ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

Μέθοδοι ολοκλήρωσης και εφαρμογές

$$\int f(x)dx$$

Πτυχιακή εργασία, του Ανδρέα Μακρυγιάννη Α.Μ. 6357

Επιβλέπων καθηγητής κ. Παναγιώτης Παπασωτηρίου

Πάτρα, 2011

Περιεχόμενα.

Ευχαριστήριο.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέπων καθηγητή μου, κ Παναγιώτη Παπασωτηρίου, για την υποστήριξη που μου πρόσφερε, τις πολύτιμες συμβουλές που μου παρείχε και την εμπιστοσύνη και υπομονή που μου έδειξε ώστε να εκπονηθεί αυτή η πτυχιακή εργασία.

Εισαγωγή.

Σκοπός της πτυχιακής εργασίας είναι να λειτουργήσει ως ένα βοήθημα για τον αναγνώστη-σπουδαστή, όπου θα μπορεί να το χρησιμοποιεί κατά την διάρκεια των σπουδών του για να κατανοήσει και να επιλύσει διάφορα θέματα ή προβλήματα που ίσως τύχει να αντιμετωπίσει. Η πτυχιακή εργασία που έχει ως θέμα τις μεθόδους ολοκλήρωσης και εφαρμογές των ολοκληρωμάτων, καλύπτει το θεωρητικό τμήμα των αορίστων ολοκληρωμάτων και των ορισμένων. Επίσης περιέχονται ασκήσεις και μεθοδολογία ασκήσεων για την περαιτέρω κατανόηση του θέματος. Επίσης θα αναφερθούμε σε μεθόδους ολοκλήρωσης, όπου θα αναλυθούν διάφορες μέθοδοι ανάλογα με την μορφή του ολοκληρώματος ώστε να είναι εφικτή η επίλυση του. Τέλος θα εξηγήσουμε την αναγκαιότητα των ολοκληρωμάτων στα εφαρμοσμένα μαθηματικά και θα παρουσιάσουμε διάφορες εφαρμογές των ολοκληρωμάτων επάνω σε διάφορα θέματα, όπου η χρήση ολοκληρωμάτων είναι απαραίτητη.

Αναλυτικά, αρχικά στο πρώτο κεφάλαιο θα αναφερθούμε στον ορισμό, έννοια και συμβολισμό του αόριστου ολοκληρώματος, όπως και επίσης στη μεθοδολογία επίλυσης, ιδιότητες των αορίστων ολοκληρωμάτων και παρουσιαστούν ασκήσεις των οποίων η επίλυση βασίζεται στην μεθοδολογία και στον πίνακα δεδομένων ολοκληρωμάτων.

Έπειτα θα γίνει αναφορά στο ορισμένο ολοκλήρωμα, όπου αρχικά θα παρουσιαστεί η εφαρμογή του για την ακριβή μέτρηση ενός μεσοδιαστήματος μίας γραφικής παράστασης, εν αντιθέσει με την μέθοδο κατάτμησης σε ορθογώνια, όπου παρουσιάζονται αποκλίσεις. Στη συνέχεια θα οριστεί το ορισμένο ολοκλήρωμα και θα επιλυθούν ασκήσεις βάση των ιδιοτήτων του ορισμένου ολοκληρώματος.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα αναλυθούν οι μέθοδοι ολοκλήρωσης, οι οποίες ασχολούνται με πολύπλοκα ολοκληρώματα ή ειδικών μορφών ολοκληρώματα, των οποίων ο υπολογισμός δεν είναι εφικτός χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες ή και τον πίνακα δεδομένων ολοκληρωμάτων. Οι μέθοδοι που περιέχονται στην πτυχιακή εργασία είναι οι εξείς:

- Η μέθοδος με αντικατάσταση, όπου αντικαθιστούμε την συνάρτηση εντός του ολοκληρώματος με μια άλλη για ευκολότερο υπολογισμό. Η μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, η οποία εφαρμόζεται σε ολοκληρώματα που περιέχουν γινόμενο συναρτήσεων.
- Η μέθοδος ολοκλήρωσης τριγωνομετρικών συναρτήσεων, όπου βασίζεται στην επίλυση των ολοκληρωμάτων, που περιέχουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις, είτε χρησιμοποιώντας τύπους μετατροπής τριγωνομετρικών συναρτήσεων, είτε εκφράζοντας τις συναρτήσεις αυτές σε πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου.
- Η μέθοδος ολοκλήρωσης μερικών κλασμάτων η οποία αφορά ολοκληρώματα τα οποία περιέχουν πηλίκο ρητών συναρτήσεων και τον χωρισμό αυτών σε κλάσματα.

Τέλος θα αναφερθούμε στους τύπους ανάταξης, το οποίο είναι ένα τυπολόγιο για την επίλυση ολοκληρωμάτων, των οποίων οι περιεχόμενες συναρτήσεις είναι υψωμένες σε κάποια δύναμη.

Το τρίτο κεφάλαιο αφορά της εφαρμογές των ολοκληρωμάτων σε διάφορα θέματα και την αναγκαιότητα χρήσης τους επάνω σε διάφορα πρακτικά προβλήματα όπου απαιτείται μία βέλτιστη λύση. Αυτά περιλαμβάνουν τον υπολογισμό εμβαδού χωρίου και τον υπολογισμό της ταχύτητας ή του διαστήματος που διένυσε ένα αντικείμενο. Επίσης θα αναφερθούμε σε οικονομικής φύσης προβλήματα που αξιοποιούν την εφαρμογή των ολοκληρωμάτων και παρουσιάζονται συχνά στις οικονομικές επιστήμες. Αυτά είναι η εύρεση οριακού κόστους και οριακών εσόδων, το πλεόνασμα παραγωγού-πλεόνασμα καταναλωτή, την επενδυτική ροή με την οποία υπολογίζουμε την συσσώρευση χρηματικών κεφαλαίων, την προεξόφληση για τον υπολογισμό μιας παρούσας αξίας και τέλος με το θεώρημα της μέσης τιμής συνάρτησης, το οποίο θα τα εφαρμόσουμε για τον υπολογισμό μέσης απογραφής μίας επιχείρησης

ΜΕΡΟΣ Α’

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

1.1 Ιστορική αναδρομή ολοκληρώματος.

Οι αρχές της ολοκλήρωσης διατυπώθηκαν από τον Isaac Newton και τον Gottfried Leibniz στο τέλος του 17ου αιώνα. Μέσα από το θεμελιώδες *θεώρημα του απειροστικού λογισμού*, που ανέπτυξαν ανεξάρτητα, η ολοκλήρωση συνδέεται με την παραγώγιση και το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης μπορεί εύκολα να υπολογιστεί μόλις γίνει γνωστή η αντιπαράγωγος. Τα ολοκληρώματα και οι παράγωγοι έγιναν τα βασικά εργαλεία του απειροστικού λογισμού, με πολυάριθμες εφαρμογές σε ένα πλήθος επιστημών.

Ένας αυστηρός μαθηματικός ορισμός του ολοκληρώματος δόθηκε από τον Bernhard Riemann. Βασίζεται σε ένα όριο που προσεγγίζει την επιφάνεια μιας καμπυλόγραμμης περιοχής τεμαχίζοντας την σε υποπεριοχές χρησιμοποιώντας κάθετες λωρίδες. Τον 19ο αιώνα άρχισαν να εμφανίζονται πιο εξελιγμένες έννοιες του ολοκληρώματος, όπου γενικεύθηκαν ο τύπος της συνάρτησης όπως και το πεδίο ορισμού της ολοκλήρωσης. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ορίζεται για συναρτήσεις δύο ή τριών μεταβλητών, και το διάστημα της ολοκλήρωσης $[a,b]$ αντικαθίστανται από μια καμπύλη μεταξύ δυο σημείων του επιπέδου ή του χώρου. Στο επιφανειακό ολοκλήρωμα, η καμπύλη αυτή αντικαθίσταται από μία επιφάνεια στον τρισδιάστατο χώρο. Τα ολοκληρώματα διαφορικής μορφής παίζουν θεμελιώδη ρόλο στη σύγχρονη διαφορική γεωμετρία. Αυτές οι γενικεύσεις του ολοκληρώματος αρχικά εξελίχθηκαν από τις ανάγκες της φυσικής, και παίζουν σημαντικό ρόλο στη διατύπωση πολλών φυσικών νόμων, κυρίως αυτών της ηλεκτροδυναμικής. Σύγχρονες έννοιες της ολοκλήρωσης βασίζονται στην αφηρημένη μαθηματική θεωρία γνωστή ως ολοκλήρωμα Lebesgue, που αναπτύχθηκε από τον Henry Lebesgue.

1.1.2 Το σύμβολο $\int$.

Για την πράξη της ολοκλήρωσης χρησιμοποιείται το σύμβολο $\int$ το οποίο προέρχεται από την επιμήκυνση του γράμματος S, πρώτου γράμματος της λέξης summa που σημαίνει άθροισμα.

Το σύμβολο $\int$ της ολοκλήρωσης εισήχθη στα μαθηματικά από τον Gottfried Leibniz . Πρωτοεμφανίστηκε δημοσίως σε μια εργασία του *De*

Geometria στο επιστημονικό περιοδικό *Acta Eruditorum* τον Ιούνιο του 1686, αλλά σύμφωνα με αναφορές το χρησιμοποιούσε σε προσωπικά του έγγραφα από το 1675.

1.2 Αόριστο ολοκλήρωμα.

Ξέρουμε ότι η παραγώγιση μίας συνάρτησης λέγεται η εύρεση της παραγώγου της $F'(x) = f(x)$.

Η αντίστροφη πράξη της παραγώγισης λέγεται ολοκλήρωση. Δηλαδή ολοκλήρωση είναι η εύρεση της συνάρτησης $F(x)$όταν γνωρίζουμε την παράγωγο $f(x)$ αυτής.

1.2.1 Ορισμός αορίστου ολοκληρώματος.

Μία συνάρτηση $F(x)$, $x \in D \subseteq \mathbb{R}$, ονομάζεται παράγουσα ή αόριστο ολοκλήρωμα μίας άλλης συναρτήσεως $f(x)$, στο διάστημα D, όταν:

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall\, x \in D.$$

Για παράδειγμα η $F(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, είναι μία παράγουσα, ή ένα αόριστο ολοκλήρωμα, της $f(x) = x$, διότι

$$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x = f(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

1.2.2 Συμβολισμός αορίστου ολοκληρώματος.

Αν $F(x)$ είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$ στο διάστημα $D \subseteq \mathbb{R}$, τότε κάθε αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$ θα το παριστάνουμε με το σύμβολο

$$\int f(x)\, dx.$$

Δηλαδή θα είναι, $\int f(x) dx = F(x) + C$, όπου $x \in D$ και C είναι αυθαίρετη σταθερή ποσότητα.

Το σύμβολο $\int$ ονομάζεται σύμβολο της ολοκληρώσεως, η συνάρτηση $f(x)$ ολοκληρωτέα συνάρτηση και η C σταθερή της ολοκληρώσεως.

Η συνάρτηση $F(x) + C$ ονομάζεται και παράγουσα ή αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$. Ολοκλήρωση μίας συνάρτησης $f(x)$ είναι η εύρεση της παράγουσας της $F(x)$.

1.3. Υπολογισμός Αόριστου ολοκληρώματος.

Έχοντας πια γνώση για την έννοια και την ερμηνεία του αόριστου ολοκληρώματος θα αναφερθούμε σε αυτό το κεφάλαιο στον υπολογισμό αυτού. Απόλυτος κανόνας ολοκλήρωσης δεν υπάρχει, γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ιδιότητες που έχουν τα ολοκληρώματα όπως και επίσης σε τεχνικές ολοκλήρωσης και άλλες τακτικές.

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος δεν είναι καθόλου απλή υπόθεση στις περισσότερες περιπτώσεις. Η διαδικασία εύρεσης του ολοκληρώματος είναι στην πραγματικότητα η προσπάθεια εύρεσης της αρχικής παράστασης. Δηλαδή εκτελούμε μια διαδικασία αντίστροφη της παραγώγισης. Άρα για να βρούμε ένα ολοκλήρωμα πρέπει να έχουμε γνώσεις των κανόνων παραγώγισης. Επίσης πρέπει να έχουμε κάποια ικανότητα να σκεφτούμε ποια είναι η συνάρτηση που αν την παραγωγίσουμε να μας δώσει την προς ολοκλήρωση συνάρτηση.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τον τρόπο με τον οποίο θα προσπαθούμε να σκεφτούμε την αρχική συνάρτηση θα χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα το οποίο θα αναλυθεί βήμα προς βήμα.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η συνάρτηση της οποίας όταν η παράγωγος μας δίνει την συνάρτηση $f(x) = x^4 + 3x - 9$.

Λύση:

Αρχικά θα παραγωγίσουμε την $f(x)$, της οποίας η παράγωγος θα μας βοηθήσει να προσεγγίσουμε αυτό το πρόβλημα. Η παράγωγος της $f(x)$ είναι

$$f'(x) = 4x^3 + 3.$$

Σύμφωνα με τους κανόνες παραγώγισης όταν παραγωγίζουμε έναν όρο υψωμένο σε κάποια δύναμη x^n, πολλαπλασιάζουμε με τον αρχικό εκθέτη τον όρο μας και μετά ο εκθέτης μειώνεται κατά ένα.

Επιστρέφουμε στο πρόβλημα μας και ασχολούμαστε αρχικά με τον πρώτο όρο μας. Ο όρος x^4 λογικά είναι το αποτέλεσμα παραγώγισης του x^5. Όμως όπως αναφέραμε πριν κατά την παραγώγιση ο εκθέτης κατεβαίνει και πολλαπλασιάζεται με τον όρο x.Δηλαδή το x^5 είναι κατά πέντε φορές μεγαλύτερο όταν παραγωγιστεί, άρα το ο πρώτος όρος που ζητάμε είναι το $\frac{1}{5}x^5$. Ομοίως κάνουμε και με τον δεύτερο όρο. Αυξάνουμε κατά ένα τον εκθέτη του κ τον διαιρούμε με τον νέο εκθέτη, έτσι ο δεύτερος όρος είναι το $\frac{3}{2}x^2$. Τέλος γνωρίζουμε ότι όταν παραγωγίζουμε το x το αποτέλεσμα είναι μονάδα. Άρα φαίνεται ότι εδώ παραγωγίστηκε το $-9x$.

Τοποθετώντας όλους τους όρου μαζί καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση $F(x)$, η οποία όταν παραγωγιστεί δίνει την $f(x)$ είναι η

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^2 - 9x.$$

Για να επαληθεύσουμε τις $f(x)$ παραγωγίζουμε, οπότε

$$F'(x) = x^4 + 3x - 9 = f(x).$$

Επομένως όντως βρήκαμε την συνάρτηση που ψάχναμε.

Προσοχή όμως, αυτή είναι μία από τις δυνατές συναρτήσεις. Αυτό γιατί όταν παραγωγίζεται ένας σταθερός όρος είναι ίσος με το μηδέν. Θα μπορούσε εύκολα η συνάρτηση μας αν είναι η $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^2 - 9x + 100$. Για να καλύψουμε όλες τις συναρτήσεις καταλήγουμε ότι η συνάρτηση $F(x)$ είναι η

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^2 - 9x + C.$$

Συμπεραίνουμε ότι η ολοκλήρωση μίας συνάρτησης είναι μια δύσκολη και πολύπλοκη διαδικασία. Σε άλλες περιπτώσεις είναι σχεδόν αδύνατο να μαντέψουμε την αρχική συνάρτηση, οπότε ο υπολογισμός του ολοκληρώματος καθίσταται ανέφικτος. Για τον υπολογισμό πολύπλοκων ολοκληρωμάτων θα καταφύγουμε στις ιδιότητες τους, τον πίνακα δεδομένων ολοκληρωμάτων και σε άλλες τακτικές που καθιστούν τον υπολογισμό ευκολότερο.

1.3.1. Ιδιότητες αορίστου ολοκληρώματος.

Αν οι συναρτήσεις *f*και έχουν παράγουσα σε ένα διάστημα *D*, τότε

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

και

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Σύμφωνα με την πρώτη ιδιότητα των ολοκληρωμάτων, ο σταθερός όρος λ μπορεί να βγει εκτός του ολοκληρώματος. Ισχύει ακόμα και η αντίστροφη διαδικασία, όπου ο σταθερός όρος μπορεί αν μπει μέσα σε αυτό εάν αυτό μας διευκολύνει στον υπολογισμό του ολοκληρώματος.

Σύμφωνα με την δεύτερη ιδιότητα ισχύει ότι αν μέσα στο ολοκλήρωμα υπάρχει άθροισμα συναρτήσεων τότε το άθροισμα αυτό μπορεί να χωρίζεται σε επιμέρους ολοκληρώματα για κάθε μία συνάρτηση ξεχωριστά.

1.3.2. Πίνακας δεδομένων ολοκληρωμάτων.

Ο πίνακας των δεδομένων ολοκληρωμάτων είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για τον υπολογισμό πολύπλοκων και σύνθετων ολοκληρωμάτων. Αυτό γιατί μπορούμε άμεσα να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τις αρχικές συναρτήσεις με μεγάλη ευκολία, που σε αντίθετη περίπτωση δεν θα ήταν εφικτός ο υπολογισμός τους. Βέβαια όλα τα παρακάτω ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν βάση διαφόρων μεθόδων ολοκλήρωσης που θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

1	$\int 0dx = C.$
2	$\int 1dx = x + C.$
3	$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$
4	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C.$
5	$\int e^x dx = e^x + C.$
6	$\int \alpha^x dx = \alpha^x \ln \alpha + C.$
7	$\int \sin(x)dx \; = -\cos(x) + C.$
8	$\int \cos(x)dx = \sin\ (x) + C.$
9	$\int \arcsin(x)\, dx = \mathrm{x}\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C.$
10	$\int \arccos(x)\, dx = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C.$
11	$\int \arctan(x)\, dx = x\arctan\ (x) - \frac{1}{2}\ln\lvert 1+x^2\rvert + C.$
12	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C.$
13	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan\ (x) + C.$
14	$\int \sec(x)dx = \ln\lvert\sec(x) + \tan(x)\rvert + C.$
15	$\int \mathrm{cosec}(x)dx = \ln\lvert\mathrm{cosec}(x) - \mathrm{cotan}(x)\rvert + C.$

1.3.3. Παραδείγματα βασισμένα στις ιδιότητες και στον πίνακα δεδομένων ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα 1:

$$\int 3x^4.$$

Λύση:

$$\int 3\,x^4 = 3\int x^4\,dx = 3\frac{x^5}{5} + C = \frac{3}{5}x^5 + C.$$

Σε αυτό το ολοκλήρωμα απλά απομονώνουμε τον σταθερό παράγοντα εκτός του ολοκληρώματος και στην συνέχεια εφαρμόζουμε σύμφωνα με τον πίνακα την διαδικασία ολοκλήρωσης για παράγοντες την μορφής x^n.

Παράδειγμα 2:

$$\mathrm{I} = \int [4\cos(x) + 5\sin(x) + 2x^{-1}]\, dx.$$

Λύση:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int 4\cos(x)\, dx + \int 5\sin(x)\, dx + \int 2x^{-1}\, dx \\
&= 4\int \cos(x)\, dx + 5\int \sin(x)\, dx + 2\int \frac{1}{x}\, dx \\
&= 4\sin(x) - 5\cos(x) + 2\ln|x| + C.
\end{aligned}$$

Σε αυτό το ολοκλήρωμα αρχικά χρησιμοποιήσαμε την δεύτερη ιδιότητα ολοκλήρωσης και χωρίσαμε το ολοκλήρωμα σε τρία μικρότερα. Έπειτα απομονώσαμε του σταθερούς παράγοντες εκτός του ολοκληρώματος και βάση του πίνακα λύσαμε τα ολοκληρώματα.

Παράδειγμα 3:

$$\int dx.$$

Λύση:

$$\int dx = \int 1dx = x + C.$$

Ένα πολύ εύκολο ολοκλήρωμα που ίσως μπορεί να μπερδέψει λόγω της υπερβολικής απλότητας του. Εμείς θέτουμε την μονάδα μέσα στο ολοκλήρωμα και λύνουμε πάλι σύμφωνα με τον πίνακα.

Παράδειγμα 4:

$$\int (x + \sqrt[3]{x})(4 - x^2)dx.$$

Λύση:

$$\begin{aligned}\int (x + \sqrt[3]{x})(4 - x^2)dx &= \int \left[4x - x^3 + 4x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{7}{3}}\right] dx \\ &= 4\int xdx - \int x^3dx + 4\int x^{\frac{1}{3}}\,dx - \int x^{\frac{7}{3}}dx \\ &= 2x^2 - \frac{1}{4}x^4 + 3x^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}} + C.\end{aligned}$$

Επειδή δεν υπάρχει κάποιος κανόνας ολοκλήρωσης γινομένου συναρτήσεων, θα πρέπει να κάνουμε τις πράξεις χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού. Αφού γίνει αυτό ολοκληρώνουμε όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα.

5) Να λυθεί το ολοκλήρωμα

Παράδειγμα 5:

$$\int \frac{x+3}{x+2}dx.$$

Λύση:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x+2}dx &= \int \frac{x+2+1}{x+2}dx = \int 1 + \frac{1}{x+2}dx = \int 1dx + \int \frac{1}{x+2}dx \\ &= x + \ln|x+2| + C.\end{aligned}$$

Σε αυτό το ολοκλήρωμα μετατρέψαμε τον σταθερό όρο στον αριθμητή σε δύο ώστε να ταυτίζεται ο ένας εκ των δύο με αυτόν του παρανομαστή και να μπορεί να πραγματοποιηθεί η απλοποίηση. Με τον χειρισμό αυτό απλουστεύεται το κλάσμα και μπορούμε να προβούμε στον υπολογισμό του ευκολότερα.

Παράδειγμα 6:

$$\int \frac{4x^{10} - 2x^4 + 15x^2}{x^3} dx.$$

Λύση:

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^{10} - 2x^4 + 15x^2}{x^3} dx &= \int \frac{4x^{10}}{x^3} dx - \int \frac{2x^4}{x^3} dx + \int \frac{15x^2}{x^3} dx \\ &= 4\int x^7 dx - 2\int x dx + 15\int \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2}x^8 - x^2 + 15\ln|x| + C.\end{aligned}$$

Η τακτική σε αυτό το ολοκλήρωμα είναι απλή. Παίρνουμε κάθε μέρος του πολυωνύμου και το διαιρούμε με τον παρανομαστή και έπειτα επιλύουμε σύμφωνα με τους κανόνες και τον πίνακα.

Επίσης θα μπορούσαμε να βγάζαμε στον αριθμητή κοινό παράγοντα το x^3 για να πάρει την μορφή

$$\int \frac{x^3(4x^7 - 2x + \frac{15}{x})}{x^3} dx.$$

Κάνουμε απαλοιφή παρανομαστή και λύνουμε όπως παραπάνω.

Παράδειγμα 7:

$$\mathrm{I} = \int \left[2e^x + 2\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + 3\cos\ (x)\right] dx.$$

Λύση:

$$\mathrm{I} = \int \left[2e^x + 2\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + 3\cos\ (x)\right] dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int 2\, e^x dx + \int 2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int 3 \cos\ (x)\, dx \\
&= 2 \int e^x dx + 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + 3 \int \cos\ (x)\, dx \\
&= 2e^x + 2 \arcsin\ (x) + 3 \sin\ (x) + C.
\end{aligned}
$$

Σε αυτό το ολοκλήρωμα η τακτική που ακολουθούμε είναι η συνήθης. Χωρίζουμε τα μέρη του αθροίσματος σε ξεχωριστά ολοκληρώματα, έπειτα βγάζουμε έξω από τα ολοκληρώματα τους σταθερούς παράγοντες και τέλος επιλύουμε βάση του πίνακα.

Παράδειγμα 8:

$$
\mathrm{I} = \int \left[2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 3 \frac{1}{1+x^2} + 3x^{-1} \right] dx.
$$

Λύση:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int 2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int 3 \frac{1}{1+x^2} dx + \int 3x^{-1}\, dx \\
&= 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + 3 \int \frac{1}{1+x^2} dx + 3 \int x^{-1}\, dx \\
&= 2 \arcsin\ (x) + 3 \arctan\ (x) + 3 \ln|x| + C.
\end{aligned}
$$

Και αυτό το παράδειγμα λύνεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως λύθηκε το παράδειγμα 7.

1.3.4. Εύρεση αρχικής συνάρτησης αν $f(\alpha) = \beta$.

Εάν επιθυμούμε να βρούμε μια συγκεκριμένη αρχική συνάρτηση f και όχι το σύνολο των δυνατών συναρτήσεων f θα πρέπει να γνωρίζουμε την τιμή που έχει σε ένα σημείο της. Για να γίνει αυτό πρέπει να υπολογίσουμε την σταθερά C. Ο υπολογισμός της είναι εφικτός γνωρίζοντας ότι $f(\alpha) = \beta$.

Παράδειγμα 1:

Να βρεθεί η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) = 8\sin(x) + 3e^x$, όπου $f(2) = 4$.

Λύση:

Αρχικά ολοκληρώνουμε την f', οπότε έχουμε

$$\int [8\sin(x) + 3e^x]dx = 8[-\cos(x)] + 3e^x + C.$$

Αντικαθιστούμε ως προς x και λύνουμε ως προς C, οπότε αφού

$$f(2) = 4 \Rightarrow 8[-\cos\ (2)] + 3e^x + C = 4 \Rightarrow 25{,}497 + C = 4 \Rightarrow C = -21{,}497.$$

Άρα η αρχική συνάρτηση είναι η

$$f(x) = 8[-\cos\ (x)] + 3e^x - 21{,}497.$$

Παράδειγμα 2:

Να βρεθεί η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) = 4\cos(x) + 5\frac{1}{1+x^2}$, όπου $f(-1) = 3$.

Λύση:

Αρχικά ολοκληρώνουμε την f', οπότε έχουμε

$$\int \left[4\cos(x) + 5\frac{1}{1+x^2}\right] dx = 4\sin(x) + 5\arctan(x) + C.$$

Αντικαθιστούμε ως προς x και λύνουμε ως προς C, οπότε αφού

$$f(-1) = 3 \Rightarrow 4\sin(x) + 5\arctan(x) + C = 3 \Rightarrow -7{,}292874 + C = 3 \Rightarrow$$
$$C = 10{,}292874.$$

Άρα η αρχική συνάρτηση είναι η

$$f(x) = 4\cos(x) + 5\frac{1}{1+x^2} + 10{,}292874.$$

1.4.Ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$.

1.4.1. προσεγγιστικός υπολογισμός ολοκληρώματος.

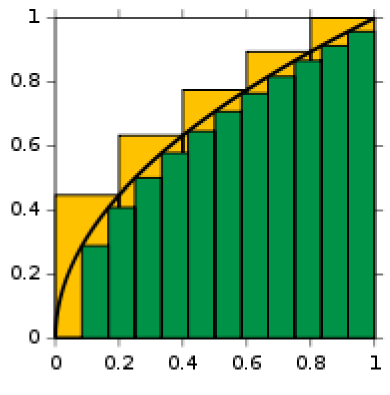
Τα ορισμένα ολοκληρώματα έχουν, όπως θα δούμε παρακάτω, αρκετές πρακτικές εφαρμογές. Αυτό θα γίνει κατανοητό με το παρακάτω παράδειγμα.

Αρχικά θέτουμε την συνάρτηση $y = f(x)$ μεταξύ $x = 0$ και $x = 1$ και $f(x) = \sqrt{x}$.Σκοπός μας είναι να βρούμε το εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την συνάρτηση μας f μεταξύ του μεσοδιαστήματος από 0 έως 1.

Για την εύρεση αυτής της επιφάνειας θα μπορούσαμε να επικαλεστούμε το ορισμένο ολοκλήρωμα, όμως αυτό είναι ακόμα άγνωστο για μας. Η μόνη προς το παρόν λύση είναι ο υπολογισμός κατά προσέγγιση.

Αρχίζουμε τον υπολογισμό κατά προσέγγιση χωρίζοντας τον άξονα x σε 5 ίσα μέρη έως το 1. Έτσι έχουμε 5 σημεία, το $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$ έως το 1. Έπειτα δημιουργούμε πολύγωνα τα οποία θα έχουν πλάτος $\frac{1}{5}$ και ύψος $\sqrt{\frac{1}{5}}$, $\sqrt{\frac{2}{5}}$, έως το $\sqrt{1}$(γιατί ισχύει $f(x) = \sqrt{x}$). Έτσι καταλήγουμε σε 5 ορθογώνια (εικόνα 1.) Στην συνέχεια υπολογίζουμε το εμβαδόν των ορθογωνίων.

$$\sqrt{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5} - 0\right) + \sqrt{\frac{2}{5}}\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \sqrt{\frac{5}{5}}\left(\frac{5}{5} - \frac{4}{5}\right) \approx 0{,}7497.$$



Εικόνα 1.Προσέγγισητουολοκληρώματος√x από 0 έως 1, ■ 5 ορθογώνια (επάνω) και ■ 12 ορθογώνια (κάτω)

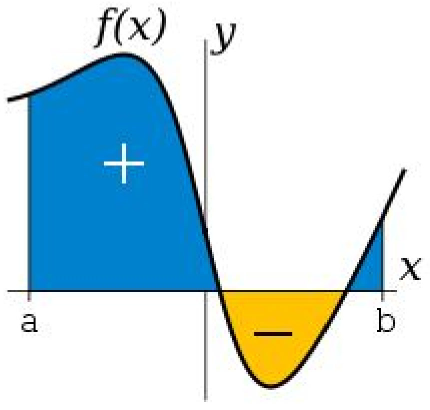
Τώρα αν δοκιμάσουμε να αυξήσουμε τον αριθμό των ορθογωνίων από πέντε σε 12 (Εικόνα 1) και υπολογίσουμε με τον εμβαδόν των ορθογωνίων αυτών με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως παραπάνω, ο χώρος κατά προσέγγιση υπολογίζεται ίσος με 0,6203. Παρατηρούμε ότι υπάρχει αρκετή απόκλιση και για να οδηγηθούμε σε ένα σχετικά ακριβές συμπέρασμα πρέπει να έχουμε έναν πολύ μεγάλο αριθμό ορθογωνίων, τα οποία καθιστά τον προσεγγιστικό υπολογισμό του ολοκληρώματος πολύ δύσκολο. Άρα για έχουμε μία ακριβής μέτρηση θα καταφύγουμε στο ορισμένο ολοκλήρωμα.

1.4.2. Ορισμός ορισμένου ολοκληρώματος.

Ορίζουμε ως ορισμένο ολοκλήρωμα τον χώρο που περικλείεται σε ένα επίπεδο xy ,από την συνάρτηση fτον άξονα x και τις κάθετες γραμμές $x = a$ και $x = b$. Το ορισμένο ολοκλήρωμα συμβολίζεται ως εξής :

$$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)dx,$$

όπου a και b ονομάζουμε τα άκρα του ολοκληρώματος του μεσοδιαστήματος $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.



Εικόνα 2. Απεικόνιση ορισμένου ολοκληρώματος και των άκρων του a, b.

Σύμφωνα με το Στοιχειώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, κατά Newtonκαι Leibniz, αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ και η F είναι η αντιπαράγωγος της f στο ίδιο διάστημα τότε,

$$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)dx = F(\mathrm{a}) - F(\mathrm{b}).$$

Έχοντας πια γνώση για το ορισμένο ολοκλήρωμα είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε με ακρίβεια το εμβαδόν που αναφέρθηκε παραπάνω όπου συνάρτηση $y = f(x)$μεταξύ $x = 0$ και $x = 1$ και $f(x) = \sqrt{x}$.

Έτσι έχουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx = F(1) - F(0),$$

όπου η αντιπαράγωγος είναι, $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, άρα

$$F(1) - F(0) = \frac{2}{3}.$$

Καταφέραμε τελικά με ακρίβεια να βρούμε το εμβαδόν που καλύπτει η $f(x) = \sqrt{x}$ στο διάστημα [0,1] με την βοήθεια των ορισμένων ολοκληρωμάτων.

Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα με τα προσεγγιστικά αποτελέσματα της παραγράφου 1.4.1 παρατηρούμε ότι ο προσεγγιστικός υπολογισμός με πέντε ορθογώνια είχε σφάλμα 12,5%, ενώ ο υπολογισμός με 12 ορθογώνια έχει σφάλμα 7%. Μεγαλύτερος αριθμός ορθογωνίων θα έδινε αποτέλεσμα πιο κοντά στο αληθινό, το οποίο όπως είδαμε είναι $\frac{2}{3}$.

1.4.2. Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων.

1) $\int_a^b 1dx = b - a$

2) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

3) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

$$5) \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

$$6) \int_a^a f(x)dx = 0$$

1.4.3Παραδείγματα Ορισμένων Ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα 1:

$$\int_2^0 [x^2 + 1]dx.$$

Λύση:

$$\int [x^2 + 1]dx = \int x^2 dx + \int 1dx = \frac{x^3}{3} + x + C.$$

Άρα

$$\int_2^0 x^2 + 1dx = -\int_0^2 x^2 + 1dx = -\int_0^2 x^2 dx - \int_0^2 1dx$$

$$-\int_0^2 x^2 + 1dx = -\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^2 - |x|_0^2 = -\left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) - (2-0)$$

$$= -\frac{8}{3} - 2 = -\frac{14}{3}.$$

Σε αυτό το ολοκλήρωμα κάναμε χρήση αρχικά της πέμπτης ιδιότητας των ολοκληρωμάτων ώστε να αλλάξουμε την θέση των ορίων (αφού a<b). Έπειτα με την τρίτη ιδιότητα χωρίσαμε το ολοκλήρωμα στα δύο και τέλος με την πρώτη ιδιότητα υπολογίσαμε το ολοκλήρωμα $-\int_0^2 1dx$.

Παράδειγμα 2:

$$\int_0^2 [10x^2 + 10]dx.$$

Λύση:

$$\int [10x^2 + 10]dx = \int 10(x^2+1)dx = 10\int (x^2+1)dx = 10\left(\frac{x^3}{3} + x\right) + C.$$

Άρα

$$\int_0^2 [10x^2 + 10]dx = \int_0^2 10(x^2+1)dx = 10\int_0^2 [x^2+1]dx$$

$$= 10\left[\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^2 - |x|_0^2\right] = 10\left[\left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) - (2-0)\right] = \frac{140}{3}.$$

Αρχικά βλέπουμε ότι μπορούμε να βγάλουμε κοινό παράγοντα το 10 και μετά να χρησιμοποιήσουμε την δεύτερη ιδιότητα. Έχοντας το αποτέλεσμα ήδη του ολοκληρώματος από το παράδειγμα 1, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα μας.

Παράδειγμα 3:

$$\int_{135}^{135} \frac{x^3 - x\sin(x) + \cos\ (x)}{x^2+1}dx.$$

Λύση:

Σε αυτό το ολοκλήρωμα δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τίποτα. Απλά σύμφωνα με την έκτη ιδιότητα των ορισμένων ολοκληρωμάτων καταλήγουμε στο αποτέλεσμα ότι :

$$\int_{135}^{135} \frac{x^3 - x\sin(x) + \cos\ (x)}{x^2+1}dx = 0.$$

Παράδειγμα 4:

Γνωρίζοντας ότι

$$\int_6^{-10} f(x)dx = 23 \text{ και} \int_{-10}^{6} g(x)dx = -9,$$

να βρεθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-10}^{6} [2f(x) - 10g(x)]dx.$$

Λύση:

$$\begin{aligned}\int_{-10}^{6} [2f(x) - 10g(x)]dx &= \int_{-10}^{6} 2f(x)dx - \int_{-10}^{6} 10g(x)dx \\ &= 2\int_{-10}^{6} f(x)dx - 10\int_{-10}^{6} g(x)dx \\ &= -2\int_{6}^{-10} f(x)dx - 10\int_{-10}^{6} g(x)dx \\ &= -2(23) - 10(-9) = 44.\end{aligned}$$

Αρχικά για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος εφαρμόσαμε την δεύτερη και την τρίτη ιδιότητα των ορισμένων ολοκληρωμάτων. Έπειτα εφαρμόσαμε την πέμπτη ιδιότητα, με την οποία αντιστράφηκαν τα άκρα του ορισμένου ολοκληρώματος. Τέλος αντικαταστήσαμε τα δεδομένα του παραδείγματος και καταλήξαμε στο αποτέλεσμα.

ΜΕΡΟΣ Β’

ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

2.1. Μέθοδοι ολοκλήρωσης.

Υπάρχουν ολοκληρώματα τα οποία είναι αρκετά πολύπλοκα και των οποίων η λύση δεν μπορεί να βρεθεί βάση των ιδιοτήτων και διαφόρων τεχνικών που είδαμε σε προηγούμενα ολοκληρώματα. Για να οδηγηθούμε στην λύση των πολύπλοκων ολοκληρωμάτων θα καταφύγουμε σε διάφορες μεθόδους ολοκλήρωσης. Οι μέθοδοι ολοκλήρωσης θα μας οδηγήσουν σε μία απλούστερη μορφή του ολοκληρώματος καθιστώντας των υπολογισμό αυτών αρκετά πιο εύκολο.

Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου ολοκλήρωσης δεν είναι πάντα απλή υπόθεση. Συνήθως η επιλογή γίνεται βάση της μορφής του ολοκληρώματος, αλλά αν αυτή είναι πολύπλοκη μπορεί να βρεθεί η κατάλληλη μέθοδος και εμπειρικά. Ακόμα και αν επιλεχθεί η κατάλληλη μέθοδος ολοκλήρωσης, απαιτείται ο ανάλογος τρόπος εφαρμογής. Σε περίπτωση που δεν έχει γίνει η κατάλληλη εφαρμογή είναι πιθανόν να καταλήξουμε με ένα πιο πολύπλοκο ολοκλήρωμα από το αρχικό. Επίσης υπάρχει η πιθανότητα η λύση του ολοκληρώματος να απαιτεί την εφαρμογή δύο ή και περισσότερων μεθόδων ολοκλήρωσης.

Ονομαστικά οι μέθοδοι ολοκλήρωσης που θα ασχοληθούμε είναι οι εξής:

Α) Μέθοδος ολοκλήρωσης με αντικατάσταση.

Β) Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.

Γ) Μέθοδος ολοκλήρωσης βάση τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Δ) Μέθοδος ολοκλήρωσης μερικών κλασμάτων.

Ε) Μέθοδος ολοκλήρωσης βάση τύπων ανάταξης.

Τέλος αξίζει να αναφέρουμε ότι αυτοί δεν είναι φυσικά οι μοναδικοί μέθοδοι ολοκλήρωσης. Υπάρχουν αρκετοί ακόμα μέθοδοι, οι οποίοι ασχολούνται με εξαιρετικά πολύπλοκα και εξειδικευμένα ολοκληρώματα και για αυτό το λόγο θα παραμείνουμε στις μεθόδους που προαναφέρθηκαν.

2.2. Μέθοδος ολοκλήρωσης με αντικατάσταση.

Σκοπός αυτής της μεθόδου είναι να αντικαταστήσουμε το περιεχόμενο του ολοκληρώματος με κάποιο άλλο, του οποίου ο υπολογισμός μπορεί να γίνει βάση τις ιδιότητες και τον πίνακα των δεδομένων ολοκληρωμάτων.

Δηλαδή:

Έστω το ολοκλήρωμα μας είναι της μορφής

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx.$$

Η μέθοδος ολοκλήρωσης με αντικατάσταση εκφράζεται με τον ακόλουθο τύπο:

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(u)du,$$

όπου $u = g(x)$και $du = g'(x)dx$.

Ο παραπάνω τύπος χρησιμοποιείται με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα $\int f(u)du$ του δευτέρου μέλους υπολογίζεται ευκολότερα από το αρχικό.

Μπορούμε να πούμε ότι η διαδικασία ολοκλήρωσης με αντικατάσταση είναι η εξής:

1) Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα σε όποιο βαθμό είναι αυτό δυνατό.

2) Θέτουμε $u = g(x)$ (όπου $g(x)$ η κατάλληλη για την περίσταση συνάρτηση).

3) Υπολογίζουμε το διαφορικό du.

4) Αντικαθιστούμε το u και το διαφορικό du.

5) Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int f(u)du$.

6) Αντικαθιστούμε το u με το $g(x)$.

2.2.1. Παραδείγματα βάση την μέθοδο με αντικατάστασης.

Παράδειγμα 1:

$$\int x^3 \cos(5x^4)dx.$$

Λύση:

$$\int x^3 \cos(5x^4)dx.$$

Θέτουμε $u = 5x^4$, άρα

$$du = 20x^3 dx \text{ και } x^3 dx = \frac{1}{20} du,$$

αντικαθιστούμε

$$\int x^3 \cos(5x^4)dx = \int \frac{\cos\ (u)}{20} du = \frac{1}{20}\int \cos(u)du = \frac{1}{20}\sin(u) + \ C$$
$$= \frac{1}{20}\sin(5x^4) + C.$$

Παράδειγμα 2:

$$\int \tan(x)dx.$$

Λύση:

$$\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx.$$

Θέτουμε $u = \cos\ (x)$, άρα

$$du = -\sin(x)dx,$$

αντικαθιστούμε

$$\int \tan(x)\, dx = \int \frac{\sin\ (x)}{\cos\ (x)} dx = \int -\frac{1}{u} du = -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|\cos\ (x)| + C.$$

Παράδειγμα 3:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} dx.$$

Λύση:

Αρχικά πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με το $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$. Το ολοκλήρωμα μας παίρνει την μορφή,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} dx = \int \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} dx.$$

Βλέπουμε ότι στον παρονομαστή εμφανίζεται διαφορά τετραγώνων,

$$\int \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{x+1-x} dx = \int \sqrt{x+1} + \sqrt{x} dx = \int \sqrt{x+1} dx + \int \sqrt{x} dx.$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα μας θέτουμε $u = x + 1$, άρα $du = dx$,

αντικαθιστούμε

$$\int u^{1/2}\, du = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C_1.$$

Και για το δεύτερο ολοκλήρωμα μας έχουμε

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C_2.$$

Έτσι το αρχικό ολοκλήρωμα παίρνει την τελική μορφή

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} dx = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + \frac{2}{3} x^{3/2} + C,$$

όπου $C_1 + C_2 = C$.

Παράδειγμα 4:

$$\int \frac{(2-\sqrt{x})^5}{\sqrt{x}} dx.$$

Λύση:

$$\int \frac{(2-\sqrt{x})^5}{\sqrt{x}} dx.$$

Θέτουμε $u = 2 - \sqrt{x}$,άρα

$$du = -\frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow -2du = \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$$

Αντικαθιστούμε

$$\int \frac{(2-\sqrt{x})^5}{\sqrt{x}} dx = \int -2u^5\, du = -2\int u^5\, du = -\frac{2}{6}u^6 + C$$
$$= -\frac{1}{3}(2-\sqrt{x})^6 + C.$$

Παράδειγμα 5:

$$\int (3x+4)^{100}\, dx.$$

Λύση:

Ο υπολογισμός ταυτοτήτων υψωμένες σε τέτοιες μεγάλες δυνάμεις είναι εξαιρετικά δύσκολος, χρονοβόρος και εμπεριέχεται μεγάλος κίνδυνος λανθασμένου υπολογισμού. Η εφαρμογή της μεθόδου με αντικατάσταση είναι ιδανική σε αυτό το ολοκλήρωμα. Μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα με αρκετή ευκολία.

$$\int (3x+4)^{100}\, dx.$$

Θέτουμε $u = 3x + 4$, άρα

$$du = 3dx \Rightarrow \frac{1}{3}du = dx,$$

αντικαθιστούμε

$$\int (3x+4)^{100}\,dx = \int \frac{u^{100}}{3}du = \frac{u^{101}}{303} + C = \frac{(3x+4)^{101}}{303} + C.$$

Παράδειγμα 6:

$$\int \frac{5x}{1+16x^4}dx.$$

Λύση:

$$\int \frac{5x}{1+16x^4}dx.$$

Θέτουμε $u = 4x^2$, άρα

$$du = 8xdx,$$

αντικαθιστούμε

$$\int \frac{5x}{1+16x^4}dx = \int \frac{5}{1+u^2}\frac{1}{8}du = \frac{5}{8}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{5}{8}\arctan(u) + C$$
$$= \frac{5}{8}\arctan(4x^2) + C.$$

Παράδειγμα 7:

$$\int \frac{5}{x^2+6x+13}dx.$$

Λύση:

$$\int \frac{5}{x^2+6x+13}dx = \int \frac{5}{(x+3)^2+4}dx = \int \frac{5}{4\left[\left(\frac{x+3}{2}\right)^2+1\right]}dx.$$

Θέτουμε $u = \frac{x+3}{2}$, άρα

$$du = \frac{1}{2}dx,$$

αντικαθιστούμε

$$\int \frac{5}{4(u^2+1)} 2du = \frac{5}{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{5}{2}\arctan(u) + C$$
$$= \frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x+3}{2}\right) + C.$$

Παράδειγμα 8:

$$\int 9xe^{5-3x^2}dx.$$

Λύση:

$$\int 9xe^{5-3x^2}dx.$$

Θέτουμε $u = 5 - 3x^2$, άρα

$$du = -6dx,$$

αντικαθιστούμε

$$\int 9xe^u \frac{1}{-6}dx = -\frac{3}{2}\int e^u du = -\frac{3}{2}e^u + C = -\frac{3}{2}e^{5-3x^2} + C.$$

Παράδειγμα 9:

$$\int \frac{(\arccos 2x)^4}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$$

Λύση:

$$\int \frac{(\arccos 2x)^4}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$$

Θέτουμε $u = \arccos 2x$, άρα

$$du = \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}dx,$$

αντικαθιστούμε

$$\int \frac{(\arccos 2x)^4}{\sqrt{1-4x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int u^4 du = -\frac{1}{2}\frac{u^5}{5} + C = -\frac{\arccos 2x^5}{10} + C.$$

Παράδειγμα 10:

$$\int \frac{\arcsin 4x}{\sqrt{1-16x^2}}dx.$$

Λύση:

$$\int \frac{\arcsin 4x}{\sqrt{1-16x^2}}dx.$$

Θέτουμε $u = sin^{-1}4x$, άρα

$$du = \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}dx \Rightarrow \frac{1}{4}du = \frac{1}{\sqrt{1-16x^2}}dx,$$

αντικαθιστούμε

$$\int \frac{\arcsin 4x}{\sqrt{1-16x^2}}dx = \frac{1}{4}\int udu = \frac{1}{4}\left(\frac{u^2}{2}\right) + C = \frac{1}{8}(sin^{-1}4x)^2 + C.$$

2.2.2. Ειδικές μορφές ολοκληρωμάτων.

Εδώ θα εξετάσουμε ολοκληρώματα τα οποία έχουν κάποια συγκεκριμένη μορφή και θα αναλύσουμε τον τρόπο επίλυσης τους βήμα προς βήμα. Ο συνηθέστερος τρόπος επίλυσης αυτών των ολοκληρωμάτων είναι η εφαρμογή της μεθόδου της αντικατάστασης και η χρήση κάποιων ολοκληρωμάτων από τον πίνακα δεδομένων ολοκληρωμάτων.

2.2.2.1)Ολοκληρώματα του τύπου $\int \frac{ax+b}{x^2+d}dx$.

Παράδειγμα:

$$\int \frac{89x+71}{x^2+83}dx.$$

Λύση:

$$\int \frac{89x+71}{x^2+83}dx = 89\int \frac{x}{x^2+83}dx + 71\int \frac{1}{x^2+83}dx.$$

Τώρα θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τα δύο αυτά ολοκληρώματα.

Θέτουμε $u = x^2 + 83$,άρα

$$du = 2xdx,$$

αντικαθιστούμε

$$89\int \frac{x}{x^2+83}dx = \int \frac{1}{2u}du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C_1$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+83| + C_1. \ (1)$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε το δεύτερο ολοκλήρωμα,

$$71\int \frac{1}{x^2+83}dx.$$

Εδώ κάνουμε εφαρμογή του τύπου

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

Άρα το ολοκλήρωμα μας λύνεται ως εξής,

$$71\int \frac{1}{x^2+83}dx = \frac{71}{\sqrt{83}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{83}}\right) + C_2. \ (2)$$

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα (1) και (2) το ολοκλήρωμα μας παίρνει την μορφή,

$$\int \frac{89x+71}{x^2+83}dx = 89\int \frac{x}{x^2+83}dx + 71\int \frac{1}{x^2+83}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2 + 83| + \frac{71}{\sqrt{83}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{83}}\right) + C.$$

$2.2.2.2)$ Ολοκληρώματα του τύπου $\int \frac{\boldsymbol{ax+b}}{\sqrt{\boldsymbol{d-x^2}}}\boldsymbol{dx}$.

Παράδειγμα:

$$\int \frac{42x + 17}{\sqrt{70 - x^2}}dx.$$

Λύση:

$$\int \frac{42x + 17}{\sqrt{70 - x^2}}dx = 42\int \frac{x}{\sqrt{70 - x^2}}dx + 17\int \frac{1}{\sqrt{70 - x^2}}dx.$$

Όπως και το προηγούμενο παράδειγμα θα υπολογίσουμε ξεχωριστά το κάθε ένα ολοκλήρωμα ξεκινώντας από το πρώτο.

$$42\int \frac{x}{\sqrt{70 - x^2}}dx.$$

Θέτουμε $u = 70 - x^2$, άρα

$$du = -2xdx,$$

αντικαθιστούμε

$$-\frac{42}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{42}{2}2\sqrt{u} + C_1 = -42\sqrt{70 - x^2} + C_1. (1)$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε το δεύτερο ολοκλήρωμα,

$$17\int \frac{1}{\sqrt{70 - x^2}}dx.$$

Κάνοντας χρήση του τύπου,

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C,$$

το ολοκλήρωμα παίρνει την μορφή,

$$17 \int \frac{1}{\sqrt{70 - x^2}} dx = 17 \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{70}}\right) + C_2. (2)$$

Επιστρέφουμε στο αρχικό μας ολοκλήρωμα και υπολογίζουμε με βάση τα αποτελέσματα (1) και (2),

$$\int \frac{42x + 17}{\sqrt{70 - x^2}} dx = -42\sqrt{70 - x^2} + 17 \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{70}}\right) + C.$$

$\mathbf{2.2.2.3)}$ Ολοκληρώματα του τύπου $\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^2 + ax + b}} \boldsymbol{dx}$.

Παράδειγμα:

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 11} dx.$$

Λύση:

Σκοπός μας σε αυτό το ολοκλήρωμα είναι να μετατρέψουμε τον παρονομαστή σε μία μορφή η οποία θα μας επιτρέψει τον υπολογισμό του ολοκληρώματος. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο του παρονομαστή. Πρώτο μας βήμα για να γίνει η παραγοντοποίηση είναι να εμφανίσουμε τετράγωνο στον παρονομαστή.

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 11} dx = \int \frac{1}{(x^2 + 2x + 11 - 10) + 10} dx$$
$$= \int \frac{1}{(x^2 + 2x + 1) + 10} dx.$$

Τώρα μπορεί να γίνει παραγοντοποίηση στον παρονομαστή,

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$
$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 11} dx = \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 10} dx$$

Θέτουμε $u = x + 1$, άρα $du = dx$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+11}dx = \int \frac{1}{u^2+10}du$$

Έπειτα εφαρμόζουμε τον τύπο

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C,$$

οπότε το ολοκλήρωμα μας γίνεται

$$\int \frac{1}{x^2+2x+11}dx = \frac{1}{\sqrt{10}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{10}}\right) + C$$
$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{10}}\right) + C.$$

2.2.3. Ολοκληρώματα όπου εμπεριέχονται ρίζες.

Προηγουμένως είδαμε με βάση την μέθοδο της αντικατάστασης τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα που εμπεριέχουν ρίζες. Όταν όμως αυτός ο τρόπος δεν μας δίνει το αποτέλεσμα του επιθυμούμε θα καταφύγουμε σε μία άλλη τακτική επίλυσης ολοκληρωμάτων που εμπεριέχουν ρίζες. Αυτό θα γίνει αντιληπτό με το εξής παράδειγμα.

Παράδειγμα:

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-3}}dx.$$

Λύση:

Σύμφωνα με την μέθοδο αντικατάστασης ο συνήθης τρόπος επίλυσης είναι να θέσουμε την υπόριζη ποσότητα $x-3=u$. Όμως η κίνηση αυτή καθιστά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος αρκετά πολύπλοκη. Για αυτό η προσέγγιση μας θα είναι διαφορετική. Θα θέσουμε ίση με u ολόκληρο τον παρονομαστή. Δηλαδή $u=\sqrt[3]{x-3} \Rightarrow u^3 = x-3 \Rightarrow x = u^3+3$.

Επόμενο μας βήμα είναι να υπολογίσουμε το διαφορικό du.

$$x = u^3+3 \ , \quad dx = 3u^2du$$

αντικαθιστούμε

$$\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-3}}dx = \int \frac{(u^3+3)+2}{u}3u^2du = \int (u^3+5)3udu$$

$$\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-3}}dx = \int 3u^4 + 15udu = 3\frac{u^5}{5} + \frac{15}{2}u^2 + C$$

$$= \frac{3}{5}(x-3)^{5/3} + \frac{15}{2}(x-3)^{2/3} + C.$$

Άρα, όποτε είναι αυτό εφικτό, όταν ένα ολοκλήρωμα εμπεριέχει ρίζα της μορφής $\sqrt[n]{g(x)}$ μπορούμε να θέσουμε $u = \sqrt[n]{g(x)}$, ώστε να απλοποιηθεί το ολοκλήρωμα σε μία μορφή είναι εφικτός ο υπολογισμός του.

2.2.4.Ολοκληρώματα της μορφής $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, όπου $P(x) = Q'(x)$.

Σε περίπτωση που ο αριθμητής του ολοκληρώματος είναι ίσος με την παράγωγο του παρονομαστή, καταφεύγουμε στον παρακάτω τύπο για την επίλυση του ολοκληρώματος.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx.$$

Και ισχύει $P(x) = Q'(x)$τότε το ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\ln|Q(x)| + C.$$

Παράδειγμα 1:

$$\int \frac{2(x+2)}{x^2+4x+5}dx.$$

Λύση:

$$\int \frac{2(x+2)}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{(2x+4)}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{d(x^2+4x)}{x^2+4x+5}$$

$$= \ln|x^2+4x+5| + C.$$

Παράδειγμα 2:

$$\int \frac{x}{x^2-2}dx.$$

Λύση:

$$\int \frac{x}{x^2-2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-2)}{x^2-2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2| + C.$$

2.3. Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.

Η μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες εφαρμόζεται σε ολοκληρώματα τα οποία είναι γινόμενο δυο συναρτήσεων fκαι g.

Η απόδειξη αυτής της μεθόδου βασίζεται στην παράγωγο γινομένου δύο συναρτήσεων.

Έστω ότι έχουμε το γινόμενο των συναρτήσεων fg. Σύμφωνα με την παράγωγο γινομένου έχουμε,

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Ολοκληρώνουμε και τα δύο μέρη,

$$\int (fg)'dx = \int f'g + fg'dx$$

$$fg = \int f'gdx + \int fg'dx$$

Έτσι καταλήγουμε στον τύπο,

$$\int fg'dx = fg - \int f'gdx\,.$$

Άρα εφόσον επιθυμούμε να υπολογίσουμε κάποιο ολοκλήρωμα το οποίο είναι γινόμενο δυο συναρτήσεων, πρέπει να καθορίσουμε ποια συνάρτηση θα θέσουμε ως g' και ποια f ώστε να εφαρμόσουμε τον τύπο.

Ο τύπος μπορεί να απλουστευθεί ως εξής,

$$\int udv = uv - \int vdu$$

όπου $u = f(x)$ $v = g(x)$

$$du = f'(x)dx \quad v = g'(x)dx.$$

2.3.1. Παραδείγματα βάση την μέθοδο κατά παράγοντες.

Παράδειγμα 1:

$$\int xe^{6x}\,dx.$$

Λύση:

Σε αυτό το ολοκλήρωμα προτιμούμε να θέσουμε $u = x$ γιατί κατά την παραγώγιση του το x θα απαλειφθεί. Αφού $u = x$ οι υπόλοιποι όροι είναι,

$$u = x \qquad dv = e^{6x}dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{1}{6}e^{6x}.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο το ολοκλήρωμα μας παίρνει την μορφή

$$\int xe^{6x}\,dx = x\frac{1}{6}e^{6x} - \int \frac{1}{6}e^{6x}dx$$
$$= \frac{x}{6}e^{6x} - \frac{1}{36}e^{6x} + C.$$

Παράδειγμα 2:

$$\int (3x+5)\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx.$$

Λύση:

Θέτουμε

$$u = 3x + 5 \qquad dv = \cos\left(\frac{x}{4}\right)dx$$

$$du = 3dx \qquad v = 4\sin\left(\frac{x}{4}\right).$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο το ολοκλήρωμα μας παίρνει την μορφή,

$$\begin{aligned}\int (3x+5)\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx &= (3x+5)4\sin\left(\frac{x}{4}\right) - \int 12\sin\left(\frac{x}{4}\right)dx \\ &= 4(3x+5)\sin\left(\frac{x}{4}\right) + 48\cos\left(\frac{x}{4}\right) + C.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3:

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx.$$

Λύση:

Θέτουμε

$$u = x \qquad dv = \sqrt{x+1}\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο το ολοκλήρωμα μας παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+1}\,dx &= x\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}dx \\ &= \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + C.\end{aligned}$$

Επίσης αξίζει να σημειωθεί ότι το συγκεκριμένο παράδειγμα μπορεί να λυθεί εφαρμόζοντας την μέθοδο με αντικατάσταση.

$$u = x + 1 \qquad x = u - 1 \qquad du = dx,$$

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (u-1)\sqrt{u}du$$
$$= \int u^{3/2} - u^{1/2}du = \frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$
$$= \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C.$$

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα από την επίλυση του παραδείγματος δεν φαίνονται ίσα μεταξύ τους . Αυτό οφείλεται στο ότι τα αποτελέσματα μας διαφέρουν κατά C. Με άλλα λόγια, η σταθερά C που εμφανίζεται στην μία λύση και στην άλλη δεν είναι ίδιες.

Παράδειγμα 4:

$$\int x^2 \ln x dx.$$

Λύση:

Θέτουμε

$$u = \ln x \qquad dv = x^2 dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{x^3}{3}.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο το ολοκλήρωμα μας παίρνει την μορφή

$$\int x^2 \ln x dx = \ln x \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C.$$

Παράδειγμα 5:

$$\int \ln x dx.$$

Λύση:

Σε αυτό το ολοκλήρωμα δεν είναι εμφανείς οι όροι u ή v. Αν θέσουμε $u = 1$ καταλήγουμε με $dv = \ln x dx$, όπου το v είναι το ζητούμενο του παραδείγματος. Αυτό που μας απομένει είναι να θέσουμε ως $dv = dx$. Δηλαδή

$$u = lnx \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = x.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο το ολοκλήρωμα μας παίρνει την μορφή

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C.$$

Παράδειγμα 6:

$$\mathrm{I} = \int (-7x + 4)\tan^{-1}(8x)dx.$$

Λύση:

Θέτουμε

$$u = \tan^{-1}(8x) \qquad dv = -7x + 4$$

$$du = \frac{1}{1 + 8x^2}dx \qquad v = -\frac{7x^2}{2} + 4xdx.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο το ολοκλήρωμα μας παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \tan^{-1}(8x)\left(-\frac{7x^2}{2} + 4x\right) - \int \left(-\frac{7x^2}{2} + 4x\right)\frac{1}{1 + 8x^2}8dx \\ &= \tan^{-1}(8x)\left(-\frac{7x^2}{2} + 4x\right) - \int -\frac{7}{16} + \frac{32x}{1 + 64x^2} - \frac{7}{16}\frac{1}{1 + 64x^2}dx \\ &= \tan^{-1}(8x)\left(-\frac{7x^2}{2} + 4x\right) - \frac{4}{16}\ln(1 + 64x^2) + \frac{-7}{128}\tan^{-1}(8x) + C. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7:

$$\mathrm{I} = \int (-6x + 1)\ln(-1x)dx.$$

Λύση:

Θέτουμε

$$u = \ln(-1x) \qquad dv = (-6x + 1)dx$$

$$du = \frac{1}{-1x}(-1)dx = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{-6x^2}{2} + x.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο το ολοκλήρωμα μας παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= [\ln(-1x)]\left(\frac{-6x^2}{2} + x\right) - \int \left(\frac{-6x^2}{2} + x\right)\frac{1}{x}dx \\ &= [\ln(-1x)]\left(\frac{-6x^2}{2} + x\right) - \int \frac{-6x}{2} 1\,dx \\ &= [\ln(-1x)]\left(\frac{-6x^2}{2} + x\right) - \frac{6x^2}{4} - x + C.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 8:

$$\mathrm{I} = \int (5x^2 - x + 5)\ln(6x)dx.$$

Λύση:

Θέτουμε

$$u = \ln(6x) \qquad dv = (5x^2 - x + 5)dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο το ολοκλήρωμα μας παίρνει την μορφή

$$\mathrm{I} = [\ln(6x)]\left(\frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x\right) - \int \left(\frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x\right)\frac{1}{x}dx$$

$$= [\ln(6x)]\left(\frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x\right) - \frac{1}{6}\int 10x^2 - 3x + 30dx$$
$$= [\ln(6x)]\left(\frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x\right) - \frac{1}{36}(20x^3 - 9x^2 + 180x) + C.$$

Παράδειγμα 9:

$$\int \frac{\ln(x)}{x^5}dx.$$

Λύση:

Θέτουμε

$$u = \ln(x) \qquad dv = \frac{1}{x^5}dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = -\frac{1}{4x^4}.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο το ολοκλήρωμα μας παίρνει την μορφή

$$\int \frac{\ln(x)}{x^5}dx = \ln(x)\left(-\frac{1}{4x^4}\right) - \int -\frac{1}{4x^4}\frac{1}{x}dx = -\frac{\ln(x)}{4x^4} + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^5}dx$$
$$= -\frac{\ln(x)}{4x^4} + \frac{1}{4}\left(\frac{x^{-4}}{-4}\right) + C = -\frac{\ln(x)}{4x^4} - \frac{1}{16x^4} + C.$$

Παράδειγμα 10:

$$\int e^{-7x}\sin(8x)dx.$$

Λύση:

Θέτουμε

$$u = \sin(8x) \qquad dv = e^{-7x}dx$$

$$du = 8\cos(8x)dx \qquad v = -\frac{1}{7}e^{-7x}.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο το ολοκλήρωμα μας παίρνει την μορφή,

$$= [\sin(8x)]\left(-\frac{1}{7}e^{-7x}\right) - \int \left(-\frac{1}{7}e^{-7x}\right)[8\cos(8x)dx]$$

$$= -\frac{1}{7}e^{-7x}\sin(8x) + \frac{8}{7}\int e^{-7x}\cos(8x)\,dx\,.$$

Θέτουμε

$$u = \cos(8x) \qquad dv = e^{-7x}dx$$

$$du = -8\sin(8x)dx \qquad v = -\frac{1}{7}e^{-7x}.$$

$$\int e^{-7x}\cos(8x)\,dx = \cos(8x)\left(-\frac{1}{7}e^{-7x}\right) - \int\left(-\frac{1}{7}e^{-7x}\right)[-8\sin(8x)]dx$$
$$= -\frac{1}{7}e^{-7x}\cos(8x) - \frac{8}{7}\int e^{-7x}\sin(8x)dx.$$

Άρα

$$\int e^{-7x}\sin(8x)dx = -\frac{1}{7}e^{-7x}\sin(8x) + \frac{8}{7}\left[-\frac{1}{7}e^{-7x}\cos(8x) - \frac{8}{7}\int e^{-7x}\sin(8x)dx\right]$$
$$= -\frac{1}{7}e^{-7x}\sin(8) - \frac{8}{49}e^{-7x}\cos(8x) - \frac{64}{49}\int e^{-7x}\sin(8x)dx.$$

Οπότε

$$\frac{113}{49}\int e^{-7x}\sin(8x)dx = -\frac{1}{7}e^{-7x}\sin(8x) - \frac{8}{49}e^{-7x}\cos(8x) + C \Rightarrow$$
$$\int e^{-7x}\sin(8x)dx = -\frac{7}{113}e^{-7x}\sin(8x) - \frac{8}{113}e^{-7x}\cos(8x) + C.$$

2.3.2. Κανόνας L.I.A.T.E.

Ο Κανόνας L.I.A.T.E. είναι ένας εμπειρικός κανόνας ο οποίος μας συμβουλεύει σε ένα ολοκλήρωμα ποια συνάρτηση θα θέσουμε ως u ώστε να εφαρμόσουμε την μέθοδο κατά παράγοντες. Προτάθηκε από τον Dr. Herbert Kasube του πανεπιστημίου του Bradle. Η λέξη L.I.A.T.E. είναι ένα αρκτικόλεξο των συναρτήσεων που προτιμούμε ιεραρχικά.

- **L**ogarithmic functions, (λογαριθμικές συναρτήσεις, $\ln x$)
- **I**nverse trigonometric functions, (αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις, $\arctan x, \arcsin x$)
- **A**lgebraic functions (αλγεβρικές συναρτήσεις $\alpha x^{\nu}, \frac{1}{x}$)

- **T**rigonometric functions (τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin x, \cos x, \tan x$)
- **E**xponential Functions (εκθετικές συναρτήσεις e^x, α^x)

Προσοχή όμως, αυτός είναι ένας καθαρά εμπειρικός κανόνας και δεν ισχύει σε κάθε ολοκλήρωμα. Είναι πολύ πιθανόν μερικές φορές εφαρμόζοντας τον ΚανόναL.I.A.T.E. να καταλήξουμε σε πολύ πιο πολύπλοκα ολοκληρώματα.

2.4. Μέθοδοι ολοκλήρωσης τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε μεθόδους και τακτικές ολοκλήρωσης σε ολοκληρώματα που περιέχουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις ή ολοκληρωμάτων των οποίων η λύση τους απαιτεί την χρήση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων .

2.4.1. Ολοκληρώματα που περιέχουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Εδώ θα μελετήσουμε διάφορες μορφές τριγωνομετρικών συναρτήσεων που μπορεί να εμπεριέχεται σε ένα ολοκλήρωμα και τις μεθόδους υπολογισμού αυτών.

1) ολοκληρώματα της μορφής$\int \sin(x)^n\, dx$ ή $\int \cos(x)^n\, dx$.

Εάν ο εκθέτης είναι $n = 2k$, δηλαδή άρτιος αριθμός, μετατρέπουμε τον εκθέτη του στην εξής μορφή.

$$\int \sin^n(x)\, dx = \int (\sin^2(x))^k\, dx$$

Μετά, κάνοντας χρήση των τριγωνομετρικών τύπων,

$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$εάν έχουμε συνημίτονο, μετατρέπουμε το ημίτονο σε συνημίτονο και επιλύουμε το ολοκλήρωμα.

Παράδειγμα 1:

$$\int \sin^2(x)dx.$$

Λύση:

$$\int \sin^2(x)dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \int \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin(2x)}{2} + C.$$

Εάν ο εκθέτης είναι περιττός, δηλαδή της μορφής $n = 2k+1$, τότε κάνουμε τις εξής κινήσεις.

$$\int \sin^{2\kappa+1}(x)dx = \int \sin^{2\kappa}(x)\sin(x)\,dx$$

Μειώσαμε την δύναμη του εκθέτη κατά μία μονάδα και μετατράπηκε σε γινόμενο.

Έπειτα κάνουμε χρήση του τύπου $1 = \sin^2(x) + \cos^2(x)$

$$= \int (1-\cos^2(x))^{2k}\sin(x)dx$$

Τέλος θέτουμε $u = 1 - \cos^2(x)$και επιλύουμε το ολοκλήρωμα βάση της μεθόδου της αντικατάστασης.

Παράδειγμα 2:

$$\int \sin^5(x)dx.$$

Λύση:

$$\int \sin^5(x)dx = \int \sin^4(x)\sin(x)\,dx = \int (\sin^2(x))^2\sin(x)dx$$
$$= \int (1-\cos^2(x))^2\sin(x)dx.$$

Θέτουμε $u = \cos(x)$ και $du = -\sin(x)dx$,

$$\int \sin^5(x)dx = \int (1-u^2)^2\, du = \int [1-2u^2+u^4]du = u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C$$
$$= \cos(x) - \frac{2}{3}\cos(x)^3 + \frac{1}{5}\cos(x)^5 + C.$$

Παράδειγμα 3:

$$\int \sin^2(x)\cos^2(x)dx.$$

Λύση:

$$\int \sin^2(x)\cos^2(x)dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos(2x))\frac{1}{2}(1+\cos(2x))dx$$
$$= \frac{1}{4}\int 1-\cos^2(2x)dx = \frac{1}{4}\int 1-\frac{1}{2}(1+\cos(4x))dx$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x)\right) + C = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + C.$$

Λύση 2:

Κάνοντας χρήση ενός άλλου τριγωνομετρικού τύπου $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin\ (2x)$, θα δούμε μια διαφορετική λύση.

$$\int \sin^2(x)\cos^2(x)dx = \int \left(\frac{1}{2}(\sin\ (2x))\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \sin^2(2x)dx$$
$$= \frac{1}{8}\int 1-\cos(4x)dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + C.$$

Παράδειγμα 4:

$$\int 3\cos^3 x dx.$$

Λύση:

$$\int 3\cos^3 x dx = 3\int (\cos^2 x)\cos x dx = 3\int (1-\sin^2 x)\cos x dx$$

$$= 3\left[\int \cos x dx - \int \sin^2 x \cos x dx\right]$$

Θέτουμε για το δεύτερο ολοκλήρωμα, $u = \sin x$, άρα

$$du = \cos x dx.$$

$$\int 3\cos^3 x dx = 3\left[\sin x + C_1 - \int u^2 du\right] = 3\left[\sin x - \frac{u^3}{3} + C\right]$$
$$= 3\sin x - \sin^3 x + C.$$

Παράδειγμα 5:

$$\int \cos^2(2x) dx.$$

Λύση:

Θέτουμε $u = 2x$, άρα

$$du = 2dx.$$

$$\int \cos^2(2x)dx = \int \cos^2 u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos^2 u du$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+\cos 2u}{2} du = \frac{1}{4}\left[u + \frac{\sin 2u}{2}\right] + C$$
$$= \frac{1}{4}\left[2x + \frac{\sin 2(2x)}{2}\right] + C$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} + C.$$

Παράδειγμα 6:

$$\int_0^1 \sin^2 4x dx.$$

Λύση:

Έχουμε

$$2\sin^2 4x = 1 - \cos 2(4x) = 1 - \cos(8x), \text{ άρα}$$

$$\sin^2 4x = \frac{1-\cos(8x)}{2}.$$

$$\int_0^1 \sin^2 4x dx = \int_0^1 \frac{1-\cos(8x)}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 1-\cos(8x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left| x - \frac{\sin(8x)}{8}\right|_0^1 = \frac{1}{2}\left|\left(1-\frac{0{,}9894}{8}\right)-(0-0)\right| = 0{,}4382.$$

Παράδειγμα 7:

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\sin^3 x dx.$$

Λύση:

Έχουμε

$$\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = (1-\cos^2 x)\sin x$$

$$\sqrt{\cos x}\sin^3 x = \cos^{1/2} x(1-\cos^2 x)\sin x = \left(\cos^{1/2} x - \cos^{5/2} x\right)\sin x$$

Θέτουμε $u = \cos x$, άρα

$$du = -\sin x\, dx$$

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\sin^3 x dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(\cos^{1/2} x - \cos^{5/2} x\right)\sin x$$

$$= -\int_{\pi/3}^{\pi/2} u^{1/2} - u^{5/2} du = \left[-\frac{2u^{3/2}}{3} + \frac{2u^{7/2}}{7}\right]_{\pi/3}^{\pi/2}$$

$$= \left[-\frac{2\cos^{3/2} x}{3} + \frac{2\cos^{7/2} x}{7}\right]_{\pi/3}^{\pi/2}$$

$$= [(0-0)-(-0{,}23570+0{,}02525)] = 0{,}2104.$$

Τύποι μετατροπής γινομένου τριγωνομετρικών συναρτήσεων σε άθροισμα.

Με την χρήση των παρακάτω τύπων μπορούμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα που περιέχουν γινόμενο τριγωνομετρικών συναρτήσεων, αφού η μετατροπή τους σε άθροισμα καθιστά τον υπολογισμό αρκετά ευκολότερο.

$$\int \sin(a)\cos(b)dx = \int \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))dx$$

$$\int \cos(a)\cos(b)dx = \int \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))dx$$

$$\int \sin(a)\sin(b)dx = \int \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))dx$$

Παράδειγμα 1:

$$\int \cos(15x)\cos(4x)dx.$$

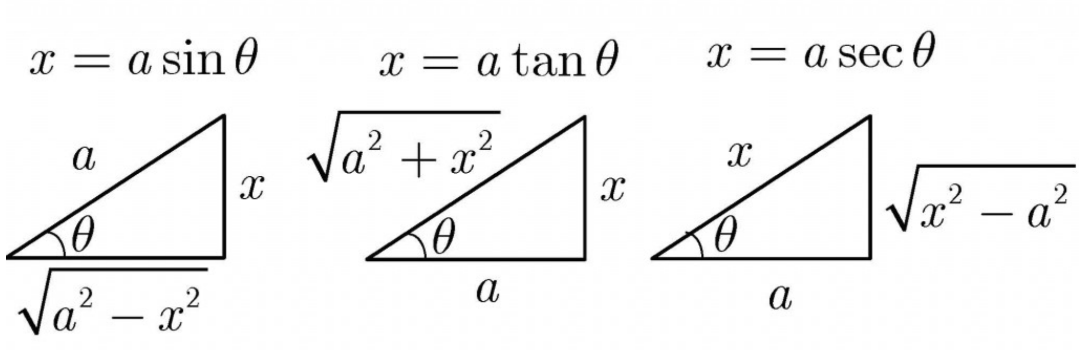
Λύση:

$$\begin{aligned}\int \cos(15x)\cos(4x)dx &= \int \frac{1}{2}(\cos(11x) + \cos(19x))dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{11}\sin(11x) + \frac{1}{19}\sin(19x)\right) + C.\end{aligned}$$

2.4.2 Μέθοδος ολοκλήρωσης με τριγωνομετρική αντικατάσταση.

Σε κάποιες περιπτώσεις ολοκληρωμάτων, ενώ ο τρόπος λύσης τους μοιάζει εύκολος, καταλήγουμε να έχουμε ένα ολοκλήρωμα πιο πολύπλοκο από το αρχικό. Σε αυτά τα ολοκληρώματα θα εφαρμόσουμε την μέθοδο ολοκλήρωσης με τριγωνομετρική αντικατάσταση. Η μέθοδος αυτή είναι πολύ χρήσιμη σε ολοκληρώματα που περιέχουν τους όρους $(a^2 - x^2)^n$, $(x^2 + a^2)^n$, $(x^2 - a^2)^n$.

Σκοπός αυτής της μεθόδου είναι να εκφράσει αυτούς τους όρους με τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Αυτό γίνεται αντιστοιχώντας τον όρο με μια πλευρά από ένα ορθογώνιο τρίγωνο, εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα και εκφράζοντας το x με τόξο γωνίας θ ημιτόνου, εφαπτομένης ή τέμνουσας.

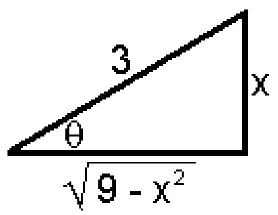


Παράδειγμα 1:

$$\int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx.$$

Λύση:

Σύμφωνα με την μέθοδο τριγωνομετρικής αντικατάστασης, η ρίζα $\sqrt{9 - x^2}$ αντιπροσωπεύει ένα τρίγωνο με βάση $\sqrt{9 - x^2}$, ύψος ίσο με x και υποτείνουσα με μήκος 3.



Για αυτό το τρίγωνο έχουμε, $\sin\theta = \frac{x}{3}. x = 3\sin\theta$ άρα $\theta = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$

$dx = 3\cos\theta d\theta$και$\sqrt{9 - x^2} = 3\cos\theta.$

Αλλάζουμε τις μεταβλητές και έχουμε,

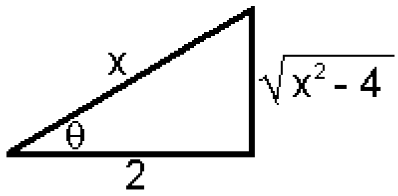
$$\int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx = \int \frac{3\cos\theta}{3\cos\theta} d\theta = \int d\theta = \theta + C$$
$$= \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$

Παράδειγμα 2:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx.$$

Λύση:

Σύμφωνα με την μέθοδο τριγωνομετρικής αντικατάστασης, η ρίζα$\sqrt{x^2-4}$αντιπροσωπεύει ένα τρίγωνο με μήκος υποτείνουσας ίσο με x και μήκος βάσης ίση με 2.



Για αυτό το τρίγωνο έχουμε, $\sec\theta = \frac{x}{2} x = 2\sec\theta\ \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

$dx = 2\sec\theta\tan\theta d\theta$και $\sqrt{x^2-4} = 2\tan\theta$.

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx = \int \frac{2\sec\theta\tan\theta d\theta}{(2\tan\theta)^2 2\tan\theta} = \int \frac{1}{4}\cos\theta d\theta = \frac{1}{4}\sin\theta + C$$

Όμως από το τρίγωνο παρατηρούμε ότι

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$$

άρα,

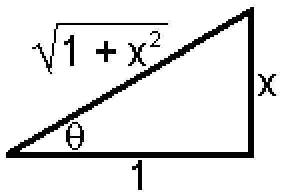
$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x} + C.$$

Παράδειγμα 3:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

Λύση:

Σύμφωνα με την μέθοδο τριγωνομετρικής αντικατάστασης, η ρίζα$\sqrt{1+x^2}$αντιπροσωπεύει ένα τρίγωνο με μήκος βάσης 1 και ύψος ίσο με x.



Για αυτό το τρίγωνο έχουμε$\tan\theta = x \; \theta = \tan^{-1} x$

$dx = \sec^2\theta d\theta$ και $\sqrt{1+x^2} = \sec\theta$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta} d\theta = \int \sec\theta d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$
$$= \ln\left|\sqrt{1+x^2} + x\right| + C.$$

2.5. Μέθοδος ολοκλήρωσης μερικών κλασμάτων.

Η μέθοδος ολοκλήρωσης μερικών κλασμάτων αφορά την επίλυση ολοκληρωμάτων τα οποία περιέχουν το πηλίκο δύο πολυωνύμων. Αυτά τα ολοκληρώματα είναι της μορφής
$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

Απαραίτητη προϋπόθεση για την εφαρμογή αυτής μεθόδου είναι ότι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$ να είναι μικρότερος από τον βαθμό του πολυωνύμου $Q(x)$. Επίσης αν ο αριθμητής είναι ίσος με την παράγωγο του παρονομαστή $(P(x) = Q'(x))$, τότε δεν είναι απαραίτητη η χρήση αυτής της μεθόδου, αλλά η μέθοδος με αντικατάσταση.

Ανάλογα με τους παράγοντες του παρονομαστή διαμορφώνουμε ανάλογα τα μερικά κλάσματα.

Παράγοντας στον παρονομαστή	Μερικό κλάσμα
$ax+b$	$\frac{A}{ax+b}$
$(ax+b)^k$	$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$
ax^2+bx+c	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

2.5.1. Παραδείγματα βάση την μέθοδο μερικών κλασμάτων.

Παράδειγμα 1:

$$\int \frac{3x+11}{x^2-x-6}dx.$$

Λύση:

Αρχικά παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή εφόσον είναι εφικτό,

$$\int \frac{3x+11}{x^2-x-6}dx = \int \frac{3x+11}{(x-3)(x+2)}dx.$$

Αφού έγινε η παραγοντοποίηση μπορούμε να αναγνωρίσουμε βάση του παρονομαστή ποια μερικά κλάσματα θα χρησιμοποιήσουμε.

$$\frac{3x+11}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+2)} \Rightarrow$$
$$\frac{3x+11}{(x-3)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}.$$

Και αφού οι παρονομαστές είναι ίσοι,

$$3x+11 = A(x+2)+B(x-3).$$

Οι αριθμητές θα πρέπει να είναι ίσοι για οποιαδήποτε τιμήx εμείς θέσουμε. Έτσι θέτοντας όπου $x=-2$ και $x=3$ παίρνουμε $A=4$ και $B=-1$.

$$\int \frac{3x+11}{x^2-x-6}dx = \int \frac{4}{(x-3)} + \frac{-1}{(x+2)}dx$$
$$= 4\ln|x-3| - |x+2| + C.$$

Παράδειγμα 2:

$$\int \frac{2x^2-36x+42}{(x+9)(x^2+7)}dx.$$

Λύση:

$$\frac{2x^2-36x+42}{(x+9)(x^2+7)} = \frac{A}{(x+9)} + \frac{Bx+C}{(x^2+7)} \Rightarrow$$

$$\frac{2x^2 - 36x + 42}{(x+9)(x^2+7)} = \frac{A(x^2+7) + (Bx+C)(x+9)}{(x+9)(x^2+7)}.$$

Και αφού οι παρονομαστές είναι ίδιοι,

$$2x^2 - 36x + 42 = A(x^2+7) + (Bx+C)(x+9) \Rightarrow$$
$$2x^2 - 36x + 42 = (A+B)x^2 + (9B+C)x + (7A+9C).$$

Βάση αυτών παίρνουμε τις εξείς σχέσεις

$$A + B = 2,\ 9B + C = 36,\ 7A + 9C = 42.$$

Λύνοντας το σύστημα των τριών αγνώστων παίρνουμε

$$A = 6\,,\quad B = -4\,,\quad C = 0.$$

άρα,

$$\int \frac{2x^2 - 36x + 42}{(x+9)(x^2+7)}dx = \int \frac{6}{(x+9)} + \frac{-4x+0}{(x^2+7)}dx$$
$$= 6\ln|x+9| - 2\ln|(x^2+7)| + \frac{0}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C.$$

Παράδειγμα 3:

$$\int \frac{-3x^2 - 6x + 8}{(x-4)(x+4)^2}dx.$$

Λύση:

$$\frac{-3x^2 - 6x + 8}{(x-4)(x+4)^2} = \frac{A}{(x-4)} + \frac{B}{(x+4)} + \frac{C}{(x+4)^2} \Rightarrow$$
$$\frac{-3x^2 - 6x + 8}{(x-4)(x+4)^2} = \frac{A(x+4)^2 + B(x-4)(x+4) + C(x-4)}{(x-4)(x+4)^2}.$$

Και αφού οι παρονομαστές είναι ίδιοι,

$$-3x^2 - 6x + 8 = A(x+4)^2 + B(x-4)(x+4) + C(x-4) \Rightarrow$$
$$-3x^2 - 6x + 8 = (A+B)x^2 + (8A + 0B + C)x + (16 - 16B - 4C).$$

Βάση αυτών παίρνουμε τις εξείς σχέσεις

$$A + B = -3\,, \quad 8A + 0B + C = -6\,, \quad 16A - 16B - 4C = 8$$

Λύνοντας το σύστημα των τριών αγνώστων παίρνουμε

$$A = -1\,, \quad B = -2\,, \quad C = 2.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int \frac{-3x^2 - 6x + 8}{(x-4)(x+4)^2}dx &= \int \frac{-1}{(x-4)} + \frac{-2}{(x+4)} + \frac{2}{(x+4)^2}dx \\ &= -1\ln|x-4| - 2\ln|x + 4 - 2(x+4)^{-1}| + C.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4:

$$\int \frac{x+27}{x^2-9}dx.$$

Λύση:

Αρχικά παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή,

$$\int \frac{x+27}{x^2-9}dx = \int \frac{x+27}{(x-3)(x+3)}dx.$$

Αφού έγινε η παραγοντοποίηση μπορούμε να αναγνωρίσουμε βάση του παρονομαστή ποια μερικά κλάσματα θα χρησιμοποιήσουμε,

$$\begin{aligned}\frac{x+27}{(x-3)(x+3)} &= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} \Rightarrow \\ \frac{x+27}{(x-3)(x+3)} &= \frac{A(x+3) + B(x-3)}{(x-3)(x+3)}.\end{aligned}$$

Και αφού οι παρονομαστές είναι ίσοι,

$$x + 27 = A(x+3) + B(x-3).$$

Οι αριθμητές θα πρέπει να είναι ίσοι για οποιαδήποτε τιμή x εμείς θέσουμε. Έτσι θέτοντας όπου $x = -3$ και $x = 3$ παίρνουμε $A = 5$ και $B = -4$.

$$\int \frac{x+27}{x^2-9}dx = \int \left[\frac{5}{x-3} - \frac{4}{x+3}\right]dx = 5\ln|x-3| - 4\ln|x+3| + C.$$

Παράδειγμα 5:

$$\int \frac{-2x^2 - 14x - 49}{x^3 - 7x^2} dx.$$

Λύση:

Αρχικά παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή

$$\frac{-2x^2 - 14x - 49}{x^3 - 7x^2} = \frac{-2x^2 - 14x - 49}{x^2(x-7)}$$

Αφού έγινε η παραγοντοποίηση μπορούμε να αναγνωρίσουμε βάση του παρονομαστή ποια μερικά κλάσματα θα χρησιμοποιήσουμε

$$\frac{-2x^2 - 14x - 49}{x^2(x-7)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-7} \Rightarrow$$
$$\frac{-2x^2 - 14x - 49}{x^2(x-7)} = \frac{Ax(x-7) + B(x-7) + Cx^2}{x^2(x-7)}.$$

Και αφού οι παρονομαστές είναι ίσοι,

$$-2x^2 - 14x - 49 = Ax(x-7) + B(x-7) + Cx^2 \Rightarrow$$

$$-2x^2 - 14x - 49 = (A+C)x^2 + (-7A+B)x - 7B.$$

Βάση αυτών παίρνουμε τις εξείς σχέσεις

$$A + C = -2, -7A + B = -14, -7B = -49.$$

Λύνοντας το σύστημα τριών αγνώστων παίρνουμε ότι $A = 3, B = 7 \;\kappa\alpha\iota\; C = -5$.

$$\int \frac{-2x^2 - 14x - 49}{x^2(x-7)} = \int \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{5}{x-7} dx = 3\ln|x| - \frac{7}{x} - 5\ln|x-7| + C.$$

Παράδειγμα 6:

$$\int \frac{8x - 36}{(x-5)^2} dx.$$

Λύση:

$$\frac{8x-36}{(x-5)^2} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{(x+5)^2} \Rightarrow$$
$$8x - 36 = A(x+5) + B \Rightarrow$$
$$8x - 36 = Ax + (5A + B).$$

Βάση αυτών παίρνουμε τις εξείς σχέσεις

$$8 = A \text{ και } -36 = 5A + B$$

Λύνοντας το σύστημα καταλήγουμε στα αποτελέσματα $A = 8$ και $B = 4$.

$$\int \frac{8x-36}{(x-5)^2}dx = \int \frac{8}{x-5} + \frac{4}{(x+5)^2}dx = 8\ln|x-5| - \frac{4}{x-5} + C.$$

Παράδειγμα 7:

$$\int \frac{6x^2+20x+9}{x^3+2x+x}dx.$$

Λύση:

Αρχικά παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή

$$\frac{6x^2+20x+9}{x^3+2x+x} = \frac{6x^2+20x+9}{x(x+1)^2}$$

Αφού έγινε η παραγοντοποίηση μπορούμε να αναγνωρίσουμε βάση του παρονομαστή ποια μερικά κλάσματα θα χρησιμοποιήσουμε

$$\frac{6x^2+20x+9}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x} \Rightarrow$$
$$\frac{6x^2+20x+9}{x(x+1)^2} = \frac{Ax(x+1) + Bx + C(x+1)^2}{x(x+1)^2}$$

Και αφού οι παρονομαστές είναι ίσοι,

$$6x^2 + 20x + 9 = Ax(x+1) + Bx + C(x+1)^2 \Rightarrow$$

$$6x^2 + 20x + 9 = (A + C)x^2 + (A + B + 2C)x + C.$$

Βάση αυτών παίρνουμε τις εξείς σχέσεις

$$A + C = 6, A + B + 2C = 20, C = 9.$$

Λύνοντας το σύστημα των τριών αγνώστων παίρνουμε,

$$A = -3\,, \quad B = 5\,, \quad C = 9.$$

Άρα

$$\int \frac{6x^2 + 20x + 9}{x(x+1)^2} dx = \int \frac{-3}{x+1} + \frac{5}{(x+1)^2} + \frac{9}{x} dx$$
$$= -3\ln|x+1| - \frac{5}{x+1} + \frac{9}{x} + C.$$

Παράδειγμα 8:

$$\int \frac{-7x^2 - 33x + 144}{(x+6)(x+3)(x-9)} dx.$$

Λύση:

$$\frac{-7x^2 - 33x + 144}{(x+6)(x+3)(x-9)} = \frac{A}{x+6} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-9} \Rightarrow$$
$$\frac{-7x^2 - 33x + 144}{(x+6)(x+3)(x-9)} = \frac{A(x+3)(x-9) + B(x+6)(x-9) + C(x+6)(x+3)}{(x+6)(x+3)(x-9)}.$$

Και αφού οι παρονομαστές είναι ίσοι,

$$-7x^2 - 33x + 144 = A(x+3)(x-9) + B(x+6)(x-9) + C(x+6)(x+3) \Rightarrow$$
$$-7x^2 - 33x + 144 = (A + B + C)x^2 + (-6A - 3B + 9C)x + (-27A - 54B + 18C).$$

Βάση αυτών παίρνουμε τις εξείς σχέσεις

$$A + B + C = -7, -6A - 3B - 9C = -33, -27A - 54B + 18C = 144.$$

Λύνοντας το σύστημα των τριών αγνώστων παίρνουμε,

$$A = 2\,, \quad B = -5\,, \quad C - 4.$$

Άρα

$$\int \frac{-7x^2-33x+144}{(x+6)(x+3)(x-9)}dx = \int \frac{2}{x+6}+\frac{-5}{x+3}+\frac{-4}{x-9}dx$$
$$= 2\ln|x+6| - 5\ln|x+3| - 4\ln|x-9| + C.$$

2.6. Τύποι ανάταξης.

Οι τύποι ανάταξης είναι ένα χρήσιμο εργαλείο όπου μας βοηθούν να υπολογίσουμε ολοκληρώματα, τα οποία συνήθως περιέχουν συναρτήσεις υψωμένες σε κάποιο εκθέτη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα αντί να καταφύγουμε σε άλλες μεθόδους για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων, κάνοντας χρήση του τύπου έχουμε άμεσα το αποτέλεσμα.

1) $\int \sin^{n}(x)\,dx = -\frac{\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)dx.$

2) $\displaystyle\int \cos^{n}(x)\,dx = -\frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)dx.$

3) $\displaystyle\int \tan^{n}(x)\,dx = \frac{\tan^{n-1}(x)}{n-1} - \int \tan^{n-2}(x)\,dx.$

4) $\displaystyle\int x^{n}\sin(x)dx = -x^{n}\cos(x) + n\int x^{n-1}\cos(x)dx.$

5) $\displaystyle\int x^{n}\cos(x)dx = x^{n}\sin(x) + n\int x^{n-1}\sin(x)dx.$

6) $\displaystyle\int x^{n}e^{ax}dx = \frac{1}{a}x^{n}e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx.$

7) $\displaystyle\int (\ln(x)^{n})dx = \ln(x)^{n} - n\int (\ln(x)^{n-1})dx.$

8) $\displaystyle\int \sin^{n}(u)\cos^{m}(u)du = \frac{\sin^{n+1}(u)\cos^{m-1}(u)}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \sin^{n}(u)\cos^{m-2}(u)du.$

2.6.1. Παραδείγματα βάση στους τύπους ανάταξης ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα 1:

$$\int \tan^6(x)\, dx.$$

Λύση:

Σύμφωνα με τον τύπο της ανάταξης,

$$\int \tan^6(x)\, dx = \frac{\tan^{6-1}(x)}{6-1} - \int \tan^{6-2}(x)\, dx = I_1$$
$$\int \tan^4(x)\, dx = \frac{\tan^{4-1}(x)}{4-1} - \int \tan^{4-2}(x)\, dx = I_2$$
$$\int \tan^2(x)\, dx = \frac{\tan^{2-1}(x)}{2-1} - \int \tan^{2-2}(x)\, dx$$
$$= \tan(x) - x + C$$

Επιστρέφουμε στο ολοκλήρωμα I_2 και αντικαθιστούμε,

$$I_2 = \int \tan^4(x)\, dx = \frac{\tan^3(x)}{3} - \tan(x) + x + C.$$

Επιστρέφουμε στο ολοκλήρωμα I_1 και αντικαθιστούμε,

$$I_1 = \int \tan^6(x)\, dx = \frac{\tan^5(x)}{5} - \frac{\tan^3(x)}{3} + \tan(x) - x + C.$$

Παράδειγμα 2:

$$\int x^3 \sin x dx.$$

Λύση:

Σύμφωνα με τον τύπο της ανάταξης (4),

$$\int x^n \sin(x) dx = -x^n \cos(x) + n \int x^{n-1} \cos(x) dx\,.$$

$$\int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos(x) + 3 \int x^2 \cos(x) dx.$$

Σύμφωνα με τον τύπο της ανάταξης (5),

$$\int x^n \cos(x) dx = x^n \sin(x) + n \int x^{n-1} \sin(x) dx$$

$$\int x^2 \cos(x) dx = x^2 \sin(x) + 2 \int x^1 \sin(x) dx.$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos(x) + \int x^0 \cos(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x)$$

$$\int x^2 \cos(x) dx = x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x).$$

Επομένως

$$\int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos(x) + 3[x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x)] + C$$

$$= -x^3 \cos(x) + 3x^2 \sin(x) + 6x \cos(x) - 6 \sin(x) + C.$$

Παράδειγμα 3:

$$\int \sin^3(5x) dx.$$

Λύση:

Θέτουμε $a = 5x$,άρα

$$da = \frac{1}{5} dx.$$

Επομένως

$$\int \sin^3(5x) dx = \frac{1}{5} \int \sin^3(a) da.$$

Σύμφωνα με τον τύπο της ανάταξης (1),

$$\int \sin^n(x)\, dx = -\frac{\sin^{n-1}(x) \cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(x) dx.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}\int \sin^3(a)da &= \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{3}\sin^2(a)\cos(a)+\frac{2}{3}\int \sin(a)da\right]\\ &= \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{3}\sin^2(a)\cos(a)-\frac{2}{3}\cos(a)+C\right]\\ &= -\frac{1}{15}\sin^2(5x)\cos(5x)-\frac{2}{15}\cos(5x)+C.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4:

$$\mathrm{I} = \int \sin^2(x)\cos^4(x)dx.$$

Λύση:

Σύμφωνα με τον τύπο της ανάταξης (8),

$$\int \sin^n(u)\cos^m(u)du = \frac{\sin^{n+1}(u)\cos^{m-1}(u)}{n+m}+\frac{m-1}{n+m}\int \sin^n(u)\cos^{m-2}(u)du.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sin^3(x)\cos^3(x)}{6}+\frac{3}{6}\int \sin^2(x)\cos^2(x)dx\\ &= \frac{\sin^3(x)\cos^3(x)}{6}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin^3(x)\cos(x)+\frac{1}{4}\int \sin^2(x)dx\right]\\ &= \frac{\sin^3(x)\cos^3(x)}{6}+\frac{1}{8}\sin^3(x)\cos(x)+\frac{1}{8}\left[-\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)+\frac{1}{2}\int dx\right]\\ &= \frac{1}{6}\sin^3(x)\cos^3(x)+\frac{1}{8}\sin^3(x)\cos(x)-\frac{1}{16}\sin(x)\cos(x)+\frac{1}{16}x+C.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 5:

$$\int \tan^5(x)\cos^8(x)dx.$$

Λύση:

$$\int \tan^5(x)\cos^8(x)dx = \int \frac{\sin^5(x)}{\cos^5(x)}\cos^8(x)dx = \int \sin^5(x)\cos^3(x)dx$$

Σύμφωνα με τον τύπο της ανάταξης,

$$\int \sin^n(u)\cos^m(u)du = \frac{\sin^{n+1}(u)\cos^{m-1}(u)}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \sin^n(u)\cos^{m-2}(u)du.$$

Επομένως

$$\int \sin^5(x)\cos^3(x)dx = \frac{\sin^6(x)\cos^2(x)}{8} + \frac{2}{8}\int \sin^5(x)\cos(x)dx$$

Θέτουμε $u = \sin(x)$, άρα

$$du = \cos(x)\,dx.$$

Κατά συνέπεια

$$\int \sin^5(x)\cos(x)dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C_1$$

Έτσι το τελικό αποτέλεσμα είναι

$$\int \sin^5(x)\cos^3(x)dx = \frac{\sin^6(x)\cos^2(x)}{8} + \frac{1}{24}\sin^6(x) + C.$$

2.7 Παραδείγματα ολοκληρωμάτων με συνδυασμό μεθόδων ολοκλήρωσης.

Σε αυτό την παράγραφο θα εξετάσουμε μερικά ολοκληρώματα των οποίων η επίλυση απαιτεί τον συνδυασμό δυο μεθόδων ολοκλήρωσης ώστε να πραγματοποιηθεί ο υπολογισμός τους. Αυτό δεν είναι καθόλου εύκολη διαδικασία σε πολλές περιπτώσεις διότι αν δεν επιλέξουμε τις κατάλληλες μεθόδους ολοκλήρωσης ίσως οδηγηθούμε σε πιο σύνθετα ολοκληρώματα.

Παράδειγμα 1:

$$\int x\ln(x^2+1)dx.$$

Λύση:

Αρχικά θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο ολοκλήρωσης με αντικατάσταση,

Θέτουμε $u = x^2 + 1$, άρα

$$du = 2xdx \text{ και } xdx = \frac{1}{2}du,$$

αντικαθιστούμε

$$\int x\ln(x^2+1)dx = \int \frac{1}{2}\ln u du.$$

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε την μέθοδο ολοκλήρωσης κατά παράγοντες,

$$\int x\ln(x^2+1)dx = \int \frac{1}{2}(u)'\ln u du = \frac{1}{2}u\ln u - \frac{1}{2}\int u(\ln u)'du = \frac{1}{2}u\ln u - \frac{1}{2}\int u\frac{1}{u}du$$
$$= \frac{1}{2}u\ln u - \frac{1}{2}\int 1\,du = \frac{1}{2}u\ln u - \frac{1}{2}u + C.$$

Τέλος αντικαθιστούμε το u,

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}(x^2+1) + C.$$

Παράδειγμα 2:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx.$$

Λύση:

Αρχικά θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο ολοκλήρωσης με αντικατάσταση.

Θέτουμε $u = \sin x$, άρα

$$du = \cos x\,dx.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{du}{u^2-1} = \int \frac{du}{(u+1)(u-1)}.$$

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε χρήση της μεθόδου ολοκλήρωσης μερικών κλασμάτων,

$$\frac{1}{u^2-1}=\frac{1}{(u+1)(u-1)}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}$$

$$1=A(u+1)+B(u-1)$$

$$1=(A+B)u+(A-B)$$

Βάση αυτών παίρνουμε τις εξείς σχέσεις,

$$A+B=0,\quad A-B=1$$

άρα

$$A=\frac{1}{2}\qquad B=-\frac{1}{2}$$

$$\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1}{2}\frac{du}{u-1}-\int\frac{1}{2}\frac{du}{u+1}=\frac{1}{2}\ln|u-1|-\frac{1}{2}\ln|u+1|+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln|\sin x-1|-\frac{1}{2}\ln|\sin x+1|+C.$$

Παράδειγμα 3:

$$\int e^x\cos^2 x dx.$$

Λύση:

Αρχικά θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο ολοκλήρωσης με αντικατάσταση.

Θέτουμε $u=e^x$,άρα

$$du=e^x dx.$$

$$\int e^x\cos^2 x dx=\int\cos^2 u du$$

Έπειτα κάνουμε χρήση του τριγωνομετρικού τύπου $\cos^2(x)=\frac{1+\cos\ (2x)}{2}$,

$$\int\cos^2 u du=\int\frac{1+\cos\ (2u)}{2}du=\int\frac{1}{2}du+\int\frac{\cos(2u)}{2}du$$
$$=\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}\frac{\sin(2u)}{2}+C=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}\frac{\sin(2e^x)}{2}+C.$$

Παράδειγμα 4:

$$\int x^{-1}\tan^4(\ln x)dx.$$

Λύση:

Θέτουμε $u = \ln x$, άρα

$$du = \frac{1}{x}dx = x^{-1}dx.$$

Αντικαθιστούμε

$$\int \tan^4(u)du$$

Κάνοντας χρήση τους τύπους ανάταξης (3)έχουμε:

$$\int \tan^4(u)du = \frac{\tan^3(u)}{3} - \int \tan^2(u)du \quad (1)$$

$$\int \tan^2(u)du = \tan(u) - \int 1du = \tan(u) - u + C \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\begin{aligned}\int x^{-1}\tan^4(lnx)dx &= \frac{\tan^3(u)}{3} - \tan(u) - u + C \\ &= \frac{\tan^3(\ln x)}{3} - \tan(\ln x) - \ln x + C.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 5:

$$\int \frac{2}{x - 3\sqrt{x + 10}}dx.$$

Λύση:

Αρχικά θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο ολοκλήρωσης με αντικατάσταση,

Θέτουμε $u = \sqrt{x + 10}$, άρα

$$x = u^2 - 10 \text{ και } dx = 2udu.$$

Αντικαθιστούμε

$$\int \frac{2}{x - 3\sqrt{x + 10}} dx = \int \frac{2}{u^2 - 10 - 3u} (2u) du$$
$$= \int \frac{4u}{u^2 - 10 - 3u} du = \int \frac{4u}{(u-5)(u+2)} du.$$

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε χρήση της μεθόδου ολοκλήρωσης μερικών κλασμάτων,

$$\frac{4u}{(u-5)(u+2)} = \frac{A}{u-5} + \frac{B}{u+2}$$

$$4u = A(u+2) + B(u-5)$$

$$4u = (A+B)u + (2A - 5B)$$

Βάση αυτών παίρνουμε τις εξείς σχέσεις,

$$A + B = 4, 2A - 5B = 0$$

Άρα $A = \frac{20}{7}$ και $B = \frac{8}{7}$

Επιστρέφουμε στο ολοκλήρωμα και έχουμε

$$\int \frac{2}{x - 3\sqrt{x + 10}} dx = \int \frac{20/7}{u - 5} du + \int \frac{8/7}{u + 2} du$$
$$= \frac{20}{7} \ln|u - 5| + \frac{8}{7} \ln|u + 2| + C.$$

Αντικαθιστούμε το u,

$$\int \frac{2}{x - 3\sqrt{x + 10}} dx = \frac{20}{7} \ln\left|\sqrt{x + 10} - 5\right| + \frac{8}{7} \ln\left|\sqrt{x + 10} + 2\right| + C.$$

Παράδειγμα 6:

$$\int xe^{x^2+1}\cos(x^2+1)dx.$$

Λύση:

Θέτουμε $u = x^2 + 1$, άρα

$$du = 2xdx \text{ και } \frac{1}{2}du = xdx.$$

Αντικαθιστούμε

$$\int xe^{x^2+1}\cos(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\int e^{u+1}\cos u du\,. \ (1)$$

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε την μέθοδο ολοκλήρωσης κατά παράγοντες,

$$\begin{aligned}\int xe^{x^2+1}\cos(x^2+1)dx &= \frac{1}{2}\int (e^{u+1})'\cos u du\\ &= e^{u+1}\cos u - \int e^{u+1}(-\sin u)du\\ &= e^{u+1}\cos u + \int e^{u+1}(\sin u)du\\ &= e^{u+1}\cos u + = e^{u+1}\sin u - \int e^{u+1}\cos u du.\end{aligned}$$

Οπότε,

$$2\int e^{u+1}\cos u du = e^{u+1}(\cos u + \sin u) + C. \ (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε

$$\int xe^{x^2+1}\cos(x^2+1)dx = e^{x^2+1}[\cos(x^2+1) + \sin(x^2+1)] + C.$$

ΜΕΡΟΣ Γ΄

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

3.1. Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων.

Η ολοκλήρωση χρησιμοποιείται σε κάθε κλάδο των φυσικών επιστημών , επιστήμης των υπολογιστών, στατιστική ανάλυση στοιχείων, μηχανική, οικονομικά, επιχειρήσεις, ιατρική και στις ανθρωπιστικές επιστήμες.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μερικές αναλυθούν μερικές εφαρμογές των ολοκληρωμάτων που συναντάμε στα μαθηματικά, όπως υπολογισμός εμβαδού μεταξύ γραφικών παραστάσεων, προβλήματα που αφορούν ταχύτητα, διάστημα επιτάχυνση αντικειμένου και το θεώρημα μέσης τιμής. Έπειτα θα ασχοληθούμε με την εφαρμογή των ολοκληρωμάτων σε θέματα οικονομικής φύσης. Αυτά περιλαμβάνουν υπολογισμό κέρδους και κόστους επιχείρησης, πλεονάσματος καταναλωτή-παραγωγού και προεξόφληση.

3.2. Υπολογισμός εμβαδού μεταξύ γραφικών παραστάσεων.

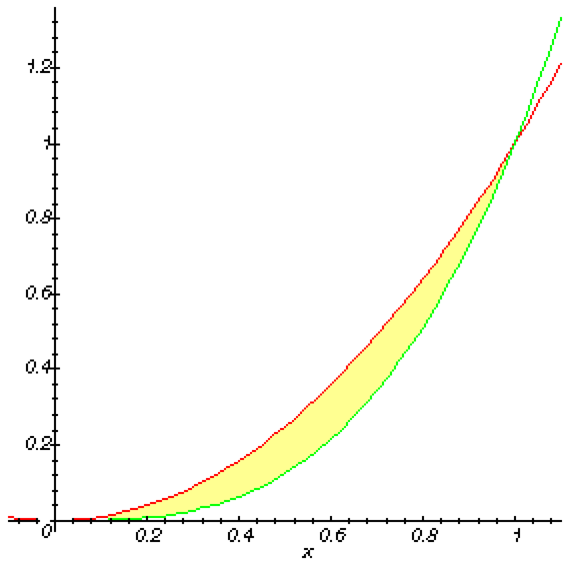
Έχοντας δύο ή περισσότερες γραφικές παραστάσεις μπορούμε να βρούμε, κάνοντας χρήση των ορισμένων ολοκληρωμάτων, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείονται από αυτές. Για να υπολογίσουμε αυτό το εμβαδόν θα πρέπει αρχικά να βρούμε το σημείο τομής μεταξύ των γραφικών παραστάσεων. Τα σημεία τομής είναι το μεσοδιάστημα που μας ενδιαφέρει και θα καθορίσουν τα άκρα του ορισμένου ολοκληρώματος. Έπειτα θα πρέπει να αναγνωρίσουμε ποια συνάρτηση είναι μεγαλύτερη στο μεσοδιάστημα ώστε να για να γίνει η αφαίρεση μεταξύ των συναρτήσεων. Μπορούμε να δούμε ποια συνάρτηση ορίζει το πάνω όριο του χωρίου με δύο τρόπους: Είτε παρατηρώντας τις γραφικές παραστάσεις είτε δίνοντας μια τιμή μεταξύ του μεσοδιαστήματος.

Παράδειγμα 1:

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής μεταξύ των γραφικών παραστάσεων

$f(x) = x^2$ και $g(x) = x^3$.

Λύση:



Αρχικά θα βρούμε τα σημεία τομής των δύο συναρτήσεων,

$$x^2 = x^3$$
$$0 = x^3 - x^2$$
$$0 = x^2(x-1).$$

Άρα τα σημεία τομής είναι $x = 0$ και $x = 1$.

Παρατηρώντας τις γραφικές παραστάσεις βλέπουμε ότι για το μεσοδιάστημα $[0,1]$ η συνάρτηση $f(x) = x^2$ ορίζει το πάνω όριο του χωρίου. Έχοντας αυτά τα στοιχεία το εμβαδόν που ζητάμε είναι ίσο με

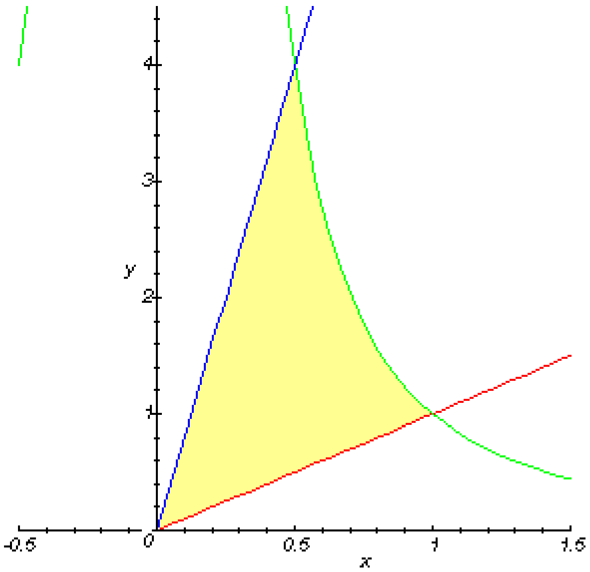
$$\int_0^1 x^2 - x^3 dx = \left|\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4} - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{4}\right] = \frac{1}{12}.$$

Παράδειγμα 2:

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής μεταξύ των γραφικών παραστάσεων

$f(x) = 8x$, $g(x) = x$ και $h(x) = x^{-2}$.

Λύση:



Αρχικά θα βρούμε τα σημεία τομής των τριών συναρτήσεων.

Η $f(x)$ και η $g(x)$ έχουν σημείο τομής το $x = 0$.

Για τις συναρτήσεις $f(x)$ και $h(x)$ έχουμε ,

$$8x = \frac{1}{x^2}$$

$$x^3 = \frac{1}{8} \qquad x = 0{,}5.$$

Για τις συναρτήσεις $f(x)$ και $h(x)$ έχουμε

$$x = \frac{1}{x^2}$$

$$x^3 = 1 \qquad x = 1.$$

Άρα το σημείο τομής της $f(x)$ και $h(x)$ είναι το $x = 1$.

Έχοντας αυτά τα στοιχεία θα χωρίσουμε την περιοχή σε δύο μεσοδιαστήματα,

$\alpha)$ $[0, 0{,}5]$ όπου $f(x) \geq g(x)$και

$\beta)$ $[0{,}5\ ,1]$ όπου $h(x) \geq g(x)$.

Η περιοχή που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι το άθροισμα δύο ολοκληρωμάτων

$$\int_{0}^{0,5} 8x - x dx + \int_{0,5}^{1} x^{-2} - x dx$$

$$= \left| 7\frac{x^2}{2} \right|_{0}^{0,5} + \left| \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^2}{2} \right|_{0,5}^{1} = 7\frac{0{,}5^2}{2} - 7\frac{0^2}{2} + \frac{1^{-1}}{-1} - \frac{0{,}5^{-1}}{-1} + \frac{1^2}{2} - \frac{0{,}5^2}{2} = 1{,}5.$$

3.3. Ταχύτητα.

Ως ταχύτητα ενός αντικειμένου ορίζουμε το ρυθμό μεταβολής του διαστήματος που διανύει. Όμως, γνωρίζουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος μία συνάρτησης. Με βάση τα παραπάνω θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το διάστημα που διένυσε ένα αντικείμενο μεταξύ ενός χρονικού διαστήματος $[a, b]$γνωρίζοντας το ρυθμό μεταβολής του διαστήματος.

Η ταχύτητα u ισούται με$\frac{ds}{dt} = f(t)$

Ολοκληρώνοντας, μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση που δίνει την θέση του αντικειμένου.

$$s = F(t) + C.$$

Το ολικό διάστημα που διανύθηκε από ένα σώμα είναι η απόσταση μεταξύ της θέσης του για $t = a$και$t = b$. Έτσι,

Απόσταση= $s(b) - s(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$.

Επειδή

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = |F(t)|_{a}^{b} = F(b) - F(a),$$

Το ολικό διάστημα είναι

Απόσταση $= \int_a^b f(t)dt$.

Παράδειγμα 1:

Μια πέτρα ρίχνεται κατακόρυφα την στιγμή $t = 0$, έχει ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου,

$$u = 9{,}8t + 8 \quad (m/sec).$$

Ποιό είναι το διάστημα που διένυσε η πέτρα τα 4 πρώτα δευτερόλεπτα;

Λύση:

Το διάστημα που διένυσε η πέτρα τα 4 πρώτα δευτερόλεπτα είναι ίσο με,

$$\int_0^4 (9{,}8t + 8)dt = |4{,}9t^2 + 8t|_0^4 = 78{,}4 + 32 = 110{,}4\, m$$

Παράδειγμα 2:

Υποθέτουμε ότι ένα αντικείμενο κινείται με ταχύτητα ίση με uμια χρονική στιγμή t, της οποίας η συνάρτηση είναι ίση με $u(t) = t^2 + 6t + 3$. Αν η απόσταση $s(t)$που διένυσε την χρονική στιγμή $t = 0$είναι ίση με 1, τότε ποια είναι η συνάρτηση του διαστήματος;

Λύση:

$$u(t) = s'(t).$$

Άρα

$$s(t) = \int u(t)dt = \int t^2 + 6t + 3dt = \frac{t^3}{3} + 6\frac{t^2}{2} + 3t + C.$$

Γνωρίζουμε ότι $s(0) = 1$ επομένως

$$1 = \frac{0^3}{3} + 6\frac{0^2}{2} + 3(0) + C \Rightarrow 1 = C.$$

Άρα η συνάρτηση του διαστήματος είναι

$$s(t) = \frac{t^3}{3} + 6\frac{t^2}{2} + 3t + 1.$$

3.4. Οριακό κόστος – Οριακά έσοδα.

Οριακό κόστος.

Στις οικονομικές επιστήμες, το οριακό κόστος (MC) είναι ο ρυθμός μεταβολής του συνολικού κόστους που προκύπτει όταν παραγομένη ποσότητα αυξηθεί κατά μία μονάδα. Δηλαδή, είναι το κόστος παραγωγής μιας επιπλέον μονάδας ενός αγαθού. Μαθηματικά, το οριακό κόστος, η λειτουργία εκφράζεται ως η πρώτη παράγωγος του συνολικού κόστους (TC), λειτουργία σε σχέση με την ποσότητα (Q), δηλαδή

$$MC = \frac{dTC}{dQ}.$$

Οριακά έσοδα.

Στην Μικροοικονομία, οριακά έσοδα (MR) ονομάζουμε τα επιπλέον έσοδα που επιφέρει η πώληση μιας πρόσθετης μονάδας προϊόντος. Δηλαδή το οριακό κόστος είναι ο ρυθμός μεταβολής των συνολικών εσόδων (TR) όταν η προσφερόμενη ποσότητα αυξηθεί κατά μία μονάδα.

$$MR = \frac{dTC}{dQ} = \frac{dP}{dQ}Q + \frac{dQ}{dQ}P = P + Q\frac{dP}{dQ} \qquad (TR = P \cdot Q).$$

Γνωρίζοντας το οριακό κόστος και οριακό κέρδος μιας επιχείρησης, μπορούμε με την χρήση των ολοκληρωμάτων να υπολογίσουμε το κέρδος, τα συνολικά έσοδα και το συνολικό κόστος.

Παράδειγμα 1:

Έστω ότι σε μία επιχείρηση ο ρυθμός μεταβολής του συνολικού κόστους δίνεται από τον τύπο $MC = Q^2 + 2Q + 4$, το σταθερό κόστος είναι ίσο με $FC = 100$ και ο ρυθμός μεταβολής των εσόδων είναι $MR = 10 - 4Q$. Να βρεθεί η συνάρτηση των συνολικών εξόδων και η συνάρτηση συνολικών εσόδων.

Λύση:

$$MC = Q^2 + 2Q + 4.$$

Ξέρουμε όμως ότι,

$$MC = \frac{d(TC)}{dQ},$$

άρα

$$\begin{aligned} TC &= \int MC dQ \\ &= \int (Q^2 + 2Q + 4) dQ = \frac{Q^3}{3} + Q^2 + 4Q + C. \end{aligned}$$

Το σταθερό κόστος είναι δεδομένο ότι είναι ίσο με 100. Το κόστος αυτό είναι ανεξάρτητο και αντιπροσωπεύει το κόστος της επιχείρησης όταν δεν παράγει κανένα αγαθό. Αντικαθιστούμε $Q = 0$στην συνάρτηση του συνολικού κόστους TC,

$$TC(0) = \frac{0^3}{3} + 0^2 + 4(0) + C = C.$$

Παρατηρούμε ότι η σταθερά της ολοκλήρωσης είναι ίση με το σταθερό κόστος παραγωγής, δηλαδή $C = 100$. Άρα η συνάρτηση συνολικού κόστους της επιχείρησης είναι

$$TC = \frac{Q^3}{3} + Q^2 + 4Q + 100.$$

Για να βρούμε την συνάρτηση συνολικών εσόδων αρχίζουμε από την συνάρτηση οριακών εσόδων,

$$MR = 10 - 4Q.$$

Όμως $MR = \frac{d(TR)}{dQ}$, άρα

$$\begin{aligned} TR &= \int MRdQ \\ &= \int (10 - 4Q)dQ = 10Q - 2Q^2 + C. \end{aligned}$$

Αντίθετα με πριν, δεν έχουμε κάποιο δεδομένο ώστε να υπολογίσουμε την σταθερά C. Όμως γνωρίζουμε ότι όταν η επιχείρηση δεν παράγει κάποιο προϊόν τα έσοδα της ισούνται με το μηδέν, έτσι ώστε $TR = 0$ όταν $Q = 0$.

$$TR(0) = 10(0) - 2(0)^2 + C = C.$$

Άρα η σταθερά της ολοκλήρωσης είναι ίση με το μηδέν και η συνάρτηση συνολικών παίρνει την μορφή,

$$TR = 10Q - 2Q^2.$$

Παράδειγμα 2:

Από την πώληση ενός νέου προϊόντος μιας εταιρείας διαπιστώθηκε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους δίνεται από τον τύπο $MC = 800 - 0{,}6t$ (σε € ανά ημέρα), ενώ ο ρυθμός μεταβολής των εσόδων δίνεται από τον τύπο$MR = 1000 + 0{,}3t$ (σε € ανά ημέρα). Να βρεθεί το συνολικό κέρδος P(t) της εταιρείας από την τρίτη έως την έκτη μέρα παραγωγής.

Λύση:

Το συνολικό κέρδος της εταιρείας είναι ίσο με,

$$P(t) = TR - TC$$

Επίσης ξέρουμε ότι

$$TR = \int MRdt \quad \text{και} \quad TC = \int MCdt.$$

Άρα

$$\begin{aligned} P(t) &= \int MRdt - \int MCdt \\ &= \int 1000 + 0{,}3tdt - \int 800 - 0{,}6tdt = \int 200 + 0{,}9tdt \\ &= 200t + 0{,}9\frac{t^2}{2} + C. \end{aligned}$$

Το συνολικό κέρδος της εταιρείας από την 3η έως την 6η ημέρα είναι ίσο με,

$$\begin{aligned} P(6) - P(2) &= \left(200(6) + 0{,}9\frac{6^2}{2} + C\right) - \left(200(2) + 0{,}9\frac{(2)^2}{2} + C\right) \\ &= 1216{,}2 - 401{,}8 = 814{,}4\text{ €}. \end{aligned}$$

3.5. Πλεόνασμα καταναλωτή – Πλεόνασμα παραγωγού.

Ως πλεόνασμα του καταναλωτή ορίζουμε την ωφέλεια που έχει ένας καταναλωτής από την αγορά ενός αγαθού, καταβάλλοντας λιγότερα χρήματα από όσα είναι διατεθειμένος να καταβάλει για να το αποκτήσει.

Το πλεόνασμα καταναλωτή υπολογίζεται βάση του εμβαδού του τριγώνου που εμφανίζεται μεταξύ της καμπύλης της ζήτησης και των σημείων ισορροπίας της καμπύλης.

$$CS = \int_0^{Q_0} f(Q)dQ - Q_0P_0,$$

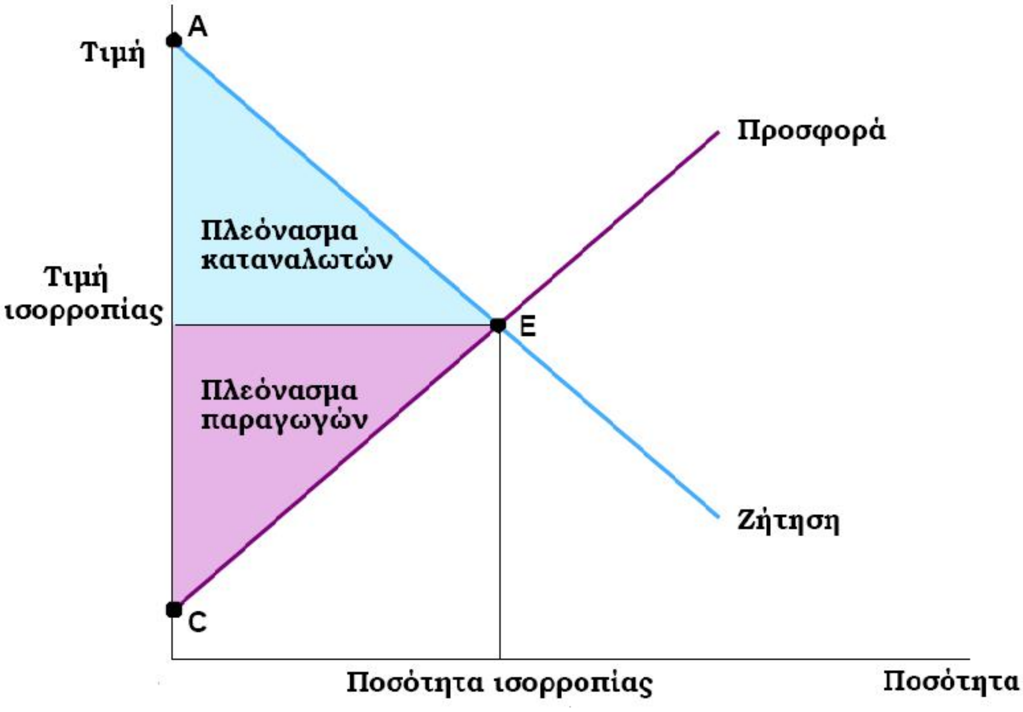
όπου CS το πλεόνασμα καταναλωτή, $f(Q)$ η καμπύλη ζήτησης, Q_0 η ποσότητα ισορροπίας και P_0 η τιμή ισορροπίας.

Ως πλεόνασμα του παραγωγού ορίζουμε την ωφέλεια που έχει ένας παραγωγός από την πώληση ενός αγαθού, εισπράττοντας περισσότερα χρήματα από όσα είναι υπολογίζει να εισπράξει από την πώληση του.

Το πλεόνασμα παραγωγού υπολογίζεται βάση του εμβαδού του τριγώνου που εμφανίζεται μεταξύ της καμπύλης της προσφοράς και των σημείων ισορροπίας της καμπύλης

$$PC = Q_0 P_0 - \int_0^{Q_0} g(Q)dQ,$$

όπου PS το πλεόνασμα παραγωγού, $g(Q)$ η καμπύλη ζήτησης, Q_0 η ποσότητα ισορροπίας και P_0 η τιμή ισορροπίας.



Παράδειγμα 1:

Να βρεθεί το πλεόνασμα καταναλωτή αν η ποσότητα ισορροπίας $Q_0 = 5$ και η καμπύλη ζήτησης είναι ίση με $P = 30 - 4Q$.

Λύση:

$f(Q) = 30 - 4Q$ και η ποσότητα ισορροπίας $Q_0 = 5$ η τιμή ισορροπίας είναι ίση με

$$P_0 = f(Q_0) = 30 - 4(5) = 10.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο για το πλεόνασμα καταναλωτή,

$$\begin{aligned} CS &= \int_0^{Q_0} f(Q)dQ - Q_0P_0 \\ &= \int_0^5 (30 - 4Q)dQ - 5(10) \\ &= [30Q - 2Q^2]_0^5 - 50 \\ &= [30(5) - 2(5)^2] - [30(0) - 2(0)^2] - 50 \\ &= 50. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2:

Έστω ότι η καμπύλη ζήτησης είναι $35 - Q^2$ και η καμπύλη προσφοράς είναι $3 + Q^2$. Δεδομένων αυτών των στοιχείων να βρεθεί το πλεόνασμα παραγωγού.

Λύση:

Αρχικά θα πρέπει να βρούμε την τιμή ισορροπίας P_0 και την ποσότητα ισορροπίας Q_0. Αυτό θα γίνει βρίσκοντας το σημείο ισορροπίας προσφοράς και ζήτησης. Είναι το σημείο οπού τέμνονται η καμπύλες προσφοράς και ζήτησης.

$$35 - Q^2 = 3 + Q^2 \Rightarrow Q^2 = 16 \Rightarrow Q = \pm 4.$$

Όμως η ποσότητα δεν μπορεί αν πάρει αρνητικές τιμές. Άρα η αρνητική ρίζα απορρίπτεται και έτσι η ποσότητα ισορροπίας είναι $Q_0 = 4$.

Έπειτα για να βρούμε την τιμή ισορροπίας P_0, αντικαθιστούμε την ποσότητα Q_0 σε μία από τις καμπύλες προσφοράς ή ζήτησης.

$$P_0 = f(Q_0) = 35 - (4)^2 = 19.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο για το πλεόνασμα παραγωγού έχουμε

$$\begin{aligned}
PC &= Q_0P_0 - \int_0^{Q_0} g(Q)dQ \\
&= 4(19) - \int_0^4 (3 + Q^2)dQ \\
&= 76 - \left[3Q + \frac{Q^3}{3}\right]_0^4 \\
&= 76 - \left(\left[3(4) + \frac{1}{3}(4)^3\right] - \left[3(0) + \frac{1}{3}(0)^3\right]\right) \\
&= 42{,}666666667.
\end{aligned}$$

3.6. Επενδυτική ροή.

Ως καθαρή επένδυση I ορίζουμε τον ρυθμό μεταβολής του κεφαλαίου, K δηλαδή

$$I = \frac{dK}{dt}.$$

Το $I(t)$ υποδηλώνει την χρηματική ροή, η οποία μετριέται σε χρηματικές μονάδες ανά έτος, ενώ $K(t)$ υποδηλώνει το σύνολο του κεφαλαίου που συσσωρεύεται σε μία χρονική στιγμή t, ως αποτέλεσμα της επενδυτικής ροής και το οποίο μετριέται σε χρηματικές μονάδες.

Εφόσον γνωρίζουμε την συνάρτηση καθαρής επένδυσης μπορούμε ολοκληρώνοντας την να βρούμε το κεφάλαιο. Συγκεκριμένα αν επιθυμούμε να υπολογίσουμε την συσσώρευση κεφαλαίου για μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο από $t = t_1$έως $t = t_2$θα πρέπει αν υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt.$$

Παράδειγμα 1:

Εάν η συνάρτηση επενδυτικής ροής είναι $I(t) = 9000\sqrt{t}$,

α) να υπολογιστεί η συσσώρευση του κεφαλαίου από το τέλος του πρώτου έτους έως το τέλος του τέταρτου έτους και

β) να υπολογιστούν τα έτη τα οποία απαιτούνται πριν το κεφάλαιο υπερβεί τα 100.000€ .

Λύση:

α) Αρχικά θα πρέπει αν υπολογίσουμε την συσσώρευση του κεφαλαίου από $t = 1$ έως $t = 4$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 9000\sqrt{t}dt &= 9000\int_1^4 t^{1/2}dt \\ &= 9000\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_1^4 = 9000\left[\frac{2}{3}(4)^{3/2} - \frac{2}{3}(1)^{3/2}\right]_1^4 \\ &= 9000\left(\frac{16}{3} - \frac{2}{3}\right) = 42.000€.\end{aligned}$$

β) Πρέπει να υπολογίσουμε τον αριθμό των ετών που απαιτούνται για να συγκεντρωθούν 100.000€ . Μετά από T χρόνια το κεφάλαιο ισούται με

$$\int_0^T 9000\sqrt{t}dt = 9000\int_0^T t^{1/2}dt.$$

Το ζητούμενο είναι η τιμή T η οποία ικανοποιεί την ισότητα

$$\begin{aligned}\int_0^T 9000\sqrt{t}dt = 100.000 &= 9000\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^T \\ &= 9000\left[\frac{2}{3}(T)^{3/2} - \frac{2}{3}(0)^{3/2}\right]_0^T = 6000T^{3/2}.\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε

$$6000T^{3/2} = 100.000 \Rightarrow T^{3/2} = 16{,}67 \Rightarrow T = 6{,}5.$$

Άρα το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να συγκεντρωθούν 100.000€ είναι 6,5 έτη.

3.7. Προεξόφληση.

Η προεξόφληση είναι μια διαδικασία με την οποία υπολογίζουμε την παρούσα αξία P, όταν μία μέλλουσα αξία προεξοφλείται με επιτόκιο $r\%$ συνεχόμενα για t χρόνια. Επίσης εδώ είναι απαραίτητο να αναφέρουμε την έννοια της ράντας.

Η ράντα είναι μια σειρά σταθερών ποσών που αποδίδει μια επένδυση σε μια συγκεκριμένη, σειρά ετών. Για παράδειγμα οι σταθεροί τόκοι που αποδίδει ένα ομόλογο καθ'όλη τη διάρκειά του. Εάν ένα καταθέτης επιθυμεί μία συνεχόμενη (συνήθως ετήσια) ανάληψη, μια συνεχής ροή εσόδων, θα πρέπει να γνωρίζει το αρχικό ποσό κατάθεσης, δηλαδή την παρούσα αξία ώστε να εξασφαλίσει αυτή την ετήσια ροή εσόδων του για τα έτη που επιθυμεί.

Η παρούσα αξία δίνεται από τον τύπο

$$P = \int_0^n S e^{-rt/100}\, dt$$

όπου P η παρούσα αξία, S η μέλλουσα αξία, e ο αριθμός του Euler, r το προεξοφλητικό επιτόκιο, t το χρονικό διάστημα προεξόφλησης και n η διάρκεια της συνεχούς ροής εσόδων.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η παρούσα αξία μια συνεχούς ροής εσόδων πενταετούς διάρκειας ετησίου ποσού εσόδων 1.000€ αν το προεξοφλητικό επιτόκιο είναι 9% .

Λύση:

Χρησιμοποιώντας τον τύπο της παρούσας αξίας έχουμε,

$$P = \int_0^n S e^{-rt/100}\, dt,$$

όπου $S = 1000,\ r = 9,\ n = 5,$ άρα

$$
\begin{aligned}
P &= \int_0^5 1000e^{-0,09t}\,dt \\
&= 1000\int_0^5 e^{-0,09t}\,dt = 1000\left[-\frac{1}{0,09}e^{-0,09t}\right]_0^5 \\
&= -\frac{1000}{0,09}\left[e^{-0,09t}\right]_0^5 = -\frac{1000}{0,09}\left(e^{-0,45}-1\right) \\
&= 4.026.35€.
\end{aligned}
$$

Άρα για να έχουμε μία συνεχής ροή εσόδων πενταετούς διάρκειας θα πρέπει το αρχικό κεφάλαιο (παρούσα αξία) να είναι ίση με 4.026.35€.

3.8.Μέση τιμή συνάρτησης.

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής ενός συνόλου δεδομένων είναι γνωστή η διαδικασία υπολογισμού της, κατά την οποία αθροίζουμε το σύνολο των δεδομένων$y_1, y_2, \dots, y_n$δια το πλήθος των δεδομένων n.

$$y_m = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}.$$

Όταν όμως το πλήθος των δεδομένων είναι άπειρο ο παραπάνω τύπος δεν είναι για τον υπολογισμό της μέσης τιμής συνάρτησης. Ειδικότερα αν τα δεδομένα y δίνονται από μια συνεχή συνάρτηση

$$y = f(x), \quad a \le x \le b.$$

Σε αυτή την περίπτωση

η μέση τιμή του y ως προς xορίζεται ως

$$(y_m)_x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Άρα χρησιμοποιώντας τον τύπο μέσης τιμής μιας συνάρτησης θα μπορούσαμε για παράδειγμα να υπολογίσουμε την μέση θερμοκρασία σαν συνάρτηση του χρόνου, σε ένα διάστημα εικοσιτεσσάρων ωρών. Είναι επίσης εφικτός ο υπολογισμός της ενεργού τάσης και έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος σε ένα κύκλωμα, ακόμα και ο υπολογισμός ημερήσιας απογραφής και παραμονής προϊόντων σε μία αποθήκη. Υπάρχουν επίσης πολλά ακόμα παραδείγματα στα οποία ο υπολογισμός μέσης τιμής μίας συνάρτησης είναι χρήσιμος.

Παράδειγμα 1:

Σε μια αποθήκη, το κόστος για το χώρο, την ασφάλιση και την προστασία μπορεί να είναι ένα μεγάλο ποσοστό του κόστους μιας επιχείρησης και η καθημερινή απογραφή της εταιρείας μπορεί να συνεισφέρει αρκετά στον υπολογισμό αυτού του κόστους. Για παράδειγμα μια επιχείρηση παραλαμβάνει ένα φορτίο 1200 κιβωτίων ενός προϊόντος κάθε 30 μέρες. Η ποσότητα αυτή του προϊόντος πωλείται στα καταστήματα λιανικής πώλησης με σταθερό ρυθμό. Μετά από xμέρες από την παραλαβή η ποσότητα που απογράφεται και παραμένει στην αποθήκη δίνεται από την συνάρτηση $I(x) = 1200 - 40x$ (η συνάρτηση αυτή συχνά ονομάζεται συνάρτηση απογραφής). Να υπολογιστεί η μέση ημερήσια απογραφή.

Λύση:

Για να υπολογίσουμε την μέση ημερήσια απογραφή, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο μέσης τιμής μιας συνάρτησης.

$$(y_m)_x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

όπου $a = 0,\ b = 30$ και $f(x) = 1200 - 40x.$ Άρα η μέση ημερήσια απογραφή $G(x)$ ισούται με

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{30-0}\int_0^{30} 1200 - 40x\,dx \\ &= \frac{1}{30}\int_0^{30} 40(30-x)\,dx \\ &= \frac{4}{3}\int_0^{30} 30 - x\,dx \\ &= \frac{4}{3}|40x|_0^{30} - \frac{4}{3}\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^{30} \end{aligned}$$

$$= 1200 - 600$$
$$= 600 \text{ κιβώτια.}$$

Κατά συνέπεια 600 κιβώτια προϊόντος παραμένουν στη αποθήκη κατά μέσο όρο καθημερινά.

Παράδειγμα 2:

Μία εταιρεία παραλαμβάνει 450 κιβώτια ενός προϊόντος κάθε 30 ημέρες. Η συνάρτηση απογραφής είναι $I(x) = 450 - \frac{x^2}{2}$. Να βρεθεί η μέση ημερήσια απογραφή. Αν επίσης το κόστος παραμονής του κάθε κιβωτίου είναι 2 ευρώ ανά ημέρα, να βρεθεί το ολικό μέσο ημερήσιο κόστος παραμονής του εμπορεύματος.

Λύση:

Για να υπολογίσουμε την μέση ημερήσια απογραφή, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο μέσης τιμής μιας συνάρτησης.

$$(y_m)_x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

όπου $a = 0$, $b = 30$ και $f(x) = 450 - \frac{x^2}{2}$. Άρα η μέση ημερήσια απογραφή $K(x)$ισούται με

$$k(x) = \frac{1}{30-0}\int_0^{30} 450 - \frac{x^2}{2}dx$$
$$= \frac{1}{30}\int_0^{30} 450dx - \frac{1}{30}\int_0^{30}\frac{x^2}{2}dx$$
$$= \frac{1}{30}|450x|_0^{30} - \frac{1}{30}\left|\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right|_0^{30}$$
$$= 450 - 150 = 300 \text{ κιβώτια.}$$

Κατά συνέπεια η μέση ημερήσια απογραφή είναι 300 κιβώτια την ημέρα. Με ημερήσιο κόστος παραμονής 2 ευρώ ανά ήμερα, έχουμε ως αποτέλεσμα 600 ευρώ ανά ημέρα ολικό μέσο ημερήσιο κόστος παραμονής του εμπορεύματος.

3.9.Ασκήσεις ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα 1. Ο πληθυσμός $N(t)$, σε εκατομμύρια, μιας κοινωνίας βακτηριδίων αυξάνεται με ρυθμό $N'(t) = \frac{1}{20}e^{\frac{t}{20}}$ ανά λεπτό. Βρείτε την αύξηση του πληθυσμού των βακτηριδίων μετά από δύο ώρες.

Λύση:

$$\begin{aligned} N(t) &= \int_0^{120} N'(t)dt \\ &= \int_0^{120} \frac{1}{20}e^{\frac{t}{20}}dt = \frac{1}{20}\int_0^{120} e^{\frac{t}{20}}dt \\ &= \frac{1}{20}\,20\left[e^{\frac{t}{20}}\right]_0^{120} = e^6 - 1 \cong 402{,}4. \end{aligned}$$

Άρα ο πληθυσμός των βακτηριδίων μετά από 2 ώρες έχει αυξηθεί κατά 402,4 εκατομμύρια βακτήρια.

Παράδειγμα 2. Μία νέα γεώτρηση εξόρυξης πετρελαίου έχει ρυθμό άντλησης που δίνεται από τον τύπο $R'(t) = \frac{3}{4}t^2 + 10t + 20$, όπου $R(t)$ είναι ο αριθμός ,σε χιλιάδες, των βαρελιών που αντλήθηκαν τους t πρώτους μήνες λειτουργίας της. Βρείτε πόσα βαρέλια θα έχουν αντληθεί μετά από δύο χρόνια.

Λύση:

$$\begin{aligned} R(t) &= \int_0^{24} R'(t)dt \\ &= \int_0^{24}\left(\frac{3}{4}t^2 + 10t + 20dt\right) \\ &= \int_0^{24}\frac{3}{4}t^2dt + \int_0^{24}10tdt + \int_0^{24}20dt \\ &= \frac{3}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{24} + 10\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{24} + 20[t]_0^{24} = 6816. \end{aligned}$$

Άρα μετά από δύο χρόνια θα έχουν αντληθεί 6,816 εκατομμύρια βαρέλια πετρελαίου.

Παράδειγμα 3. Ο ρυθμός μεταβολής του συνολικού κόστους παραγωγής ενός προϊόντος δίνεται από την συνάρτηση $1000-0{,}5t$, ενώ ο ρυθμός μεταβολής της είσπραξης από την πώληση του δίνεται από την συνάρτηση $1200+1{,}5t$, όπου t ο χρόνος από την έναρξη παραγωγής του προϊόντος, μετρούμενος σε εβδομάδες. Υπολογίστε το κέρδος της εταιρίας από την $10^{η}$ έως και την $20^{η}$ εβδομάδα παραγωγής.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του συνολικού κόστους είναι ίσος με $K(t)'=1000-0{,}5t$, ο ρυθμός μεταβολής της είσπραξης είναι ίσος με $E(t)'=1200+1{,}5t$ και ότι το κέρδος της εταιρίας ισούται με

$$\begin{aligned} P(t) &= E(t)-K(t) \\ &= \int E(t)'dt - K(t)'dt \\ &= \int E(t)'dt - \int K(t)'dt = \int 1200+1{,}5tdt - \int 1000-0{,}5tdt \\ &= 1200t+1{,}5\frac{t^2}{2}-1000t+0{,}5\frac{t^2}{2}+C = 200t+t^2+C. \end{aligned}$$

Άρα το κέρδος της εταιρίας από την $10^{η}$ έως και την $20^{η}$ εβδομάδα είναι ίσο με,

$$\begin{aligned} P(20)-P(10) &= 200(20)+20^2+C-(200(10)+10^2+C) \\ &= 4400-2100+C-C = 2300\,\text{χ. μ.} \end{aligned}$$

Επομένως το κέρδος της εταιρείας από την $10^{η}$ έως και την $20^{η}$ εβδομάδα ισούται με 2300 χρηματικές μονάδες.

Παράδειγμα 4. Μία επιχείρηση σκοπεύει να επενδύσει x χιλιάδες χρηματικές μονάδες για την παραγωγή ενός προϊόντος. Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους της επιχείρησης από την επένδυση αυτή προβλέπεται να είναι $P'(x)=$

$-3x^2 + 40x + 500$.Αν η επιχείρηση επενδύσει 10000 χρηματικές μονάδες, έχει κέρδος 11000 χρηματικές μονάδες. Υπολογίστε το προβλεπόμενο κέρδος, εάν η επιχείρηση επενδύσει 20000 χρηματικές μονάδες.

Λύση:

Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι ίσος με $P'(x) = -3x^2 + 40x + 500$, και η συνάρτηση του κέρδους είναι ίση με $P(x) = \int P'(x)dx$. Άρα

$$\int P'(x)dx = \int -3x^2 + 40x + 500dx = -x^3 + 20x^2 + 500x + C$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι $P(10) = 11$, άρα

$$11000 = -10^3 + 20(10^2) + 500(10) + C \Rightarrow C = 5000.$$

Άρα συνάρτηση του κέρδους είναι ίση με $P(x)$=$-x^3 + 20x^2 + 500x + 5000$

$$P(20) = -20^3 + 20(20^2) + 500(20) + 5000. \text{Επομένως}$$
$$= 15000. \text{χ. μ.}$$

Άρα από μία επένδυση 20.000 χρηματικών μονάδων έχουμε κέρδος 15.000 χρηματικών μονάδων.

Παράδειγμα 5. Ο ρυθμός μεταβολής της τιμής ενός προϊόντος είναι $E'(t) = -\frac{60}{(t+2)^2}$, όπου t ο χρόνος μετά την είσοδο του προϊόντος στην αγορά, μετρούμενος σε μήνες. Αν η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 100 χρηματικές μονάδες, υπολογίστε την τιμή του προϊόντος 8 μήνες από την είσοδο του στην αγορά.

Λύση.

$E'(t) = -\frac{60}{(t+2)^2}$ άρα$E(t) = \int E'(t)dt = \int -\frac{60}{(t+2)^2}dt$

Θέτουμε $u = t + 2$άρα $du = dt$, επομένως

$$E(t) = \int -\frac{60}{u^2}du = -60\int \frac{1}{u^2}du = -60\int u^{-2}d\,u = -60\frac{u^{-1}}{-1} + C$$
$$= 60(t+2)^{-1} + C.$$

Γνωρίζουμε ότι $E(0) = 100$, άρα

$$100 = 60(10)^{-1} + C \Rightarrow C = 70.$$

Κατά συνέπεια

$$E(t) = 60(t+2)^{-1} + 70$$
$$E(8) = 60(10)^{-1} + 70 = 76\ \text{χ. μ.}$$

Έτσι η τιμή του προϊόντος σε 8 μήνες από την εισαγωγή του στην αγορά αναμένεται να είναι 76 χρηματικές μονάδες.

Παράδειγμα 6. Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους μιας βιοτεχνίας από την εβδομαδιαία παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος είναι $4x + \frac{1000}{\sqrt{x+1}}$. Όταν η βιοτεχνία κατασκευάζει 8 μονάδες του προϊόντος μέσα σε μία εβδομάδα, έχει κέρδος από την πώληση τους 9128 χρηματικές μονάδες. Υπολογίστε το κέρδος της βιοτεχνίας εάν τριπλασιαστεί η εβδομαδιαία παραγωγή.

Λύση:

Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι ίσος με $P'(x) = 4x + \frac{1000}{\sqrt{x+1}}$και $P(x) = \int P'(x)$άρα

$$P(x) = \int 4x + \frac{1000}{\sqrt{x+1}}dx = \int 4xdx + \int \frac{1000}{\sqrt{x+1}}dx = 2x^2 + C_1 + \int \frac{1000}{\sqrt{x+1}}dx.$$

Θέτουμε όπου $u = x + 1$ άρα $du = dx$, επομένως

$$P(x) = 2x^2 + C_1 + 1000\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = 2x^2 + C_1 + 1000\int u^{-1/2}du$$
$$= 2x^2 + C_1 + 1000\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C_2 = 2x^2 + 500(x+1)^{1/2} + C.$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $P(8) = 9128$ άρα,

$$9128 = 2(8)^2 + 500(9)^{1/2} + C \Rightarrow C = 7500.$$

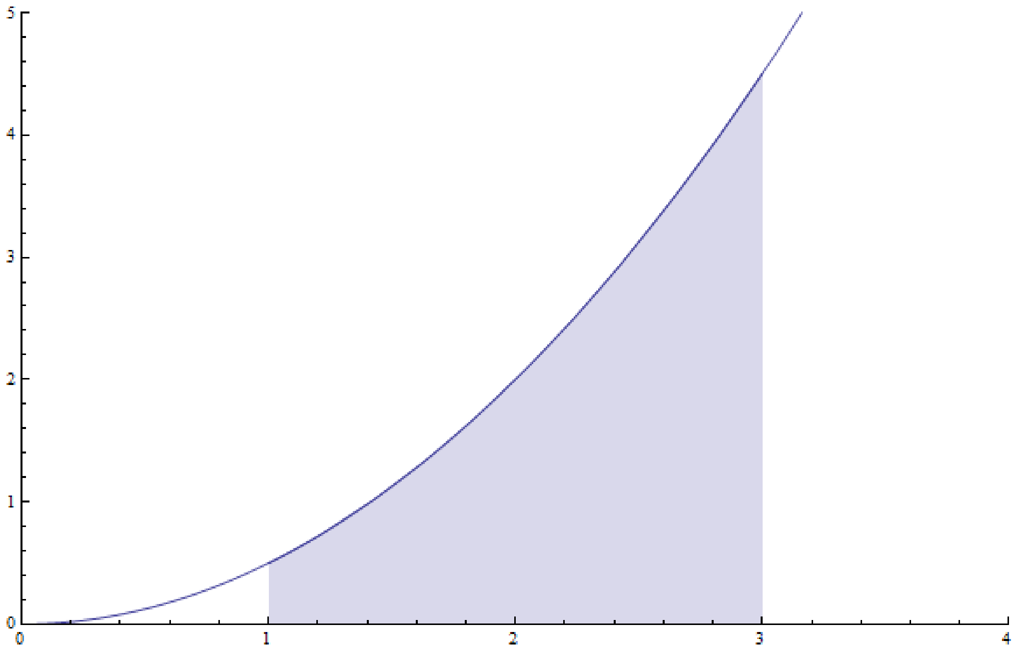
Άρα αν τριπλασιαστεί η εβδομαδιαία παραγωγή το κέρδος θα είναι

$$P(24) = 2(24)^2 + 500(25)^{1/2} + 7500 = 11152 \text{ χ. μ.}$$

Κατά συνέπεια με τον τριπλασιασμό της εβδομαδιαίας παραγωγής το κέρδος της επιχείρησης είναι ίσο με 11152 χρηματικές μονάδες.

Παράδειγμα 7.Υπολογίστε το εμβαδόν E της περιοχής πού ορίζεται από την παραβολή $y = \frac{x^2}{2}$ και τις ευθείες $x = 1, x = 3, y = 0$.

Λύση:



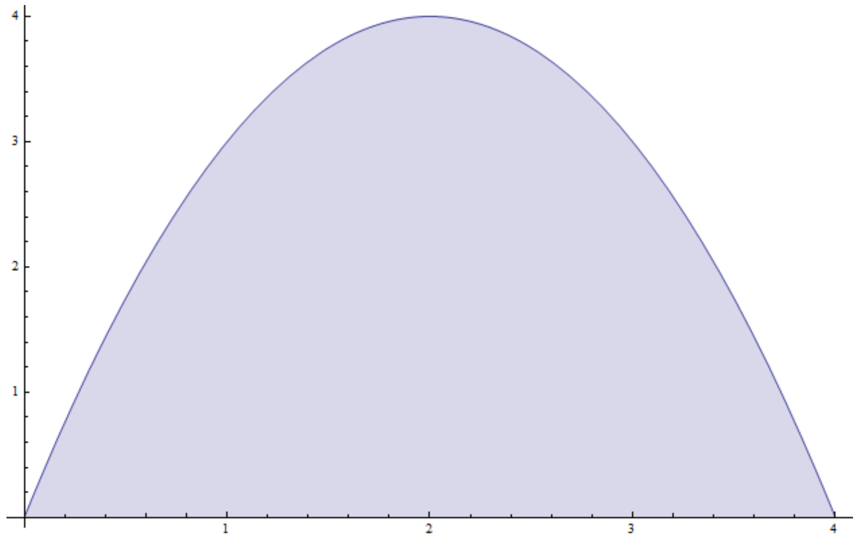
Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν E της περιοχής θα πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της δοσμένης συνάρτησης.

$$E = \int_1^3 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{2}\left|\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = \frac{3^3}{6} - \frac{1^3}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}.$$

Άρα το εμβαδόν της δοσμένης περιοχής είναι ίσο με $\frac{13}{3}$ τετραγωνικές μονάδες.

Παράδειγμα 8.Υπολογίστε το εμβαδόν της περιοχής πού ορίζεται από τις συναρτήσεις $y = 4x - x^2$ και $y = 0$.

Λύση:



Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της περιοχής θα πρέπει αρχικά να βρούμε τα σημεία τομής μεταξύ των συναρτήσεων $y = 4x - x^2$ και $y = 0$.

$$4x - x^2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac, \qquad \Delta = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm 4}{-2}$$

Άρα τα σημεία τομής είναι $x_1 = 0$ και $x_2 = 4$.

$$E = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left| 4\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^4 = \left[2(4^2) - \frac{4^3}{3} \right] - \left[2(0^2) - \frac{0^3}{3} \right]$$

$$= 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}.$$

Επομένως το εμβαδόν που ορίζεται από τις συναρτήσεις είναι ίσο με $\frac{32}{3}$ τετραγωνικές μονάδες.

Παράδειγμα 9.Η ταχύτητα του αρτηριακού αίματος εξαρτάται από την απόσταση r από τον άξονα συμμετρίας της αρτηρίας, με βάση την συνάρτηση

$v(r) = \frac{P}{4nl}(R^2 - r^2)$ cm/s, όπου P διαφορά πίεσης μεταξύ των άκρων, n ο συντελεστής ιξώδους του αίματος, lτο μήκος της αρτηρίας και Rη ακτίνα της. Υπολογίστε την μέση τιμή της ταχύτητας του αρτηριακού αίματος και δώστε αριθμητικά αποτελέσματα για μία μικρή αρτηρία, όπου $\mathrm{P} = 4000\ \mathrm{dynes/cm^2}, n = 0{,}027, l = 2$ cm και $R = 0.008$ cm.

Λύση:

Για να υπολογίσουμε την μέση τιμή της ταχύτητας $v_m(r)$θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής της συνάρτησης.

$$\begin{aligned} v_m(r) &= \frac{1}{R-0}\int_0^R \frac{P}{4nl}(R^2 - r^2)dr \\ &= \frac{1}{R}\int_0^R \frac{P}{4nl}R^2 dr - \frac{1}{R}\int_0^R \frac{P}{4nl}r^2 dr = \frac{1}{R}\left[\frac{PR^2 r}{4nl}\right]_0^R - \frac{1}{R}\left[\frac{P}{4nl}\frac{r^3}{3}\right]_0^R \\ &= \frac{1}{R}\frac{PR^2}{4nl}(R-0) - \frac{1}{R}\frac{P}{4nl}\left(\frac{R^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{PR^2}{4nl} - \frac{PR^2}{12nl} = \frac{PR^2}{6nl}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε τα αριθμητικά δεδομένα για μικρή αρτηρία

$$v_m(r) = \frac{4(10)^3 \times [8(10)^{-3}]^2}{(6)(27)(10^{-3})(2)} = \frac{64}{81}\ \mathrm{cm/s}.$$

Άρα η μέση τιμή της ταχύτητας του αρτηριακού αίματος σε μία αρτηρία είναι περίπου ίση με $0{,}790\ \mathrm{cm/s}$.

Παράδειγμα 10.Ένας πλήρης κύκλος εισπνοής-εκπνοής διαρκεί 5 s, ενώ ο όγκος του αέρα εντός των πνευμόνων δίνεται από την συνάρτηση $V\,(t) = \frac{2}{2\pi} sin^2\left(\frac{\pi t}{5}\right)$ lit , όπου t ο χρόνος μετά την έναρξη της εισπνοής. Υπολογίστε την μέση τιμή του όγκου του αέρα εντός των πνευμόνων μέσα σε έναν πλήρη κύκλο εισπνοής- εκπνοής.

Λύση:

Για να υπολογίσουμε την μέση τιμή του όγκου του αέρα $V_m(t)$ θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής της συνάρτησης.

$$V_m(t) = \frac{1}{5-0}\int_0^5 \frac{2}{2\pi}\sin^2\left(\frac{\pi t}{5}\right) dt.$$

Αρχικά θα υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{5-0}\int \frac{2}{2\pi}\sin^2\left(\frac{\pi t}{5}\right) dt$$
$$= \frac{1}{5}\int \frac{1+\cos\frac{2\pi t}{5}}{2} dt = \frac{1}{5\pi}\int \frac{1}{2} dt + \frac{1}{5\pi}\frac{1}{2}\int \cos\frac{2\pi t}{5} dt.$$

Θέτουμε $u = \frac{2\pi t}{5}$, άρα

$$du = \frac{2\pi}{5} dt \text{ και } \frac{5}{2\pi} du = dt,$$

$$I = \frac{1}{5\pi}\frac{1}{2} t + \frac{1}{10\pi}\frac{5}{2\pi}\int \cos u du = \frac{1}{10\pi}(5-0) + \frac{1}{4\pi^2}\sin u$$
$$= \frac{1}{10\pi} t + \frac{1}{4\pi^2}\left(\sin\frac{2\pi t}{5}\right).$$

Επομένως το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι

$$V_m(t) = \frac{1}{5-0}\int_0^5 \frac{2}{2\pi}\sin^2\left(\frac{\pi t}{5}\right) dt = \left|\frac{1}{10\pi} t\right|_0^5 + \left|\frac{1}{4\pi^2}\left(\sin\frac{2\pi t}{5}\right)\right|_0^5 = \frac{1}{2\pi}.$$

Άρα η την μέση τιμή του όγκου του αέρα $V_m(t)$ είναι περίπου ίση με 0,159lit.

Βιβλιογραφία.

G.N. Berman, *A Problem Book in Mathematical Analysis,* Mir Publishers, 1980.

Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics,* Wiley Eastern Ltd, 1983.

Murray R. Spiegel, *Ανώτερα Μαθηματικά*, McGraw-Hill/ ΕΣΠΙ, 1982.

L. Bostock & S. Chandler, *Core Mathematics for A-Level*, Stanley Thornes Publishers,1993.

I.A. Maron, *Problems in Calculus of One Variable,* Mir Publishers, 1975.