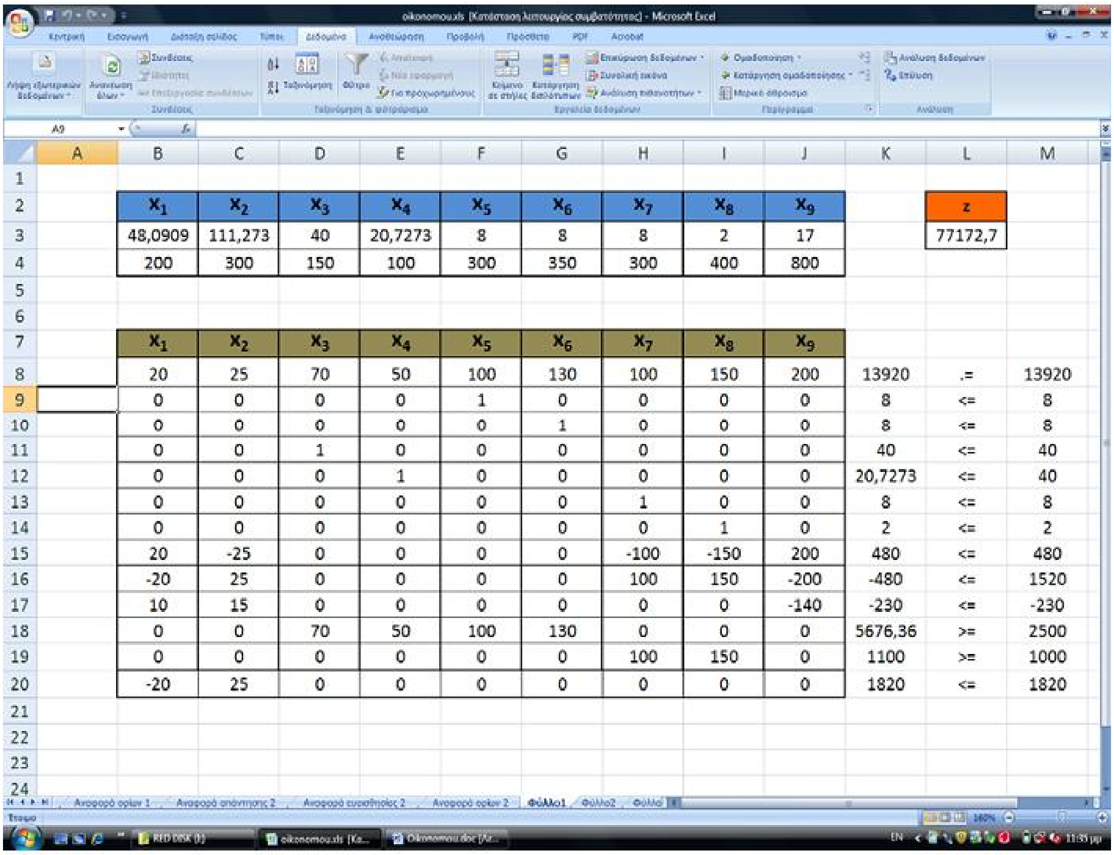
Εάν θέλουμε η Επίλυση να προτείνει αυτόματα τα ρυθμιζόμενα κελιά που βασίζονται στο κελί προορισμού, κάνουμε κλικ στο κουμπί Υπόθεση και στο πλαίσιο Περιορισμοί, πληκτρολογούμε τους περιορισμούς.(βλέπε πίνακα 4)

Πίνακας 4



Λύνουμε το πρόβλημα και βρίσκουμε τον ακόλουθο πίνακα.(βλέπε πίνακα 5)

Πίνακας 5



X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	z
48,0909	111,273	40	20,7273	8	8	8	2	17	77172,7
200	300	150	100	300	350	300	400	800	

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9			
20	25	70	50	100	130	100	150	200	13920	.=	13920
0	0	0	0	1	0	0	0	0	8	<=	8
0	0	0	0	0	1	0	0	0	8	<=	8
0	0	1	0	0	0	0	0	0	40	<=	40
0	0	0	1	0	0	0	0	0	20,7273	<=	40
0	0	0	0	0	0	1	0	0	8	<=	8
0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	<=	2
20	-25	0	0	0	0	-100	-150	200	480	<=	480
-20	25	0	0	0	0	100	150	-200	-480	<=	1520
10	15	0	0	0	0	0	0	-140	-230	<=	-230
0	0	70	50	100	130	0	0	0	5676,36	>=	2500
0	0	0	0	0	0	100	150	0	1100	>=	1000
-20	25	0	0	0	0	0	0	0	1820	<=	1820

Τελικό συμπέρασμα έχουμε ότι για την βέλτιστη κατανομή των πόρων πρέπει να κάνουμε:

58 καταχωρήσεις στον Ραδιοφωνικό Σταθμό 1

118 καταχωρήσεις στον Ραδιοφωνικό Σταθμό 2

40 καταχωρήσεις στην Ημερήσια Εφημερίδα 1

21 καταχωρήσεις στην Ημερήσια Εφημερίδα 2

8 καταχωρήσεις στην Εβδομαδιαία Εφημερίδα 1

8 καταχωρήσεις στην Εβδομαδιαία Εφημερίδα 2

8 καταχωρήσεις στο Εβδομαδιαίο Περιοδικό

2 καταχωρήσεις στο Μηνιαίο Περιοδικό

17 καταχωρήσεις στον Τηλεοπτικό Σταθμό

300+20x1+280+25x2+70x3+50x4+100x5+130x6+100x7+150x8+500+200x9

300+ 20* 48+ 280*25* 111+70 *40+ 50* 21 +100 *8+ 130* 8 +100* 8+ 150* 2 +500 +200 *17

Με τελικό συνολικό κόστος 15005 και οι τελικές μονάδες ακροαματικότητας είναι 77173. (Η διαφορά στο συνολικό κόστος οφείλεται στις στρογγυλοποιήσεις)

4.5 **Παράδειγμά με χρήση προγράμματος** Lindo

4.5.1 **Παραδείγμα** 1

Μια βιομηχανία παράγει ειδικά προστατευτικά για τζάκι στο χρονικό διάστημα από Δεκέμβριο μέχρι Μάρτιο. Στο χρόνο αυτό η ζήτηση παρουσιάζει σταδιακή αύξηση με αποκορύφωμα τη μέση της περιόδου. Εξ αιτίας της μεγάλης δυναμικής του προϊόντος στην αγορά η συγκεκριμένη βιομηχανία χρησιμοποιεί υπερωριακή απασχόληση προκειμένου να καλύψει την ζήτηση. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι παραγωγικές δυνατότητες της βιομηχανίας και η ζήτηση που εκδηλώνεται στο διάστημα των τεσσάρων μηνών:

Παραγωγική Δυνατότητα (capacity)			
Μήνας	Κανονική Απαχόληση (τεμάχια)	Υπερωριακή Απασχόληση (τεμάχια)	Ζήτηση (τεμάχια
1	90	50	100
2	100	60	190
3	120	80	210
4	110	70	160

Το κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος σε κάθε περίοδο είναι 6$ με κανονική απασχόληση και 9$ με υπερωριακή απασχόληση. Το κόστος αναμονής ανά μονάδα προϊόντος για κάθε μήνα είναι 0,10$ και το κόστος ελλειμμάτων για κάθε μήνα ανέρχεται σε 0,20$.

Παρακάτω περιγράφεται διαγραμματικά το μοντέλο και η επίλυσή του.

Συμβολίζουμε με Ri και Oi την κανονική και την υπερωριακή απασχόληση αντίστοιχα για τις περιόδους i = 1,2,3,4.

Επειδή η προσφορά του προϊόντος ξεπερνά την εκδηλωμένη ζήτηση, προσθέτουμε στον πίνακα έναν πλασματικό προορισμό (dummy) ο οποίος αντιστοιχεί στην περισσευόμενη δυνατότητα παραγωγής (αυτή που δεν θα χρησιμοποιηθεί τελικά). Σημειώνεται ότι καμία από τις «οδούς μεταφοράς» δεν μπλοκάρεται αφού επιτρέπονται κόστη ελλειμμάτων.

Το κόστος μεταφοράς ανά μονάδα προϊόντος από σταθμό παραγωγής (περίοδο και επίπεδο παραγωγής) σε σταθμό προορισμού (περίοδο κατανάλωσης) προκύπτει αθροίζοντας τα αντίστοιχα κόστη παραγωγής, αποθήκευσης και έλλειψης που αντιστοιχούν. Για παράδειγμα, το κόστος μονάδας προϊόντος από το R1 στηνπερίοδο 1 ισούται μόνο με 6$. Το κόστος μονάδας προϊόντος από το O_1 στην περίοδο 4 ισούται με το κόστος παραγωγής συν το κόστος αποθήκευσης για τις περιόδους 1 έως 4, δηλαδή 9$ + (0,1$ +0,1$ +0,1$) = 9,30$. Έχουμε επομένως το ακόλουθο tableau του προβλήματος μεταφοράς.

	1	2	3	4	Περίσσευμα	
R_1	6	6,1	6,2	6,3	0	90
O_1	9	9,1	9,2	9,3	0	50
R_2	6,2	6	6,1	6,2	0	100
O_2	6,2	9	9,1	9,2	0	60
R_3	6,4	6,2	6	6,1	0	120
O_3	9,4	9,2	9	9,1	0	80
R_4	6,6	6,4	6,2	6	0	110
O_4	9,6	9,4	9,2	9	0	70
	100	190	210	160	20	

Λόγω του μεγάλου πλήθους των πράξεων που απαιτούνται είναι καλό οι αντίστοιχοι υπολογισμοί να γίνουν χρησιμοποιώντας κάποιο λογισμικό βελτιστοποίησης. Χρησιμοποιούμε το λογισμικό LINGO της Lindo Software (www.lindo.com) που επιλύει προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού. Ο αντίστοιχος κώδικας του προγράμματος εμφανίζεται παρακάτω.

```
model:

! Transportation Problem 1;

SETS:

SOURCE / R1, O1, R2, O2, R3, O3, R4, O4/   :

CAPACITY;

 DESTINATION / D1, D2, D3, D4,

SURPLUS/ :

DEMAND;

   ROUTES( SOURCE, DESTINATION) :

COST, QUANTITY; ENDSETS

! The objective;  [OBJ] MIN =

@SUM( ROUTES: COST * QUANTITY);

 ! The demand constraints;

@FOR( DESTINATION( J): [DEM]

@SUM( SOURCE( I): QUANTITY( I, J)) >=

DEMAND( J));

 ! The supply constraints;

@FOR( SOURCE( I): [SUP]

@SUM( DESTINATION( J): QUANTITY( I, J)) <=     CAPACITY( I));
```

! Here are the parameters;

DATA:

CAPACITY = 90, 50, 100, 60, 120, 80, 110, 70;

DEMAND = 100, 190, 210,160, 20;

COST = 6.0, 6.1, 6.2, 6.3, 0.0,

9.0, 9.1, 9.2, 9.3, 0.0,

6.2, 6.0, 6.1, 6.2, 0.0,

6.2, 9.0, 9.1, 9.2, 0.0,

6.4, 6.2, 6.0, 6.1, 0.0,

9.4, 9.2, 9.0, 9.1, 0.0,

6.6, 6.4, 6.2, 6.0, 0.0,

9.6, 9.4, 9.2, 9.0, 0.0;

ENDDATA end

Με την εντολή Solve επιλύεται το παραπάνω πρόβλημα μεταφοράς και προκύπτει η ακόλουθη αναφορά λύσης. Όπως φαίνεται η βέλτιστη λύση βρέθηκε σε 13 επαναλήψεις του υποκείμενου αλγορίθμου. Η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στο ελάχιστο κόστος είναι 4523. Η αναφορά της λύσης περιέχει όλες τις παραμέτρους καθώς και τις τιμές των μεταβλητών στην άριστη λύση. Αρκεί επομένως να κοιτάξουμε τις μεταβλητές QUANTITY που μας δείχνουν ποιες ποσότητες πρέπει να μεταφερθούν από σταθμό παραγωγής σε σταθμό προορισμού.

Global optimal solution found at step: 13

Objective value: 4523.000

Variable	Value	Reduced Cost
CAPACITY(R1)	90.00000	0.0000000

CAPACITY(O1)	50.00000	0.0000000
CAPACITY(R2)	100.0000	0.0000000
CAPACITY(O2)	60.00000	0.0000000
CAPACITY(R3)	120.0000	0.0000000
CAPACITY(O3)	80.00000	0.0000000
CAPACITY(R4)	110.0000	0.0000000
CAPACITY(O4)	70.00000	0.0000000
DEMAND(D1)	100.0000	0.0000000
DEMAND(D2)	190.0000	0.0000000
DEMAND(D3)	210.0000	0.0000000
DEMAND(D4)	160.0000	0.0000000
DEMAND(SURPLUS)	20.00000	0.0000000
COST(R1, D1)	6.000000	0.0000000
COST(R1, D2)	6.100000	0.0000000
COST(R1, D3)	6.200000	0.0000000
COST(R1, D4)	6.300000	0.0000000
COST(R1, SURPLUS)	0.0000000	0.0000000
COST(O1, D1)	9.000000	0.0000000
COST(O1, D2)	9.100000	0.0000000
COST(O1, D3)	9.200000	0.0000000
COST(O1, D4)	9.300000	0.0000000
COST(O1, SURPLUS)	0.0000000	0.0000000
COST(R2, D1)	6.200000	0.0000000

COST(R2, D2)	6.000000	0.0000000
COST(R2, D3)	6.100000	0.0000000
COST(R2, D4)	6.200000	0.0000000
COST(R2, SURPLUS)	0.0000000	0.0000000
COST(O2, D1)	6.200000	0.0000000
COST(O2, D2)	9.000000	0.0000000
COST(O2, D3)	9.100000	0.0000000
COST(O2, D4)	9.200000	0.0000000
COST(O2, SURPLUS)	0.0000000	0.0000000
COST(R3, D1)	6.400000	0.0000000
COST(R3, D2)	6.200000	0.0000000
COST(R3, D3)	6.000000	0.0000000
COST(R3, D4)	6.100000	0.0000000
COST(R3, SURPLUS)	0.0000000	0.0000000
COST(O3, D1)	9.400000	0.0000000
COST(O3, D2)	9.200000	0.0000000
COST(O3, D3)	9.000000	0.0000000
COST(O3, D4)	9.100000	0.0000000
COST(O3, SURPLUS)	0.0000000	0.0000000
COST(R4, D1)	6.600000	0.0000000
COST(R4, D2)	6.400000	0.0000000
COST(R4, D3)	6.200000	0.0000000
COST(R4, D4)	6.000000	0.0000000

COST(R4, SURPLUS)	0.0000000	0.0000000
COST(O4, D1)	9.600000	0.0000000
COST(O4, D2)	9.400000	0.0000000
COST(O4, D3)	9.200000	0.0000000
COST(O4, D4)	9.000000	0.0000000
COST(O4, SURPLUS)	0.0000000	0.0000000
QUANTITY(R1, D1)	40.00000	0.0000000
QUANTITY(R1, D2)	40.00000	0.0000000
QUANTITY(R1, D3)	10.00000	0.0000000
QUANTITY(R1, D4)	0.0000000	0.3000000
QUANTITY(R1, SURPLUS)	0.0000000	3.000000
QUANTITY(O1, D1)	0.0000000	0.0000000
QUANTITY(O1, D2)	50.00000	0.0000000
QUANTITY(O1, D3)	0.0000000	0.0000000
QUANTITY(O1, D4)	0.0000000	0.3000000
QUANTITY(O1, SURPLUS)	0.0000000	0.0000000
QUANTITY(R2, D1)	0.0000000	0.3000000
QUANTITY(R2, D2)	100.0000	0.0000000
QUANTITY(R2, D3)	0.0000000	0.0000000
QUANTITY(R2, D4)	0.0000000	0.3000000
QUANTITY(R2, SURPLUS)	0.0000000	3.100000
QUANTITY(O2, D1)	60.00000	0.0000000
QUANTITY(O2, D2)	0.0000000	2.700000

QUANTITY(O2, D3)	0.0000000	2.700000
QUANTITY(O2, D4)	0.0000000	3.000000
QUANTITY(O2, SURPLUS)	0.0000000	2.800000
QUANTITY(R3, D1)	0.0000000	0.6000000
QUANTITY(R3, D2)	0.0000000	0.3000000
QUANTITY(R3, D3)	120.0000	0.0000000
QUANTITY(R3, D4)	0.0000000	0.3000000
QUANTITY(R3, SURPLUS)	0.0000000	3.200000
QUANTITY(O3, D1)	0.0000000	0.6000000
QUANTITY(O3, D2)	0.0000000	0.3000000
QUANTITY(O3, D3)	80.00000	0.0000000
QUANTITY(O3, D4)	0.0000000	0.3000000
QUANTITY(O3, SURPLUS)	0.0000000	0.2000000
QUANTITY(R4, D1)	0.0000000	0.6000000
QUANTITY(R4, D2)	0.0000000	0.3000000
QUANTITY(R4, D3)	0.0000000	0.0000000
QUANTITY(R4, D4)	110.0000	0.0000000
QUANTITY(R4, SURPLUS)	0.0000000	3.000000
QUANTITY(O4, D1)	0.0000000	0.6000000
QUANTITY(O4, D2)	0.0000000	0.3000000
QUANTITY(O4, D3)	0.0000000	0.0000000
QUANTITY(O4, D4)	50.00000	0.0000000
QUANTITY(O4, SURPLUS)	20.00000	0.0000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
OBJ	4523.000	1.000000
DEM(D1)	0.0000000	-9.000000
DEM(D2)	0.0000000	-9.100000
DEM(D3)	0.0000000	-9.200000
DEM(D4)	0.0000000	-9.000000
DEM(SURPLUS)	0.0000000	0.0000000
SUP(R1)	0.0000000	3.000000
SUP(O1)	0.0000000	0.0000000
SUP(R2)	0.0000000	3.100000
SUP(O2)	0.0000000	2.800000
SUP(R3)	0.0000000	3.200000
SUP(O3)	0.0000000	0.2000000
SUP(R4)	0.0000000	3.000000
SUP(O4)	0.0000000	0.0000000

Η παραπάνω αναφορά της λύσης περιέχει και τις δυικές τιμές των περιορισμών οι οποίες μπορούν να μας βοηθήσουν στην ανάλυση ευαισθησίας του προβλήματος, δηλαδή στη μελέτη για το αν και πως επηρεάζεται η βέλτιστη λύση αν κάποιες από τις παραμέτρους του προβλήματος αλλάξουν (π.χ. αύξηση στα κόστη παραγωγής ή αποθήκευσης κλπ.). Το LINDO επιπλέον προσφέρει και αυτοματοποιημένη ανάλυση ευαισθησίας. Δεν θα υπεισέλθουμε όμως σε αυτές τις τεχνικές που εκφεύγουν από τους σκοπούς αυτής της εργασίας.

Η περιγραφή της βέλτιστης λύσης που προέκυψε συνοψίζεται στον ακόλουθο πίνακα:

Περίοδος	Πρόγραμμα Παραγωγής
Κανονική Απασχόληση 1	Παραγωγή 90 τμχ, για διάθεση 40 τμχ στην περίοδο1, 40 τμχ στην περίοδο 2 και 10 τμχ στην περίοδο 3
Υπερωριακή Απασχόληση 1	Παραγωγή 50 τμχ, για διάθεση στην περίοδο 2
Κανονική Απασχόληση 2	Παραγωγή 100 τμχ, για διάθεση στην περίοδο2
Υπερωριακή Απασχόληση 2	Παραγωγή 60 τμχ, για διάθεση (ικανοποίηση ελλείματος) στην περίοδο1
Κανονική Απασχόληση 3	Παραγωγή 120 τμχ, για διάθεση στην περίοδο3
Υπερωριακή Απασχόληση 3	Παραγωγή 80 τμχ, για διάθεση στην περίοδο3
Κανονική Απασχόληση 4	Παραγωγή 110 τμχ, για διάθεση στην περίοδο 4
Υπερωριακή Απασχόληση 4	Παραγωγή 50 τμχ, για διάθεση στην περίοδο 4 με 20 τμχ αχρησιμοποίητη δυνατότητα παραγωγής

Το συνολικό κόστος παραγωγής θα είναι όπως είδαμε (λύση LINDO) 4523$.

4.5.2 **Παράδειγμά** 2

Έστω ότι x_1, x_2, x_3 και x_4 αντιπροσωπεύουν τους αριθμούς των μονάδων των προϊόντων 1, 2, 3 και 4 αντίστοιχα, τα οποία θα παραχθούν την επόμενη περίοδο. Σκοπός είναι η μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους, χρησιμοποιώντας τους περιορισμούς για τις τρεις μηχανές Α, Β και Γ. Το πρόβλημα μετατράπηκε σε πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού σύμφωνα με το ακόλουθο μοντέλο:

$\text{Maxf} = 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4$

και

$1.5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 < 550$ (ώρες μηχανής Α)

$4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 < 700$ (ώρες μηχανής Β)

$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 < 200$ (ώρες μηχανής Γ)

$x_1, x_2, x_3. x_4 > 0$

Η λύση που προέκυψε χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα LINDO έχει ως εξής:

: LOOK ALL

MAX $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4$

SUBJECT TO

2) $1.5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 < 550$

3) $4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 < 700$

4) $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 < 200$

END

: GO

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 525.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
x_1	.000000	.050000
x_2	25.000000	.000000
χ_3	125.000000	.000000
x_4	.000000	3.500000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	.300000
3)	425.000000	.000000
4)	.000000	1.800000

NO. ITERATIONS = 2

DO RANGE(SENSITIVITY) ANALYSIS?

?yes

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	4.000000	.050000	INFINITY
X 2	6.000000	3.000000	.076923
X3	3.000000	9.000000	.999999
X4	1.000000	3.500000	INFINITY

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2)	550.000000	250.000000	416.666600
3)	700.000000	INFINITY	425.000000
4)	200.000000	625.000000	62.500000

Συμπεράσματα

1. Ο Γραμμικός Προγραμματισμός ασχολείται με το πρόβλημα της κατανομής των περιορισμένων πόρων ενός συστήματος, σε ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες και αναζητά μεταξύ όλων των εναλλακτικών σχεδιασμών εκείνον ο οποίος θα οδηγήσει στο άριστο αποτέλεσμα.

2. Όλα τα προβλήματα του Γραμμικού Προγραμματισμού περιλαμβάνουν την μεγιστοποίηση / ελαχιστοποίηση μιας γραμμικής συνάρτησης (αντικειμενική συνάρτηση) που υπόκειται σε ένα σύνολο γραμμικών περιορισμών.

3. Τα κύρια συστατικά ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι οι μεταβλητές απόφασης, οι περιορισμοί, που θα πρέπει να ενσωματώσουμε στις μεταβλητές ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες του προβλήματος και ένας αντικειμενικός στόχος που θα πρέπει να επιτευχθεί.

4. Σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης, άριστη ή βέλτιστη λύση ονομάζεται κάθε εφικτή λύση, η οποία μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.

5. Η γραφική μέθοδος συνίσταται στην γραφική απεικόνιση των περιορισμών και επομένως στον καθορισμό της περιοχής της εφικτής λύσης, της αντικειμενικής συνάρτησης και στον καθορισμό της άριστης λύσης.

6. Η θεμελιώδης απαίτηση της γραμμικότητας εξασφαλίζεται στο πρότυπο του Γραμμικού Προγραμματισμού από την υπόθεση της αναλογικότητας και της προσθετικότητας.

7. Η μέθοδος Simplex είναι μια υπολογιστική επαναληπτική τεχνική για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού η οποία βασίζεται στη συστηματική δημιουργία βασικών εφικτών λύσεων του προβλήματος με ταυτόχρονο έλεγχο της αριστότητάς του. Στην μέθοδο Simplex το πρώτο στάδιο είναι η εξεύρεση μιας βασικής εφικτής λύσης η οποία εξετάζεται για αριστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης και εάν υπάρχει μια δυνατή λύση τότε υπάρχει και μια βασική δυνατή λύση.

8. Η μέθοδος της τεχνητής βάσης αποτελεί έναν ικανοποιητικό τρόπο για την έναρξη της μεθόδου Simplex.

Βιβλιογραφία

Ελληνικη

- Αβδελάς Γ. - Σίμος Θ., (2001), *'Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα'*, Αθήνα: Εκδόσεις Συμεών.

- Βασιλείου Π. - Χ. Γ., (1997), *'Εφαρμοσμένος Μαθηματικός προγραμματισμός, θεωρία και ασκήσεις'*, Β' Τόμος, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Π. ΖΗΤΗ.

- Γραμμικός προγραμματισμός Σημειώσεις, Μετσόβειο Πολυτεχνείο, Διαθέσιμο στο http://www.math.ntua.gr/~coletsos/Documents/linearprogramming.pdf

- Γραμμικός Προγραμματισμός, Πανεπιστήμιου Αιγαίου, Διαθέσιμο στο http://www.math.aegean.gr/eedip/ctsag/homepage/Operational%20Research/NOTES31.pdf

- Εισαγωγη στα γραμμικά προβλήματα, Πανεπιστιμιο Μακεδονίας, Διαθέσιμο στο https://dspace.lib.uom.gr/bitstream/2159/234/6/%CE%9A%CE%B5%CF%86%CE%AC%CE%BB%CE%B1%CE%B9%CE%BF_1.pdf

- Επιχειρησιακή έρευνα, (1998), 'Γραμμικός προγραμματισμός και μέθοδος SIMPLEX', Ανάκτηση 18-03-2013 από www.google.gr

- Καρκαζής Ι., (1988), *'Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα'*, Χίος: Εκδόσεις Κ. Σμπίλιας «Το Οικονομικό».

- Κολέτσος, Μετσόβειο Πολυτεχνείο, Γραμμικός προγραμματισμός - Μέθοδος simplex - Διαθέσιμο στο http://www.math.ntua.gr/~coletsos/Documents/method%20Simplex.pdf

- Λουκάκης Μ., (1994), '*Γραμμικός Προγραμματισμός, αριστοποίηση σε δίκτυα*', Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Σοφία.

- Μπότσαρης Χ., *'Επιχειρησιακή Έρευνα'*, Τόμος Ι, Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα.

- Παπαρρίζος Κ., (1999), *‘Γραμμικός Προγραμματισμός Αλγόριθμοι και Εφαρμογές’*, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζυγός.

- Σίσκος Γ., (1998), *‘Γραμμικός Προγραμματισμός’*, Αθήνα: Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.

- Τσακλάγκανος Α., (1980), *‘Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα για την λήψη Επιχειρηματικών Αποφάσεων’*, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Αφοί Κυριακίδη.

- Υψηλάντης Π., (1998), *‘Επιχειρησιακή Έρευνα, Λήψη Επιχειρηματικών Αποφάσεων’*, Αθήνα: Εκδόσεις Ελλήν.

- Φακίνος Δ. - Οικονόμου Α., (2003), *‘Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα-θεωρία και Ασκήσεις’*, Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία.

- Ψωϊνός Δ.Π. (1999), *‘Ποσοτική Ανάλυση’, Τόμος Ι*, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Ξενη

- B. Jansen, J.J. de Jong, C. Roos, T. Terklay, Sensitivity analysis in linear programming: just be careful!, European Journal of Operational Research 101 (1997) 15-28.

- Chi-Jen Lin, Ue-Pyng Wen, Sensitivity analysis of the optimal assignment, European Journal of Operational Research 149 (2003) 35-46.

- G. Knolmayer, The effects of degeneracy on cost-coefficient ranges and an algorithm to resolve interpretation problems, Decision Sciences 15 (1984) 14-21.

- Hillier F.S. - Lieberman G.J., (1984), ‘*Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*’, Τόμος Α, Αθήνα: Εκδόσεις Παπαζήση.

- M. Akgul, A note on shadow prices in linear programming, Journal of the Operational Research Society 35 (1984) 425-431.

- T. Gal, Linear Programming 2: Degeneracy graphs, in: T. Gal, H.J. Grennberg (Eds), Advances in Sensitivity Analysis and Parametric Programming, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1997.

- T. Gal, Post-optimal Analyses, Parametric Programming, and Related Topics: Degeneracy, Multi-criteria Decision-Making, and Redundancy, second ed., W. deGruyter, Berlin, 1995.

- T. Koltai, T. Terklay, The difference between the managerial and mathematical interpretation of sensitivity analysis results in linear programming, International Journal of Production Economics 65 (2000) 257-274.

Διαδικτυακες

- www.unipi.gr

- www.wikipedia.gr