ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ»

ΣΠΟΥΔΑΣΤΕΣ:

ΦΥΣΕΝΤΖΟΥ ΠΑΡΑΣΚΕΥΑΣ

ΝΕΟΦΥΤΟΥ ΝΙΚΟΛΑΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΔΑΦΝΗΣ ΣΠΥΡΟΣ

ΠΑΤΡΑ, 2010

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΓΡΑΜΜΑΤΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΔΑΝΕΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΡΑΝΤΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα Οικονομικά Μαθηματικά αναφέρονται στην εφαρμογή των μαθηματικών μεθόδων για να αντιπροσωπευθούν οι οικονομικές θεωρίες και να αναλυθούν τα προβλήματα που τίθενται στα οικονομικά. Επιτρέπουν την διατύπωση και την παραγωγή των βασικών σχέσεων σε μια θεωρία με σαφήνεια, γενικότητα, αυστηρότητα, και απλότητα. Η γλώσσα των μαθηματικών επιτρέπει στους οικονομολόγους να κάνουν τις σαφείς, συγκεκριμένες, θετικές αξιώσεις για τα αμφισβητούμενα ή εριστικά θέματα που θα ήταν αδύνατα χωρίς μαθηματικά. Ένα μεγάλο μέρος της οικονομικής θεωρίας παρουσιάζεται αυτήν την περίοδο από την άποψη των μαθηματικών οικονομικών μοντέλων, ένα σύνολο τυποποιημένων και απλουστευμένων μαθηματικών σχέσεων που διευκρινίζουν τις υποθέσεις και τις επιπτώσεις.

Η επίσημη οικονομική διαμόρφωση άρχισε στον 19ο αιώνα με τη χρήση του διαφορικού υπολογισμού να βοηθά να περιγράψει και να προβλέψει την οικονομική συμπεριφορά. Τα οικονομικά έγιναν πιό μαθηματικά ως πειθαρχία σε όλο το πρώτο μισό του 20ου αιώνα, αλλά ήταν όχι πριν από το δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο ότι οι νέες τεχνικές θα επέτρεπαν τη χρήση των μαθηματικών διατυπώσεων σχεδόν τα σε όλα οικονομικά. Αυτή η γρήγορη συστηματοποίηση των οικονομικών ανησύχησε τους κριτικούς της πειθαρχίας καθώς επίσης και μερικούς εκτιμημένους οικονομολόγους. Ο John Maynard Keynes, ο Robert Heilbroner, ο Friedrich Hayek και άλλοι έχουν επικρίνει την ευρεία χρήση των μαθηματικών προτύπων για τη ανθρώπινη συμπεριφορά, υποστηρίζοντας ότι μερικές ανθρώπινες επιλογές είναι αμείωτες στις αυθαίρετες ποσότητες ή τις πιθανότητες.

Ένα μεγάλο μέρος των κλασσικών οικονομικών μπορεί να παρουσιαστεί στους απλούς γεωμετρικούς όρους ή τη στοιχειώδη μαθηματική σημείωση. Τα μαθηματικά οικονομικά, εντούτοις, συμβατικά χρησιμοποιούν την άλγεβρα υπολογισμού και μητρών στην οικονομική ανάλυση προκειμένου να γίνουν οι ισχυρές αξιώσεις που θα ήταν δυσκολότερες χωρίς τέτοια μαθηματικά εργαλεία. Αυτά τα εργαλεία είναι προϋποθέσεις για την επίσημη μελέτη, όχι μόνο στα μαθηματικά οικονομικά αλλά στη σύγχρονη οικονομική θεωρία γενικά. Τα οικονομικά προβλήματα περιλαμβάνουν συχνά τόσες πολλές μεταβλητές όπου ο μόνος πρακτικός τρόπος για να επιλυθούν είναι τα μαθηματικά. Ο Alfred Marshall υποστήριξε ότι κάθε οικονομικό πρόβλημα που μπορεί να ποσολογηθεί, αναλυτικά εκφρασμένος και λυμένος, πρέπει να αντιμετωπιστεί με τη βοήθεια της μαθηματικής εργασίας. Τα οικονομικά έχουν γίνει όλο και περισσότερο εξαρτώμενα από τις μαθηματικές μεθόδους και τα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούν έχουν γίνει περιπλοκότερα. Κατά συνέπεια, τα μαθηματικά έχουν γίνει αρκετά σημαντικότερα στους επαγγελματίες στα οικονομικά και τη χρηματοδότηση. Τα διαβαθμισμένα προγράμματα, και στα οικονομικά και στη χρηματοδότηση απαιτούν την ισχυρή προπτυχιακή προετοιμασία στα μαθηματικά για την αποδοχή και, για αυτόν τον λόγο, προσελκύουν όλο και περισσότερο μεγάλο αριθμό των μαθηματικών.

Στην πτυχιακή μας εργασία θα παρουσιάσουμε και θα αναλύσουμε τις σημαντικότερες εφαρμογές των Οικονομικών Μαθηματικών. Στο Πρώτο Κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με προβλήματα που σχετίζονται με τον τόκο (απλό και σύνθετο). Στο Δεύτερο και στο Τρίτο Κεφάλαιο θα παρουσιαστούν, αντίστοιχα, τα Γραμμάτια και τα Δάνεια. Στο Τέταρτο Κεφάλαιο θα αναλυθούν οι Ράντες και στο Πέμπτο θα χρησιμοποιηθεί ο Γραμμικός Προγραμματισμός σε προβλήματα βελτιστοποίησης. Τέλος, στα δύο τελευταία κεφάλαια, θα παρουσιαστούν οικονομικές εφαρμογές της Παραγώγου και των Ολοκληρωμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΤΟΚΟΣ

Τόκος είναι η αποζημίωση σε χρήμα που είναι υποχρεωμένος να δώσει ο οφειλέτης στο δανειστή για ορισμένη ποσότητα χρηματικού δανείου που πήρε για συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Οι οικονομολόγοι συχνά αναφέρονται στον τόκο ως *αμοιβή* για τη χρησιμοποίηση χρηματικού κεφαλαίου. Ο λόγος του τόκου προς το κεφάλαιο λέγεται επιτόκιο.

1. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Οι πρώτες καταγραφές πιστώσεων χρονολογούνται πίσω στο 3.000 π.Χ. και στον πολιτισμό των Σουμέριων, ενώ και σε άλλους πολιτισμούς είναι φανερή η ύπαρξη δανείων πριν την δημιουργία νομίσματος (οι συναλλαγές γίνονταν με το ανταλλαγές αγαθών ή με πολύτιμα μέταλλα).

Ο Τόκος στον Μεσαίωνα θεωρείτω ως κάτι ανήθικο και ανεπίτρεπτο τόσο από την Εκκλησία όσο και από τους Φιλόσοφους της εποχής. Ενώ με το πέρασμα του χρόνου νομιμοποιήθηκε και σήμερα αποτελεί συνήθη πρακτική σε πολιτισμούς με Χριστιανισμό ή Ιουδαϊσμό. Ωστόσο στα Ισλαμικά Κράτη ακόμα και σήμερα η τοκοφορία των κεφαλαίων αντίκειται στους Νόμους και τη Θρησκεία οδηγώντας σε ένα ειδικό καθεστώς λειτουργίας των τραπεζών.

2. ΘΕΩΡΙΕΣ ΤΟΥ ΤΟΚΟΥ

Υπάρχουν αρκετές θεωρίες που προσπαθούν να εξηγήσουν τη φύση και το ρόλο του τόκου. Οι θεωρίες που είχαν την μεγαλύτερη απήχηση στους οικονομολόγους του 19ου αιώνα ήταν:

- Η θεωρία της εγκράτειας που αναπτύχθηκε και είχε ως υποστηρικτές τον Ρικάρντο και Σένιορ και η οποία υποστηρίζει ότι ο τόκος εξηγείται ως συνέπεια της αποταμίευσης.
- Η θεωρία της εκμετάλλευσης του Μάρξ και Ροντμπέρτους που εξηγεί τον τόκο ως την καπιταλιστική εκμετάλλευση της εργασίας των εργατών.

- Η θεωρία της παραγωγικότητας η οποία υποστηρίζει ότι ο τόκος προκύπτει επειδή το κεφάλαιο είναι παραγωγικό
- Μία άλλη θεωρία είναι αυτή που πρότεινε ο Μπάβερκ: Οι άνθρωποι για οικονομικούς ψυχολογικούς και άλλους λόγους αποδίδουν μεγαλύτερη αξία στα αγαθά που κατέχουν στο παρόν παρά σε αυτά στο μέλλον.
- Ο Φίσερ εισήγαγε τη θεωρία του τόκου στο πλαίσιο του νόμου της προσφοράς και της ζήτησης. Συγκεκριμένα υποστήριξε ότι ο τόκος είναι μία τιμή που πρέπει να κριθεί με τα μέτρα κάθε άλλης τιμής και που καθορίζεται από τη συνάρτηση της προσφοράς και της ζήτησης.

3. ΤΟΚΟΓΛΥΦΙΑ

Πολλές φορές οι τοκιστές, οι δανειστές δηλ., ορίζουν το ποσό του τόκου μόνοι τους και συνήθως είναι υπερβολικό. Σ' αυτές τις περιπτώσεις μιλάμε για τοκογλυφία, η οποία τυπικά απαγορεύεται. Η Τοκογλυφία είναι έγκλημα που διαπράττει αυτός που λαμβάνει δυσανάλογα ωφελήματα για την παροχή που έκανε. Τιμωρείται από το νόμο με φυλάκιση και χρηματική ποινή. Τοκογλύφος είναι αυτός που ασκεί την τοκογλυφία.

4. ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΟΣ

Πιο σημαντική μέθοδος χρηματοδότησης. Καλούμε την διαδικασία τοκισμού χρημάτων κατά την οποία από χρονική περίοδο τοκισμού σε χρονική περίοδο τοκισμού ο δανειστής εισπράττει τον τόκο του αρχικού κεφαλαίου που έδωσε στον δανειζόμενο και αφήνει μόνο το αρχικό κεφάλαιο να τοκίζεται για κάθε επόμενη χρονική περίοδο τοκισμού. Ο δανειζόμενος με τη λήξη του δανείου οφείλει και επιστρέφει μόνο το αρχικό κεφάλαιο που δανείστηκε.

$$I = \mathrm{K} \cdot \mathrm{n} \cdot \mathrm{i}$$

I = Συνολικός Τόκος	n = Χρόνος
K = Κεφάλαιο	i = Ετήσιο Επιτόκιο

Ο τόκος μπορεί να κανονίζεται με το χρόνο, τότε λέγεται **επιτόκιο**(είναι ο τόκος της μονάδας του κεφαλαίου στη μονάδα του χρόνου) και σημαίνει ότι κάθε χρόνο θα πληρώνω ένα άλφα ποσό για 100€(10% τόκος = 10€ για κάθε 100€ μέσα σ' ένα χρόνο). Έχουμε όμως και μηνιαίους ακόμα και ημερήσιους τόκους.

5. <u>ΜΙΚΤΟ, ΕΜΠΟΡΙΚΟ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΕΤΟΣ</u>

Μικτο έτος: Καλείται όταν όλοι οι μήνες του έτους έχουν ακριβώς τις μέρες που έχουν ημερολογιακά και το έτος 360 μέρες.

$$I = \frac{K \cdot t \cdot i}{360}$$

Εμπορικό έτος: Καλείται όταν κάθε μήνας έχει 30 μέρες ανεξάρτητα από τις μέρες που έχει ημερολογιακά και το έτος 360 μέρες.

$$I = \frac{K \cdot t \cdot i}{360}$$

Πολιτικό έτος: Καλείται όταν οι μήνες έχουν ακριβώς τις μέρες που έχουν ημερολογιακά και το έτος 365 ή 366 αν είναι δίσεκτο.

$$I = \frac{K \cdot t \cdot i}{360} \quad \textbf{ή} \quad I = \frac{K \cdot t \cdot i}{365}$$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: (με έτη)</u>

Εάν δανειστείτε κεφάλαιο 100€ το οποίο τοκίζεται με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο 10% για 5 έτη. Να βρεθεί ο συνολικός τόκος που θα δώσει το κεφάλαιο αυτό στο τέλος των 5 ετών.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Έχουμε K = 100, i = 0,10, n = 5

$$I = K \cdot n \cdot i$$

$$I = 100 \cdot 5 \cdot 0{,}10$$

$$I = 50$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: (με μήνες)

Εάν δανειστείτε κεφάλαιο 100€ το οποίο τοκίζεται με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο 10% για 6 μήνες. Να βρεθεί ο συνολικός τόκος που θα δώσει το κεφάλαιο αυτό στο τέλος των 6μηνων.

$$I = \frac{\mathrm{K} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{i}}{12}$$

ΛΥΣΗ:

Έχουμε K = 100, i = 0,10, m = 6

$$I = \frac{\mathrm{K} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{i}}{12}$$

$$I = \frac{100 \cdot 6 \cdot 0{,}10}{12}$$

$$I = 5$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: (με μέρες)

Εάν δανειστείτε κεφάλαιο 100€ το οποίο τοκίζεται με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο 10% για 200 μέρες. Να βρεθεί ο συνολικός τόκος που θα δώσει το κεφάλαιο αυτό στο τέλος των 200 μερών.

ΛΥΣΗ:

Έχουμε K = 100, i = 0,10, t = 365

$$I = \frac{\mathrm{K} \cdot \mathrm{t} \cdot \mathrm{i}}{365}$$

$$I = \frac{100 \cdot 200 \cdot 0{,}10}{365}$$

$$I = 5{,}48$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Κεφάλαιο 640€ τοκίζεται με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο 6% από 01/03/2010 έως 01/04/2010. Να βρεθεί ο τόκος που θα δώσει το κεφάλαιο αυτό όταν το έτος είναι : α) μικτο, β) εμπορικό και γ) πολικό.

ΛΥΣΗ:

Έχουμε α) K=640, i=0,06, t=31

$$I = \frac{K \cdot t \cdot i}{360}$$

$$I = \frac{640 \cdot 31 \cdot 0{,}06}{360} = 3{,}31$$

β) K=640, i=0,06, t=30

$$I = \frac{K \cdot t \cdot i}{360}$$

$$I = \frac{640 \cdot 30 \cdot 0{,}06}{360} = 3{,}2$$

γ) K=640, i=0,06, t=31

$$I = \frac{K \cdot t \cdot i}{365}$$

$$I = \frac{640 \cdot 31 \cdot 0{,}06}{365} = 3{,}26$$

6. ΤΟΚΑΡΙΘΜΟΣ ΚΑΙ ΣΤΑΘΕΡΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ

Κεφάλαιο Κ € που τοκίζεται για t μέρες με ετήσιο επιτόκιο i. Τότε το γινόμενο $\mathrm{K} \cdot \mathrm{t}$ συμβολίζεται με Ν και καλείται ***Τοκάριθμος.***

Ενώ το πηλίκο $\frac{360}{\mathrm{i}}$ ή $\frac{365}{\mathrm{i}}$ συμβολίζεται με Δ και καλείται ***Σταθερός Διαιρέτης.***

Συνεπώς :
$$I = \frac{\mathrm{K} \cdot \mathrm{t} \cdot \mathrm{i}}{360} = \frac{\frac{\mathrm{K} \cdot \mathrm{t}}{1}}{\frac{360}{\mathrm{i}}} = \frac{\mathrm{K} \cdot \mathrm{t}}{\frac{360}{\mathrm{i}}} = \frac{N}{D} \qquad D = \frac{360}{\mathrm{i}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Κεφάλαιο 700€ τοκίζεται με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο 4,5% για 23 μέρες. Να βρεθεί ο τοκάριθμος Ν, ο σταθερός διαιρέτης Δ και ο τόκος Ι που θα δώσει το κεφάλαιο αυτό. Έτος μικτο.

ΛΥΣΗ:

Έχουμε Κ=700, t=23, i=0,045

$$N = \mathrm{K} \cdot \mathrm{t} = 700 \cdot 23 = 16100$$

$$D = \frac{360}{\mathrm{i}} = \frac{360}{0{,}045} = 8000$$

$$I = \frac{N}{D} = \frac{16100}{8000} = 2{,}01$$

7. ΤΕΛΙΚΗ ή ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΑΞΙΑ

Ειναι το ποσό στο οποίο ανέρχεται κάποιο κεφάλαιο ύστερα από ορισμένο χρονικό διάστημα. Το ποσό αυτό είναι άθροισμα του αρχικού κεφαλαίου και των τόκων που παράγονται στο διάστημα αυτό.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: (με έτη)

Κεφάλαιο K € τοκίζεται με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο i για n έτη. Να βρεθεί η τελική αξία αυτού Kn (Αρχικό κεφάλαιο + Τόκος) στο τέλος των n ετών.

$$I = \mathrm{K} \cdot \mathrm{n} \cdot \mathrm{i}$$

Οπότε η τελική αξία Kn είναι:

$$\mathrm{Kn} = \mathrm{K} + I = \mathrm{K} + \mathrm{K} \cdot \mathrm{n} \cdot \mathrm{i} = \mathrm{K} \cdot (1 + \mathrm{n} \cdot \mathrm{i})$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: (με μήνες)

Κεφάλαιο K € τοκίζεται με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο i για m μήνες. Να βρεθεί η τελική αξία αυτού Kn (Αρχικό κεφάλαιο + Τόκος) στο τέλος των m μηνών.

$$\mathrm{Kn} = \mathrm{K} + \boldsymbol{I}$$

$$\mathrm{Kn} = \mathrm{K} + \frac{K \,.m \,.i}{12}$$

$$\mathrm{Kn} = \mathrm{K} \,. \left(1 + \frac{\mathrm{m} \,.\mathrm{i}}{12}\right)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: (με μέρες)

Κεφάλαιο K € τοκίζεται με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο i για t μέρες. Να βρεθεί η τελική αξία αυτού Kn (Αρχικό κεφάλαιο + Τόκος) στο τέλος των t μερών.

$$\mathrm{Kn} = \mathrm{K} + I = \mathrm{K} + \frac{\mathrm{K} \cdot \mathrm{t} \cdot \mathrm{i}}{360} = \mathrm{K} \cdot (1 + \frac{\mathrm{t} \cdot \mathrm{i}}{360})$$

ή

$$\mathrm{Kn} = \mathrm{K} + I = \mathrm{K} + \frac{\mathrm{K} \cdot \mathrm{t} \cdot \mathrm{i}}{365} = \mathrm{K} \cdot (1 + \frac{\mathrm{t} \cdot \mathrm{i}}{365})$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Κεφάλαιο 900€ τοκίζεται με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο 6% για 95 μέρες. Να βρεθεί η τελική αξία αυτού.

ΛΥΣΗ:

Έχουμε : K=900, i=0,06, t=95

$$\mathrm{K}_{95} = \mathrm{K} \cdot (1 + \frac{\mathrm{t} \cdot \mathrm{i}}{360}) = 900 \cdot (1 + \frac{95 \cdot 0{,}06}{360}) = 914{,}25$$

8. ΑΝΑΛΟΓΑ ΕΠΙΤΟΚΙΑ

Στην περίπτωση του απλού τόκου αναφέραμε ότι 2 επιτόκια που αντιστοιχούν σε διάφορες χρονικές περιόδους (έτος, εξάμηνο, τρίμηνο) λέγονται ανάλογα όταν δίνουν την ίδια τελική αξία και το ίδιο συνολικό τόκο για το ίδιο κεφάλαιο και για τον ίδιο συνολικό χρόνο.

Όταν το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο είναι π.χ 0,08, τότε το εξαμηνιαίο ονομαστικό θα είναι 0,08 / 2 = 0,04 και το τριμηνιαίο ονομαστικό θα είναι 0,08 / 4= 0,02.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Κεφάλαιο 200.000 ευρώ τοκίζεται για 4 έτη με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο 10% ή εξαμηνιαίο επιτόκιο 5% ή τριμηνιαίο επιτόκιο 2,5%. Να υπολογιστεί ο συνολικός τόκος και η τελική αξία.

ΛΥΣΗ:

1. Περίοδος παραγωγής τόκου το έτος

$$I = K_0 \cdot n \cdot i = 200.000 \cdot 4 \cdot 0{,}10 = 80.000$$

Τελική αξία:

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot n \cdot i = 200.000 + 80.000 = 280.000$$

2. Περίοδος παραγωγής τόκου το εξάμηνο

$$I = K_0 \cdot n \cdot i = 200.000 \cdot 8 \cdot 0{,}05 = 80.000$$

Τελική αξία:

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot n \cdot i = 200.000 + 80.000 = 280.000$$

3. Περίοδος παραγωγής τόκου το τρίμηνο

$$I = K_0 \cdot n \cdot i = 200.000 \cdot 16 \cdot 0{,}025 = 80.000$$

Τελική αξία:

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot n \cdot i = 200.000 + 80.000 = 280.000$$

Τα επιτόκια 10%,5% και 2,5% τα οποία αντιστοιχούν σε διάφορες χρονικές μονάδες και έχουν τον ίδιο λόγο μεταξύ τους με αυτόν που έχουν και οι χρονικές μονάδες στις οποίες αντιστοιχούν, ονομάζονται ανάλογα των χρονικών αυτών μονάδων. Το ετήσιο επιτόκιο 10% είναι ανάλογο προς το επιτόκιο 5% της εξαμηνιαίας περιόδου και το επιτόκιο 2,5% της τριμηνιαίας περιόδου.

Εάν όμως είχαμε τοκίσει το παραπάνω κεφάλαιο των 200.000 ευρώ με ανατοκισμό, τότε τα ανάλογα επιτόκια δεν εφαρμόζονται γιατί θα μας δώσουν διαφορετική τελική αξία και διαφορετικό συνολικό τόκο, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

9. ΔΑΝΕΙΣΜΟΣ ΧΡΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΠΡΟΚΑΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ ΤΟΚΟΥ

Κατά τη στιγμή του δανεισμού, ο δανειζόμενος πολλές φορές, καταβάλει στον δανειστή του το ποσό που αναλογεί στους τόκους της χρονικής διάρκειας του δανεισμού, δηλ. προκαταβάλλει τους τόκους και κατά συνέπεια, στη λήξη του δανεισμού οφείλει να επιστρέψει μόνο το ποσό που αρχικώς δανείστηκε. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε προκαταβολική κράτηση του τόκου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: (με έτη)

Κεφάλαιο K€ που δανείστηκε κάποιος με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο i για n έτη. Ο πιστωτής του δανείου κράτησε προκαταβολικά τον τόκο του δανείου την μέρα σύναψης του. Να βρεθεί το καθαρό ποσό Kδ που θα εισπράξει ο δανειζόμενος.

$$I = \mathrm{K} \cdot \mathrm{n} \cdot \mathrm{i}$$

Οπότε η τελική αξία Kδ είναι:

$$\mathrm{K\delta} = \mathrm{K} - I = \mathrm{K} - \mathrm{K} \cdot \mathrm{n} \cdot \mathrm{i} = \mathrm{K} \cdot (1 - \mathrm{n} \cdot \mathrm{i})$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: (με μήνες)

Κεφάλαιο K€ που δανείστηκε κάποιος με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο i για m μήνες. Ο πιστωτής του δανείου κράτησε προκαταβολικά τον τόκο του δανείου την μέρα σύναψης του. Να βρεθεί το καθαρό ποσό Kδ που θα εισπράξει ο δανειζόμενος.

$$Kd = K - \mathrm{I} = K - \frac{K \cdot m \cdot i}{12} = K \cdot (1 - \frac{m \cdot i}{12})$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: (με μέρες)

Κεφάλαιο Κ€ που δανείστηκε κάποιος με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο i για t μέρες. Ο πιστωτής του δανείου κράτησε προκαταβολικά τον τόκο του δανείου την μέρα σύναψης του. Να βρεθεί το καθαρό ποσό Κδ που θα εισπράξει ο δανειζόμενος

$$\mathrm{K}\delta = \mathrm{K} - I = \mathrm{K} - \frac{\mathrm{K}\cdot \mathrm{t}\cdot \mathrm{i}}{360} = \mathrm{K}\cdot\left(1 - \frac{\mathrm{t}\cdot \mathrm{i}}{360}\right)$$

ή

$$\mathrm{K}\delta = \mathrm{K} - I = \mathrm{K} - \frac{\mathrm{K}\cdot \mathrm{t}\cdot \mathrm{i}}{365} = \mathrm{K}\cdot\left(1 - \frac{\mathrm{t}\cdot \mathrm{i}}{365}\right)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Κεφάλαιο 4000€ που δανείστηκε κάποιος με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο 8% για 18 μήνες. Ο πιστωτής του δανείου κράτησε προκαταβολικά τον τόκο του δανείου την μέρα σύναψης του. Να βρεθεί το καθαρό ποσό Κδ που θα εισπράξει ο δανειζόμενος

ΛΥΣΗ:

Έχουμε : K=4000, m=18, i=0,08

$$\mathrm{K}\delta = \mathrm{K}\cdot\left(1 - \frac{\mathrm{m}\cdot \mathrm{i}}{12}\right) = 4000\cdot\left(1 - \frac{18\cdot 0{,}08}{12}\right) = 3520$$

10. ΤΟΚΟΣ ΣΤΑ ΔΑΝΕΙΑ

Στα δάνεια σταθερής αποπληρωμής το ποσό του τόκου υπολογίζεται εκ των προτέρων και προστίθεται στις δόσεις. Συχνά υπάρχει ένα πρόστιμο, εάν θέλετε να εξοφλήσετε την εκκρεμούσα οφειλή νωρίτερα από ότι έχει συμφωνηθεί. Με την ανακυκλούμενη πίστωση μπορείτε να αποπληρώσετε ότι ποσό εσείς θέλετε, οποιαδήποτε στιγμή. Συχνά μπορείτε να αποφύγετε να πληρώσετε τόκο, εάν εξοφλήσετε το συνολικό ποσό που έχετε δανειστεί στην ημερομηνία που πρέπει να καταβληθεί η πρώτη δόση.

11. ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΤΟΚΟΣ / ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

Ο τόκος προστίθεται στο κεφάλαιο της κάθε χρονικής περιόδου και στην αμέσως επόμενη χρονική περίοδο τοκίζεται το αυξημένο κατά τον τόκο κεφάλαιο. Αυτό συνεχίζεται μέχρι τη λήξη του δανείου και κατά συνέπεια οι τόκοι μετατρέπονται σε παραγωγικό κεφάλαιο, δηλαδή οι τόκοι κεφαλαιοποιούνται στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου και επομένως τόσο ο τόκος, όσο και το τοκιζόμενο κεφάλαιο αυξάνονται κάθε χρονική περίοδο με επιταχυνόμενο ρυθμό. Το σύστημα αυτό της κεφαλαιοποίησης στο οποίο ο τόκος κάθε χρονικής περιόδου αποτελεί παραγωγικό κεφάλαιο για όλες τις επόμενες χρονικές περιόδους λέγεται ανατοκισμός.

Σύμβολα Ανατοκισμού

$K_0 = αρχικο\_κεφαλαιο$

$K_n = τελικο\_κεφαλαιο$

$n = ετη$

$i = επιτοκιο\_ανατοκισμου$

12. ΕΥΡΕΣΗ ΤΕΛΙΚΗΣ ΑΞΙΑΣ ΕΝΟΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΣΤΟΝ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟ

- **Οταν ο χρονος δινεται σε ακεραιες χρονικες περιοδους:**

Για να βρούμε την τελική αξία Kn ενός αρχικού κεφαλαίου K0 που τοκίζεται με επιτόκιο i για χρονικό διάστημα n ετών και με ανατοκισμό, σκαφτόμαστε ως εξής:
Το κεφάλαιο στο τέλος της 1^{ης} περιόδου είναι:

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0(1+i)$$

Το κεφάλαιο στο τέλος της 2^{ης} περιόδου είναι:

$$K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = K_1(1+i)$$

Και επειδή:

$$K_1 = K_0(1+i)$$

Θα έχουμε:

$$K_2 = K_0(1+i)(1+i) = K_0(1+i)^2$$

Το κεφάλαιο στο τέλος της $3^{ης}$ περιόδου θα είναι:

$$K_3 = K_2 + K_2 \cdot i = K_2(1+i)$$

Και επειδή:

$$K_2 = K_0(1+i)^2$$

Θα έχουμε:

$$K_3 = K_0(1+i)^2(1+i) = K_0(1+i)^3$$

Το κεφάλαιο στο τέλος της $4^{ης}$ περιόδου θα είναι:

$$K_4 = K_0(1+i)^3 \cdot (1+i) = K_0(1+i)^4$$

Συνεχίζοντας με την ίδια σκέψη, συμπεραίνουμε ότι η τελική αξία του αρχικού κεφαλαίου Κ0 στο τέλος της n-στης περιόδου δίνεται από το θεμελιώδη τύπο του ανατοκισμού:

$$K_n = K_0(1+i)^n$$

Με βάση το γενικό τύπο του ανατοκισμού λύνονται όλα τα προβλήματα του ανατοκισμού, δηλ. προβλήματα στα οποία ζητείται η τελική αξία Κn, η αρχική αξία Κ0, το πλήθος των περιόδων n και το επιτόκιο i. Το διώνυμο $(1+i)^n$ λέγεται συντελεστής κεφαλαιοποίησης ή συντελεστής ανατοκισμού και παριστάνει την τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας, $K_n = 1 \cdot (1+i)^n$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Ποια θα είναι η τελική αξία ενός κεφαλαίου 50.000 ευρώ που ανατοκίζεται με επιτόκιο 6% για 4 έτη.

ΛΥΣΗ:

K0 =50.000

i = 0,06

n =4

Kn=;

Εφαρμόζουμε το τύπο του ανατοκισμού όταν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη, δηλαδή:

$$K_n = K_0(1+i)^n$$

Με αντικατάσταση των δεδομένων θα έχουμε:

$$K_n = 50.000 \cdot (1+0,06)^4$$

Το συντελεστή ανατοκισμού $(1+0,06)^4$ τον βρίσκουμε ως εξής. Από ένα πίνακα που οι στήλες του είναι τα έτη και οι γραμμές του τα επιτόκια εντοπίζουμε το n=4 και το i=6% και στη διασταύρωση αυτών υπάρχει ο αριθμός 1,262477,επομενως είναι

$(1+0,06)^4$ =1,262477.

Άρα η ζητούμενη τελική αξία θα είναι:

$$K_4 = 50.000 \cdot 1{,}262477 = 63.123{,}85$$

- **Οταν ο χρονος εκφραζεται σε μεικτο (ακέραιο και κλασματικό) αριθμο χρονικων περιοδων:**

Στην περίπτωση του τύπου $K_n = K_0(1+i)^n$ του ανατοκισμού λάβαμε υπόψη μας ότι:

α) Η διάρκεια του ανατοκισμού αποτελείται από ακέραιο αριθμό περιόδων, δηλαδή ότι το n είναι ακέραιος αριθμός.

β) Το επιτόκιο i αναφέρεται στην ίδια με το n χρονική περίοδο.

Αν όμως ο χρόνος είναι μικτος αριθμός, δηλαδή αποτελείται από ακέραιες (n) περιόδους (έτη, εξάμηνα) και από τμήμα ($\lambda \cdot \frac{\mu}{12}$, όπου λ το πλήθος των περιόδων ανατοκισμού σε ένα έτος με μ το πλήθος των μηνών.) της ακεραιας περιόδου, π.χ 6 έτη και 7 μήνες και το επιτόκιο αναφέρεται στην ακέραια περίοδο (έτος, εξάμηνο, τρίμηνο) τότε προς εύρεση του τόπου που δίνει την τελική αξία σε ένα αρχικό κεφάλαιο K0 στο τέλος των $n + \frac{\lambda \cdot \mu}{12}$ χρονικών περιόδων χρησιμοποιούμε μια από τις παρακάτω 2 συνθήκες.

<u>α) Εκθετική συνθήκη</u>

Κατά την εκθετική συνθήκη ο τύπος του ανατοκισμού που δίνει την τελική αξία θα έχει τη μορφή:

$$K_{n+\frac{\lambda \cdot \mu}{12}} = K_0(1+i)^{n+\frac{\lambda \cdot \mu}{12}} = K_0(1+i)^n (1+i)^{\frac{\lambda \cdot \mu}{12}}$$

Εάν ο ανατοκισμός είναι ετήσιος τότε λ=1 και ο παραπάνω τύπος θα πάρει τη μορφή:

$$K_{n+\frac{\mu}{12}} = K_0(1+i)^n (1+i)^{\frac{\mu}{12}}$$

Εάν ο ανατοκισμός είναι εξαμηνιαίος τότε το n εκφράζει εξάμηνα και λ=2, οπότε $\frac{\lambda \cdot \mu}{12} = \frac{2 \cdot \mu}{12} = \frac{\mu}{6}$.

Αν ο ανατοκισμός είναι τριμηνιαίος τότε το n εκφράζει τρίμηνα και λ=4, οπότε $\frac{\lambda \cdot \mu}{12} = \frac{4 \cdot \mu}{12} = \frac{\mu}{3}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Ποια θα είναι η τελική αξία κεφαλαίου 500.000 ευρώ το οποίο τοκίζεται με ανατοκισμό για 4 έτη και 5 μήνες με επιτόκιο 5%.

ΛΥΣΗ:

K0 = 500.000

n = 4

λ = 1

μ = 5

i = 0,05

$K_{4+\frac{5}{12}} =;$

Εφαρμόζοντας τον τύπο:

$$K_{n+\frac{\lambda\cdot\mu}{12}} = K_0(1+i)^n(1+i)^{\frac{\lambda\cdot\mu}{12}}$$

$$K_{4+\frac{5}{12}} = 500.000(1+0{,}05)^4(1+0{,}05)^{\frac{5}{12}} = 620.235$$

B) Γραμμική συνθήκη

Στην πράξη οι τράπεζες και τα ταχυδρομικά ταμιευτήρια εφαρμόζουν τη μέθοδο της γραμμικής συνθήκης, δηλαδή για τις ακέραιες περιόδους n εφαρμόζουν τον ανατοκισμό και για το υπόλοιπο χρονικό διάστημα $\frac{\lambda\cdot\mu}{12}$ εφαρμόζουν την απλή κεφαλαιοποίηση.

Στην περίπτωση αυτή, αν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη και μήνες και το επιτόκιο σε έτη, η τελική αξία δίνεται από τη σχέση:

$$K_{n+\frac{\mu}{12}} = (1+i)^n(1+\frac{\mu}{12}\cdot i)$$

Για εξαμηνιαίο ανατοκισμό ο τύπος θα έχει τη μορφή:

$$K_{n+\frac{2\mu}{12}} = (1+i)^n (1+\frac{2\mu}{12}\cdot i)$$

Εάν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη, μήνες και ημέρες, τότε μετατρέπουμε τους μήνες σε ημέρες και εφαρμόζουμε τον τύπο:

$$K_{n+\frac{\nu}{360}} = K_0(1+i)^n (1+\frac{\nu}{360}\cdot i)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να βρεθεί η τελική αξία ενός κεφαλαίου 1.000.000 ευρώ το οποίο ανατοκίζεται για 5 έτη και 7 μήνες με ετήσιο επιτόκιο 6%. Να εφαρμοστεί η εκθετική και η γραμμική συνθήκη.

ΛΥΣΗ:

α) Εκθετική συνθήκη

K0 = 1.000.000

n = 5

μ = 7

i = 0,06

$K_{5+\frac{7}{12}} =;$

Εφαρμόζουμε την σχέση:

$$K_{n+\frac{\mu}{12}} = K_0(1+i)^n (1+i)^{\frac{\mu}{12}}$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα μας στην παραπάνω σχέση, θα έχουμε:

$$K_{5+\frac{7}{12}} = 1.000.000\cdot(1+0,06)^5(1+0,06)^{\frac{7}{12}} = 1.000.000\cdot(1,06)^5(1,06)^{\frac{7}{12}}$$

Αν ανατρέξουμε στο πίνακα θα δούμε ότι $(1{,}06)^5 = 1{,}338225$ και $(1{,}06)^{\frac{7}{12}} = 1{,}034574$

Επομένως η τελική αξία θα είναι:

$$K_{5+\frac{7}{12}} = 1.000.000 \cdot 1{,}338225 \cdot 1{,}034574 = 1.384.493$$

β) Γραμμική συνθήκη

Εφαρμόζουμε τον τύπο:

$$K_{n+\frac{\mu}{12}} = (1+i)^n (1+\frac{\mu}{12} \cdot i)$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα μας στην παραπάνω σχέση, θα έχουμε:

$$K_{5+\frac{7}{12}} = 1.000.000 \cdot (1{,}06)^5 (1+\frac{7}{12} \cdot 0{,}06) = 1.385.063$$

13. ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΑΡΧΙΚΗΣ ΑΞΙΑΣ (παρούσας αξίας) ΣΤΟΝ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟ

Η αρχική αξία ή παρούσα αξία K0, η οποία τοκίζεται για n χρονικές περιόδους με ένα επιτόκιο i και δίνει την τελική αξία Kn, βρίσκεται αν λύσουμε τη θεμελιώδη εξίσωση του ανατοκισμού:

$$K_n = K_0 (1+i)^n$$

ως προς K0, οπότε έχουμε:

$$K_0 = \frac{Kn}{(1+i)^n} = Kn \frac{1}{(1+i)^n}$$

Την τιμή $\frac{1}{1+i}$ την παριστάνουμε συνήθως με το σύμβολο U, δηλαδή:

$$U = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1}$$

Καλείται συντελεστής προεξόφλησης και δίνει την παρούσα αξία μιας νομισματικής μονάδας.

Επομένως η αρχική αξία για n χρονικές περιόδου μπορεί να εκφραστεί και ως εξής:

$$K_0 = K_n \cdot U^n$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να βρεθεί η αρχική αξία κεφαλαίου 1.000.000 ευρώ πληρωτέου μετά 10 έτη και με ετήσιο επιτόκιο 6%.

ΛΥΣΗ:

Εφαρμόζουμε την σχέση $K_0 = K_n \cdot U^n$ και έχουμε:\

$$K_0 = 1.000.000 \cdot (1+0,06)^{-10} = 558.395$$

Αν κατά τον υπολογισμό της παρούσας αξίας ο χρόνος δεν είναι ακέραιος αριθμός, αλλά κλασματικός, τότε θα εφαρμόσουμε τη γραμμική ή την εκθετική συνθήκη.
Κατά την γραμμική συνθήκη υπολογίζουμε την παρούσα αξία αν λύσουμε τη σχέση:

$$K_{n+\frac{\mu}{12}} = (1+i)^n (1+\frac{\mu}{12} \cdot i)$$

ως προς Κ0:

$$K_0 = K_{n+\frac{\mu}{12}} \cdot U^n \frac{1}{(1+\frac{\mu}{12} \cdot i)}$$

Κατά την εκθετική συνθήκη λύνουμε τη σχέση:

$$K_{n+\frac{\mu}{12}} = K_0 (1+i)^n (1+i)^{\frac{\mu}{12}}$$

ως προς Κ0:

$$K_0 = \frac{K_{n+\frac{\mu}{12}}}{(1+i)^n (1+i)^{\frac{\mu}{12}}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Ποιο αρχικό κεφάλαιο που τοκίζεται με ετήσιο ανατοκισμό για 10 έτη και 5 μήνες με επιτόκιο 5% θα δώσει τελική αξία 48.500 ευρώ; Να χρησιμοποιηθεί η εκθετική συνθήκη.

ΛΥΣΗ:

Εφαρμόζουμε τη σχέση:

$$K_0 = \frac{K_{n+\frac{\mu}{12}}}{(1+i)^n (1+i)^{\frac{\mu}{12}}}$$

Και έχουμε:

$$K_0 = \frac{48.500}{(1+0{,}05)^{10} \cdot (1+0{,}05)^{\frac{5}{12}}}$$

Από το πίνακα έχουμε:

$$(1{,}05)^{10} = 1{,}62889\_\ \text{και}\ \_(1{,}05)^{\frac{7}{12}} = 1{,}02054$$

Και επομένως:

$$K_0 = \frac{48.500}{1{,}62889 \cdot 1{,}02054} = 29.176$$

14. ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΣΤΟΝ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟ

Από την εξίσωση:

$$K_n = K_0 (1+i)^n$$

Προκύπτει:

$$(1+i)^n = \frac{K_n}{K_0}$$

Στη συνέχεια αναζητούμε στο πίνακα για ορισμένο επιτόκιο σε ποιο χρόνο αντιστοιχεί το πηλίκο $\frac{K_n}{K_0}$. Εάν το πηλίκο αυτό δεν αντιστοιχεί με ακρίβεια σε ορισμένο αριθμό ετών, τότε υπολογίζεται το n με παρεμβολή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Σε πόσο χρόνο κεφάλαιο 21.100 ευρώ το οποίο ανατοκίζεται με επιτόκιο 5,5% γίνεται 44.649,60 ευρώ;

ΛΥΣΗ:

Εφαρμόζουμε το τύπο:

$$(1+i)^n = \frac{K_n}{K_0}$$

Και έχουμε:

$$(1{,}055)^n = \frac{44.649{,}60}{21.100} = 2{,}116095$$

Αναζητούμε στο πίνακα τον αριθμό 2,116095 ψάχνοντας στη στήλη που αντιστοιχεί στο επιτόκιο 5,5%.
Τον βρίσκουμε στη σειρά των 14 ετών. Επομένως, ο ζητούμενος χρόνος ανατοκισμού θα είναι 14 έτη.

15. ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ ΣΤΟΝ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟ

Ο υπολογισμός του επιτοκίου στα προβλήματα του ανατοκισμού γίνεται με την ίδια διαδικασία που έγινε για τον υπολογισμό του χρόνου. Έτσι, λύνουμε τον τύπο του ανατοκισμού.

$$K_n = K_0(1+i)^n$$

ως προς $(1+i)^n$:

$$(1+i)^n = \frac{K_n}{K_0}$$

Στη συνέχεια αναζητούμε από το πίνακα για ορισμένο χρόνο σε ποιο επιτόκιο i αντιστοιχεί το πηλίκο $\frac{K_n}{K_0}$. Εάν το πηλίκο αυτό δεν αντιστοιχεί ακριβώς σε ορισμένο επιτόκιο, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της παρεμβολής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Με ποιο επιτόκιο πρέπει να ανατοκίσουμε 47.200 ευρώ για να λάβουμε μετά από 8 έτη 69.735,90 ευρώ.

ΛΥΣΗ:

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο και αντικαθιστώντας τα δεδομένα παίρνουμε:

$$(1+i)^n = \frac{K_n}{K_0} \Leftrightarrow (1+i)^8 = \frac{69.735{,}90}{47.200} = 1{,}47745$$

Έπειτα ερευνούμε στο πίνακα και στη στήλη 8 ετών εάν υπάρχει ο αριθμός 1,47745. Παρατηρούμε ότι υπάρχει στη στήλη του επιτοκίου 5%. Επομένως το ζητούμενο επιτόκιο θα είναι i = 5%.

16. ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ ΣΤΟΝ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟ

Η έννοια της προεξόφλησης που ισχύει στον απλό τόκο ισχύει και στον ανατοκισμό.

Καλούμε προεξόφληση Ε στον ανατοκισμό τη διαφορά μεταξύ της ονομαστικής αξίας Kn μιας συναλλαγματικής και της παρούσας αξίας αυτής K0, δηλαδή:

$$E = K_n - K_0 = K_n - K_n \frac{1}{(1+i)^n} \Leftrightarrow$$

$$E = K_n \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right] = K_n \cdot (1 - U^n)$$

Όπου $U^n = \frac{1}{(1+i)^n}$. Το σύμβολο U^n μας δίνει την παρούσα αξία μιας νομισματικής μονάδας πληρωτέας μετά από n περιόδους, καλείται συντελεστής προεξόφλησης στον ανατοκισμό και βρίσκεται στο οικονομικό πίνακα.

Στον ανατοκισμό εφαρμόζεται μόνο η εσωτερική προεξόφληση, γιατί η χρησιμοποίηση της εξωτερικής προεξόφλησης οδηγεί πολλές φορές σε σημείο το προεξόφλημα να γίνεται ισο ή και μικρότερο από την τελική αξία ενός κεφαλαίου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 300.000 ευρώ η οποία λήγει μετά από 7 έτη προεξοφλείται σήμερα με ανατοκισμό προς 6%. Να υπολογιστεί το εσωτερικό προεξόφλημα.

ΛΥΣΗ:

Εφαρμόζουμε τη σχέση:

$$E = K_n \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

Και έχουμε:

$$E = 300.000 \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+0,06)^7}\right] = 100.483$$

Η παρούσα αξία στον ανατοκισμό όταν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη, δίνεται από τη σχέση $K_0 = K_n \cdot U^n$

17. ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΕΠΙΤΟΚΙΑ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Το ετήσιο επιτόκιο είναι 8%. Να υπολογιστεί το ισοδύναμο εξαμηνιαίο, τετραμηνιαίο, τριμηνιαίο και μηνιαίο επιτόκιο.

ΛΥΣΗ:

Με εφαρμογή της σχέσης $i_\mu = (1+i)^{\frac{1}{\mu}} - 1$ και με τη βοήθεια του πίνακα θα έχουμε:

$$i_2 = (1+0{,}08)^{\frac{6}{12}} - 1 = 3{,}92\%$$

$$i_3 = (1+0{,}08)^{\frac{4}{12}} - 1 = 2{,}60\%$$

$$i_4 = (1+0{,}08)^{\frac{3}{12}} - 1 = 1{,}94\%$$

$$i_{12} = (1+0{,}08)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}64\%$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Ποια είναι η τελική αξία κεφαλαίου 1.000.000 ευρώ το οποίο τοκίσθηκε με ανατοκισμό για 7 έτη με επιτόκιο 8% το έτος ή με 4% το εξάμηνο ή με 2% το τρίμηνο;

ΛΥΣΗ:

1. Περίοδος παραγωγής τόκου το έτος

$$K_n = K_0(1+i)^n = 1.000.000 \cdot (1+0{,}08)^7 = 1.713.824$$

2. Περίοδος παραγωγής τόκου το εξάμηνο

$$K_n = K_0(1+i)^n = 1.000.000 \cdot (1+0{,}04)^{14} = 1.713.676$$

3. Περίοδος παραγωγής τόκου το τρίμηνο

$$K_n = K_0(1+i)^n = 1.000.000 \cdot (1+0{,}02)^{28} = 1.741.024$$

Από τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε ότι η τελική αξία στον ανατοκισμό είναι διαφορετική όταν τα επιτόκια είναι ανάλογα.

Για να έχουμε και στον ανατοκισμό την ίδια τελική αξία θα πρέπει ο ανατοκισμός να γίνεται όχι προς τα ανάλογα αλλά προς τα ισοδύναμα επιτόκια.

Δυο επιτόκια που αναφέρονται σε διαφορετικές χρονικές περιόδους λέγονται ισοδύναμα, αν δίνουν στον ανατοκισμό με το ίδιο αρχικό κεφάλαιο σε ισο χρονικό διάστημα την ίδια τελική αξία.

Για τον υπολογισμό του ισοδύναμου επιτοκίου σκεπτόμαστε ως εξής:

Έστω ότι μια νομισματική μονάδα τοκίσθηκε με ετήσιο επιτόκιο i_{12}. Στο τέλος του έτους θα δώσει τόκο i_{12} και τελική αξία $K_n = 1 + i_{12}$. Αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο με εξαμηνιαίο επιτόκιο i_6, τότε σε διάστημα ενός έτους θα έχουμε τελική αξία $K_n = (1+i_6)^2$, γιατί ένα έτος έχει δυο εξάμηνα. Επομένως αν τα επιτόκια i_{12} και i_6 είναι ισοδύναμα σύμφωνα με όσα είπαμε στον παραπάνω ορισμό θα έχουμε τις εξής σχέσεις (οι δυο τελικές αξίες θα πρέπει να είναι ισες):

$$1 + i_{12} = (1+i_6)^2$$

Με τον ίδιο συλλογισμό θα έχουμε:

$$1 + i_{12} = (1+i_3)^4$$

Επειδή το έτος έχει 4 τρίμηνα και:

$$1 + i_{12} = (1+i_1)^{12}$$

Επειδή το έτος έχει 12 μήνες:

Επίσης ισχύει και η σχέση:

$$1 + i_6 = (1+i_3)^2$$

Επειδή ένα εξάμηνο έχει δυο τρίμηνα.

Το ισοδύναμο επιτόκιο μπορούμε να το υπολογίσουμε και ως εξής:

Έστω ότι τοκίσθηκαν K_0 νομισματικές μονάδες με ετήσιο επιτόκιο i και με ανατοκισμό. Στο τέλος του έτους η τελική αξία θα είναι $K_1 = K_0(1+i)$. Έστω επίσης ότι i_μ είναι το ζητούμενο ισοδύναμο επιτόκιο με τον οποίο αν ανατοκίσουμε K_0 νομισματικές μονάδες μ φορές μέσα στο έτος θα προκύψει η ίδια τελική αξία.

Δηλαδή i_2 είναι το εξαμηνιαίο επιτόκιο, i_4 το τριμηνιαίο επιτόκιο. Αφού τα επιτόκια i και i_μ είναι ισοδύναμα οι τελικές αξίες θα είναι ισες δηλαδή έχουμε:

$$K_0(1+i) = K_0(1+i_\mu)^\mu \Leftrightarrow 1+i = (1+i_\mu)^\mu$$

Από την ισότητα αυτή υπολογίζουμε το ισοδύναμο επιτόκιο i_μ γιατί έχουμε:

$$1+i_\mu = \sqrt[\mu]{1+i} = (1+i)^{\frac{1}{\mu}}$$

Και επομένως:

$$i_\mu = (1+i)^{\frac{1}{\mu}} - 1$$

Η σχέση αυτή μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το επιτόκιο i_μ, δηλαδή το πραγματικό εξαμηνιαίο ή τριμηνιαίο ή μηνιαίο επιτόκιο όταν γνωρίζουμε το πραγματικό ετήσιο επιτόκιο i.

Για διάφορες τιμές του μ και του i η τιμή του $(1+i)^{\frac{1}{\mu}}$ δίνεται με ειδικούς πίνακες. π.χ

Πινάκας τιμών

i	$(1+i)^{\frac{1}{12}}$	$(1+i)^{\frac{2}{12}}$	$(1+i)^{\frac{3}{12}}$	$(1+i)^{\frac{4}{12}}$	$(1+i)^{\frac{5}{12}}$
5%	1,004075	1,008165	1,012272	1,016396	1,020537
6%	1,004867	1,014674	1,014674	1,019612	1,024576
7%	1,005654	1,017059	1,017059	1,022809	1,028592
10%	1,007974	1,024114	1,024114	1,032280	1,040512

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΓΡΑΜΜΑΤΙΑ

1. Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ

Γραμμάτια αναπτύχθηκαν κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα ως μέσο για τη μεταφορά κεφαλαίων και την πραγματοποίηση των πληρωμών σε μεγάλες αποστάσεις χωρίς φυσική μετακίνηση ογκώδεις ποσότητων πολύτιμων μετάλλων. Στα αρχή του δέκατου τρίτου αιώνα ιταλοί έμποροι, τραπεζίτες, και ξένοι αντιπρόσωποι των ανταλλαγών, η συναλλαγματική εξελιχθεί σε ένα ισχυρό χρηματοδοτικό εργαλείο, φιλοξενώντας τις βραχυπρόθεσμες πιστωτικές συναλλαγές καθώς και τη διευκόλυνση των πράξεων σε συνάλλαγμα.

Η εφεύρεση της συναλλαγματικής διευκόλυνε σημαντικά το εξωτερικό εμπόριο. Ο μηχανισμός αυτός μπορεί να φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα: Ας υποθέσουμε ότι ένας έμπορος στη Φλάνδρα πωλεί αγαθά σε Βενετό έμπορο και έγιναν δεκτά με την καταβολή συναλλαγματική που βασίστηκε στο Βενετό έμπορο ελπιδοφόρα να πληρώσει έναν πράκτορα της Φλαμανδικής έμποριας της Βενετίας, σε ορισμένη ημερομηνία στο μέλλον, και σε ένα συγκεκριμένο νόμισμα. Η συναλλαγματική επέτρεψε στον Βενετό έμπορο να τα παραλάβει τα εμπορεύματα από τη Φλάνδρα, να τα πωλήσει, και να εξαγοράσει το γραμμάτιο στη Βενετία, κατά πάσα πιθανότητα το ενετικό νόμισμα.

Γραμμάτια ήταν επίσης μέσα για τις πράξεις συναλλάγματος. Οι έμποροι στην Ιταλία και μεγάλα εμπορικά κέντρα στην Ευρώπη αγοράζαν Γραμμάτια πληρωτέα σε μελλοντικές ημερομηνίες, σε άλλα μέρη, και διαφορετικά νομίσματα. Στο παραπάνω παράδειγμα, ο φλαμανδος έμπορος θα μπορούσε να πωλήσει το γραμμάτιο σε έναν αντιπρόσωπο για ανταλλαγή νομισμάτων της επιλογής του. Με τη σειρά του, ο αντιπρόσωπος ανταλλαγής θα μπορούσε να πωλήσει το γραμμάτιο σε φλαμανδικούς έμπορους που ασχολούνται με την αγορά αγαθών σε Βενετία. Όταν ήρθε ο λογαριασμός που πρέπει να καταβληθούν στη Βενετία, ο φλαμανδος έμπορος θα τον χρησιμοποιούσαν για να αγοράσουν τα εμπορεύματα στη Βενετία, όπου η συναλλαγματική πληρώθηκε. Ενώ η διαδικασία αυτή φαίνεται περίπλοκη, μείωσε σημαντικά την μεταφορά των πολύτιμων μετάλλων. Στο παράδειγμά μας, ένα παλιός βενετσιάνικος έμπορος αγόρασε τα εμπορεύματα από τη Φλάνδρα, και ένας φλαμανδικός έμπορος αγόρασε τα εμπορεύματα από τη Βενετία, χωρίς κανένα ξένο νόμισμα αφήνοντας τη Βενετία ή τη Φλάνδρα.

Τα γραμμάτια έδωσαν κάλυψη σε τραπεζίτες για την αποφύγει τοκογλυφίας στη νομοθεσία για το κρύψιμο των τόκων για την προσαρμογή της συναλλαγματικής ισοτιμίας που διέπει τις πράξεις συναλλάγματος.

2. ΕΝΝΟΙΑ ΓΡΑΜΜΑΤΙΟΥ ΚΑΙ Η ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥΣ

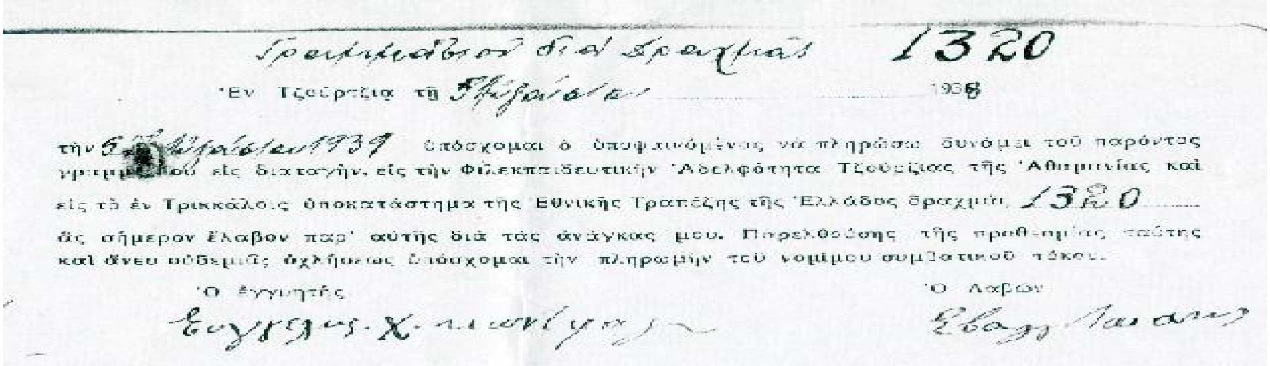
Γενικά γραμμάτιο είναι το έγγραφο που περιέχει υπόσχεση για την πληρωμή ενός χρηματικού ποσού. Το γραμμάτιο έχει τα ακόλουθα στοιχεία:

(i) υπόσχεση πληρωμής ορισμένου χρηματικού ποσού
(ii) το χρόνο λήξης
(iii) τον τόπο της πληρωμής
(iv) το όνομα εκείνου στον οποίο θα γίνει η πληρωμή
(v) τον τόπο και την ημερομηνία που εκδόθηκε και
(vi) την υπογραφή του εκδότη.

Η χρησιμότητα του γραμματίου είναι ίδια με της συναλλαγματικής με την οποία μοιάζει και έχει τον ίδιο οικονομικό σκοπό. Η διαφορά τους είναι ότι στο γραμμάτιο εμφανίζονται δύο πρόσωπα, ο εκδότης, που υπόσχεται να πληρώσει και ο λήπτης, στον οποίο θα πληρώσει ο εκδότης, ενώ στη συναλλαγματική εμφανίζονται τρία πρόσωπα: ο εκδότης, ο λήπτης και ο αποδέκτης.

Το γραμμάτιο ακολουθεί τις ίδιες διατάξεις με τη συναλλαγματική, εφόσον αυτές συμβιβάζονται με τη νομική του φύση. Η ιστορική καταγωγή της συναλλαγματικής τοποθετείται γύρω στο δεύτερο αιώνα. Από νομική άποψη η συναλλαγματική, όπως και το γραμμάτιο, είναι πιστωτικοί τίτλοι. Ανήκουν δηλαδή στην κατηγορία των εγγράφων που δημιουργήθηκαν, για να κάνουν πιο γρήγορη και πιο ασφαλή τη μεταβίβαση των δικαιωμάτων από ένα νομικό υποκείμενο σε άλλο.

Ακόμη τα γραμμάτια αποτελούν για το διακαστήριο πολύ ισχυρότερο χαρτί από τις επιταγές. Αποτελούν επίσημο δημόσιο έγγραφο και πιστοποιούν το χρέος σε όποιον τα κατέχει. Γι αυτό και όταν τα πληρώνεις πρέπει και να τα παίρνεις πίσω στα χέρια σου. Επίσης είναι ο μοναδικός νόμιμος τρόπος για μεταχρονολογημένη εξόφληση (την ημερομηνία που αναγράφουν πάνω) ενώ στις επιταγές δεν είναι νόμιμη η μεταχρονολόγησή τους και μπορούν να εξοφληθούν ή να σφαγιστούν και άμεσα.



Γραμμάτιον διὰ δραχμὰς 1320

Ἐν Τζούρτζια τῇ ... 193

τὴν ... 1939 ὑπόσχομαι ὁ ὑπογεγραμμένος νὰ πληρώσω δυνάμει τοῦ παρόντος γραμματίου εἰς διαταγὴν, εἰς τὴν Φιλεκπαιδευτικὴν Ἀδελφότητα Τζουρτζίας τῆς Ἀθαμανίας καὶ εἰς τὸ ἐν Τρικκάλοις ὑποκατάστημα τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης τῆς Ἑλλάδος δραχμὰς 1320 ἃς σήμερον ἔλαβον παρ' αὐτῆς διὰ τὰς ἀνάγκας μου. Παρελθούσης τῆς προθεσμίας ταύτης καὶ ἄνευ οὐδεμιᾶς ὀχλήσεως ὑπόσχομαι τὴν πληρωμὴν τοῦ νομίμου συμβατικοῦ τόκου.

Ὁ Ἐγγυητής

Ὁ Λαβών

3. ΕΙΔΗ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ

(i) Έντοκα Γραμμάτια:

Τα Έντοκα Γραμμάτια του Ελληνικού Δημοσίου (ΕΓΕΔ) είναι τίτλοι μικρής διάρκειας, οι οποίοι πωλούνται στους επενδυτές σε τιμή χαμηλότερη από την ονομαστική τους αξία. Με τον τρόπο αυτό οι τόκοι προκαταβάλλονται στους επενδυτές. Τα έντοκα γραμμάτια εξοφλούνται στην ονομαστική τους αξία κατά την ημερομηνία λήξης τους. Τα έντοκα γραμμάτια απευθύνονται κυρίως σε μικροεπενδυτές και παρέχουν υψηλές πραγματικές αποδόσεις, αφού το επιτόκιό τους βρίσκεται πολύ πάνω από τον πληθωρισμό.

Οι τίτλοι είναι ανώνυμοι και διαπραγματεύσιμοι στις τράπεζες και στο Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών (ΧΑΑ). Αυτό σημαίνει ότι κάθε επενδυτής σε περίπτωση ανάγκης μπορεί εύκολα να πωλήσει τους τίτλους του πριν από τη λήξη τους σε οποιαδήποτε τράπεζα ή στο Χρηματιστήριο Αθηνών, σε τιμές που ισχύουν στη δευτερογενή αγορά.

Τα Εντοκα Γραμμάτια του Ελληνικού Δημοσίου εκδίδονται σε διάρκειες των τριών, έξι και δώδεκα μηνών.

(ii) Γραμμάτια κυμαινόμενου επιτοκίου (FRNs):

Τα γραμμάτια κυμαινόμενου επιτοκίου ειναι διαπραγματεύσιμα ανώνυμα γραμμάτια κυμαινόμενου επιτοκίου, διάρκειας 3-8 ετών. Έχουν ευρεία χρήση από τις τράπεζες για την απόκτηση κεφαλαίων. Υπάρχει κάποια δυσκολία προσδιορισμού του κινδύνου ρευστότητας των διάφορων , υπεραφθονία εκδόσεων – μείωση τοκομεριδίων – υποκατάστασή τους από των συμβάσεων ανταλλαγής περιουσιακών στοιχείων (asset swaps) και ομολόγων (CDOs), καθώς και eurocommercial papers.

(iii) Εκδόσεις βραχυχρόνιων γραμματίων (NIFs):

Οι εκδόσεις βραχυχρόνιων γραμματίων αντικατέστησαν σταδιακά τα κοινοπρακτικά δάνεια το 1984. Είναι βραχυχρόνια γραμμάτια πληρωτέα στον κομιστή που μπορούν να μεταπωληθούν. Αναπτύχθηκαν επειδή:
(α) Έχουν μεγαλύτερη ευελιξία και έχουν μικρότερο κόστος από τα κοινοπρακτικά. (β) Η αγορά ξένων χρεωγράφων από Ιάπωνες εξαιρέθηκε από συναλλαγματικούς περιορισμούς και τα NIFs ωφελήθηκαν από τη στροφή των διεθνών κεφαλαιαγορών προς τα χρεώγραφα.(γ) Οι τράπεζες επιθυμούσαν να αυξήσουν τα κέρδη από τις εξωϊσολογιστικές τους δραστηριότητες. Με τη συρρίκνωση των περιθωρίων στα NIFs υπήρξε κάμψη και οι μεγάλοι δανειζόμενοι στράφηκαν στα eurocommercial papers.

4. ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ

(i) Γραμμάτια δημοσίου:

- Ονομαστική αξία = S
- Διάρκεια = T
- Απόδοση = i
- Τιμή διάθεσης = P

$$P = \frac{S}{(1+iT)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Έχουμε ένα εξαμηνιαίο γραμμάτιο 20.000 € με ετήσια απόδοση 8%. Ποία θα είναι η τιμή διάθεσής του;

ΛΥΣΗ:

$$P = \frac{S}{(1+iT)} \quad => \quad P = \frac{20.000}{\left(1+0.08 \text{ x } \frac{1}{2}\right)}$$

$$P = \frac{20.000}{(1+0.04)} \quad => \quad P = 19.230,77$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Ετήσιο γραμμάτιο απόδοσης 10% πωλείται μετά 3 μήνες προς 92,50. Αν ο επενδυτής μπορούσε να είχε τοποθετήσει τα χρήματά του σε τραπεζικό λογαριασμό ελεύθερης ανάληψης και επιτοκίου 8%, κέρδισε ή έχασε από την πράξη του γραμματίου; (Ονομαστική S=100)

ΛΥΣΗ: (Εστιάζουμε στην κατάθεση)

Το γραμμάτιο αγοράστηκε προς $\frac{100}{(1+0.10 \text{ x } 1)}$ = 90.909.

Αν τα χρήματα είχαν τοποθετηθεί στην κατάθεση, σε 3 μήνες θα είχαν γίνει 90.909 x $\left(1 + \frac{3}{12} \text{ x } 8\%\right)$ = 92.727

που είναι ανώτερο των 92.50 που εισπράξαμε από το γραμμάτιο.

(ii) <u>Προεξόφληση ιδιωτικών γραμματίων – εξωτερική προεξόφληση:</u>

- Για λόγους απλούστευσης οι τράπεζες προεξοφλούν (αγοράζουν) γραμμάτια σε τιμή που προσδιορίζεται ως εξής:

Έστω γραμμάτιο που είναι υπόσχεση πληρωμής ποσού S μετά από χρόνο T. Ορίζεται από την τράπεζα Συντελεστής Προεξόφλησης i_{Φ} και υπολογίζεται το προεξόφλημα: $E = i_{\Phi} \cdot S \cdot T$

Το ποσό εξαγοράς του γραμματίου είναι $P = S - E$, δηλαδή: $P = S \cdot (1 - i_{\Phi} \cdot T)$.

Η μέθοδος αυτή ονομάζεται εξωτερική προεξόφληση.

- Μια συνηθισμένη διαδικασία είναι μια τράπεζα να χορηγεί δάνεια με εγγύηση τα γραμμάτια. Αν το τελικό ποσό του γραμματίου είναι S σε χρόνο T και το επιτόκιο δανεισμού i_{Δ} , τότε η τράπεζα δανείζει ποσό τέτοιο ώστε η αποπληρωμή του δανείου να πραγματοποιείται με τα έσοδα του γραμματίου στο T .

Άρα το ποσό του δανείου Δ είναι τόσο ώστε:

$$S = \Delta \cdot (1 + i_{\Delta} \cdot T) \quad => \quad \Delta = \frac{S}{(1 + i\Delta \cdot T)}$$

Η μέθοδος αυτή ονομάζεται Εσωτερική Προεξόφληση.

Σε ορισμένες περιπτώσεις η τράπεζα δανείζει ποσό τέτοιο ώστε το S να υπερκαλύπτει (π.χ.κατά 50%) την αποπληρωμή τότε:

$$S = \Delta \cdot (1 + i_{\Delta} \cdot T) \cdot (1 + 50\%)$$

$$\Delta = \frac{S}{1.5\, x\, (1 + i\Delta \cdot T)}$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ:</u>

(1) Ποιο επιτόκιο δανεισμού i_{Δ} και προεξόφλησης i_{Φ} κάνουν αδιάφορη την απόφαση του επενδυτή μεταξύ δανεισμού (εσωτερικής) – προεξόφλησης (εξωτερικής);

Πρέπει: $\Delta = P \Rightarrow \dfrac{S}{(1 + i\Delta \text{ x } T)} = S \cdot (1 - i_{\Phi} \cdot T)$

Και προτιμάται ο δανεισμός αν: $i_{\Delta} < \dfrac{i\,\Phi}{1 - i\Phi\, T}$

(2) Αν η τράπεζα Ε προτείνει προεξόφληση με συντελεστή $i_Φ$, ενώ μια άλλη τράπεζα Α προτείνει δανεισμό με επιτόκιο $i_Δ$ * , προτιμάμε δανεισμό αν $I_Δ^* < \frac{i\,Φ}{1- i Φ\, T}$ για δεδομένα $i_Δ$* , $i_Φ$ αυτά εξισώνονται αν Τ = Τ* = $\frac{1}{iΦ} - \frac{1}{iΔ}$. Για γραμμάτια διάρκειας μικρότερης του Τ * προτιμάμε προεξόφληση, διαφορετικά δανεισμό.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:</u>

Γραμμάτιο 200 χιλ. €, διάρκειας 6 μηνών, προεξοφλείται με συντελεστή 20%. Σε σχέση με δανεισμό προς 23% πράξαμε καλά; Τι θα κάναμε αν είχαμε γραμμάτιο διάρκειας 8 μηνών; Αν το επιτόκιο δανεισμού ήταν 22%;

<u>ΛΥΣΗ:</u>

- Ε = 200 x 20% x $\frac{1}{2}$ = > Ε = 20 αρα

  Ρ = 200 – 20 = > Ρ = 180

- Ενώ Δ = $\frac{200}{1+23\%\, x\, \frac{1}{2}}$ = > Δ = 179,37 άρα σωστά πράξαμε.
- Το ισοδύναμο επιτόκιο δανεισμού 6 μηνών είναι:

$i_Δ = \frac{0,20}{1-0,20\, x \left(\frac{1}{2}\right)}$ = 22,22 %

οπότε επιτόκιο δανεισμού 20% θα ήταν προτιμότερο.

Εφόσον Τ* = $\frac{1}{20\%} - \frac{1}{23\%}$ = 0,66 ή 7,99 μήνες

Προφανώς Τ = 8 μήνες σημαίνει ότι πρέπει να προτιμήσουμε δανεισμό.

- Και για να αποδείξουμε οτι όντως έτσι είναι:

$Δ = \frac{200}{1+23\%\frac{8}{12}}$ = > Δ = 173,41

Ενώ η προεξόφληση θα μας δώσει:

$\Pi = 200 \text{ x} \left(1 - 20\% \text{ x } \frac{8}{12}\right)$ = > Π = 173,33

(iii) **<u>Έντοκα γραμμάτια:</u>**

Η μέθοδος υπολογισμού της απόδοσης των εκδοτών αυτών των χρεογράφων είναι πλέον κλασική και εφαρμόζεται διεθνώς, όπως:

Όπου: Εa = Ετήσια απόδοση

Τπ = Τιμές πώλησης

Τa = Τιμές αγοράς

V = Αριθμός των ημερών της επένδυσης

$$Ea = \frac{T\pi - Ta}{Ta} \times \frac{365}{V}$$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:</u>

Εάν υποθέσουμε οτι ο επενδυτής ενός εντόκου γραμματίου με 4 μήνες ή 122 ημέρες ωρίμανσης και 200 ευρώ πραγματική αξία το αγοράζει 180 ευρώ και εάν το έντοκο γραμμάτιο κρατηθεί μέχρι την ημερομηνία ωρίμανσης, η απόδοσή του θα είναι:

<u>ΛΥΣΗ:</u>

$$Ea = \frac{200 - 180}{180} \times \frac{365}{122} \Rightarrow Ea = 33{,}21\%$$

Εάν, όμως το έντοκο γραμμάτιο πουληθεί πριν από την ημερομηνία ωρίμανσης, η τιμή πώλησης και απόδοσης, ανάλογα με τις συνθήκες αγοράς, θα είναι διαφορετικές.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :</u>

Ένα έντοκο γραμμάτιο που εκδόθηκε πριν από 60 ημέρες και η διάρκεια ζωής του είναι 6μηνη (180 ημέρες). Η Ονομαστική Αξία του είναι 10% σ' ετήσια βάση ενώ στο δημόσιο οφείλει να αποδώσει κάθε έτος 2000 € στη λήξη τους και υπάρχει φορολόγηση των τόκων 20%

ΖΗΤΕΙΤΑΙ:

1. Η Τιμή Έκδοσης των έντοκων γραμματίων
2. Η Θεωρητική Αξία του έντοκου γραμματίου σήμερα δεδομένου ότι δεν έχουν μεταβληθεί οι παράγοντες
3. Η σημερινή Θεωρητική Αξία αν υποθέσουμε ότι τα επιτόκια έχουν μειωθεί κατά $^{1}/_{5}$ μετά φόρων.

ΛΥΣΗ:

1) Ο.Α=2000

Επιτόκιο ετήσιας βάσης = 20%

Πρέπει να μετατραπεί η τριμηνιαία βάση σε ετήσια

r180 => $(1+r365)^{\mathbf{180/365}}$ -1 =0,0481 => 4,81%

$r_{\mathbf{180}}$ (μετά φόρων) =0,0481·(1-Φ.Σ) = 0,0481·(1-0,2) = 0,0385 => 3,85%

$$\text{Τιμή Έκδοσης} = \frac{\text{ΟΝ.ΑΞ.}}{1+r(1-\text{Φ.Σ})} = \frac{2000}{1+(0{,}0385)} = 1925{,}86\ €$$

2) $\text{Θ.Α}_{(60)} = \text{Τ.Ε} + (\text{Ο.Α} - \text{Τ.Ε}) \times \frac{\text{v}}{\text{N}}$

$\text{Θ.Α}_{(60)} = 1925{,}86 + (2000 - 1925{,}86) \times \frac{60}{180}$

$\text{Θ.Α}_{(60)} = 1950{,}57\ €$

3) $^{1}/_{5}$ => 0,20%

=> Θα μειώσουμε την αρχική απόδοση σε 0,20%

Οπότε:

10% · (1-0,2)= 10% · 0,8 = 8%

επιτόκια = > 8% - 0,20% = 7,8%

$r_{\mathbf{(120)}} = 1.078^{120/365} - 1 = 0.025 \rightarrow 2.5\%$

$$\text{Θ.Α}_{\mathbf{(120)}} = \frac{O.A.}{1+r} = \frac{2000}{1+0{,}025} = 1951{,}22\ €$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΔΑΝΕΙΑ

Πολλές φορές η αντιμετώπιση των οικονομικών αναγκών ενός ιδιώτη, μιας επιχείρησης ή ενός οργανισμού απαιτεί τη σύναψη δανείων από τράπεζες ή άλλους φορείς.

Ένα δάνειο είναι ένα είδος χρέους. Όπως όλα τα χρεόγραφα ένα δάνειο συνεπάγεται την ανακατανομή των χρηματοπιστωτικών περιουσιακών στοιχείων στο χρόνο μεταξύ του δανειστή και του δανειολήπτη.

Σε ένα δάνειο, ο δανειολήπτης αρχικά λαμβάνει ή δανείζεται ένα χρηματικό ποσό, το λεγόμενο κύριο, από το δανειστή και είναι υποχρεωμένος να εξοφλήσει ή να επιστρέψει ισο ποσό χρημάτων στο δανειστή σε μεταγενέστερο χρόνο.
Το δάνειο παρέχεται γενικά με κόστος, που αναφέρεται ως τόκος του δανείου, το οποίο παρέχει κίνητρα για τον δανειστή να συμμετάσχει στο δάνειο. .

1. ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΓΙΑ ΤΑ ΔΑΝΕΙΑ

- **Διάρκεια Δανείου** καλούμε το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από την ημέρα που συνάπτεται το δάνειο ως την μέρα που εξοφλείται.

- **Εξόφληση Δανείου** καλούμε την επιστροφή του δανείου και την πληρωμή των τόκων που δημιουργήθηκαν μέχρι την ημέρα επιστροφής του δανείου.

- **Απόσβεση Δανείου** καλούμε το σύνολο των αριθμητικών πράξεων που γίνονται για την εξόφληση του δανείου.

2. ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΗΝ ΔΙΑΡΚΕΙΑ

Τα δάνεια ανάλογα με την διάρκεια τους, διακρίνονται σε βραχυπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα.

Βραχυπρόθεσμα καλούμε τα δάνεια, τα οποία λήγουν το πολύ σε ένα έτος. Σε αυτά εφαρμόζεται ο απλός τόκος και αυτά συνήθως συνάπτονται μεταξύ προσώπων φυσικών ή νομικών και γίνονται με συναλλαγματικές.

Μακροπρόθεσμα εκείνα τα δάνεια που έχουν χρονική διάρκεια μεγαλύτερη του ενός έτους. Εδώ εφαρμόζεται ο ανατοκισμός. Σε αυτά ανήκουν τα γνωστά σε όλους δάνεια στεγαστικά και καταναλωτικά.

Τα μακροπρόθεσμα δάνεια χωρίζονται σε 2 κατηγορίες. Τα ενιαία και τα ομολογιακά.

3. ΕΝΙΑΙΑ ΔΑΝΕΙΑ

Ενιαία δάνεια είναι τα δάνεια στα οποία ο δανειστής είναι ένα μόνο πρόσωπο φυσικό ή νομικό. Διακρίνονται ανάλογα με το χρόνο εξόφλησης τους σε Πάγια και Εξοφλητέα.

Πάγια δάνεια: Είναι τα ενιαία δάνεια των οποίων ο χρόνος εξόφλησης δεν είναι καθορισμένος.

Εξοφλητέα δάνεια: Καλούμε τα ενιαία δάνεια των οποίων ο χρόνος εξόφλησης είναι απολύτως εξοφλημένος. Εδώ έχουμε τα εξοφλητέα εφάπαξ όπου είναι τα εξοφλητέα ενιαία δάνεια στα οποία η εξόφληση γίνεται με μια μόνο δόση και τα εξοφλητέα τοκοχρεολυτικως όπου είναι τα εξοφλητέα ενιαία δάνεια στα οποία η εξόφληση γίνεται με περισσότερες από μια δόσεις.

4. ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ ΕΝΙΑΙΩΝ ΔΑΝΕΙΩΝ

Χρεολύσιο το οποίο είναι το ποσό που διατίθεται σε κάθε δόση του δανείου για την εξόφληση του κεφαλαίου που δανειστήκαμε.

Τόκος ο οποίος είναι το ποσό που διατίθεται σε κάθε δόση του δανείου για την εξόφληση του τόκου του δανείου.

Τοκοχρεολύσιο το οποίο είναι η συνολική δόση του δανείου και είναι το ποσό που δίνουμε κάθε φορά για την εξόφληση του αρχικού κεφαλαίου που δανειστήκαμε και του αντίστοιχου τόκου του δανείου.

$$TOKOCREOLU\ \ SIO = TOKOS + CREOLUSIO$$

5. ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΑΝΕΙΩΝ

Μεθοδος ενιαιου ποσου:

Ένα από τα πλέον απλούστερα συστήματα απόσβεσης δανείων είναι το σύστημα του ενιαίου ποσού, όπου ο οφειλέτης καταβάλλει στο δανειστή του το αντίστοιχο τόκο κάθε περιόδου και στη λήξη του δανείου καταβάλλει ολόκληρο το ποσό που αρχικά δανείστηκε. Τέτοιος τρόπος αποπληρωμής ενός δανείου θα εξυπηρετούσε ίσως μια νέα επιχείρηση στην οποία δίνεται ο απαιτούμενος χρόνος για να λειτουργήσει και να αποκτήσει τα κατάλληλα κεφάλαια ώστε να εξοφλήσει το αρχικό ποσό του δανείου που σύναψε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να γίνει απόσβεση ενός δανείου 30.000€ που εξοφλείται σε 4 ετήσιες δόσεις, με επιτόκιο 4% και με το σύστημα του ενιαίου ποσού.

ΛΥΣΗ:

Έχουμε: K = 30.000

m = 4

i = 0,04

Οπότε:

$$\mathrm{I_m} = \mathrm{K} \cdot \mathrm{i}$$

$$\mathrm{I_m} = 30.000 \cdot 0,04$$

$$\mathrm{I_m} = 1200$$

$$m = 1,2,3$$

$$X_m = 0, m = 1,2,3$$

$$X_4 = 30.000$$

$$Y_m = 30.000, m = 1,2,3$$

$$kai$$

$$Y_4 = 0$$

Συνεπώς ο πίνακας απόσβεσης του δανείου είναι:

m	Im	Xm	Rm=R	Ym
1	1.200	0	1.200	30.000
2	1.200	0	1.200	30.000
3	1.200	0	1.200	30.000
4	1.200	30.000	31.200	0

<u>Μεθοδος ισων μερων κεφαλαιων:</u>

Στην μέθοδο αυτή το χρεολύσιο κάθε περιόδου είναι σταθερό και κάθε δόση υπολογίζεται διαιρώντας το ποσό του δανείου δια του αριθμού των περιόδων, οι δε τόκοι υπολογίζονται στο τέλος κάθε περιόδου.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:</u>

Να γίνει απόσβεση ενός δανείου 30.000€ που εξοφλείται σε 4 ετήσιες δόσεις, με επιτόκιο 4% και με το σύστημα των ισων μερών κεφαλαίου.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Έχουμε: K = 30.000

m = 4

i = 0,04

Οπότε:

$$X_m = \frac{K}{i} = \frac{30.000}{4} = 7.500, m = 1,2,3,4$$

Επίσης για το $1^{ο}$ έτος:

$$I_1 = K \cdot i = 30.000 \cdot 0,04 = 1.200$$
$$Y_1 = K - X_1 = 30.000 - 7.500 = 22.500$$
$$R_1 = X_1 + I_1 = 7.500 + 1.200 = 8.700$$

Για το $2^{ο}$ έτος:

$$I_2 = Y_1 \cdot i = 22.500 \cdot 0,04 = 900$$
$$R_2 = X_2 + I_2 = 7.500 + 900 = 8.400$$
$$Y_2 = Y_1 - X_2 = 22.500 - 7.500 = 15.000$$

Για το $3^{ο}$ έτος:

$$I_3 = Y_2 \cdot i = 15.000 \cdot 0,04 = 600$$
$$R_3 = X_3 + I_3 = 7.500 + 600 = 8.100$$
$$Y_3 = Y_2 - X_3 = 15.000 - 7.500 = 7.500$$

Για το $4^{ο}$ έτος:

$$I_4 = Y_3 \cdot i = 7.500 \cdot 0,04 = 300$$
$$R_4 = X_4 + I_4 = 7.500 + 300 = 7.800$$
$$Y_4 = Y_3 - X_4 = 7.500 - 7.500 = 0$$

Συνεπώς ο πίνακας απόσβεσης του δανείου είναι:

m	Im	Xm	Rm=R	Ym
1	1.200	7.500	8.700	22.500
2	900	7.500	8.400	15.000
3	600	7.500	8.100	7.500
4	300	7.500	7.800	0

Μεθοδος σταθερου τοκου και χρεολυσιου:

Στη μέθοδο αυτή το τοκοχρεολύσιο κάθε περιόδου είναι σταθερό

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Επιχειρηματίας πήρε δάνειο 30.000€, το οποίο πρέπει να εξοφλήσει σε 4 ετήσιες δόσεις και με σταθερό ετήσιο επιτόκιο 4%. Να γίνει απόσβεση του δανείου και να συνταχτεί ο αντίστοιχος πίνακας με το σύστημα του σταθερού τόκου και σταθερού χρεολυσίου.

ΛΥΣΗ:

Έχουμε: K = 30.000

m = 4

i = 0,04

Οπότε:

$$I_m = K \cdot i = 30.000 \cdot 0{,}04 = 1.200$$

$$X_m = K \cdot \frac{i}{(1+i)^m - 1} = 30.000 \cdot \frac{0{,}04}{(1+0{,}04)^4 - 1} = 30.000 \cdot \frac{0{,}04}{0{,}17} = 30.000 \cdot 0{,}23 = 6.900$$

$$m = 1,2,3,4$$

$$R_m = X_m + I_m = 6.900 + 1.200 = 8.100$$

$$m = 1,2,3,4$$

Επίσης για το 1^o έτος:

$$Y_1 = K - X_1 = 30.000 - 6.900 = 23.100$$

Για το 2^o έτος:

$$Y_2 = Y_1 - X_2 \cdot (1+i) = 23.100 - 6.900 \cdot 1{,}04 = 23.100 - 7.176 = 15.924$$

Για το 3ο έτος:

$$Y_3 = Y_2 - X_3 \cdot (1+i)^2 = 15.924 - 6.900 \cdot 1{,}04^2 = 15.924 - 7.452 = 8.472$$

Για το 4ο έτος:

$$Y_4 = Y_3 - X_4 \cdot (1+i)^3 = 8.472 - 6.900 \cdot 1{,}04^3 = 8.472 - 7.728 = 744 \approx 0$$

Η διαφορά των 774 € οφείλεται στις στρογγυλοποιήσεις που γίνονται στις πράξεις και στους πίνακες ραντών.

Συνεπώς ο πίνακας απόσβεσης του δανείου είναι:

m	Im	Xm	Rm=R	Ym
1	1.200	6.900	8.100	23.100
2	1.200	6.900	8.100	15.924
3	1.200	6.900	8.100	8.472
4	1.200	6.900	8.100	0

Μεθοδος προοδευτικου χρεολυσιου:

Η προοδευτική ή γαλλική μέθοδος είναι μια από τις συχνότερες που εφαρμόζονται σήμερα για την απόσβεση ενιαίων δανείων. Εδώ το τοκοχρεολύσιο κάθε περιόδου παραμένει σταθερό, χωρίς όμως να παραμένουν σταθερά ο τόκος ή το χρεολύσιο. Ο τόκος που καταβάλλεται στο τέλος της κάθε περιόδου υπολογίζεται επί του υπόλοιπου ποσού της προηγούμενης περιόδου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Επιχειρηματίας πήρε δάνειο 30.000€, το οποίο πρέπει να εξοφλήσει σε 4 ετήσιες δόσεις και με σταθερό ετήσιο επιτόκιο 4%. Να γίνει απόσβεση του δανείου και να συνταθεί ο πίνακας με το προοδευτικό σύστημα.

ΛΥΣΗ:

Έχουμε: K = 30.000

m = 4

i = 0,04

Οποτε:

$$R_m = R = \frac{K}{\frac{1-U^n}{i}} = \frac{30.000}{\frac{1-U^4}{0,04}} = \frac{30.000}{\frac{1-\frac{1}{(1+i)^4}}{0,04}} = \frac{30.000}{\frac{1-\frac{1}{1,17}}{0,04}} = \frac{30.000}{\frac{1-0,85}{0,04}} = \frac{30.000}{3,75} = 8.000$$

$m = 1,2,3,4$

Επίσης για το 1ο έτος:

$$I_1 = K \cdot i = 30.000 \cdot 0,04 = 1.200$$
$$X_1 = R - I_1 = 8.000 - 1.200 = 6.800$$
$$Y_1 = K - X_1 = 30.000 - 6.800 = 23.200$$

Για το 2ο έτος:

$$I_2 = Y_1 \cdot i = 23.200 \cdot 0,04 = 928$$
$$X_2 = R - I_2 = 8.000 - 928 = 7.072$$
$$Y_2 = Y_1 - X_2 = 23.200 - 7.072 = 16.128$$

Για το 3ο έτος:

$$I_3 = Y_2 \cdot i = 16.128 \cdot 0,04 = 645,12$$
$$X_3 = R - I_3 = 8.000 - 645,12 = 7.354,88$$
$$Y_3 = Y_2 - X_3 = 16.128 - 7.354,88 = 8.773,12$$

Για το 4ο έτος:

$$I_4 = Y_3 \cdot i = 8.773,12 \cdot 0,04 = 350,92$$
$$X_4 = R - I_4 = 8.000 - 350,92 = 7.649,08$$
$$Y_4 = Y_3 - X_4 = 8.773,12 - 7.649,12 = 1124 \approx 0$$

Συνεπώς ο πίνακας απόσβεσης του δανείου είναι:

m	Im	Xm	Rm=R	Ym
1	1.200	6.800	8.000	23.200
2	928	7.072	8.000	16.128
3	645,12	7.354,88	8.000	8.773,12
4	350,92	7.649,12	8.000	0

Μεθοδος sinking fund:

Η απόσβεση δανείων με τη μέθοδο sinking fund , γίνεται ως εξής: Ο οφειλέτης πληρώνει στο τέλος κάθε περιόδου τους τόκους που αναλογούν σε ολόκληρο το ποσό του δανείου και παράλληλα καταθέτει με ανατοκισμό, επίσης στο τέλος κάθε περιόδου, ένα σταθερό ποσό με επιτόκιο τοποθέτησης i1, συνήθως διάφορο από αυτό του δανείου i, έτσι ώστε μετά από n περιόδους να συγκεντρωθεί ολόκληρο το ποσό του δανείου. Κατά κανόνα ισχύει ότι: $i1<i$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Επιχειρηματίας σύναψε δάνειο από την Τράπεζα Πίστεως ύψους 100.000€, το οποίο πρέπει να εξοφλήσει σε 4 ετήσιες δόσεις με σταθερό ετήσιο επιτόκιο 4%. Και με την μέθοδο sinking fund. Να συνταχτεί ο πίνακας απόσβεσης του δανείου αν το επιτόκιο τοποθέτησης είναι 3,5%.

ΛΥΣΗ:

Έχουμε: K = 100.000

n = 4

i = 0,04

i1 = 0,035

Οπότε:

$$R_m = R = K \cdot i + \frac{K \cdot i1}{(1+i1)^n - 1}$$

$$\Rightarrow R = 100.000 \cdot 0{,}04 + \frac{100.000 \cdot 0{,}035}{(1+0{,}035)^4 - 1}$$

$$\Rightarrow R = 4.000 + 23.333$$

$$\Rightarrow R = 27.333$$

Άρα η επιχείρηση θα καταβάλλει 4.000 € ετησίως για τόκους συν δόση ύψους 23.333 € που θα ανατοκίζεται προς 3,5% για να σχηματιστεί το εξοφλητικό απόθεμα που θα αποπληρώσει το δάνειο με το πέρας των 4 ετών.

- Στη συνέχεια το ποσό των 23.333 € τοκίζεται για ένα έτος προς 3,5% και παράγει στο τέλος του 2^{ου} έτους τόκους:

  23.333 * 0,035 = 816,70 €.
- Έτσι το εξοφλητικό απόθεμα στο τέλος του 2^{ου} έτους είναι:

  2 * 23.333 + 816,70 = 47.482,70 €
- Συνεχίζοντας κατά αυτόν τον τρόπο έχουμε ότι στο τέλος του 3^{ου} έτους οι τόκοι του εξοφλητικού αποθέματος είναι:

  47.482,70 * 0,035 = 1.661,90 €

  και το εξοφλητικό απόθεμα γίνεται:

  23.333 + 47.482,70 + 1.661,90 = 72.477.60 €
- Στο τέλος του 4^{ου} έτους οι τόκοι του εξοφλητικού αποθέματος είναι:

  72.477,60 * 0,035 = 2.536,70 €

  και το εξοφλητικό απόθεμα γίνεται:

  23.333 + 72.477,60 + 2.536,70 = 98.347.30 €

Συνεπώς ο πίνακας απόσβεσης του δανείου είναι:

m	Im	Xm	Rm=R	Εξοφλητικό απόθεμα
1	4.000	23.333	27.333	23.333
2	4.000	23.333	27.333	47.482,70
3	4.000	23.333	27.333	72.477,60
4	4.000	23.333	27.333	98.347,30

6. ΟΜΟΛΟΓΙΑΚΑ ΔΑΝΕΙΑ

Ομολογιακά δάνεια είναι τα δάνεια που αντιπροσωπεύουν πολύ μεγάλα κεφάλαια, τα οποία δεν μπορούν να διατεθούν μόνο από ένα πρόσωπο φυσικό ή νομικό.

Τα δάνεια αυτά διαιρούνται σε τμήματα μικρότερων ποσών τα οποία καλούνται ομολογίες, τις οποίες εκδίδει ο δανειζόμενος και τις διαθέτει στους δανειστές του.

Κάθε ομολογία αναγράφει πάνω:

- το χρηματικό ποσό του ομολογιακού δανείου που αντιπροσωπεύει η ομολογία
- το επιτόκιο του ομολογιακού δανείου
- το χρόνο και το τρόπο πληρωμής των τόκων
- τη τιμή εξόφλησης της ομολογίας
- τα διάφορα πλεονεκτήματα που παρέχονται στους κατόχους των ομολογιών κ.λ.π.

Γενικά Ομολογία είναι ένας πιστωτικός τίτλος με τον οποίο ο δανειζόμενος υπόσχεται να πληρώσει το ποσό που αναγράφεται στο έντυπο αυτό.

7. ΕΚΔΟΣΗ ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΗΝ ΦΥΣΗ ΤΗΣ

Ονομαστικές: Όταν πάνω σε αυτές αναγράφεται το όνομα του ομολογιακού στον οποίο πληρώνονται οι τόκοι, το ποσό και ο χρόνος πληρωμής τους. Οι τόκοι κάθε ομολογίας αποστέλλονται στο δικαιούχο έναντι γραπτής απόδειξης ή καταβάλλονται έναντι σφράγισης του πιστωτικού τίτλου. Οι ονομαστικές ομολογίες παρέχουν στο κάτοχο τους πλήρη ασφάλεια σε περίπτωση απώλειας ή κλοπής όμως δεν μπορούν να μεταβιβαστούν εύκολα αφού αυτό προϋποθέτει αλλαγή ονοματεπώνυμου στον πιστωτικό τίτλο και στο μητρώο ομολογιών.

Στον κομιστή: Όταν είναι ανώνυμες και ανήκουν σε αυτόν που τις έχει, οι δε τόκοι πληρώνονται με τοκομερίδια δηλ. είναι έντυπα αποδείξεων, το πλήθος των οποίων είναι ισο με τον αριθμό των χρονικών περιόδων που πρέπει να καταβληθούν οι τόκοι από τη σύναψη του δανείου έως τη λήξη του. Τα τοκομερίδια είναι αριθμημένα και σε αυτά αναγράφεται το ποσό και ο χρόνος πληρωμής του τόκου καθώς και ο αριθμός της ομολογίας. Τέτοιες ομολογίες μεταβιβάζονται εύκολα αλλά δεν παρέχουν καμία ασφάλεια στον ομολογιούχο αφού είναι ανώνυμες όμως είναι οι πλέον συνηθισμένες στην πράξη ομολογίες.

Μικτες: Όταν πάνω στο σώμα τους αναγράφεται το όνομα του ομολογιούχου και έχουν τοκομερίδια τα οποία φέρουν τον αριθμό της ομολογίας, δεν φέρουν όμως το όνομα του ομολογιούχου και η είσπραξη τους μπορεί να γίνει από οποιονδήποτε.

Η εξόφληση του ομολογιακού δανείου γίνεται ως εξής:

Το κεφάλαιο του δανείου εξοφλείται τμηματικά με τις ομολογίες που κληρώνονται στο τέλος κάθε περιόδου. Ενώ οι τόκοι του δανείου πληρώνονται με την παρουσίαση από τους κατόχους των ομολογιών των τοκομεριδίων, ειδικών εντύπων για την είσπραξη του τόκου στις ημερομηνίες που έχουν καθοριστεί. Σύναψη ομολογιακών δανείων συνήθως κάνει το ελληνικό κράτος, οι Δήμοι και οι μεγάλοι οργανισμοί.

8. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΟΜΟΛΟΓΙΑΚΩΝ ΔΑΝΕΙΩΝ

Ονομαστική αξία ομολογίας: Είναι το χρηματικό ποσό που αναγράφεται πάνω στη ομολογία

Τιμή έκδοσης ομολογίας: Είναι το χρηματικό ποσό που πουλήθηκε η ομολογία. Αν η τιμή της έκδοσης της ομολογίας είναι ιση με την ονομαστική της αξία, τότε λέμε, ότι το ομολογιακό δάνειο εκδόθηκε στο άρτιο. Αν η τιμή έκδοσης της ομολογίας είναι μεγαλύτερη από την ονομαστική της αξία τότε λέμε ότι το ομολογιακό δάνειο εκδόθηκε υπέρ το άρτιο. Τέλος αν η τιμή έκδοσης είναι μικρότερη από την ονομαστική αξία της ομολογίας τότε λέμε ότι το ομολογιακό δάνειο εκδόθηκε υπό το άρτιο

Τιμή εξόφλησης ομολογίας: Είναι το χρηματικό ποσό που θα εξοφληθεί η ομολογία κατά τη λήξη της.

Τοκομερίδιο: Είναι μια απόδειξη που επισυνάπτεται σε μια ομολογία με την οποία γίνεται η είσπραξη του τόκου που παράγεται από την ομολογία στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου του ομολογιακού δανείου.

Η απόσβεση των ομολογιακών δανείων γίνεται συνήθως με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου. Για το λόγο αυτό σε καθορισμένες ημερομηνίες γίνεται κλήρωση ορισμένου αριθμού ομολογιών.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:</u>

Ένας οργανισμός προχώρησε στην έκδοση ομολογιακού δανείου ύψους 1.000.000€ με ομολογίες ονομαστικής αξίας 20€ η καθεμιά. Αν το επιτόκιο 6% η εξόφληση του ομολογιακού δανείου γίνει μετά από 4 έτη, η τιμή κάθε ομολογίας κατά την εξόφληση είναι 21 € και η απόσβεση τοκοχρεολυτικως με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου, τότε να βρεθούν:

Α) ο αριθμός των ομολογιών,

Β) το τοκοχρεολύσιο,

Γ) ο αριθμός των τίτλων που θα εξοφληθούν στο τέλος του 2^{ου},3^{ου},4^{ου} έτους και

Δ) να συνταχτεί ο πίνακας απόσβεσης του δανείου

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Έχουμε:

Α) $N = \dfrac{1.000.000}{20} = 50.000$

Β) Έχουμε: Κ = 20

Κεξ = 21

i = 0,06

i’ = ;

Οπότε:

$$K \cdot i = K_{\varepsilon\xi} \cdot i' = 20 \cdot \frac{0,06}{21} = 0,0571$$

$$R = C \cdot \frac{i'}{1 - U^n} = 1.000.000 \cdot \frac{0,0571}{1 - \dfrac{1}{(1 + 0,0571)^4}} = 286.677,45$$

Γ) $$N_1 = N \cdot \frac{i'}{(1+i')^n - 1} = 50.000 \cdot \frac{0,0571}{(1+0,0571)^4 - 1} = 11.479$$

$$N_2 = N_1 \cdot (1+i') = 11.479 \cdot 1,0571 = 12.135$$

$$N_3 = N_2 \cdot (1+i') = 12.135 \cdot (1+0,0571) = 12.828$$

$$N_4 = N_3 \cdot (1+i') = 12.828 \cdot (1+0,0571) = 13.561$$

Δ) Για τη σύνταξη του πίνακα απόσβεσης του δανείου υπολογίζουμε τα χρεολύσια Xm, m = 1,2,3,4, και τους τόκους Im, m = 1,2,3,4.

$$X_1 = N_1 \cdot K_{\varepsilon\xi} = 11.479 \cdot 21 = 241.059$$

$$X_2 = N_2 \cdot K_{\varepsilon\xi} = 12.135 \cdot 21 = 254.835$$

$$X_3 = N_3 \cdot K_{\varepsilon\xi} = 12.828 \cdot 21 = 269.388$$

$$X_4 = N_4 \cdot K_{\varepsilon\xi} = 13.561 \cdot 21 = 284.781$$

Επίσης:

$$I_m = R - X_m$$
$$m = 1,2,3,4$$

Ο πίνακας απόσβεσης του δανείου είναι:

m	Nm	Xm	Rm=R	Im	Ανεξ. Ομολογίες
1	11.479	241.059	286.677,45	45.618,45	38.512
2	12.135	254.835	286.677,45	31.842,45	26.386
3	12.828	269.388	286.677,45	17.289,45	13.561
4	13.561	284.781	286.677,45	1.896,45	0

9. ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΔΑΝΕΙΩΝ

- Δάνεια με προσωπική ασφάλεια (καταναλωτικής πίστης)
- Δάνεια με ανοικτό λογαριασμό
- Δάνεια ενυπόθηκα και
- Δάνειο με ενέχυρο κινητών πραγμάτων

  -Δάνεια με ενέχυρο εμπορευμάτων

  -Δάνεια με ενέχυρο χρεογράφων

  -Δάνεια με ενεχυρογραφα Γενικών Αποθηκών

  -Δάνεια με ενέχυρο τιμαλφή

Δανεια με προσωπικη ασφαλεια:

Είναι δάνεια που χορηγούν οι τράπεζες στους πελάτες τους με προσωπική ασφάλεια. Η προσωπική ασφάλεια εξαρτάται από τον χαρακτήρα του δανειζόμενου προσώπου και από τον τρόπο με το οποίο συναλλάσσεται, δηλ. αν είναι έντιμος, ειλικρινής, εργατικός και συνεπής στις συναλλαγές του.

Παλιότερα η χορήγηση δανείων με προσωπική ασφάλεια γινόταν σε περιορισμένη κλίμακα. Σήμερα η χορήγηση τέτοιων δανείων που συνήθως καλούνται καταναλωτικά δάνεια είναι πιο συχνή κυρίως στους μισθωτούς.

Κατηγορίες καταναλωτικών δανείων

- Καταναλωτικά δάνεια για την αγορά ειδών διαρκείας και υπηρεσιών
- Δάνεια για δίδακτρα – σπουδών και αφορούν την κάλυψη διδάκτρων όλων των βαθμίδων και σχολών του εσωτερικού και εξωτερικού.
- Προσωπικά δάνεια

Τα καταναλωτικά δάνεια χωρίζονται σε :

- Δάνεια για αγορά αυτοκινήτων
- Δάνεια για αγορά οικιακού εξοπλισμού και επίπλωσης
- Δάνεια για την αγορά συστημάτων κλιματισμού
- Δάνεια για την αγορά σκαφών
- Δάνεια για την αγορά επαγγελματικού εξοπλισμού

Σε όλα τα δάνεια δίνεται δωρεάν ασφαλιστική κάλυψη του δανειολήπτη για αποπληρωμή του δανείου σε περίπτωση σοβαρού ατυχήματος.

Δανεια με ανοικτο λογαριασμο:

Το δάνειο αυτό χορηγείται από την τράπεζα σε ένα πελάτη της βάσει μιας σύμβασης. Με τη σύμβαση αυτή η τράπεζα ορίζει ένα ανώτατο όριο πίστωσης μέσα στο οποίο ο πελάτης μπορεί να κάνει ανάληψη ολόκληρου του ποσού εφάπαξ ή τμηματικά και αναλαμβάνει την υποχρέωση να αποδώσει το ποσό του δανείου, οποιαδήποτε στιγμή συνολικά ή τμηματικά.

Ο πελάτης αποσύρει και καταθέτει χρηματικά ποσά με αντίστοιχη χρέωση και πίστωση του λογαριασμού του, για αυτό το λόγο ο λογαριασμός καλείται και (ανοιχτός) αλληλόχρεος λογαριασμός.

Οι καταθέσεις στον λογαριασμό γίνονται συνήθως με μετρητά και μεταβίβαση στη τράπεζα συναλλαγματικών, γραμματίων σε διαταγή καθώς και άλλων αξιών. Και με αντίστοιχα αυτά ποσά πιστώνεται ο λογαριασμός του πελάτη.

Οι αναλήψεις γίνονται με επιταγές που εκδίδει ο πελάτης από στέλεχος επιταγών που του δίνει η τράπεζα και με τα ποσά των οποίων χρεώνεται ο λογαριασμός του πελάτη.

Η τράπεζα παρακολουθεί την κίνηση του λογαριασμού κάθε πελάτη και φροντίζει πάντα το χρεωστικό υπόλοιπο του λογαριασμού να μην ξεπερνά το ανώτατο όριο της πίστωσης που έχει συμφωνηθεί. Το ανώτατο όριο της πίστωσης που μπορεί να αντλήσει μέσω του ανοιχτού λογαριασμού καθορίζεται ανάλογα με την φερεγγυότητα του πελάτη, το ύψος των πωλήσεων και κερδών που πραγματοποιούνται, σύμφωνα πάντοτε με τους κανόνες που έχουν θεσπίσει οι νομισματικές αρχές. Ο λογαριασμός αυτός είναι τοκοφόρος και οι τόκοι υπολογίζονται κάθε φορά στα χρεωστικά υπόλοιπα του λογαριασμού του πελάτη. Οι χρηματοδοτήσεις με σύμβαση ανοικτού λογαριασμού διευκολύνουν τις επιχειρήσεις καθ’ ότι έχουν πάντοτε στη διάθεση τους ένα χρηματικό ποσό για αντιμετώπιση κυρίως εκτάκτων αναγκών τους.

Δανεια ενυποθηκα:

Ενυπόθηκα Δάνεια είναι εκείνα που χορηγούνται από την τράπεζα μετά από εγγραφή υποθήκης σε ακίνητα πράγματα αυτού που δανείζεται (σπίτια, οικόπεδα, κτίρια)

Η χρησιμοποίηση των δανείων αυτών αφορά τη διενέργεια επενδύσεων , όπως είναι η ανέγερση κτιριακών εγκαταστάσεων η επέκταση τους και προμήθεια μηχανολογικού εξοπλισμού.

Τα δάνεια αυτά είναι μακροπρόθεσμα, συνήθως μεταξύ 5 κα 10 ετών.

Η συνηθέστερη μορφή είναι του τοκοχρεωλυτικού δανείου. Η χορήγηση γίνεται σταδιακά και με την πρόοδο της επένδυσης.

Είναι ενδεχόμενο να δοθεί μια «περίοδος χάριτος» κατά την οποία δεν καταβάλλονται δόσεις.

Η εξυπηρέτηση γίνεται με τοκοχρεολυτικές δόσεις, δηλ. με καταβολή των τόκων και μέρους του κεφαλαίου του δανείου (χρεολύσιο)

Ο τόκος υπολογίζεται με βάση το επιτόκιο δανεισμού. Οι δόσεις των τοκοχρεολυσίων είναι σταθερές. Οι τόκοι μειώνονται με την πάροδο του χρόνου, ενώ αντίθετα το χρεολύσιο (ποσό που αντιστοιχεί στην επιστροφή του κεφαλαίου) αυξάνεται.

Δανειο με ενεχυρο (κινητών πραγμάτων):

Αυτά τα δάνεια χωρίζονται στις πιο κάτω κατηγορίες:

- Δάνεια με ενέχυρο χρεογράφων
- Δάνεια με ενέχυρο εμπορευμάτων
- Δάνεια με ενεχυρογραφα Γενικών Αποθηκών
- Δάνεια με ενέχυρο τιμαλφή

Δανεια με ενεχυρο χρεογραφων:

Πρόκειται για δάνεια που χορηγούνται από τις τράπεζες με ενέχυρο χρεογράφων. Ακόμη χορηγούνται δάνεια με ενέχυρο συναλλαγματικές και γραμμάτια σε διαταγή. Οι τράπεζες καταρτίζουν πίνακες εγκεκριμένων χρεογράφων τα οποία θα δέχονται προς ενεχυρίαση. Συνήθως το ενέχυρο δίνεται σε τίτλους που είναι διαπραγματεύσιμοι στο Χρηματιστήριο Αξιών ώστε η εξασφάλιση να είναι μεγαλύτερη και η ρευστοποίηση ευκολότερη. Ο δανειολήπτης παραμένει κύριος των χρεογράφων που ενεχυριάζονται και επωφελείται από τυχόν χρηματιστηριακή ανατίμηση τους ενώ εισπράττει τις προσόδους απ' αυτούς. Η αξία του δανείου δεν μπορεί να υπερβεί τα 60-70% της τρέχουσας αξίας των χρεογράφων και λήξη τους το τρίμηνο. Έχει όμως τη δυνατότητα να παραταθεί εφ' όσον καταβληθούν οι τόκοι και μέρος του δανείου. Αν υπάρξουν έντονα υποτιμητικές τάσεις και η χρηματιστηριακή αξία των ενεχυριασμένων τίτλων μειωθεί, με κίνδυνο να μη καλύπτει το ποσό της οφειλής του ενεχυριαστή, η τράπεζα από τη σχετική σύμβαση έχει το δικαίωμα να κηρύξει το δάνειο ληξιπρόθεσμο και απαιτητό πριν τη λήξη του, εκτός αν ο δανειστής κάνει αύξηση των ενεχυριασμένων τίτλων, ώστε να καλύπτεται η τράπεζα. Αν κατά τη λήξη του δανείου δεν γίνει ανανέωση αυτού ούτε εξόφληση η τράπεζα μπορεί, αν μεν πρόκειται για χρεόγραφα διαπραγματευόμενα στο χρηματιστήριο, να προβεί στην εκποίηση τους δια του χρηματιστήριου, αν όχι, να προκαλέσει την αναγκαστική εκποίηση τους και να ικανοποιηθεί.

Δανειο με ενεχυρο εμπορευματων:

Δάνεια με ενέχυρο εμπορευμάτων χορηγούνται με ενεχυρίαση ορισμένων ειδών εμπορευμάτων τα οποία δεν υπόκεινται εύκολα σε φθορά, μπορούν να εκποιηθούν εύκολα σε πλειστηριασμό και αναγράφονται στον κανονισμό της τράπεζας. Τέτοια ειδή εμπορευμάτων είναι βιομηχανικά προϊόντα, πρώτες ύλες, γεωργικά προϊόντα. Το ποσό του δανείου δεν μπορεί να υπερβεί το 70% της τρέχουσας αξίας των εμπορευμάτων.

Τα δάνεια με ενέχυρο είναι συνήθως τρίμηνης λήξης μπορεί όμως να παραταθεί σιωπηρά, όταν καταβληθούν οι τόκοι και μέρος του δανείου.

Η ενεχυρίαση γίνεται με το πιο κάτω τρόπο.

- Αν η τράπεζα διαθέτει δικες της αποθήκες, τα εμπορεύματα παραδίδονται σε αυτές και φυλάσσονται μέχρι να εξοφληθεί η οφειλή από το δάνειο.
- Σε πολλές περιπτώσεις οι τράπεζες δέχονται, ιδίως για βιομηχανικές επιχειρήσεις, τα εμπορεύματα να παραμένουν ενεχυριασμένα σε αποθήκη της

κάθε επιχείρησης που σφραγίζεται και η φύλαξη γίνεται με τη φροντίδα και ευθύνη της επιχείρησης.

- Είναι δυνατή η ενεχυρίαση εμπορευμάτων με κοινή συναίνεση οφειλέτη και τράπεζας σε τρίτο πρόσωπο που λέγεται «θεματοφύλακας» ή «μεσεγγυούχος»
- Όταν τα εμπορεύματα βρίσκονται στις αποθήκες του τελωνείου οπότε υποβάλλεται αίτηση αναγνώρισης υπέρ της τράπεζας.

Δανειο με ενεχυρογραφα γενικων αποθηκων:

Η ασφαλέστερη και η προτιμότερη για την τράπεζα περίπτωση είναι η εναπόθεση εμπορευμάτων στις αποθήκες της «Προνομιούχου Ανώνυμης Εταιρείας Γενικών Αποθηκών Ελλάδος» (ΠΑΕΓΑΕ). Στο εξής θα καλείται «Γενική Αποθήκη». Αυτή είναι θυγατρική εταιρεία της Εθνικής Τράπεζας και διαθέτει εκτεταμένους αποθηκευτικούς χώρους, στους οποίους δέχεται για αποθήκευση για ορισμένο χρονικό διάστημα εμπορεύματα, έναντι καταβολής ενός δικαιώματος και έχει το νομοθετικά κατοχυρωμένο προνόμιο έκδοσης «αποθετηρίων» και ενεχυρογραφων ».

Αποθετήριο: Είναι τίτλος σε διαταγή με τον οποίο η «Γενική Αποθήκη» βεβαιώνει ότι ορισμένη ποσότητα αγαθών βρίσκεται στις αποθήκες της και υπόσχεται να την παραδώσει στον νόμιμο κομιστή του τίτλου που είναι εμπορεύσιμος.

Ενεχυρογραφο: Είναι επίσης «τίτλος σε διαταγή» που εκδίδεται από τη «Γενική Αποθήκη» με την οπισθογράφηση του οποίου ενεχυριάζονται τα εμπορεύματα που αποθηκεύτηκαν σε αυτήν. Είναι παραστατικό έγγραφο εμπορευμάτων τα οποία είναι αποθηκευμένα στις Γενικές Αποθήκες. Στην περίπτωση αυτή έναντι του δανείου που χορηγείται από την τράπεζα, μεταβιβάζεται σε διαταγή της το ενεχυρογραφο με οπισθογράφηση και έτσι η τράπεζα αποκτά δικαίωμα ενεχύρου στα εμπορεύματα που βρίσκονται στις Γενικές Αποθήκες.

Δανεια με ενεχυρο τιμαλφη:

Τα δάνεια αυτά χορηγούνται με ενέχυρο τιμαλφή. Ορισμένες τράπεζες χορηγούν τέτοια δάνεια ανάλογα με την τρέχουσα αξία των τιμαλφών που προσκομίζονται για ενεχυρίαση.

10. ΑΚΑΛΥΠΤΑ ΔΑΝΕΙΑ

Ακάλυπτα δάνεια είναι τα χρηματικά δάνεια που δεν εξασφαλίζονται με τα περιουσιακά στοιχεία του δανειολήπτη. Αυτά μπορεί να είναι διαθέσιμα από χρηματοδοτικούς οργανισμούς υπό πολλές διαφορετικές μορφές ή συσκευασίες εμπορίας:

- χρέος μέσω πιστωτικών καρτών
- προσωπικά δάνεια
- τραπεζικές υπεραναλήψεις
- πιστωτικές διευκολύνσεις ή κονδύλια πιστώσεων
- εταιρικών ομολόγων

Τα επιτόκια που ισχύουν για τις διάφορες αυτές μορφές είναι ποικίλλει ανάλογα με το δανειστή και του δανειολήπτη. Αυτά μπορεί ή δεν μπορεί να ρυθμίζεται από το νόμο.

11. ΖΗΤΗΣΗ ΔΑΝΕΙΩΝ

Η ζήτηση των δανείων είναι βραχυπρόθεσμες πιστώσεις που είναι άτυπες στο ότι δεν έχουν καθορίσει ημερομηνίες για την επιστροφή και φέρουν κυμαινόμενο επιτόκιο το οποίο κυμαίνεται ανάλογα με το βασικό επιτόκιο. Μπορεί να είναι «ζήτηση» για την επιστροφή από το φορέα δανειοδότησης ανά πάσα στιγμή. Η ζήτηση των δανείων μπορεί να είναι εξασφαλισμένες ή εξασφαλίζονται.

12. ΤΥΠΟΣ ΠΛΗΡΩΜΗΣ ΔΑΝΕΙΟΥ

Το πιο χαρακτηριστικό είδος πληρωμής του δανείου είναι η πλήρης απόσβεση πληρωμής στην οποία κάθε μηνιαία τιμή έχει την ίδια αξία υπερωριών.

Η πάγια μηνιαία πληρωμή **P** για ένα δάνειο ύψους **L** για μήνες **m** και μηνιαίο **i** επιτόκιο είναι:

$$P = L \cdot \frac{i(1+i)^m}{(1+i)^m - 1}$$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: (με μήνες)</u>

Ένα δάνειο ύψους 50.000€, για 36 μήνες με μηνιαίο επιτόκιο 6%. Να βρεθεί η μηνιαία πάγια πληρωμή.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

L=50.000

m = 36

I = 0,06

P = ;

$$P = L \cdot \frac{i(1+i)^m}{(1+i)^m - 1}$$

$$P = 50000 \cdot \frac{0,06(1+0,06)^{36}}{(1+0,06)^{36} - 1}$$

$$P = 50000 \cdot \frac{0,06 \cdot 8,14}{8,14 - 1}$$

$$P = 50000 \cdot \frac{0,48}{7,14}$$

$$P = 50000 \cdot 0,06$$

$$P = 3000$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΡΑΝΤΕΣ

1. ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΡΑΝΤΑΣ

Πολλές φορές οι πληρωμές και οι εισπράξεις δε γίνονται με μια μοναδική καταβολή του ποσού, αλλά τμηματικά (με δόσεις).Οι δόσεις αυτές αποτελούν σειρά πληρωμών, οι λεγόμενες ράντες.

Ράντα λοιπόν καλείται μια σειρά ή μια ακολουθία κεφαλαίων, τα οποία καταβάλλονται σε ίσα χρονικά διαστήματα. Ο όρος της ράντας χρησιμοποιείται σε θεωρίες χρηματοδότησης οπου αναφέρεται σε σταθερές πληρωμές σε ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα. Αυτή η χρήση είναι πιο συνηθισμένη σε θέματα σχετικά με τη χρηματοδότηση, και συνήθως σε συνάρτηση με την αποτίμηση της ροής των πληρωμών, λαμβάνοντας υπόψη τη διαχρονική αξία του χρήματος όπως του επιτοκίου και της μελλοντικής αξία. Παραδείγματα όπου χρησιμοποιουνται οι ράντες ειναι οι τακτικές καταθέσεις σε λογαριασμούς ταμιευτηρίου, οι μηνιαίες πληρωμές υποθήκης για το σπίτι, το μηνιαίο ποσό των ασφαλιστικών αποζημιώσεων και πολλά αλλα.

Η εξέλιξη της ράντας ήταν και εξακολουθεί να είναι μέρος της αναλογιστικής επιστήμης. Αναλογιστική επιστήμη είναι η επιστήμη που εφαρμόζει μαθηματικές και στατιστικές μεθόδους για την εκτίμηση κινδύνου στο ασφαλιστικό και την χρηματοδότηση των βιομηχανιών. Αναλογιστές είναι επαγγελματίες οι οποίοι έχουν τα προσόντα σε αυτόν τον τομέα μέσω της εκπαίδευσης και εμπειρίας. Στις Ηνωμένες Πολιτείες, τον Καναδά, το Ηνωμένο Βασίλειο, καθώς και αρκετές άλλες χώρες, οι αναλογιστές πρέπει να αποδείξουν τα προσόντα τους, περνώντας μια σειρά από επαγγελματικές εξετάσεις Αρκετοί εξέχοντες μαθηματικοί ασχολήθηκαν την πάροδο των ετών, όπως Bernoulli, de Moivre, Huygens, Halley και τους άλλους.

Στην συνέχεια θα ερμηνεύσουμε τις βασικές κατηγορίες ραντών όπου ειναι οι σταθερές και μεταβλητες, ληξιπρόθεσμες και προκαταβλητες, προσκαιρες και διηνεκείς, αμεσες μελλουσες και αρξάμενες, για τις ακέραιες και κλασματικές και ακομη για τις βέβαιες και τυχαίες και θα παραστήσουμε καποια σχετικά παραδείγματα.

2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ

(i) Σταθερες και μεταβλητές όπου μας δείχνουν την σχέση μεταξύ των όρων της ράντας αν θα είναι σταθεροί ή μεταβλητοι.

(ii) Ληξιπτόθεσμες και προκαταβλητέες και μας λέει ποτε καταβάλλετε ο κάθε όρος της ράντας. Όπου ληξιπρόθεσμη είναι στο τέλος καθε περιόδου και προκαταβλητέα στην αρχή της περιόδου.

(iii) Πρόσκαιρες και διηνεκείς είναι ανάλογα με το πλήθος της ράντας αν είναι πεπερασμένο ή αν είναι άπειρο.

(iv) Άμεσες, μέλλουσες ή αρξάμενες οπου μας λέει κατα πότε καταβάλλετε ο πρώτος της όρος. Άμεση είναι όταν καταβάλλετε στην πρώτη περίοδο και μέλλουσα και αρξάμενη οταν καταβάλλετε μετα και πριν απο ορισμένες περιόδους της ράντας αντίστοιχα.

(v) Ακέραιες και κλασματικές και μας δείχνουν οτι η περίοδος ανατοκισμού και η περίοδος της ράντας συμπιπτουν και το αντίθετο αντιστοιχα.

(vi) Και η τελευταία μας βασική κατηγορία είναι για τις βεβαιες και τις τυχαίες οπου στην τυχαία η καταβολή των όρων της εξαρτάτε απο την πραγματοποίηση της ή την μη πραγματοποίηση καποιου συμβάντος και οι βέβαιες όπου ειναι ανεξάρτητες.

Καποιες πρακτικές εφαρμογές της θεωρίας των ραντών είναι:

(i) Η εκτίμηση της αξίας ενός πάγιου περιουσιακού στοιχείου

(ii) Ο υπολογισμός του ετήσιου τοκοχρεολύσιου για ένα μακροπρόθεσμο δάνειο

(iii) Σύγκριση της αποδοτικότητας δύο ή περισσοτέρων επενδυτικών σχεδί ων

(iv) Υπολογισμός της αποδοτικότητας κεφαλαίου

3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΡΑΝΤΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(i) Μελλοντική Αξία Ετήσιας Ληξιπρόθεσμης Ράντας:

FV = μελλοντική αξία

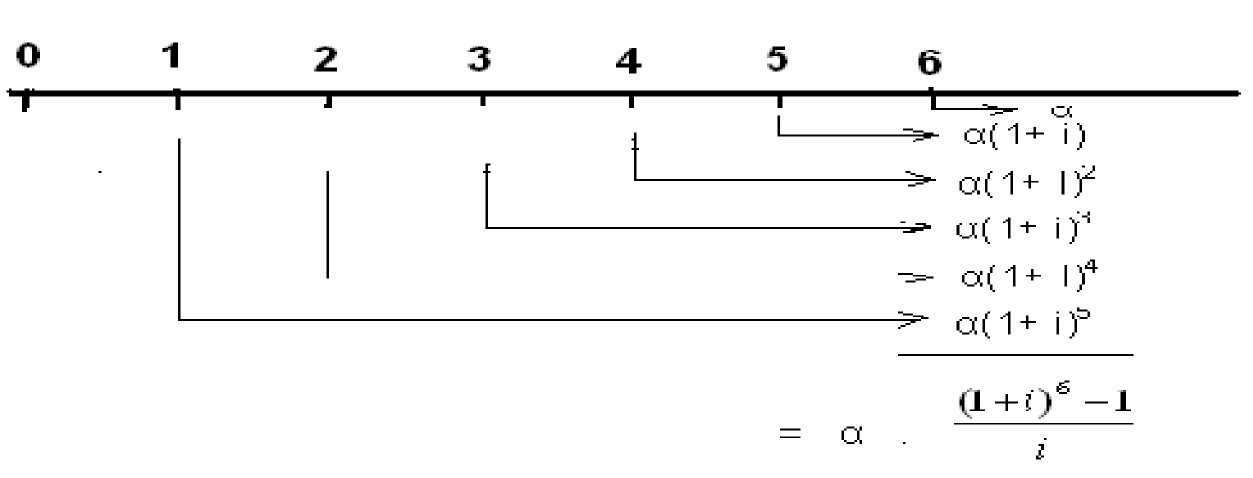
A = όρος ή ετήσια καταβολή

$FV = A_1 (1+i)^n + A_2 (1+i)^{n-1} + A_3 (1+i)^{n-2} + \ldots\ldots A_n$

Αν οι όροι $A_1 = A_2 = \ldots A_n = A$ (σταθερή ράντα), τότε:

$$FV = A \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Σχηματική απεικόνιση της αναγωγής χρηματικών ροών σε μελλοντικές αξίες:



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Καταθέτουμε σε Τράπεζα 1000 ευρώ. Στο τέλος του χρόνου για 5 χρόνια με επιτόκιο 10%. Τι ποσό θα έχει συγκεντρωθεί στο τέλος του 5ου έτους;

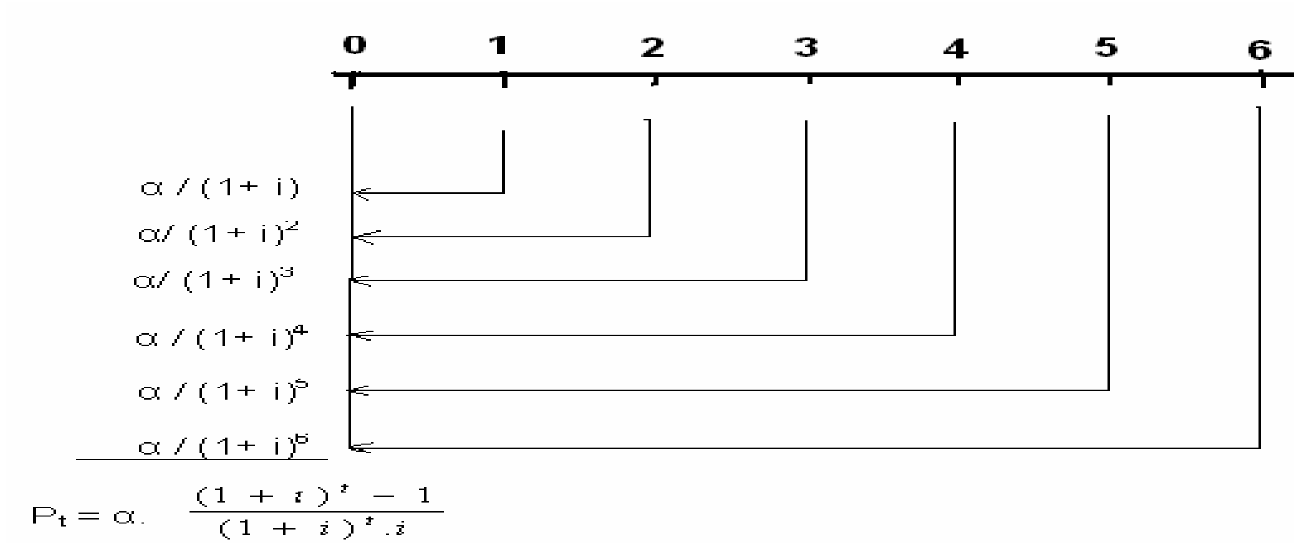
ΛΥΣΗ:

$$FV = A \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 1000 \frac{(1+0{,}10)^5 - 1}{0{,}10} = 1000\ (6{,}1051)$$

FV = **6.105,10 ευρώ**

(ii) Παρούσα Αξία Ράντας:

Σχηματική απεικόνιση της αναγωγής χρηματικών ροών σε παρούσες αξίες:



1. **Ληξηπρόθεσμης:**

(PV = παρούσα αξία)

$$PV = A_1 \frac{i}{(1+i)^1} + A_2 \frac{1}{(1+i)^2} + A_3 \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots\ldots + A_n \frac{1}{(1+i)^n}$$

$$PV = A \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$ **,** αν οι όροι είναι ίσοι (σταθερή ράντα)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Τι ποσό θα πρέπει να βάλουμε σήμερα στην Τράπεζα ώστε να μπορούμε να εισπράτουμε 1000 ευρώ στο τέλος κάθε έτους επί 5 έτη και να έχουμε υπόλοιπο 0 στο τέλος του 5ου έτους. Ο ανατοκισμός θα είναι ετήσιος και το επιτόκιο 10%.

ΛΥΣΗ:

$$PV = A\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad =>$$

$$PV = 1000\left[\frac{1-(1+0{,}10)^{-5}}{0{,}10}\right] => PV = 1000\ (3{,}7908)$$

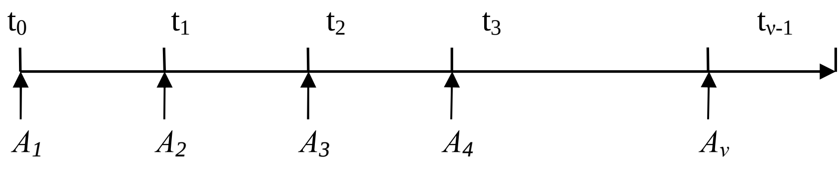
PV = **3.790,80 ευρώ**

2. **Προκαταβλητέας:**

$$PV = A_1 + A_2\frac{i}{(1+i)^1} + A_3\frac{1}{(1+i)^2} + \ldots\ldots + A_n\frac{1}{(1+i)^{n-1}}$$

$$V = A\left[1+\frac{1-(1+i)^{n-1}}{i}\right] \text{ για σταθερή ράντα}$$

ΠΡΟΚΑΤΑΒΛΗΤΕΑ ΡΑΝΤΑ



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να βρεθεί η παρούσα αξία προκαταβλητέας ράντας με αρχικό κεφάλαιο 10.000€, ετήσιο επιτόκιο 12% για 5 έτη.

ΛΥΣΗ:

$$V = A \left[1 + \frac{1 - (1 + i)^{n-1}}{i} \right]$$

$$V = 10.000 \left[1 + \frac{1 - (1 + 0,12)^{5-1}}{0,12} \right]$$

V = 10.000 (1 + 4.7791)

V = 57.791 ευρώ

3. **Διηνεκούς:**

$$PV = \frac{A}{i}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Ομολογία αορίστου διαρκείας δίδει ετήσιο τόκο 60 ευρώ, το δε προεξοφλητικό επιτόκιο είναι 15%. Ποια είναι η τρέχουσα αξία της ομολογίας;

ΛΥΣΗ:

$$PV = \Pi.A. = \frac{A}{i} = \frac{60}{0,15} = \mathbf{400\ ευρώ}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να υπολογιστεί η Παρούσα αξία ράντας στο διηνεκές με σταθερό όρο €200, η πρώτη δόση της οποίας πραγματοποιήθηκε στο τέλος του τρίτου έτους, το δε επιτόκιο είναι 10%.

ΛΥΣΗ:

Ανάγάγουμε την ράντα στο διηνεκές σε όρους αξίας δεύτερου έτους οπότε η παρούσα αξία της ράντας στο 2^{o} έτος θα είναι:

Π.Α. (ετος 2ο) = $\frac{200}{0{,}1}$ = € 2.000

Η παρούσα αξία των € 2.000 στο 2^{o} έτος είναι:

Π.Α. = $\frac{2000}{(1{,}1)^{2}}$ = € 1652,89

4. ΑΞΙΑ ΠΡΟΣΚΑΙΡΗΣ ΡΑΝΤΑΣ:

Ξεκινούν και λήγουν σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές (σταθερή ή μη σταθερή, προκαταβλητέα ή ληξιπρόθεσμη).

$$Π.Α. = \sum \frac{Cn}{(1+r)^{n}}$$

N = 1……….t

Αξία Πρόσκαιρης Μη Σταθερής Ληξιπρόθεσμης Ράντας:

$C1 \neq C2 \neq C3 \neq C4 \neq C5 \neq \ldots \neq C(t-1) \neq Ct$

Η παρούσα αξία υπολογίζεται, εφαρμόζοντας απλά τον γενικότερο τύπο της παρούσας αξίας, δηλαδή προσθέτοντας την παρούσα αξία κάθε ενός από τους όρους της ράντας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Έστω ενοικιαστής πληρώνει το σύνολο των ενοικίων στο τέλος κάθε έτους, ενώ το μηνιαίο ενοίκιο για το 1ο, 2ο και 3^{o} έτος είναι 350 €, 450 € και 600 € αντίστοιχα. Υπολογίστε το ποσό το οποίο πρέπει να αποταμιεύσει σήμερα ο ενοικιαστής με σκοπό να εξασφαλίσει το σύνολο των ενοικίων, εάν το ετήσιο επιτόκιο 4%.

ΛΥΣΗ:

$$\text{Π.Α.}= \frac{(350 \times 12)}{(1+0{,}04)} + \frac{(450 \times 12)}{(1+0{,}04)^2} + \frac{(600 \times 12)}{(1+0{,}04)^3}$$

$$\text{Π.Α.}= \frac{4200}{1.04} + \frac{5400}{1{,}082} + \frac{7200}{1{,}125}$$

Π.Α. = 4038.46 + 4990.75 + 6400 => Π.Α. = 15429.21€

Επομένως, ο ενοικιαστής θα έπρεπε να αποταμιεύσει σήμερα 15.429,21€ για να εξασφαλίσει το σύνολο των ενοικίων για το σύνολο των 3 ετών.

Αξία Πρόσκαιρης Μη Σταθερής Προκαταβλητέας Ράντας:

$$C1 \neq C2 \neq C3 \neq C4 \neq \ldots \neq Ct\text{-}1 \neq Ct$$

Η παρούσα αξία υπολογίζεται εφαρμόζοντας απλά τον γενικότερο τύπο της παρούσας αξίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Ενοικιαστής πληρώνει το σύνολο των ενοικίων στην αρχή κάθε έτους, ενώ το μηνιαίο ενοίκιο για το 1ο, 2ο και 3ο έτος είναι 200 €, 300 € και 450 € αντίστοιχα. Τι ποσό το οποίο πρέπει να αποταμιεύσει σήμερα ο ενοικιαστής με σκοπό να εξασφαλίσει το σύνολο των ενοικίων με ετήσιο επιτόκιο 3%.

ΛΥΣΗ:

$$\text{Π.Α.} = 2.400 + \frac{3.600}{1+0{,}04} + \frac{5.400}{(1+0{,}04)^2} \qquad \text{Π.Α.} = 10.854{,}14\ €.$$

Αξία Πρόσκαιρης Σταθερής Ληξιπρόθεσμης Ράντας:

$$C1= C2= C3= C4= C5=\ldots= Ct\text{-}1 =Ct$$

$$ΠΑ = \sum \frac{C}{(1+r)^n} = C\left\{\frac{[1-(1+r)^{-t}]}{r}\right\}$$

n=1……t

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Ενοικιαστής πληρώνει το σύνολο των ενοικίων στο τέλος κάθε έτους, ενώ το μηνιαίο ενοίκιο για το 1ο, 2ο και 3^o έτος παραμένει αμετάβλητο στα 200 €. Τι ποσό το οποίο πρέπει να αποταμιεύσει σήμερα ο ενοικιαστής με σκοπό να εξασφαλίσει το σύνολο των ενοικίων με ετήσιο επιτόκιο 4%.

ΛΥΣΗ:

$$ΠΑ = (200 \times 12)\ \ X\ \left\{\frac{[\,1-(1+0{,}04)^{-3}\,]}{0{,}04}\right\}$$

ΠΑ = 6.660,29 €

Οπότε, ο ενοικιαστής θα έπρεπε να αποταμιεύσει σήμερα 6.660,29 ευρώ για να εξασφαλίσει το σύνολο των ενοικίων.

Αξία Πρόσκαιρης Σταθερής Προκαταβλητέας Ράντας:

$$\textbf{Π.Α.} = \sum \frac{C}{(1+r)^n} = C\left\{\frac{[1-(1+r)^{-t}]}{r}\right\} \times (1+r)$$

n=1……t-1

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Ενοικιαστής πληρώνει το σύνολο των ενοικίων στην αρχή κάθε έτους, ενώ το μηνιαίο ενοίκιο για το 1ο, 2ο και 3ο έτος παραμένει αμετάβλητο στα 300 €. Τι ποσό το οποίο πρέπει να αποταμιεύσει σήμερα ο ενοικιαστής με σκοπό να εξασφαλίσει το σύνολο των ενοικίων με ετήσιο επιτόκιο 4%.

ΛΥΣΗ:

$$\text{Π.Α.} = (300 \text{ x } 12) + \left[(300 \text{ x } 12) \text{ x } \left\{\frac{1-(1+0{,}04)^{-2}}{0{,}04}\right\}\right]$$

Π.Α. = 17.316,6 €

Παρούσα Αξία Ράντας με Όρους Αυξανόμενους με Σταθερό Ρυθμό:

Χρηματοροές:

0	C1	C1(1+μ)	$C1(1+\mu)^2$	$C1(1+\mu)^3$	$C1(1+\mu)^{t-2}$	$C1(1+\mu)^{t-1}$
0	1	2	3	4	t-1	t

$$\textbf{ΠΑ=} \quad \left[\frac{C1}{(1+\mu)}\right] \quad \textbf{x} \quad \left\{\frac{1-(1+\varepsilon)^{-t}}{\varepsilon}\right\}$$

όπου (1+r)/(1+μ) = 1+ε

και μ = σταθερός ρυθμός

Ο παραπάνω τύπος δίνει επομένως την παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας, της οποίας οι όροι αυξάνονται με σταθερό ρυθμό μ (r > μ)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Έστω επενδυτής ο οποίος έχει συνάψει σύμβαση με ασφαλιστική εταιρία να πληρώνει κάθε έτος ποσό 2.500 € για τα επόμενα 10 έτη, ενώ το ποσό αυτό θα αυξάνει κάθε έτος με σταθερό ρυθμό μ της τάξης του 2%. Εάν αποταμίευε αυτό το ποσό θα εισέπραττε ετήσιο επιτόκιο r της τάξης του 4%. Υπολογίστε την παρούσα αξία της εν λόγω ράντας.

ΛΥΣΗ:

$$\varepsilon = \left[\frac{(1+r)}{(1+\mu)}\right] -1 = 0{,}02$$

$$\Pi.A= \left[\frac{2.500}{(1+0.02)}\right] \text{ X } \left[\frac{\{1-(1+0.02)^{-10}\}}{0.02}\right]$$

Π.Α. = 22.009,80 €

Παρούσα Αξία Διηνεκούς Ράντας:

Στις διηνεκείς ράντες το πλήθος των όρων τους τείνει στο άπειρο.
Δηλαδή $\lim (1 + r)^{-t} = 0$.

Σε αυτή την περίπτωση, η παρούσα αξία της ράντας .

$$\Pi.A. = \frac{C}{r}$$

εάν η ράντα είναι ληξιπρόθεσμη.

$$\Pi.A. = C + \frac{C}{r}$$

εάν η ράντα είναι προκαταβλητέα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Έστω επενδυτής ο οποίος έχει συνάψει σύμβαση με ασφαλιστική εταιρία να πληρώνει στο τέλος κάθε έτους ποσό 2.000€ για το υπόλοιπο της ζωής του, ενώ εάν αποταμίευε αυτό το ποσό θα εισέπραττε ετήσιο επιτόκιο της τάξης του 3%. Υπολογίστε την παρούσα αξία της εν λόγω ράντας.

ΛΥΣΗ :

Πρόκειται για μία ληξιπρόθεσμη διηνεκής ράντα.

$$\text{Π.Α.} = \frac{2000}{0.03} = 66.666{,}67 \text{ €}$$

Παρούσα αξία διηνεκούς ράντας με όρους αυξανόμενους με σταθερό ρυθμό:

Στη διηνεκή ράντα το πλήθος των όρων της τείνει στο άπειρο.

Δηλαδή $\lim\ (1 + \mathrm{r})^{-\mathrm{t}} = 0$,

Άρα και $\lim\ (1 + \varepsilon)^{-\mathrm{t}} = 0$ r >μ

$$\text{ΠΑ} = \frac{\text{C1}}{(\mathrm{r}-\mu)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Επενδυτής ο οποίος έχει συνάψει σύμβαση με ασφαλιστική εταιρία να πληρώνει κάθε έτος ποσό 2.000 € για το υπόλοιπο της ζωής του, ενώ το ποσό αυτό θα αυξάνει κάθε έτος με σταθερό ρυθμό μ της τάξης του 1%. Εάν αποταμίευε αυτό το ποσό θα εισέπραττε ετήσιο επιτόκιο r της τάξης του 4%. Υπολογίστε την παρούσα αξία της εν λόγω ράντας.

ΛΥΣΗ:

Πρόκειται για μία ληξιπρόθεσμη διηνεκείς ράντα της οποίας οι όροι αυξάνονται με σταθερό ρυθμό μ. Επομένως, η παρούσα αξία της ισούται με:

Π.Α. = $\frac{C}{(r-\mu)}$ = >

Π.Α.= $\frac{2000}{(\ 0.04-0.01\ )}$ = >

Π.Α. = 66.666,67 €

Τελική Αξία Ράντας:

Η τελική αξία (future value) μιας ράντας είναι η αξία της ράντας στο τέλος της διάρκειας της.

$$\text{Τ.Α.} = \text{Π.Α. x} \left[\frac{1-(1+r)^{-t}}{r}\right] x\ (1\ +\ r)^{t} \quad \text{ή} \quad \text{Τ.Α.} = \text{Π.Α. x} \left[\frac{(1+\mathrm{r})^{\mathrm{t}}-1}{\mathrm{r}}\right]$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Επιχείρηση εξετάζει την αντικατάσταση ενός μηχανήματος σε 3 έτη από σήμερα. Για τον σκοπό αυτό θα δημιουργεί αποθεματικό ύψους 30.000€ κάθε έτος, το επιτόκιο ανέρχεται σε 4%. Ποιο είναι το κεφάλαιο το οποίο θα έχει σχηματισθεί στο τέλος της 3ετίας;

ΛΥΣΗ:

Για τον υπολογισμό του ποσού θα πρέπει να υπολογισθεί η τελική αξία της ράντας. Η τελική αξία δίνεται από τον τύπο:

Τ.Α. = Π.Α. x $\left[\frac{(1+\mathrm{r})^{t}-1}{r}\right]$ = > Τ.Α. = 30.000 x $\left[\frac{(1+0{,}04)^{3}-1}{0{,}04}\right]$

Τ.Α. = 93.648 € Επομένως, η τελική αξία της ράντας θα είναι 93.648 ευρώ.

4. ΛΟΙΠΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΑΓΝΩΣΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΡΑΝΤΩΝ:

Υπολογισμός όρου Σταθερής Ράντας:

Από τον τύπο: Π.Α. = Α x $\left\{ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right\}$

ή

Μ.Α. = Α x $\left\{ \frac{(1+i)^{n}-1}{i} \right\}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ:

Δανείζεστε 20 εκ. για 5 έτη με επιτόκιο 14%. Πόσα χρήματα πρέπει να καταβάλετε κάθε χρόνο στην Τράπεζα για να εξοφλήσετε το δάνειο με τους τόκους του στο τέλος των 5 ετών;

ΛΥΣΗ:

Λύνουμε ως προς Α:

Α = Μ.Α. / $\left\{ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right\}$ = $\frac{20 \text{ εκ.}}{3{,}433}$ = 5,825 εκ.

όπου $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ = 3,433

ΠΡΟΒΛΗΜΑ:

Ενας συνταξιούχος διαθέτει την παρούσα χρονική στιγμή € 5.000 και επιθυμεί να γνωρίζει πόσα χρήματα μπορεί να έχει κάθε έτος για τα επόμενα 4 έτη.Το επιτόκιο είναι 5%.

ΛΥΣΗ:

$$\text{Π.Α.} = C \ \text{x} \left[\frac{1-\frac{1}{(1+r)^t}}{r} \right]$$

Αντικαθιστώντας όπου r = 5% και t = 4, θα βρούμε ότι η αγκύλη ισούτε με 3,55 οπότε το ετήσιο ποσό που θα λαμβάνει για κάθε έτος απο τα επόμενα 4 έτη θα είναι:

$$C = \frac{\text{Π.Α.}}{\text{τιμή ράντας}} \;=>\; C = \frac{5000}{3,55}$$

C = € 1.408,45

ΠΡΟΒΛΗΜΑ:

Κάποιος αγόρασε ένα διαμέρισμα 10.000.000 και έδωσε προκαταβολή 6.000.000 και έκανε συμφωνία να το εξοφλήσει σε 6 ετήσιες ισόποσες δόσεις με καταβολή της πρώτης δόσης ένα χρόνο μετά την αγορά.Πόσα θα πληρώνει σε κάθε δόση εάν το επιτόκιο έχει 12% ;

ΛΥΣΗ:

Η παρούσα αξία της ράντας θα είναι 4.000.000 διότι έχει ήδη προπληρώσει τα 6.000.000 (Π.Α. = 4.000.000).

$$\text{Π.Α.} = C \ \text{x} \left\{ \frac{1-(1+r)^{-t}}{r} \right\} \;=>$$

$$C = \text{Π.Α} \ / \left\{ \frac{1-(1+r)^{-t}}{r} \right\} \;=>\; C = \frac{4.000.000}{4,11}$$

C = € 973,236,01

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πολλές αποφάσεις που λαμβάνονται σε έναν οργανισμό ή σε μια επιχείρηση αφορούν την αποτελεσματική αξιοποίηση και χρήση των πόρων της επιχείρησης. Ως πόροι μιας επιχείρησης εννοούνται, για να αναφέρουμε τους σημαντικότερους, ο μηχανισμός εξοπλισμός της επιχείρησης, οι εργαζόμενοι (εργατοώρες), τα επενδυμένα κεφάλαια και τα κεφάλαια κινήσεως, οι διαθέσιμοι χώροι της επιχείρησης, οι πρώτες ύλες.

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι μια ευρέως γνωστή μέθοδος της Επιχειρησιακής Έρευνας η οποία χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων που αφορούν managers στη λήψη αποφάσεων των αντίστοιχων αποφάσεων.

Κατ' αρχήν, ο Όρος Προγραμματισμός όπως χρησιμοποιείται στην Επιχειρησιακή Έρευνα, δεν πρέπει να συγχέεται με τον προγραμματισμό ηλεκτρονικών υπολογιστών. Στην ποσοτική ανάλυση και στο επιστημονικό management ο Όρος προγραμματισμός περιλαμβάνει την ανάπτυξη και επίλυση μέσω μαθηματικών μοντέλων, διάφορων επιχειρησιακών προβλημάτων.

Μερικές από τις πιο γνωστές εφαρμογές του γραμμικού προγραμματισμού στην επίλυση επιχειρησιακών προβλημάτων αναφέρονται παρακάτω:

- Καθορισμός προγράμματος παραγωγής σε μια βιομηχανία ώστε να επιτευχτεί η πιο αποτελεσματική χρήση εξοπλισμού και προσωπικού για τη μεγιστοποίηση των κερδών της.
- Καθορισμός χρονικού προγράμματος παραγωγής το οποίο θα ικανοποιήσει τη μελλοντική ζήτηση για συγκεκριμένο προϊόν ενώ συγχρόνως θα ελαχιστοποιήσει το κόστος παραγωγής και αποθήκευσης.
- Ανάπτυξη ενός συστήματος διανομής το οποίο θα ελαχιστοποιήσει το κόστος μεταφοράς ενώ συγχρόνως θα ικανοποιήσει τη ζήτηση στα κέντρα διανομής.

- Κατανομή δεδομένου προϋπολογισμού διαφήμισης στα διάφορα μέσα διαφήμισης ώστε να μεγιστοποιηθεί η αποδοτικότητα της διαφημιστικής καμπάνιας.
- Προσδιορισμός του καλύτερου συνδυασμού εναλλακτικών επενδυτικών επιλογών με σκοπό την αύξηση της απόδοσης των επενδυόμενων κεφαλαίων και την ταυτόχρονη μείωση του επενδυτικού ρίσκου.
- Επιλογή προγράμματος διατροφής σε νοσοκομεία και άλλα ιδρύματα ώστε να ικανοποιούνται οι ημερήσιες απαιτήσεις των διατρεφόμενων σε βασικά συστατικά με ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση του κόστους σίτισης.

Μια μέθοδος του Γραμμικού Προγραμματισμού για την επίλυση επιχειρησιακών προβλημάτων είναι και η Μέθοδος SIMPLEX όπου η μέθοδος αυτή προτάθηκε από τον G. Dantzig το 1947, και είναι ιδανική για επίλυση μέσω Η/Υ, ενώ εφαρμόζεται ακόμη και σε προβλήματα που έχουν χιλιάδες μεταβλητές και περιορισμούς

2. ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Όταν υπάρχουν μέχρι πέντε κλάδοι παραγωγής και μέχρι πέντε συντελεστές σε περιορισμένες ποσότητες, τότε η εύρεση του άριστου σχεδίου παραγωγής γίνεται με τη μέθοδο Simplex. Η μέθοδος αυτή είναι μία επαναληπτική διαδικασία (αλγόριθμος) που στηρίζεται στην εξής αρχή. Το σύνολο Ε των δυνατών λύσεων (x_1, x_2, ... x_n) είναι κυρτό στο χώρο των n διαστάσεων. Το κυρτό αυτό σύνολο Ε είναι ένα κυρτό πολύεδρο που κάθε κορυφή του είναι μία βασική λύση.

Άρα η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης είναι δυνατόν να επιτευχθεί μόνο στα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων. Η μέθοδος Simplex εξετάζει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μόνο στα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων με ένα συστηματικό αλγεβρικό τρόπο. Η διαδοχική εξέταση των ακραίων σημείων γίνεται με ένα επαναληπτικό τρόπο δηλ. με το να επαναλαμβάνεται το ίδιο σύνολο των διαδικασιών και αλγεβρικών πράξεων σε διαδοχικά βήματα έως όπου επιτυγχάνουμε να εντοπίσουμε τη βέλτιστη λύση. Κάθε βήμα της μεθόδου Simplex αντιστοιχεί στην επιλογή ενός ακραίου σημείου της περιοχής των εφικτών λύσεων. Σε κάθε βήμα το επόμενο ακραίο σημείο της περιοχής των εφικτών λύσεων επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης να αυξάνεται και επομένως σταδιακά πλησιάζουμε προς τη βέλτιστη λύση.

Έτσι ορίζοντας μία αρχική λύση βάσης μεταβαίνουμε στην επόμενη λύση βάσης αυξάνοντας την τιμή της οικονομικής συνάρτησης της οποίας ζητείται το μέγιστο. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι που η αύξηση της οικονομικής συνάρτησης να μην είναι πλέον δυνατή. Τότε έχει βρεθεί η άριστη λύση βάσης. Αφού λοιπόν ο αριθμός των κορυφών του κυρτού πολυέδρου είναι ένας πεπερασμένος αριθμός, η άριστη λύση βάσης, αν υπάρχει, προκύπτει μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων του αλγορίθμου.

Η μέθοδος Simplex εκτός από τον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης, δηλ. τις τιμές των μεταβλητών και το αντίστοιχο βέλτιστο κέρδος, μας παρέχει επίσης πλήθος άλλων πληροφοριών οικονομικής φύσης τις οποίες δεν είναι δυνατόν να παράγουμε με άλλο τρόπο.

Η μέθοδος Simplex μπορεί να χρησιμοποιηθεί όχι μόνο σε προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού, αλλά και σε προβλήματα Παραμετρικού, Ακέραιου, Μικτού Ακέραιου, Τετραγωνικού κλπ.

Αδρανεις μεταβλητες:

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου Simplex σε πρόβλημα μεγιστοποίησης, απαιτείται η μετατροπή του συστήματος των περιορισμών από σύστημα ανισώσεων σε σύστημα εξισώσεων. Για το λόγο αυτό πρέπει να χρησιμοποιηθούν νέες βοηθητικές μεταβλητές που στην περίπτωση των προβλημάτων μεγιστοποίησης ονομάζονται αδρανείς μεταβλητές. Οι αδρανείς μεταβλητές αντιπροσωπεύουν αχρησιμοποίητους πόρους στη διαδικασία μεγιστοποίησης του κέρδους.

Αν έχουμε πχ. την ανίσωση

$$x_1+x_2\leq 50 \qquad (6)$$

αυτή γίνεται εξίσωση αν στο αριστερό της μέλος προσθέσουμε την ψευδομεταβλητή S_1, οπότε θα έχουμε:

$$x_1+x_2+S_1=50 \qquad (7)$$

όπου S_1 είναι τα στρέμματα εδάφους που δεν θα χρησιμοποιηθούν στην καλλιέργεια βαμβακιού και σιταριού.

Το αριστερό μέλος της $x_1+x_2 \leq 50$ παριστάνει την πραγματική χρησιμοποιούμενη ποσότητα του περιορισμένου συντελεστή παραγωγής, ενώ το δεξιό μέλος τη μέγιστη διαθέσιμη ποσότητα του. Συνεπώς η νέα μεταβλητή S_1 θα είναι η διαφορά μεταξύ της διαθέσιμης και της χρησιμοποιούμενης ποσότητας του συντελεστή. Άρα η νέα μεταβλητή S_1 θα αντιπροσωπεύει την ποσότητα του περιορισμένου συντελεστή παραγωγής που δεν θα χρησιμοποιηθεί. Οι βοηθητικές αυτές μεταβλητές ονομάζονται **αδρανείς μεταβλητές.**

Για την ανίσωση

$$4{,}0x_1+7{,}8x_2 \leq 78 \qquad (8)$$

αυτή γίνεται εξίσωση αν στο αριστερό της μέλος προσθέσουμε την ψευδομεταβλητή S_2, οπότε θα έχουμε:

$$4{,}0x_1+7{,}8x_2+S_2=78 \qquad (9)$$

όπου S_2 είναι οι ώρες εργασίας το μήνα Ιούνιο που δεν θα χρησιμοποιηθούν στην καλλιέργεια βαμβακιού και σιταριού. Άρα η τιμή της S_2 συμβολίζει τη διαφορά μεταξύ της αριστερής πλευράς της ανισότητας (απαιτούμενη ποσότητα) και της αντίστοιχης δεξιάς πλευράς (διαθέσιμη ποσότητα). Στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται όλοι οι διαθέσιμοι πόροι ενός περιορισμού τότε η αντίστοιχη μεταβλητή περιθωρίου έχει την τιμή μηδέν.

Ο αριθμός των αδρανών μεταβλητών που χρησιμοποιούνται κατά την μετατροπή του συστήματος των περιορισμών από σύστημα ανισώσεων σε σύστημα εξισώσεων είναι ίσος με τον αριθμό των περιορισμών του συστήματος.

Υπαρξη μοναδιαιου πινακα:

Μετά τη μετατροπή των ανισώσεων σε εξισώσεις, το επόμενο βήμα για την εφαρμογή της μεθόδου Simplex μεγιστοποίησης, είναι η ύπαρξη μοναδιαίου πίνακα στον πίνακα των συντελεστών όλων των μεταβλητών, αρχικών και βοηθητικών, του συστήματος των περιορισμών.

Για παράδειγμα έστω το σύστημα ανισώσεων (10):

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &\leq 50 \\ 4{,}0x_1+7{,}8x_2 &\leq 78 \qquad (10) \end{aligned}$$

Με τις αδρανείς μεταβλητές S_1 και S_2 αυτό παίρνει τη μορφή (11) ή (12):

$$x_1+x_2+S_1=50$$
$$4{,}0x_1+7{,}8x_2+S_2=78 \qquad (11)$$

Αν θέλουμε να συμπεριλάβουμε όλες τις μεταβλητές σε όλους τους περιορισμούς τότε σε όποιον περιορισμό δεν εμφανίζεται μία μεταβλητή , ο αντίστοιχος συντελεστής της είναι μηδέν:

$$1x_1+\ 1x_2+\ 1S_1+0S_2=50$$
$$4{,}0x_1+7{,}8x_2+0S_1+1S_2=78 \qquad (12)$$

και με μορφή πίνακα (13):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7{,}8 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 78 \end{bmatrix}$$

Οπότε παρατηρούμε ότι στον πρώτο πίνακα υπάρχει μοναδιαίος πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και συνεπώς η προϋπόθεση της ύπαρξης μοναδιαίου πίνακα ισχύει.

Εμφανιση αδρανων μεταβλητων στην αντικειμενικη συναρτηση:

Μετά τη μετατροπή του συστήματος των περιορισμών σε σύστημα εξισώσεων και μετά τη δημιουργία του μοναδιαίου πίνακα στον πίνακα των συντελεστών των αρχικών και βοηθητικών μεταβλητών, πρέπει να εμφανιστούν οι βοηθητικές μεταβλητές στην οικονομική συνάρτηση. Λοιπόν, οι αδρανείς μεταβλητές εμφανίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση με συντελεστή μηδέν.

Έτσι, αν πχ. έχουμε την οικονομική συνάρτηση

$$Zmax=3000\ x_1+2000\ x_2 \qquad (14)$$

και έχουμε χρησιμοποιήσει τις αδρανείς μεταβλητές S_1 και S_2, τότε αυτή θα πάρει τη μορφή:

$$Zmax=3000\ x_1+2000\ x_2+0S_1+0S_2 \qquad (15)$$

ΛΥΣΗ:

Ο αριθμός των βασικών λύσεων ενός προβλήματος με m περιορισμούς και n μεταβλητές, όταν οι περιορισμοί έχουν τη μορφή εξισώσεων είναι n!/(n-m)!m!. Αν λοιπόν ένα σύστημα έχει 9 αγνώστους και 5 εξισώσεις τότε θα έχει 9!/(9-5)!5!=126 βασικές λύσεις. Από τις λύσεις βάσης εκλέγουμε μία αρχική ως εξής:
Από το σύστημα των εξισώσεων (11) με μηδενισμό των αρχικών μεταβλητών x_1 και x_2 παίρνουμε τη βασική λύση (16):

x_1=0	S_1=50	
x_2=0	S_2=78	(16)

Είναι ευνόητο ότι η λύση αυτή δεν είναι ιδιαίτερα ελκυστική διότι αντιπροσωπεύει την παραγωγή 0 στρ. βαμβακιού και σιταριού. Με μηδενική παραγωγή καμία από τις διαθέσιμες ώρες εργασίας δεν χρησιμοποιείται. Γι αυτό επομένως, οι τιμές των αδρανών μεταβλητών είναι S_1=50 και S_2=78 ίσα δηλ. με τα αρχικά στρ. και διαθέσιμες ώρες εργασίας. Η μέθοδος Simplex όπως προαναφέραμε είναι μία επαναληπτική μέθοδος η οποία επαναλαμβάνει τα ίδια βήματα έως ότου προσδιοριστεί η βέλτιστη λύση. Σε κάθε βήμα της μεθόδου Simplex παίρνεται μία νέα εφικτή λύση που είναι καλύτερη από την προηγούμενη. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στην αρχική αυτή λύση είναι προφανώς μηδέν (0).

Η (16) είναι η **αρχική λύση βάσης** για την έναρξη της μεθόδου Simplex, και οι μεταβλητές S_1 και S_2 είναι οι αρχικές βασικές μεταβλητές.

Πρώτος πίνακας Simplex

Η τοποθέτηση της αρχικής λύσης στον πρώτο πίνακα Simplex γίνεται εύκολα και σε αυτό βοηθάει και η γραφή του συστήματος των περιορισμών σε μορφή πίνακα. Ξεκινάμε με τον πρώτο πίνακα του συστήματος (13):

1	1	1	0
4	7,8	0	1

Πάνω από κάθε στήλη τοποθετούνται οι αρχικές και βοηθητικές μεταβλητές:

x_1	x_2	S_1	S_2
1	1	1	0
4	7,8	0	1

Πάνω από αυτές τοποθετείται η αντικειμενική συνάρτηση:

3000	2000	0	0
x_1	x_2	S_1	S_2
1	1	1	0
4	7,8	0	1

Αριστερά αυτού του πίνακα τοποθετείται η αρχική λύση βάσης δηλαδή οι βασικές μεταβλητές, οι τιμές των βασικών μεταβλητών και οι συντελεστές των βασικών μεταβλητών:

Συντελ.	C_i $\rightarrow$		3000	2000	0	0
Β.Μ. $\downarrow$	Β.Μ.	Τιμές Β.Μ.	x_1	x_2	S_1	S_2
0	S_1	50	1	1	1	0
0	S_2	78	4	7,8	0	1

Στη συνέχεια υπολογίζεται η Z_i για όλες όλες στήλες των βασικών και μη μεταβλητών, αθροίζοντας τα γινόμενα των αντίστοιχων στοιχείων όλες στήλης των συντελεστών των βασικών μεταβλητών (πρώτη στήλη) και κάθε στήλης των αρχικών και βοηθητικών μεταβλητών. Άρα η Z_1 θα είναι:

Z_1=0*1+0*4=0.

Τα στοιχεία όλες σειράς Z_i δηλώνουν το κατά πόσο θα μειωθεί το συνολικό κέρδος αν η τιμή όλες κάθε μεταβλητής αυξηθεί κατά μία μονάδα. Πως όλες δικαιολογείται η μείωση του κέρδους; Όλες θεωρήσουμε τη μεταβλητή x_1. Για να αυξηθεί η x_1κατά μία μονάδα θα πρέπει να ελαττωθεί η S_1κατά μία μονάδα και η S_2 κατά 4 μονάδες. Γενικώς, η μείωση κάποιων άλλων μεταβλητών ώστε να αυξηθεί η x_1.θα μπορούσε να έχει επιπτώσεις στο συνολικό κέρδος. Αν και οι όλες μεταβλητές είχαν συνεισφορά στο κέρδος όλες αυτό ορίζεται στην αντικειμενική συνάρτηση, τότε τυχόν μείωση των τιμών όλες θα είχε ως αποτέλεσμα και μείωση του κέρδους. Η μείωση των S_1και S_2 δεν έχει κάποια επίπτωση στο συνολικό κέρδος στην προκειμένη περίπτωση γιατί οι συντελεστές του κέρδους των S_1και S_2είναι 0.

Συντελ.	C_i $\rightarrow$		3000	2000	0	0
Β.Μ. $\downarrow$	Β.Μ.	Τιμές Β.Μ.	x_1	x_2	S_1	S_2
0 0	S_1 S_2	50 78	1 4	1 7,8	1 0	0 1
	Z_i	0	0	0	0	0

Στη συνέχεια από κάθε Z_i αφαιρείται το αντίστοιχο C_i και έτσι προκύπτουν οι διαφορές Z_i-C_i. Άρα η Z_1-C_1 θα είναι:

Z_1-C_1 =0-3000=-3000

Συντελ.	C_i $\rightarrow$		3000	2000	0	0
Β.Μ. $\downarrow$	Β.Μ.	Τιμές Β.Μ.	x_1	x_2	S_1	S_2
0 0	S_1 S_2	50 78	1 4	1 7,8	1 0	0 1
	Z_i	0	0	0	0	0
	Z_i –C_i	0	-3000	-2000	0	0

Η τελευταία γραμμή του πίνακα Z_i-C_i είναι η γραμμή που όλες δίνει την καθαρή επίπτωση στο συνολικό κέρδος (αύξηση κέρδους-μείωση κέρδους) στην περίπτωση που κάθε μία από όλες μη βασικές μεταβλητές του προβλήματος αυξηθεί κατά μία μονάδα. Η σειρά αυτή που στο εξής θα ονομάζεται Bottom row δίνει τη μεταβλητή από όλες βασικές (δηλαδή οι x_1, x_2) που θα μπεί στη βάση και θα γίνει βασική. Όλες δίνει την πληροφορία για το αν ο πίνακας Simplex είναι άριστος ή όχι.

Κριτήριο αριστοποίησης σε προβλήματα μεγιστοποίησης

Όταν όλες οι διαφορές Z_i-C_i γίνουν θετικές ή μηδέν τότε η αντίστοιχη βασική λύση είναι η άριστη.
Θετικές τιμές Z_i-C_i δηλώνουν ότι στην περίπτωση που η τιμή όλες αντίστοιχης μεταβλητής αυξηθεί, θα υπάρχει μείωση του κέρδους. Αντίθετα αρνητικές τιμές Z_i-C_i δηλώνουν ότι μπορεί να υπάρξει βελτίωση του κέρδους αν αυξηθεί η τιμή όλες συγκεκριμένης μεταβλητής με αρνητικό Z_i-C_i.
Όταν συμβαίνει αυτό τότε το κριτήριο για την εκλογή όλες μεταβλητής που θα γίνει βασική είναι:

Κριτήριο εισόδου σε προβλήματα μεγιστοποίησης

Από όλες αρνητικές διαφορές Z_i-C_i εκείνη που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή δίνει τη μεταβλητή που θα μπεί στη βάση. Η στήλη όλες μεταβλητής που μπαίνει στη βάση λέγεται **οδηγός στήλη**.

Στο παράδειγμα που εξετάζεται, το κριτήριο αριστοποίησης δεν ισχύει άρα θα κατασκευαστεί καινούριος πίνακας. Από όλες αρνητικές τιμές η μεγαλύτερη σε απόλυτη τιμή αρνητική διαφορά είναι η Z_1-C_1 = -3000. Επομένως, η μεταβλητή x_1 θα μπεί στη βάση και θα αντικαταστήσει μία από όλες βασικές μεταβλητές. Άρα η στήλη όλες x_1 είναι η οδηγός στήλη.

Κριτήριο εξόδου σε προβλήματα μεγιστοποίησης

Για την εύρεση όλες μεταβλητής που θα βγεί από τη βάση, βρίσκονται οι λόγοι R_j των στοιχείων όλες στήλης των τιμών των βασικών μεταβλητών με τα αντίστοιχα στοιχεία όλες οδηγού στήλης. Ο μικρότερος θετικός λόγος R_j δίνει τη μεταβλητή που θα βγεί από τη βάση.

Η σειρά όλες εξερχόμενης μεταβλητής λέγεται **οδηγός σειρά.**

Συντελ.	C_i →		3000	2000	0	0	
Β.Μ. ↓	Β.Μ.	Τιμές Β.Μ.	x_1	x_2	S_1	S_2	R_j
0	S_1	50	1	1	1	0	50
0	S_2	78	4	7,8	0	1	19,5
	Z_i –C_i	0	-3000	-2000	0	0	

Στο παράδειγμα που εξετάζεται μικρότερος θετικός λόγος είναι ο R_2=19,5. Άρα από τη βάση θα βγεί η μεταβλητή S_2 και θα αντικατασταθεί από την x_1. Συνεπώς η σειρά S_2 είναι η οδηγός σειρά.

Το στοιχείο που βρίσκεται στην τομή των οδηγών σειράς και στήλης λέγεται **οδηγό στοιχείο**. Στο παράδειγμα είναι το 4.

Για να προχωρήσει η κατασκευή του δεύτερου πίνακα Simplex θα πρέπει να υπολογιστούν οι συντελεστές λ_j. Οι συντελεστές αυτοί υπολογίζονται με τη διαίρεση των στοιχείων όλες οδηγού στήλης με το οδηγό στοιχείο. Ο πρώτος πίνακας Simplex ολοκληρωμένος έχει ως εξής:

Πίνακας Simplex 1

Συντελ.	C_i →		3000	2000	0	0		
Β.Μ. ↓	Β.Μ.	Τιμές Β.Μ.	x_1	x_2	S_1	S_2	R_j	λ_j
0	S_1	50	1	1	1	0	50	0,25
0	S_2	78	4	7,8	0	1	19,5	-

	$Z_i - C_i$	0	-3000	-2000	0	0		-750

Δεύτερος πίνακας Simplex

Ο πίνακας Simplex 2 κατασκευάζεται ως εξής:

Αρχικά γίνεται αντικατάσταση στη βάση όλες οδηγού σειράς από την οδηγό στήλη. Δηλαδή θα αντικατασταθεί η S_2 από την x_1

<u>Οικονομική ερμηνεία όλες αντικατάστασης βασικών μεταβλητών:</u>

Η μεταβλητή x_1 επιλέγεται γιατί κάθε αύξηση όλες x_1 κατά μία μονάδα (στρ. εδάφους) αυξάνει το κέρδος κατά 3000δρχ.Άρα λογικά θα επιθυμούσαμε να αυξήσουμε την τιμή x_1 όσον το δυνατόν περισσότερο γίνεται. Επειδή όλες αύξηση όλες ποσότητας όλες x_1 σημαίνει ανάλωση πόρων, είναι προφανές ότι η αύξηση όλες x_1 είναι εφικτή μόνον εφόσον υπάρχουν διαθέσιμοι πόροι και περιορίζεται από ποσότητα των διαθέσιμων πόρων. Για κάθε μονάδα όλες x_1 που παράγεται πρέπει να μειώσουμε τη S_1 κατά 1 μονάδα και εφόσον έχουμε μόνο 50 μονάδες όλες S_1διαθέσιμες, η ανώτερη τιμή για τη x_1 είναι το 50/1=50. Ομοίως, για κάθε μονάδα x_1 πρέπει να μειώσουμε τη S_2 κατά 4 μονάδες. Εφόσον έχουμε 78 μονάδες όλες S_2 διαθέσιμες, η μεγαλύτερη ποσότητα x_1 που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι 78/4=19,5 μονάδες. Άρα η αύξηση όλες x_1δεν μπορεί να υπερβεί όλες 19,5 μονάδες. Αν θέσουμε x_1=19,5 τότε θα χρησιμοποιηθεί όλη η ποσότητα των 78 ωρών όλες S_2 και επομένως η τιμή όλες S_2 θα είναι 0, και δεν θα είναι πλέον βασική μεταβλητή.

Στη συνέχεια τα στοιχεία όλες σειράς όλες μεταβλητής που έγινε βασική θα προκύψουν από τη διαίρεση των στοιχείων όλες οδηγού σειράς με το οδηγό στοιχείο του πίνακα Simplex 1.

Τα στοιχεία όλες στήλης όλες μεταβλητής που έγινε βασική θα είναι όλα μηδέν, εκτός όλες τιμής 1 που θα υπάρχει στη θέση του οδηγού στοιχείου του προηγούμενου πίνακα.

Συντελ.	C_i $\rightarrow$		3000	2000	0	0		
Β.Μ. $\downarrow$	Β.Μ.	Τιμές Β.Μ.	x_1	x_2	S_1	S_2	R_j	λ_j
0	S_1		0					

3000	x_1	19,5	1	1,95	0	0,25		
	$Z_i - C_i$		0					

Όλες βλέπουμε η x_1 αντικατέστησε την S_2 στη βάση. Η τιμή όλες x_1 είναι 19,5 μονάδες, ενώ ο συντελεστής κέρδους όλες x_1 (3000) εμφανίζεται στη στήλη συντελεστών κέρδους των βασικών μεταβλητών.

Όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα Simplex 2 (εκτός από τα R_j και λ_j) υπολογίζονται από τον πρώτο πίνακα ως εξής:

Η νέα τιμή όλες στοιχείου θα είναι ίση με την παλιά τιμή του μείον το γινόμενο του αντίστοιχου στοιχείου όλες οδηγού σειράς του προηγούμενου πίνακα με το αντίστοιχο λ_j. Ο κανόνας όλες ισχύει για όλα τα στοιχεία, ακόμη και για τα στοιχεία όλες Bottom row, που όλες μπορούν να υπολογιστούν και από τα Z_i και C_i.

Στο παράδειγμα η η τιμή όλες βασικής μεταβλητής S_1 στο νέο πίνακα θα είναι: 50-(78*0,25)=30,5

Πίνακας Simplex 2

Συντελ.	C_i $\rightarrow$		3000	2000	0	0
B.M. $\downarrow$	B.M.	Τιμές B.M.	x_1	x_2	S_1	S_2
0	S_1	30,5	0	-0,95	1	-0,25
3000	x_1	19,5	1	1,95	0	0,25
	$Z_i - C_i$	58500	0	3850	0	750

Ειδικά για το πρώτο στοιχείο όλες Bottom row που δίνει την τιμή όλες οικονομικής συνάρτησης για την αντίστοιχη λύση βάσης, είτε θα ακολουθηθεί ο παραπάνω τρόπος ή θα υπολογιστεί από την οικονομική συνάρτηση με βάση τη νέα βασική λύση.

Δηλαδή: Z= 0*30,5+3000*19,5=58500

Ο δεύτερος τρόπος είναι προτιμότερος μια και αποφεύγουμε το χάσιμο μονάδων από όλες συνεχείς στρογγυλοποιήσεις των δεκαδικών.

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ο όλες πίνακας Simplex έχει και όλες δύο μοναδιαίες στήλες που αντιστοιχούν όλες βασικές μεταβλητές S_1 (η στήλη $\binom{1}{0}$) και x_1 (η στήλη $\binom{0}{1}$). Βασικά, οι αλγεβρικές πράξεις που εκτελέσαμε για να πάρουμε όλες νέες τιμές του πίνακα Simplex είχαν ακριβώς αυτό σαν σκοπό. Το να μετατρέψουμε δηλ. την στήλη που αντιστοιχεί στην νέα βασική μεταβλητή x_1 σε μοναδιαία στήλη. Η διαίρεση με το οδηγό στοιχείο έδωσε την τιμή 1 στη θέση όλες τομής όλες σειράς x_1 με τη στήλη x_1. Ο πολλαπλασιασμός των νέων τιμών όλες οδηγού σειράς με το 4 και η αφαίρεση του γινομένου από τη σειρά S_1είχε σαν αποτέλεσμα να μηδενίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία όλες στήλης x_1.

Παρατηρούμε όλες, ότι στον πίνακα 2 ισχύει το κριτήριο αριστοποίησης γιατί όλες οι διαφορές Z_i-C_i είναι θετικές ή μηδέν. Συνεπώς η βασική λύση :

$$S_1 = 30{,}5$$
$$x_1 = 19{,}5 \qquad (17)$$

είναι άριστη βασική λύση, δηλαδή η λύση αυτή δίνει το μέγιστο της οικονομικής συνάρτησης που είναι:

$$Z_{max}=0*30{,}5+3000*19{,}5=58500 \qquad (18)$$

Έτσι η γεωργική εκμετάλλευση του προβλήματος, αν θέλει με τις υπάρχουσες τεχνικοοικονομικές συνθήκες και τους διαθέσιμους συντελεστές της παραγωγής να πετύχει το μέγιστο ακαθάριστο κέρδος των 58500 δρχ. πρέπει να καλλιεργήσει 19,5 στρ. βαμβάκι (x_1=19,5)και καθόλου σιτάρι (x_2=0).

Σχέδια παραγωγής

Κάθε πίνακας Simplex δίνει ένα σχέδιο εκμετάλλευσης και το αντίστοιχο ακαθάριστο κέρδος. Το σχέδιο της εκμετάλλευσης προκύπτει από τη βασική λύση κάθε πίνακα Simplex. Έτσι στο προηγούμενο πρόβλημα υπάρχουν τα εξής σχέδια παραγωγής.

Πίνακας 2.2

Κλάδοι	Σχέδιο 1	Σχέδιο 2 Άριστο
Βαμβάκι στρ. Σιτάρι στρ.	0 0	19,5 0

ακαθ. κέρδος δρχ.	0	58500

Όλα τα παραπάνω σχέδια πληρούν τους περιορισμούς σε έδαφος, εργασία και κεφάλαιο.

Εξήγηση του άριστου πίνακα Simplex

Αν επιστρέψουμε στην άριστη λύση του πίνακα Simplex 2:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 30{,}5 \\
x_1 &= 19{,}5 \qquad (19) \\
x_2 &= 0 \\
S_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι η αρχική μεταβλητή x_2 είναι μηδέν. Επίσης η αδρανή μεταβλητή S_2, που εκφράζει την ποσότητα του περιορισμένου συντελεστή που δεν θα χρησιμοποιηθεί, έχει τιμή μηδέν. Άρα ο περιορισμένος συντελεστής εργασίας έχει εξαντληθεί. Δηλαδή έχουν απορροφηθεί από το άριστο σχέδιο και οι 78 ώρες εργασίας.

Πράγματι από τον δεύτερο περιορισμό του συστήματος των περιορισμών (10) που είναι ο περιορισμός της εργασίας έχουμε:

4,0*19,5+7,8*0=78.

Ο περιορισμός αυτός της εργασίας ονομάζεται ενεργός περιορισμός διότι είναι αυτός που περιορίζει τη βέλτιστη λύση. Εφόσον όλες οι διαθέσιμες ώρες έχουν χρησιμοποιηθεί για την καλλιέργεια του x_1 αν είχαμε μια ώρα περισσότερη ή λιγότερη για την καλλιέργεια του x_1, η βέλτιστη λύση θα άλλαζε (θα είχαμε αύξηση ή μείωση της παραγωγής αντίστοιχα).

Από την άλλη μεριά, επειδή S_1=30,5, συνεπάγεται ότι από το συνολικό διαθέσιμο έδαφος των 50 στρ. δεν χρησιμοποιήθηκαν τα 30,5 στρ. Πράγματι από τον πρώτο περιορισμό του συστήματος των περιορισμών (10) που είναι ο περιορισμός του εδάφους έχουμε:

1*19,5+1*0=19,5

Δηλαδή από τα 50στρ. που ήταν διαθέσιμα χρησιμοποιήθηκαν τα 19,5 και έμειναν εκτός σχεδίου τα 30,5 στρ.

Ο περιορισμός αυτός του εδάφους είναι μη ενεργός γιατί η βέλτιστη λύση δεν θα άλλαζε αν είχαμε ένα επιπλέον στρέμμα ή ένα στρέμμα λιγότερο διότι ήδη περισσεύουν 30,5 στρ., όποτε αν μεν είχαμε 1 στρ. λιγότερο θα περίσσευαν 29,5 στρ. και αν είχαμε 1 στρ. περισσότερο θα περίσσευαν 31,5 στρ.

Δεν έχει λοιπόν έννοια από οικονομικής πλευράς, να αυξήσουμε τα στρ. Μάλιστα θα μπορούσαμε και να τα ελαττώσουμε έως και 30,5 στρ. λιγότερα χωρίς καμία επίπτωση στη βέλτιστη παραγωγή και στα κέρδη της εκμετάλλευσης. Αντίθετα κάθε αυξομείωση των διαθέσιμων ωρών εργασίας θα οδηγήσει σε αλλαγές στο μέγιστο κέρδος.

<u>Οι συντελεστές του πίνακα Simplex στον τελικό πίνακα.</u>

Πόσες μονάδες από κάθε μία από τις βασικές μεταβλητές πρέπει να δοθούν για να αποκτήσουμε μία μονάδα από τη συγκεκριμένη μη βασική μεταβλητή;

Μη βασική μεταβλητή είναι η S_2. Η S_2 συμβολίζει τις μη χρησιμοποιηθείσες ώρες εργασίας.

Σύμφωνα με τον τελικό πίνακα Simplex :

Για να αυξηθεί η S_2 κατά 1 μονάδα θα πρέπει να μειωθεί η x_1 κατά 0,25 και να αυξηθεί η S_1 κατά 0,25. Αύξηση της S_2 κατά μία μονάδα σημαίνει μία περισσότερο μη χρησιμοποιημένη ώρα εργασίας ή αλλιώς μία ώρα εργασίας λιγότερο. Άρα:

Αλλαγές στη βέλτιστη λύση από μία ώρα εργασίας λιγότερη			
	Από		Σε
Ώρες εργασίας	78		77
Καλλιέργεια x_1	19,5	-0,25	19,25
Κέρδος	58500		57750

Η μείωση του κέρδους προκύπτει από τις αλλαγές στη βέλτιστη λύση από την καλλιέργεια του (-0,25) * 3000 = - 750

3. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΕΘΟΔΟΥ SIMPLEX

Ένα ξυλουργείο παράγει θρανία, τραπέζια και καρέκλες :

ΠΡΟΙΟΝ				
ΠΡΩΤΗ ΥΛΗ	ΘΡΑΝΙΟ	ΤΡΑΠΕΖΙ	ΚΑΡΕΚΛΑ	ΔΙΑΘΕΣΙΜΟΤΗΤΑ
Ξυλεία(m)	8	6	1	48
Κατασκευή(ώρες)	2	1.5	0.5	8
Φινίρισμα(ώρες)	4	2	1.5	20
Τιμή Πώλησης	60.000	30.000	20.000	

Η αγορά μπορεί να απορροφήσει οποιονδήποτε αριθμό σε θρανία και καρέκλες, αλλά το πολύ πέντε τραπέζια.

Έχουμε το εξής π.γ.π.

$$\text{maximize } (60x1 + 30x2 + 20x3)$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$8x1 + 6x2 + x3 \leq 48$$

$$2x1 + 1.5x2 + 0.5x3 \leq 8$$

$$4x1 + 2x2 + 1.5x3 \leq 20$$

$$x2 \leq 5$$

$$x1 , x2 , x3 \geq 0$$

του οποίου τυπική μορφή είναι η

$$\text{maximize } (60x1 + 30x2 + 20x3)$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$8x1 + 6x2 + x3 + x4 = 48$$

$$
\begin{array}{llllll}
2x1 + 1.5x2 + 0.5x3 & & + x5 = 8 \\
4x1 + \quad 2x2 + 1.5x3 & & & +x6 = 20 \\
\quad x2 & & & & +x7 = 5 \\
x1, \quad x2, \quad x3, & x4, x5, x6, x7 \geq 0
\end{array}
$$

Τι εκφράζουν οι ποσότητες (**περιθώριες μεταβλητές**) x4, x5, x6 και x7;

			60	30	20	0	0	0	0	
B	C_B	β	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	θ
P4	0	48	8	6	1	1	0	0	0	48/8
P5	0	8	2	1.5	0.5	0	1	0	0	8/2
P6	0	20	4	2	1.5	0	0	1	0	20/4
P7	0	5	0	1	0	0	0	0	1	-
	z	0	-60	-30	-20	0	0	0	0	

x = (0, 0, 0, 48, 8, 20, 5) με z = 0

			60	30	20	0	0	0	0	
B	C_B	β	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	θ
P4	0	16	0	0	-1	1	-4	0	0	-
P1	60	4	1	0.75	0.25	0	0.5	0	0	4/0.25
P6	0	4	0	-1	0.5	0	-2	1	0	4/0.5
P7	0	5	0	1	0	0	0	0	1	-
	z	240	0	15	-5	0	30	0	0	

x = (4, 0, 0, 16, 0, 4, 5) με z = 240

			60	30	20	0	0	0	0	
B	C_B	β	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	θ

P4	0	24	0	-2	0	1	-8	2	0	
P1	60	2	1	1.25	0	0	1.5	-0.5	0	
P3	20	8	0	-2	1	0	-4	2	0	
P7	0	5	0	1	0	0	0	0	1	
	z	280	0	5	0	0	10	10	0	

x = (2, 0, 8, 24, 0, 0, 5) με z

Η σκιώδης (δυική) τιμή του i-πόρου ορίζεται να είναι το ποσό κατά το οποίο βελτιώνεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης z αν η διαθέσιμη ποσότητα του πόρου αυτού αυξηθεί κατά μία μονάδα.

Η Simplex αντιστοιχεί τη σκιώδη τιμή wi του i-πόρου στην τιμή zi – ci της άριστης λύσης για την xi περιθώρια μεταβλητή.

- Η σκιώδης τιμή ενός πόρου που χρησιμοποιήθηκε πλήρως (δεσμευτικός περιορισμός) είναι μη μηδενική.
- Η σκιώδης τιμή ενός πόρου που δε χρησιμοποιήθηκε πλήρως (χαλαρός περιορισμός) είναι μηδενική.

Το ευκαιριακό κόστος (κόστος ευκαιρίας) της j μη βασικής δραστηριότητας ορίζεται να είναι το ποσό κατά το οποίο ελαττώνεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης z αν η ποσότητα της δραστηριότητας αυτής αυξηθεί κατά μία μονάδα.

Ισοδύναμα, το ευκαιριακό κόστος εκφράζει το ποσό κατά το οποίο πρέπει να βελτιωθεί ο αντικειμενικός συντελεστής της μεταβλητής για να συμφέρει να μπει στην άριστη λύση.

Η Simplex αντιστοιχεί το ευκαιριακό κόστος της j μη βασικής μεταβλητής απόφασης στην τιμή zj – cj της άριστης λύσης για αυτή τη μεταβλητή.

- Το ευκαιριακό κόστος μιας βασικής μεταβλητής είναι μηδέν.

- Αν μια μη βασική μεταβλητή έχει ευκαιριακό κόστος μηδέν, το πρόβλημα έχει εναλλακτική άριστη λύση.

			60	35	20	0	0	0	0	
B	C_B	β	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	θ
P4	0	48	8	6	1	1	0	0	0	48/8
P5	0	8	2	1.5	0.5	0	1	0	0	8/2
P6	0	20	4	2	1.5	0	0	1	0	20/4
P7	0	5	0	1	0	0	0	0	1	-
	z	0	-60	-35	-20	0	0	0	0	

P4	0	16	0	0	-1	1	-4	0	0	-
P1	60	4	1	0.75	0.25	0	0.5	0	0	4/0.25
P6	0	4	0	-1	0.5	0	-2	1	0	4/0.5
P7	0	5	0	1	0	0	0	0	1	-
	z	240	0	15	-5	0	30	0	0	

P4	0	24	0	-2	0	1	-8	2	0	-
P1	60	2	1	1.25	0	0	1.5	-0.5	0	2/1.25
P3	20	8	0	-2	1	0	-4	2	0	-
P7	0	5	0	1	0	0	0	0	1	5/1
	z	280	0	0	0	0	10	10	0	

$X^{(1)} = (2, 0, 8, 24, 0, 0, 5)$ με $z = 280$

			60	35	20	0	0	0	0	
B	C_B	β	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	θ

P4	0	27.2	1.6	0	0	1	-5.6	1.2	0	
P2	35	1.6	0.8	1	0	0	1.2	-0.4	0	
P3	20	11.2	1.6	0	1	0	-1.6	1.2	0	
P7	0	3.4	-0.8	0	0	0	-1.2	0.4	1	
	z	280	0	5	0	0	10	10	0	

$X^{(2)} = (0, 1.6, 11.2, 27.2, 0, 0, 3.4)$ με $z = 280$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

1. ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Στη μαθηματική ανάλυση, η παράγωγος είναι ένα μέτρο για το πώς αλλάζει μια συνάρτηση όταν αλλάζουν οι τιμές της εισόδου της. Χοντρικά, θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει ότι η παράγωγος μας δείχνει πόσο αλλάζει μια ποσότητα σε ένα συγκεκριμένο σημείο. Για παράδειγμα, η παράγωγος της θέσης ή της απόστασης ενός αυτοκινήτου, για κάποια στιγμή του χρόνου, είναι η στιγμιαία ταχύτητα με την οποία το αυτοκίνητο ταξιδεύει εκείνη τη στιγμή.

Η παράγωγος μιας συνάρτησης σε μια επιλεγμένη τιμή εισόδου περιγράφει την καλύτερη γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης κοντά σε αυτή την τιμή εισόδου. Για μια πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής, η παράγωγος σε ένα σημείο ισούται με την κλίση της εφαπτόμενης γραμμής στο γράφημα της συνάρτησης σ' αυτό το σημείο. Σε μεγαλύτερο αριθμό διαστάσεων, η παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα σημείο είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός που λέγεται γραμμικοποίηση.

Η διαδικασία της εύρεσης της παραγώγου λέγεται παραγώγιση ή διαφόριση (οι δύο όροι είναι συνώνυμοι). Όταν η παράγωγος μιας συνάρτησης σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της υπάρχει και είναι μοναδική η συνάρτηση καλείται παραγωγίσιμη ή διαφορίσιμη στο x_0. Το θεμελιακό θεώρημα του απειροστικού λογισμού διατυπώνει ότι η παραγώγιση είναι η αντίστροφη διαδικασία της ολοκλήρωσης.

Η παραγώγιση είναι μία μέθοδος για τον υπολογισμό του βαθμού με τον οποίο μια ποσότητα, y, αλλάζει, όταν αλλάζει μια άλλη ποσότητα, x, από την οποία εξαρτάται. Αυτός ο βαθμός αλλαγής ονομάζεται παράγωγος. Για μεγαλύτερη σαφήνεια, η εξάρτηση του y από το x σημαίνει ότι το y είναι συνάρτηση του x. Αν τα x και y είναι πραγματικοί αριθμοί και αν σχεδιαστεί η γραφική παράσταση του y συναρτήσει του x, τότε η παράγωγος δίνει την κλίση αυτής της γραφικής παράστασης σε κάθε σημείο. Αυτή η συναρτησιακή σχέση συνήθως συμβολίζεται ως y=f(x), όπου το f συμβολίζει την συνάρτηση.

Η απλούστερη περίπτωση είναι όταν το y είναι μια γραμμική συνάρτηση του x, που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση του y συναρτήσει του x είναι μια ευθεία γραμμή. Σε αυτήν την περίπτωση, y=f(x)=αx+β, όπου τα α και β είναι πραγματικοί ανάλυση, η παράγωγος είναι ένα μέτρο για το πώς αλλάζουν οι αριθμοί. Η κλίση α της ευθείας δίνεται από την σχέση

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

2. <u>Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΩΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ</u>

Έστω f μια συνάρτηση που έχει παράγωγο σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Επειδή κάθε σημείο α έχει μια παράγωγο υπάρχει μια συνάρτηση που αντιστοιχεί το σημείο α με την παράγωγο της f στο α. Αυτή η συνάρτηση συμβολίζεται f'(x) και ονομάζεται παράγωγος της f. Η παράγωγος της f "μαζεύει" όλες τις παραγώγους της f σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της f.

Μερικές φορές, η f έχει παράγωγο στα περισσότερα αλλά όχι σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της. Η παράγωγος της οποίας η τιμή στο α είναι ίση με f'(α) όταν το f'(α) ορίζεται και οπουδήποτε αλλού δεν ορίζεται, καλείται επίσης παράγωγος της f. Συνεχίζει να είναι συνάρτηση, αλλά το πεδίο ορισμού της είναι γνήσια μικρότερο από το πεδίο ορισμού της f.

Χρησιμοποιώντας αυτή την ιδέα, η παραγώγιση μετατρέπεται σε μια συνάρτηση συναρτήσεων. Η παράγωγος είναι ένας τελεστής του οποίου το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων που έχουν παράγωγο σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους και το πεδίο τιμών του είναι ένα σύνολο συναρτήσεων. Αν συμβολίσουμε αυτόν τον τελεστή D, τότε το D(f) είναι η συνάρτηση f'(x). Από την στιγμή που το D(f) αποτελεί συνάρτηση, μπορεί να πάρει τιμή στο σημείο α. Από τον ορισμό της παραγώγου ως συνάρτηση: D(f)(α) = f'(α).

Για σύγκριση, θεωρήστε την συνάρτηση f(x) = 2x. Η f είναι μια πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής, που σημαίνει ότι δέχεται σαν είσοδο πραγματικούς αριθμούς και βγάζει σαν έξοδο πραγματικούς αριθμούς.

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 2, \\ 2 &\mapsto 4, \\ 3 &\mapsto 6. \end{aligned}$$

Ο τελεστής D, όμως, δεν ορίζεται για συγκεκριμένους αριθμούς, αλλά μόνο για συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} D(x \mapsto 1) &= (x \mapsto 0), \\ D(x \mapsto x) &= (x \mapsto 1), \\ D(x \mapsto x^2) &= (x \mapsto 2 \cdot x). \end{aligned}$$

Επειδή η έξοδος του *D* είναι συνάρτηση, αυτή μπορεί να πάρει τιμή σε κάποιο σημείο. Για παράδειγμα, όταν το D εφαρμόζεται στην τετραγωνική συνάρτηση,

$$x \mapsto x^2,$$

τότε βγάζει για έξοδο την συνάρτηση

$$x \mapsto 2x,$$

την οποία ονομάζουμε *f*(*x*). Αυτή η συνάρτηση της εξόδου, μπορεί να πάρει τιμές *f*(1) = 2, *f*(2) = 4 κ.ο.κ.

3. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση και f′(x) η παράγωγός της. Η παράγωγος της f′(x) (αν υπάρχει) γράφεται f′′(x) και ονομάζεται δεύτερη παράγωγος της f. Όμοια, η παράγωγος της δεύτερης παραγώγου, αν υπάρχει, γράφεται f′′′(x) και καλείται τρίτη παράγωγος. Αυτές οι επαναλαμβανόμενες παράγωγοι ονομάζονται παράγωγοι μεγαλύτερης τάξης. Μια συνάρτηση f δεν έχει παράγωγο, αν δεν είναι συνεχής. Κατά τον ίδιο τρόπο, ακόμα κι αν η f έχει παράγωγο, μπορεί να μην έχει δεύτερη παράγωγο. Για παράδειγμα, έστω

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{if } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$$

Με βασικούς υπολογισμούς, διαπιστώνεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη (ή διαφορίσιμη), της οποίας η παράγωγος είναι

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{if } x \geq 0 \\ -2x, & \text{if } x \leq 0 \end{cases}.$$

Η f'(x) είναι το διπλάσιο της απόλυτης τιμής του x και δεν έχει παράγωγο στο 0. Παρόμοια παραδείγματα δείχνουν ότι μια συνάρτηση μπορεί να έχει κ παραγώγους (όπου κ ένας μη αρνητικός ακέραιος αριθμός), αλλά όχι κ+1 τάξης παράγωγο. Μια συνάρτηση που έχει κ παραγώγους, καλείται κ φορές διαφορίσιμη. Επιπλέον, αν η κ-οστή παράγωγος της f είναι συνεχής, τότε η f είναι διαφορικής κλάσης $C^κ$. (Αυτή είναι μια δυνατότερη συνθήκη από τα να έχει κ παραγώγους. Για παραδείγματα, βλ. τάξη διαφορισιμότητας). Μια συνάρτησης που έχει άπειρα πολλές παραγώγους, λέγεται απείρως παραγωγίσιμη/διαφορίσιμη ή ομαλή.

Στην γραμμή των πραγματικών αριθμών, κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι απείρως παραγωγίσιμη. Από τους κανόνες της παραγώγισης, προκύπτει ότι αν ένα πολυώνυμο βαθμού n παραγωγιστεί n φορές, τότε καταλήγει σε σταθερή συνάρτηση. Όλες οι υπόλοιπες επακόλουθες παράγωγοι είναι μηδενικές, δηλαδή υπάρχουν. Έτσι, τα πολυώνυμα είναι ομαλές συναρτήσεις.

Οι παράγωγοι μιας συνάρτησης f σένα σημείο x παρέχουν πολυωνυμίες προσεγγίσεις της συνάρτησης αυτής κοντά στο x. Για παράδειγμα, αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h + \tfrac{1}{2}f''(x)h^2$$

με το σκεπτικό ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h-\frac{1}{2}f''(x)h^2}{h^2}=0.$$

Αν η f είναι απείρως παραγωγίσιμη, τότε αυτή είναι η αρχή της σειράς Taylor για την f.

4. ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΜΠΗΣ

Ένα σημείο στο οποίο η δεύτερη παράγωγος έχει διαφορετικό πρόσημο ονομάζεται σημείο καμπής. Σε ένα σημείο καμπής, η δεύτερη παράγωγος μπορεί να είναι μηδενική, όπως στην περίπτωση του σημείου καμπής x=0 της συνάρτησης $y=x^3$. Σε ένα σημείο καμπής, η συνάρτηση αλλάζει κυρτότητα από κοίλη σε κυρτή ή αντίστροφα.

5. ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΠΑΡΑΓΩΓΟ

Η παράγωγος μιας συνάρτησης μπορεί, κατά κανόνα, να υπολογιστεί μέσω του ορισμού θεωρώντας τις διηρημένες διαφορές και υπολογίζοντας τα όριά τους. Πρακτικά, από την στιγμή που οι παράγωγοι απλών συναρτήσεων είναι γνωστές, οι παράγωγοι άλλων συναρτήσεων είναι πιο εύκολα υπολογίσιμοι χρησιμοποιώντας *κανόνες* για την εύρεση της παραγώγου σύνθετων συναρτήσεων μέσω απλούστερων.

6. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Τις περισσότερες φορές, ο υπολογισμός μιας παραγώγου απαιτεί την παραγώγιση μερικών κοινών συναρτήσεων. Η παρακάτω μη ολοκληρωμένη λίστα δίνει κάποιες από τις συχνότερα χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις και τις παραγώγους τους.

- Παράγωγοι δυνάμεων: Αν

$$f(x)=x^a,$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός, τότε

$$f'(x)=ax^{a-1}$$

σε κάθε σημείο όπου ορίζεται η συνάρτηση. Για παράδειγμα, αν α=1/2, τότε

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},$$

και η συνάρτηση ορίζεται μόνο για μη αρνητικά x. Όταν x=0, αυτός ο κανόνας περικλείει τον κανόνα παραγώγισης σταθερής συνάρτησης.

- Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}a^x = \ln(a)a^x$$

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = 1/x, \qquad x > 0$$

$$\frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$$

- Τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x).$$

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x).$$

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \sec^2(x).$$

- Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

7. ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Σε πολλές περιπτώσεις, περίπλοκοι υπολογισμοί ορίων με την άμεση εφαρμογή των διηρημένων διαφορών του Νεύτωνα μπορούν να αποφευχθούν με τους κανόνες παραγώγισης. Κάποιοι από τους βασικότερους είναι οι ακόλουθοι.

- Κανόνας σταθερής συνάρτησης: αν η f(x) είναι σταθερή, τότε

  $f'(x) = 0$.

- Κανόνας αθροίσματος:

  $(af(x) + \beta g(x))' = af'(x) + \beta g'(x)$, για κάθε συνάρτηση f και g και για κάθε πραγματικό αριθμό α και β.

- Κανόνας γινομένου:

  $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, για κάθε συνάρτηση f και g.

- Κανόνας πηλίκου:

  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, για κάθε συνάρτηση f και g, όπου $g(x) \neq 0$.

- Κανόνας αλυσίδας: εάν f(x)=h(g(x))

  $f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Η παράγωγος της

$$f(x) = x^4 + \sin(x^2) - \ln(x)e^x + 7$$

είναι

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^{(4-1)} + \frac{d\left(x^2\right)}{dx}\cos(x^2) - \frac{d\left(\ln x\right)}{dx}e^x - \ln x\frac{d\left(e^x\right)}{dx} + 0 \\ &= 4x^3 + 2x\cos(x^2) - \frac{1}{x}e^x - \ln(x)e^x. \end{aligned}$$

Εδώ, ο δεύτερος όρος υπολογίστηκε με τον κανόνα της αλυσίδας και ο τρίτος με τον κανόνα του γινομένου. Χρησιμοποιήθηκαν επίσης οι γνωστές παράγωγοι των στοιχειωδών συναρτήσεων x^2, x^4, sin(x), ln(x) and exp(x) = e^x

8. ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Μια επιχείρηση έχει κέρδος που βγαίνει από την εξίσωση $y = 60x^2 + 30x + 1$.
Όπου x είναι οι πωλησεις της επιχείρησης. Πόσες πρέπει να είναι οι πωλησεις για να έχουμε το μέγιστο κέρδος στην επιχείρηση.

ΛΥΣΗ:

$y = 60x^2 + 30x + 1$

$y' = 120x + 30$

$y' = 0 \Rightarrow 120x = -30y$

$x = -\frac{1}{4}$

$y'' = 120 \rangle 0$ MAX

X	-00	$-\frac{1}{4}$	+00
Y'	+	0	—
Y"	↗	MAX	↘

Οι πωλησεις της επιχειρησης πρεπει να είναι ισες με $-\frac{1}{4}$ για να εχουμε το μεγιστο κερδος στην επιχειρηση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Το πλήθος σε δεκάδες χιλιάδες κομμάτια των πωλήσεων μιας εταιρίας που παράγει ηλεκτρονικούς υπολογιστές, δίνεται από την συνάρτηση $P(t) = \frac{400t}{25+t^2}$, $t \geq 0$ εκφράζει σε μήνες το χρόνο κυκλοφορίας του μοντέλου από την κυκλοφορία του στην αγορά.

α. Να βρείτε τις πωλήσεις του μοντέλου τον 10 μήνα κυκλοφορίας του στην αγορά.

β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής των πωλήσεων της εταιρείας μετά από ένα μήνα από την κυκλοφορία στην αγορά ενός νέου μοντέλου.

ΛΥΣΗ:

α. Για t = 10 έχουμε $P(t) = \frac{400\,.10}{25+10^2} = \frac{4000}{125} = 32$ δεκάδες χιλιάδες κομμάτια ή 320.000 κομμάτια.

β. Παραγωγίζουμε την συνάρτηση P. Έχουμε:

$$P'(t) = \frac{400(\mathrm{t})'\,.\,(t^2+25) - 400\mathrm{t}\,\,.\,\,(\mathrm{t}^2+25)'}{(\,t^2+25)^2}$$

$$P'(t) = \frac{400t^2 + 10000 - 800\mathrm{t}^2}{(\,t^2+25)^2}$$

$$P'(t) = \frac{10000 - 400\mathrm{t}^2}{(\,t^2+25)^2}$$

Ο ρυθμός μεταβολής των πωλήσεων τον 1^{o} μήνα κυκλοφορίας του μοντέλου είναι

$P'(t) = \frac{10000 - 400\,.1^2}{(\,1^2+25)^2} = \frac{9600}{676} = 14{,}2$ δεκάδες χιλιάδες κομμάτια ή 142000 κομμάτια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Θεωρούμε μια επιχείρηση η οποία παράγει ένα προϊόν σε μια δεδομένη περίοδο. Έστω: C(x) = Κόστος παραγωγής x μονάδων προϊόντος

R(x) = Πρόσοδος (έσοδα) από την πώληση x μονάδων προϊόντος

Π(x) = C(x) – R(x) = Κέρδος από την παραγωγή και πώληση x μονάδων

Ονομάζουμε C΄(x) το οριακό κόστος (στο x)

R΄(x) την οριακή πρόσοδο

Π΄(x) το οριακό κέρδος

Η λέξη «οριακό» χρησιμοποιείται συνήθως στις οικονομικές και επιχειρησιακές εφαρμογές, έτσι ώστε να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην παράγωγο.

Σύμφωνα με τον ορισμό, το οριακό κόστος ισούται προς:

$$C'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h} \quad \text{(οριακό κόστος)}$$

Συνήθως, η επιχείρηση παράγει πολλές μονάδες x του προϊόντος. Τότε η τιμή h=1 μπορεί να θεωρηθεί πολύ κοντά στο μηδέν κι έτσι προκύπτει η προσέγγιση

$$C'(x) = \frac{C(x-1) - C(x)}{1} = C(x+1) - C(x)$$

Έτσι το οριακό κόστος ισούται προσεγγιστικά προς το επιπλέον κόστος $C(x+1) - C(x)$, δηλαδή το πρόσθετο κόστος που απαιτείται για την παραγωγή μιας επιπλέον μονάδας προϊόντος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Έστω $C(x) = x^2 + 3x + 100$ η συνάρτηση κόστους της επιχείρησης.

α) Να βρεθεί ο μέσος ρυθμός μεταβολής της C, όταν το x μεταβάλλεται από 100 σε 100 + h (h≠0).

β) Να βρεθεί η τιμή του οριακού κόστους C΄(100).

ΛΥΣΗ:

α) Ο μέσος ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης C(x) είναι:

$$\frac{C(x+h)-C(x)}{h}$$

Για x=100, έχουμε:

$$C(x+h)=C(100+h)=(100+h^2)+3(100+h)+100=100^2+200h+h^2+300+3h+100$$

$$C(x)=C(100)=100^2+300+100$$

Έτσι,

$$C(100+h)-C(100)=100^2+203h+h^2+400-100^2-400=203h+h^2$$

Οπότε, ο μέσος ρυθμός μεταβολής ισούται προς

$$\frac{C(100+h)-C(100)}{h}=\frac{203h+h^2}{h}=203+h \quad (h\neq 0)$$

β) Το οριακό κόστος δίνεται από την C΄(x).

Έτσι, $C'(x)=\frac{d}{dx}(x^2+3x+100)=2x+3$

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει με το πιο πάνω παράδειγμα

Οπότε η τιμή του οριακού κόστους $C'(100)=2\cdot 100+3=203$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Συναρτησεις εσοδων και κοστους:

Συνήθως δίδεται η συνάρτηση οριακών εσόδων (ή οριακού κόστους) και ζητούνται οι συναρτήσεις ολικών ή μέσων εσόδων (ή κόστους) δηλαδή:

$$R(q) = +MR(q)dq$$
$$C(q) = +MC(q)dq$$

Συναρτησεις καταναλωσης, αποταμιευσης και εθνικου εισοδηματος:

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το εθνικό εισόδημα δίδεται σαν άθροισμα του ποσού που καταναλώνουμε και του ποσού που αποταμιεύουμε δηλαδή:

ΕΙΣΟΔΗΜΑ = ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ + ΑΠΟΤΑΜΙΕΥΣΗ

[Ε = Κ + Α].

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν παραγωγίσουμε την παραπάνω έκφραση προς το εισόδημα έχουμε: $\frac{dK}{dE} + \frac{dA}{dK} = 1$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Η παράγωγος της κατανάλωσης ως προς το εισόδημα, $\frac{dK}{dE}$, ονομάζεται οριακή ροπή προς κατανάλωση.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Η παράγωγος της αποταμίευσης ως προς το εισόδημα, $\frac{dA}{dE}$, ονομάζεται οριακή ροπή προς αποταμίευση.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Η παράγωγος του εισοδήματος ως προς την αποταμίευση, $\frac{dE}{dA}$, ονομάζεται πολλαπλασιαστής εθνικού εισοδήματος και συμβολίζεται με k.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: k=1/(οριακή ροπή προς αποταμίευση) και k=1/(1-οριακη ροπή προς κατανάλωση).

<u>ΕΡΜΗΝΕΙΑ</u>: Για κάθε νομισματική μονάδα που αποταμιεύεται το εθνικό εισόδημα αυξάνει κατά k μονάδες.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:</u>

Αν η οριακή ροπή προς αποταμίευση είναι 0,2 και η κατανάλωση που αντιστοιχεί σε εισόδημα μηδέν είναι 15 δις. Ευρώ, τότε η συνάρτηση της ολικής κατανάλωσης είναι

$$\frac{dK}{dE} = g'(Y) = 1 - \frac{dA}{dE} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$
$$C = \int g'(Y)dY = 0{,}8Y + TFC$$

Επειδή όταν E=0, K=15, έχουμε TFC=15 και K=0,8K+15

2. <u>ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΗ</u>

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Πλεόνασμα καταναλωτή στο σημείο (q0,p0) λέγεται το επιπλέον ποσό που διατίθεται να πληρώσει ο καταναλωτής για προϊόντα που πωλούνται πάνω από την τιμή p0 και δίδεται ως:

(i) $CS = \int_0^{q_0} D(q)dq - p_0 q_0$ αν η ζήτηση περιγράφεται από τη σχέση $p = D(q)$

(ii) $CS = \int\limits_{p>p_0, q>0} D\ (p)dp$ αν η ζήτηση περιγράφεται από τη σχέση q = D(p)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Αν η συνάρτηση ζήτησης είναι $p = D(q) = 100 - 3q - 2q^2$ να υπολογιστεί το πλεόνασμα του καταναλωτή όταν i) $q_0 = 2$ και ii) $p_0 = 35$.

ΛΥΣΗ:

i)

$$p_0 = D(q_0) = 100 - 3(2) - 2(2)^2 = 86$$

$$CS\int_0^2 (100 - 3q - 2q^2)dq - (2)(86) = 100q - \frac{3}{2}q^2 - \frac{2}{3}q^3\Big|_0^2 - 172 = \frac{548}{3} - 172 = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

ii)

$$35 = 100 - 3q_0 - 2q_0^2 \Leftrightarrow q_0 = 5 \text{ και}$$

$$CS = \int_0^5 (100 - 3q - 2q^2)dq - (5)(35) = 100q - \frac{3}{2}q^2 \frac{2}{3}q^3\Big|_0^5 - 175 = \frac{1625}{6} = 270\frac{5}{6}$$

3. ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Πλεόνασμα παραγωγού στο σημείο (q1,p1) λέγεται το επιπλέον ποσό που διατίθεται να χάσει ο παραγωγός προσφέροντας τα αγαθά του σε τιμή μικρότερη από την τιμή p1 και δίδεται ως:

(i) $PS = p_1 q_1 - \int_0^{q_1} S\ (q)dq$ αν η προσφορά περιγράφεται από τη σχέση $p = S\ (q)$

(ii) $PS = \int\limits_{p<p_1, q>0} S\ (p)dp$ αν η προσφορά περιγράφεται από τη σχέση q = S(p)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Αν η συνάρτηση προσφοράς είναι $p = S(q) = 4q^2 + 12q + 9$ και η τιμή $p_1 = 49$, να υπολογιστεί το πλεόνασμα του παραγωγού με τους 2 τρόπους

ΛΥΣΗ:

Έχουμε: $p = S(q) = 4q^2 + 12q + 9 \Leftrightarrow q = S(p) = \frac{1}{2}\sqrt{p} - \frac{3}{2}$ και

$$q_1 = S(49) = \frac{1}{2}\sqrt{49} - \frac{3}{2} = 2$$

Από τα δεδομένα αυτά το PS υπολογίζεται ως:

$$PS = \int_9^{49}\left(\frac{1}{2}\sqrt{p} - \frac{3}{2}\right)dp = (2)(49) - \int_0^2 (4q^2 + 12q + 9)dq$$

Αν υπολογίσουμε το PS με βάση τη συνάρτηση q = S(p) παίρνουμε:

$$PS = \int_9^{49}\left(\frac{1}{2}\sqrt{p} - \frac{3}{2}\right)dp = \frac{1}{3}\sqrt[3]{p^2} - \frac{3}{2}p\Big|_9^{49}$$

$$= \frac{1}{3}p\sqrt{p} - \frac{3}{2}p\Big|_9^{49} = p\left(\frac{1}{3}\sqrt{p} - \frac{3}{2}\right)\Big|_9^{49}$$

$$= 49\left(\frac{1}{3}\sqrt{49} - \frac{3}{2}\right) = 40\frac{5}{6} - 9\left(-\frac{1}{2}\right) = 45\frac{1}{3}$$

Αν υπολογίσουμε το PS με βάση τη συνάρτηση $p = S\ (q)$ παίρνουμε:

$$PS = (2)(49) - \int_0^2 \left(4q^2 + 12q + 9\right)dq = (2)(49) - \left(\frac{4}{3}q^3 + 6q^2 + 9q\right)\Big|_0^2$$

$$= (2)(49) - \left[\frac{4}{3}(2)^3 + 6(2)^2 + 9(2) - \frac{4}{3}(0)^3 - 6(0)^2 - 9(0)\right] = 98 - \frac{158}{3} = 45\frac{1}{3}$$

Όπως περιμέναμε το PS είναι και με τις 2 μεθόδους ίδιο και ισο με $45\frac{1}{3}$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.-ΠΑΛΙΑΤΣΟΣ Α.-ΣΑΣΣΑΛΟΣ Σ., ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ, ΤΟΜΟΣ Α, ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΕΚΔΟΣΕΙΣ «ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΕΚΔΟΤΙΚΗ ΕΠΕ», 2002.
- ΖΑΧΟΥΡΗΣ Π., ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ
- ΚΙΟΧΟΣ Π.Α.-ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ Γ.Δ, ΧΡΗΜΑ.ΠΙΣΤΗ.ΤΡΑΠΕΖΕΣ, ΕΚΔΟΣΕΙΣ «ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ», ΑΘΗΝΑ, 2000
- ΚΙΟΧΟΣ Π.-ΚΙΟΧΟΣ Α., ΣΥΓΧΡΟΝΑ ΟΙΚΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΕΚΔΟΣΕΙΣ «INTERBOOKS», ΑΘΗΝΑ
- ΚΟΥΓΙΑΣ Γ.-ΓΕΩΡΓΙΟΥ Δ., ΧΡΗΑΜΑΤΟ-ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΕΚΔΟΣΕΙΣ «ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ», ΑΘΗΝΑ, 2004
- ΛΟΥΚΑΚΗ ΜΑΝΩΛΗ, ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, ΤΟΜΟΣ Α, ΕΚΔΟΣΕΙΣ «ΣΟΦΙΑ»
- ΥΨΗΛΑΝΤΗ Π., ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ, ΕΚΔΟΣΕΙΣ «ΕΛΛΗΝ» ΑΘΗΝΑ, 2002
- ΦΑΚΙΝΟΥ Δ.-ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ Α., ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ, ΕΚΔΟΣΕΙΣ «ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ», ΑΘΗΝΑ, 2003
- http://e-articles.info
- translate.google.gr/translate?hl=el&langpair=en|el&u=http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_economics
- www.aueb.gr
- www.aueb.gr/graduate/map/repository/teachers/basilakis/05-06/AE-1-Aplos%20tokos.pdf
- www.econ.uoa.gr
- www.livepedia.gr
- www.math.upatras.gr/~tsantas/DownLoadFiles/LP_07.pdf

- www.math.upatras.gr/~tsantas/DownLoadFiles/LP_08.pdf
- www.sdo.teicrete.gr
- www.tovima.gr
- www.visa.gr/cardsforyou/safetyandbudgeting/managingcredit/whatiscredit.jsp