**ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΑΣ**

**ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ**

# Τίτλος Πτυχιακής :ΑΡΙΘΜΟΙ FIBONACCI ΚΑΙ LUCAS


**Πτυχιακή Εργασία των : ΒΕΡΓΟΥ ΝΙΚΟΛΑΟΥ**

**ΜΙΧΑΗΛΙΔΗ ΓΡΗΓΟΡΙΟΥ**

**Επιβλέπων Καθηγητής : ΚΑΣΙΜΑΤΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ**


**ΠΑΤΡΑ 03 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2010**

## Περιεχόμενα

## Εισαγωγή

Ένα από τα πολλά και μεγάλα ερωτήματα του τομέα των μαθηματικών είναι η αριθμητική αλλά και η γεωμετρική ερμηνεία του κόσμου. Κατά την διάρκεια λοιπόν του Μεσαίωνα έζησε μια μεγάλη μαθηματική φυσιογνωμία χάρη στην οποία έμεινε στην ιστορία ένα από τα μεγαλύτερα επιστημονικά αινίγματα της ανθρωπότητας το οποίο μας αποκαλύπτει πως τίποτα δεν έχει δημιουργηθεί τυχαία σε αυτό τον κόσμο.

Μια ακολουθία αριθμών, μια θεωρία του πιο πλούσιου πνευματικά πολιτισμού, ένα αρχαίο μνημείο αλλά και ένας ιταλός μαθηματικός και ένας γάλλος μαθηματικός καταφέρνουν να μας καταπλήξουν με όσα μας παρουσιάζουν γενικώς για την ζωή αλλά και μεμονωμένα για τον άνθρωπο και την φύση. Ένας όμως από αυτούς γνωστοποίησε όλο το μεγαλείο της ''μαθηματικής ύπαρξης'', ο Leonardo Fibonacci

## Περίληψη

Μία βόλτα στην παραλία ή μία εκδρομή στο δάσος αποκαλύπτει μια ατελείωτη ποικιλία μορφών και χρωμάτων: Το μωσαϊκό των χρωμάτων στα φτερά μιας πεταλούδας, η σπειροειδής μορφή της έλικας της αμπέλου, οι κυματώσεις ενός αμμόλοφου στην έρημο.

Αλλά αυτές οι θαυμαστές δημιουργίες όχι μόνο ευχαριστούν τη φαντασία, αλλά προκαλούν επίσης την διάνοιά μας. Πώς αυτές οι μορφές αναπτύσσονται; Ποιοι κανόνες ή ποιες οδηγίες διαμορφώνουν τις μορφές στον κόσμο γύρω μας;

Μερικές μορφές παρουσιάζουν μια ακριβή τακτικότητα. Για χιλιάδες χρόνια, τα κελιά μιας κηρήθρας επαναλαμβάνουν την εξαγωνική συμμετρία τους. Η μέλισσα είναι ειδικευμένη να εργάζεται ακούραστα σε μια χειροτεχνική, με έμφυτη τη δυνατότητα να μετρά το πλάτος και το πάχος της κηρήθρας που χτίζει. Αν και τα έργα του εγκεφάλου ενός εντόμου προβληματίζουν τους βιολόγους, η τακτικότητα της κηρήθρας προκαλεί την προσοχή μας για τις αρχιτεκτονικές δυνατότητες της μέλισσας. Ο ναυτίλος είναι ένας άλλος λεπτολόγος βιοτέχνης, ο οποίος σχεδιάζει το κοχύλι του σε μια μορφή αποκαλούμενη λογαριθμική ή ισογώνια σπείρα.

Αυτή η ακριβής καμπύλη αναπτύσσεται φυσικά όπως το κοχύλι αυξάνει στο μέγεθος αλλά δεν αλλάζει τη μορφή του: πάντα αυξάνεται αλλά ποτέ δεν αλλάζει τις αναλογίες του. Η διαδικασία της «αυτοόμοιας» αύξησης παράγει μια λογαριθμική σπείρα. Βρίσκουμε την ίδια σπείρα στα κέρατα της γαζέλας σε κάποιους γαλαξίες, στον ιστό της αράχνης epeira, στην διάταξη των ανθυλλίων ενός άνθους.

Αν και μερικές από τις καλλιτεχνίες της φύσης δεν είναι πλέον ένα μυστήριο, άλλες μορφές είναι εξαιρετικά πιο πολύπλοκες. Μπορούν να κατέχουν μια μαθηματική τακτικότητα, αλλά αυτή δεν εξηγεί και πώς διαμορφώνονται. Εξετάστε την ακολουθία των αριθμών του Fibonacci, που πήρε το όνομά της από τον ιταλό μαθηματικό του μεσαίωνα Leonardo Fibonacci. Αρχίστε με δύο μονάδες και στη συνέχεια λάβετε κάθε επόμενο όρο της ακολουθίας ως το άθροισμα των δύο αμέσως προηγούμενων. Το αποτέλεσμα είναι 1 ..1 ..2 ..3 ..5 ..8 ..13 ..21 ..34 ..55…89... κ.ο.κ. Η ακολουθία δεν φαίνεται να είναι τίποτα περισσότερο από μία απασχόληση ενός ονειροπόλου μαθηματικού.

Για λόγους όμως όχι πλήρως γνωστούς, η φύση έχει ενσωματώσει την ακολουθία Fibonacci σε πολλά από τα βοτανικά σχεδιαγράμματά της. Κοιτάξτε σε μια μαργαρίτα και παρατηρήστε τη μορφή των ανθυλλίων της. Παρατηρούμε ότι

σχηματίζονται δύο οικογένειες λογαριθμικών σπειρών με αντίθετες φορές που διασταυρώνονται. Κάθε ανθύλλιο ανήκει τόσο σε μια δεξιόστροφη όσο και σε μία αριστερόστροφη σπείρα. Τώρα, αν προσεκτικά απαριθμήσουμε το πλήθος των δεξιόστροφων και των αριστερόστροφων σπειρών, θα βρούμε ότι είναι δύο διαδοχικοί αριθμοί Fibonacci . Αν και οι επιστημονικές διαμάχες δεν έχουν καταλήξει σε μία απάντηση για το γιατί ένα τέτοιο σχέδιο βρίσκεται στις μαργαρίτες, στα κουκουνάρια, στους ανανάδες και σε άλλες βοτανικές δομές, η καλλιτεχνική ομορφιά τους παραμένει αδιαφιλονίκητη.

Άμεσα συνδεδεμένη με την προηγούμενη παρατήρηση είναι η εμφάνιση της χρυσής τομής στις αναλογίες των διάφορων ζώντων οργανισμών. Ο Leonardo da Vinci στις ανατομικές του μελέτες διαπιστώνει ότι η χρυσή αναλογία εμφανίζεται τόσο στο ανθρώπινο σώμα όσο και στο ανθρώπινο πρόσωπο. Μάλιστα τόσο πολύ διακατέχεται από θαυμασμό για αυτό το φαινόμενο, που την χρυσή αναλογία θα την ονομάσει θεία αναλογία. Γνωστότερη ίσως είναι η χρυσή αναλογία του Παρθενώνα αλλά και άλλων αρχιτεκτονικών κτισμάτων. Η διακόσμηση των κηλίδων και των λωρίδων στα κελύφη των κοχυλιών μπορεί σήμερα να αναπαραχθεί με εφαρμογή απλών μοντέλων υπολογιστών.

Εδώ και μερικά έτη, επιστήμονες ειδικευμένοι και στη βιολογία και στην επιστήμη υπολογιστών, άρχισαν να κοιτάζουν το σχηματισμό μορφών με έναν νέο συναρπαστικό τρόπο. Ένα από τα πρώτα πράγματα που παρατήρησαν ήταν ότι δύο άτομα των ίδιων ειδών ήταν παρόμοια, αλλά όχι ίδια. Όπως τα δακτυλικά αποτυπώματα στο χέρι μας, είναι όμοια, αλλά όχι ίδια. Αυτή η απλή παρατήρηση τους οδήγησε στο να υποθέσουν ότι τα σχέδια στα κοχύλια, οι ραβδώσεις στα δέρματα των ζώων, και τα δακτυλικά μας αποτυπώματα δεν προκαθορίζονται άκαμπτα από τις γενετικές πληροφορίες μέσα στον πυρήνα των κυττάρων. Οι οργανισμοί δεν χτίζονται όπως ένα σπίτι, όπου σχολαστικά ακολουθούμε τα σχέδια ενός αρχιτέκτονα

Με την εμφάνιση των ισχυρών υπολογιστών, οι μαθηματικοί, οι φαρμακοποιοί, οι φυσικοί, οι βιολόγοι άρχισαν ξαφνικά να μελετούν όλα τα είδη των εγκόσμιων πολύπλοκων φαινομένων: τις σορούς της άμμου, τις στρόφιγγες ύδατος, την διάχυση του πετρελαίου στα διάφορα πετρώματα, τις κηλίδες στις λεοπαρδάλεις, τις δασικές πυρκαγιές και τις συγκεντρώσεις των μεταναστευτικών πτηνών. Αν και αυτά τα διάφορα φαινόμενα έχουν λίγα κοινά, είναι όλα πρόσφορα θέματα για εκείνους που μελετούν την πολυπλοκότητα της φύσης.

Η εργασία μας, ως πτυχιακή εργασία, έχει προσπαθήσει να εμβαθύνει στους κυριότερους μαθηματικούς νόμους που διέπουν τις μορφές στη φύση, τη στιγμή μάλιστα που πολλοί από αυτούς είναι ακόμα άγνωστοι . Θέλουμε όμως να προβληματίσουμε τον αναγνώστη και να εκλεπτύνουμε τις αισθήσεις του, ώστε να ανακαλύψει και αυτός την ομορφιά των ποικίλων μορφών του κόσμου μας αλλά και να γνωρίσει μερικά από τα πιο εντυπωσιακά αινίγματά του. Του ευχόμαστε, μετά την ανάγνωση αυτής της εργασίας, να δει τα σύννεφα, τα άνθη, τις σπείρες των σαλιγκαριών ή των κουκουναριών με διαφορετικό μάτι.

Έχουμε χωρίσει την εργασία μας σε 4 σχεδόν αυτοτελή κεφάλαια.

Το πρώτο αναφέρεται στο Leonardo Fibonacci τον μαθηματικό που έκανε ευρέως γνωστά τα ευρήματα του.

Τα δεύτερο κεφάλαιο αφορά τους αριθμούς και την ακολουθία Fibonacci και την μαθηματική θεμελίωση αυτής αλλά και στον συσχετισμό με την χρυσή τομή,

Τα εναπομείναντα δύο κεφάλαια αναφέρονται στην πυθαγόρεια διατύπωση και υπολογισμό της χρυσής τομής αλλά και σε ποιες περιπτώσεις εμφανίζεται η χρυσή τομή και οι αριθμοί Fibonacci σε τακτικές μορφές στη φύση αλλά και σε διάφορα δημιουργήματα του ανθρώπου. Επειδή ο κόσμος μας δεν είναι μόνο ο φυσικός αλλά είναι και οι δημιουργίες του ανθρώπινου πολιτισμού, επεκτείνουμε τις παρατηρήσεις μας στην αρχιτεκτονική και τις τέχνες.

# 1.Ο FIBONACCI ΚΑΙ ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ

Ο Leonardo Fibonacci, ήταν πολύ γνωστός μαθηματικός του 13ου αιώνα, και σήμερα αναγνωρίζεται ως μια εξαιρετική μαθηματική ιδιοφυία του Μεσαίωνα αλλά και ως ο μεγαλύτερος μαθηματικός εκείνης της εποχής. Ο Leonardo Fibonacci γεννήθηκε στην Πίζα της Ιταλίας την δεκαετία του 1170μ.χ και πέθανε αυτήν του 1240. Τον λέγανε Pisano γιατί είχε καταγωγή από την Πίζα, αλλά ο ίδιος, καθώς ο πατέρας του ονομαζόταν Guglielmo Bonacci, θέλησε να τον αποκαλούν με τη σύντμηση της έκφρασης Filius Bonacci (ο υιός του Bonacci) με την οποία και έγινε γνωστός. Ο πατέρας του ήταν τελωνιακός υπάλληλος ή γραμματέας της δημοκρατίας της Πίζας, στη βορειοαφρικανική, παραθαλάσσια πόλη Bugia στη σημερινή Αλγερία. Από την συγκεκριμένη πόλη ο Fibonacci επηρεάστηκε αρκετά, όπως και η εκπαίδευσή του, καθώς ήταν και ο τόπος στον οποίο μεγάλωσε.

Η εκπαίδευσή του λοιπόν επηρεάστηκε, τόσο από τους Μαυριτανούς, όσο και από τα ταξίδια που έκανε στην ακτή της Μεσογείου (Αίγυπτο, Συρία, Ελλάδα, Σικελία και Προβηγκία) και χάρη στο μεγάλο αριθμό των χωρών αυτών που επισκέφτηκε τον αποκαλούσαν «Bigollo», δηλαδή ταξιδιώτη. Σε αυτά τα μέρη γνώρισε διαφόρων ειδών μαθηματικά συστήματα που χρησιμοποιούσαν οι έμποροι για συναλλαγές και λογαριασμούς. Επίσης, γνωρίζοντας το «ινδοαραβικό» μαθηματικό σύστημα από έναν μουσουλμάνο δάσκαλό του, διαπίστωσε αρκετά πλεονεκτήματα και το εισήγαγε στην Ευρώπη. Το «ινδοαραβικό» μαθηματικό σύστημα είναι αυτό που απότελείται από δέκα ψηφία ένα εκ των οποίων είναι το μηδέν και η υποδιαστολή, το οποίο χρησιμοποιείται ακόμη και τη σημερινή εποχή.

*Εικόνα 1 Leonardo Fιbonacci*

Ο Leonardo Fibonacci επέστρεψε το έτος 1200 στον τόπο όπου γεννήθηκε και για 25 ολόκληρα χρόνια επεξεργαζόταν τις δικές του μαθηματικές συνθέσεις. Ήταν ένας άνθρωπος με μεγάλη φήμη για την ποιότητα του μαθηματικού του μυαλού, τον ενθουσιασμό, τη νοητική του περιέργεια και την ταπεινότητά του. Αυτά του τα προσόντα προσέλκυσαν ακόμη και το ρωμαίο αυτοκράτορα Φρειδερίκο Β΄(1194-1250) ο οποίος έδειχνε ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά και τις επιστήμες.

Η επαφή του Fibonacci με τον αυτοκράτορα ωφέλησε πολλαπλά την επιστημονική του εξέλιξη καθώς στην αυτοκρατορική αυλή γνώρισε τον Theodore Physicus, τον φιλόσοφο στον οποίο έστειλε και το τελευταίο του έργο και τον Michael

Scott (1175-1234), ο οποίος αργότερα έγινε και δάσκαλός του. Ο Scott ήταν ένα από τα σημαντικότερα πρόσωπα που γνώρισε. Ασχολείτο με τα μαθηματικά, τη φυσική, τη φαρμακευτική, την αστρολογία και τον αποκρυφισμό και επιπλέον, είχε μεταφράσει αρκετά αραβικά και ελληνικά έργα παρόμοιου περιεχομένου.

Τέλος, ο Leonardo Fibonacci μέσα από την εμπειρία και τις γνώσεις που απέκτησε από τα πολυάριθμα ταξίδια του και τα πρόσωπα που συναναστράφηκε, άφησε πίσω του σπουδαία κείμενα, τα οποία έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην αναζωογόνηση των μαθηματικών τεχνών.

Τα συγκεκριμένα έργα τα αφιέρωσε στα άτομα με τα οποία συναναστράφηκε στην αυτοκρατορική αυλή, στον αυτοκράτορα Φρειδερίκο Β΄ και στο δάσκαλό του Michael Scott που έπαιξαν σημαντικό ρόλο στο μέλλον την δουλειάς του και είναι τα εξής:

§ **Liber Abbaci** ( Το Βιβλίο των Υπολογισμών),1202 και1228

Με αυτό του το έργο παρουσίασε στη Δυτική Ευρώπη το ινδοαραβικό αριθμητικό σύστημα και τους κανόνες του (1,2,3,4,5,6,7,8,9 και ένα σύμβολο για το μηδέν (0) καθώς και την υποδιαστολή). Επίσης, ο ίδιος στο τρίτο μέρος του βιβλίου αυτού θέτει ένα πρόβλημα καταλήγοντας έτσι στην παρουσίαση της λεγόμενης **Ακολουθίας Fibonacci** (το όνομα Fibonacci δόθηκε σε αυτή την ακολουθία από το Γάλλο μαθηματικό Edouard Lucas (1842-1891). Η επανέκδοση του **Liber Abbaci** (1228) με συμπληρωματικά στοιχεία, αφιερώθηκε στον Michael Scott.

§ **Practica Geometriae** (Πρακτική της Γεωμετρίας), 1220

Το συγκεκριμένο έργο είναι αφιερωμένο στον Dominicus Hispanus, ένα ακόμη μελος της Αυλής του Φρειδερίκου Β’, και περιλαμβάνει γεωμετρικά προβλήματα με θεωρήματα βασισμένα στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Αντί όμως για τις αποδείξεις των θεωρημάτων αυτών, στο βιβλίο αναφέρονται μόνο πρακτικές πληροφορίες για τη χρήση τους.

§ **Liber Quadratorum** (Το Βιβλίο των Τετραγωνικών αριθμών), 1225

Είναι ένα βιβλίο αριθμολογίας, στο οποίο εξετάζει επίσης και μεθόδους εύρεσης πυθαγορικών τριάδων. Αφιερώθηκε στο Φρειδερίκο Β’.

§ **Flos** (Το Λουλούδι), 1225

Στο βιβλίο αυτό παρουσιάζεται μια μεγάλη συλλογή από λύσεις των προβλημάτων και των τετραγωνικών εξισώσεων με δύο ή περισσότερες μεταβλητές που τέθηκαν στον Fibonacci υπό την παρουσία του Φρειδερίκου από τον Johannes of Palermo, μελος της Αυλής.

## § Γράμμα στον Δάσκαλο Theodorus

Περί γεωμετρικής ανάλυσης.

Εκτός από το σημαντικότατο γεγονός της σύνθεσης και παρουσίασης των ινδοαραβικών μαθηματικών και τεχνικών στο κοινό της Δύσης και συγκεκριμένα του Ευρωπαϊκού πολιτισμού, το πιο γνωστό από τα επιτεύγματά του είναι αναμφισβήτητα η ακολουθία στην οποία έχει δοθεί το όνομά του: **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181**,...στην οποία κάθε αριθμός είναι άθροισμα των δύο προηγούμενων. Η ακολουθία Fibonacci είναι μια βάση για τη γεωμετρία Φρακτάλ. Επιπλέον, ο λόγος δύο διαδοχικών αριθμών της ακολουθίας τείνει προς την **Χρυσή Τομή** ή **Χρυσή Αναλογία**, ή **Χρυσό Αριθμό Φ =1.618033989**.

Αν και υπάρχουν αναφορές ότι αυτή η ακολουθία είχε αναφερθεί περίπου μισό αιώνα πριν, από τους Ινδούς Gospala και Hemachandra, ο Fibonacci συνάντησε αυτή την ακολουθία μελετώντας την Μεγάλη Πυραμίδα του Χέοπα στην Αίγυπτο, η οποία και είναι χτισμένη με βάση τον αριθμό Φ.

Ο Fibonacci πίστευε επίσης ότι αυτοί οι αριθμοί μπορούν να ξεκλειδώσουν τα μυστικά της Φύσης. Αυτό μπορούμε να το αντιληφθούμε αν λάβουμε υπόψη πως η ακολουθία του, καθώς και η λογαριθμική σπείρα που δημιουργείται σε σχέση με τον αριθμό Φ, απαντώνται σχεδόν παντού: Συγκεκριμένα:

**στη Βοτανολογία και Βιολογία**

Στην ανάπτυξη των φυτών, στο γενεαλογικό δένδρο της αρσενικής μέλισσας, σε κελύφη σαλιγκαριών, στα κέρατα του κριού, στην ανάπτυξη του ανθρώπου, στα σταυροδρόμια της βιολογίας και των μαθηματικών.

**στις Φυσικές Επιστήμες**

Στην ατομική σχάση, στην ηλεκτρονική ανάλυση δικτύων, στον προγραμματισμό των Η/Υ, στις διακλαδώσεις των ποταμών, στα κύματα των ωκεανών, στους ανεμοστρόβιλους, στο ηλιακό σύστημα, στους γαλαξίες και άλλα.

**στην Οικονομία, Εκπαίδευση, Ποίηση, Μουσική**

Στους κύκλους των χρηματαγορών, στην εκπαίδευση μαθητών με δυσκολίες στη μάθηση, στην ανάλυση της ποίησης, σε μουσικά αριστουργήματα.

**στην Αρχαιολογία, Αρχιτεκτονική, Τέχνη**

Στη Μεγάλη Πυραμίδα του Χέοπα, στη Μινωική αρχιτεκτονική, στον Παρθενώνα της Ακρόπολης Αθηνών, σε μωσαϊκά των αρχαίων Ρωμαίων και άλλα.

# 2. ΚΟΥΝΕΛΙΑ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΟΙ FIBONACCI

## 2.1 Υποθέσεις με κουνέλια

Κατά την διάρκεια της συγγραφής του Liber Abaci φτάνοντας στο τρίτο μέρος του βιβλίου τέθηκε από τον Fibonacci ένα πρόβλημα του οποίου η διατύπωση είναι ως εξής.

(1) Την πρώτη μέρα του Γενάρη σε ένα αποκλεισμένο μέρος κάποιος τοποθετεί ένα ζευγάρι κουνελιών,

(2) Το ζευγάρι αυτό αναπαράγεται με ρυθμό ένα νέο ζευγάρι κουνέλια την πρώτη μέρα του Φεβρουαρίου, καθώς και ένα κάθε πρώτη του μήνα που ακολουθεί,

(3) Κάθε νέο ζευγάρι ωριμάζει σε ένα μήνα και μετά παράγει ένα νέο ζευγάρι την πρώτη μέρα του τρίτου μήνα της ζωής του, γίνεται γόνιμο δηλαδή δυο μήνες μετά, καθώς και την πρώτη μέρα κάθε μήνα που ακολουθεί

Το πρόβλημα τώρα είναι να βρεθεί πόσα ζευγάρια κουνελιών θα βρίσκονται στο μέρος αυτό σε έναν χρόνο από την τοποθέτηση του αρχικού ζεύγους δηλαδή την πρώτη μέρα του ερχόμενου Γενάρη (μετά την γέννηση της μέρας εκείνης ). Για να μπορέσουμε να λύσουμε λοιπόν το πρόβλημα αυτό θα χρειαστεί να φτιάξουμε ένα διάγραμμα το οποίο θα μας δείχνει τα ζευγάρια των κουνελιών.

| Ημερομηνία | Ζευγάρια | Πλήθος Α | Πλήθος Β |
|---|---|---|---|
| $1^{η}$ Γενάρη | Α | 1 | 0 |
| $1^{η}$ Φλεβάρη | Α Β | 1 | 1 |
| $1^{η}$ Μαρτίου | Α Β Α | 2 | 1 |

Έτσι λοιπόν έχουμε με Α κάθε «ενήλικο» ζευγάρι και με Β κάθε «ανήλικο» ζευγάρι κουνελιών. Μελετώντας λοιπόν το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε πως την πρώτη ημέρα του Γενάρη έχουμε ένα μόνο Α, την πρώτη του Φλεβάρη ένα Α και ένα Β, την πρώτη του Μάρτη θα έχουμε το αρχικό Α, ένα νέο Β και το προηγούμενο Β το οποίο τώρα έχει ενηλικιωθεί και έχει γίνει Α. Συνεχίζοντας τώρα το διάγραμμα μας αντικαθιστούμε κάθε Α της προηγούμενης με ΑΒ και κάθε Β με Α και συμπυκνώνουμε τον συμβολισμό μας. Έτσι λοιπόν το διάγραμμα μας παίρνει την εξής μορφή

| Ημερομηνία | Ζευγάρια | Πλήθος Α | Πλήθος Β |
|---|---|---|---|
| 1η Μάρτη | ΑΒΑ | 2 | 1 |
| 1η Απρίλη | ΑΒΑΑΒ | 3 | 2 |
| 1η Μάη | ΑΒΑΑΒΑΒΑ | 5 | 3 |
| 1η Ιουνίου | ΑΒΑΑΒΑΒΑΑΒΑΑΒ | 8 | 5 |

Βλέπουμε τώρα λοιπόν πως το πλήθος των Α την πρώτη του Ιούλη θα είναι το άθροισμα του πλήθους των Α την πρώτη Ιουνίου και του πλήθους των Β που γεννήθηκαν την μέρα αυτή (τα οποία θα γίνουν Α την πρώτη Ιουλίου). Το πλήθος των Β την πρώτη του Ιούλη θα είναι το ίδιο με το πλήθος των Α την πρώτη του Ιούνη. Έτσι αν συνεχίσουμε θα συμπληρώσουμε ολόκληρο των πίνακα για ολόκληρο το έτος οπότε :

Πίνακας 1

| | Ημερομηνία | Πλήθος των Α | Πλήθος των Β | Ολικό πλήθος ζευγαριών Τ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1η Γενάρη | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1η Φεβρουαρίου | 1 | 1 | 2 |
| 3 | 1η Μαρτίου | 2 | 1 | 3 |
| 4 | 1η Απριλίου | 3 | 2 | 5 |
| 5 | 1η Μάη | 5 | 3 | 8 |
| 6 | 1η Ιουνίου | 8 | 5 | 13 |
| 7 | 1η Ιουλίου | 13 | 8 | 21 |
| 8 | 1η Αυγούστου | 21 | 13 | 34 |
| 9 | 1η Σεπτεμβρίου | 34 | 21 | 55 |
| 10 | 1η Οκτωβρίου | 55 | 34 | 89 |
| 11 | 1η Νοεμβρίου | 89 | 55 | 144 |
| 12 | 1η Δεκεμβρίου | 144 | 89 | 233 |
| 13 | 1η Γενάρη | 233 | 144 | 377 |

Έτσι βλέπουμε πως με τις συνθήκες του προβλήματος το πλήθος των ζευγαριών των κουνελιών σε ένα χρόνο θα είναι 377.

Μελετώντας όμως λίγο τον παραπάνω πίνακα οδηγούμαστε σε κάποια συμπεράσματα. Είναι ξεκάθαρο πως το πλήθος των Α την πρώτη του επόμενου Φλεβάρη (αναφερόμαστε πλέον στο δεύτερο έτος αφού το πρώτο έχει τελειώσει και μας έχει δώσει 233 ζευγάρια κουνελιών της κατηγορίας Α) θα είναι 377 από τα οποία τα 376 ήταν αρχικά Β, απόγονοι του αρχικού ζεύγους Α. Έτσι εάν προσθέσουμε τους αριθμούς της στήλης των Β, έχουμε: $S=0+1+1+2+3+5+8+13+21+34+55+89+144=376$

Από την τελευταία αυτή πρόσθεση παρατηρούμε πως το άθροισμα των 12 πρώτων όρων της στήλης των Α είναι κατά μια μονάδα μικρότερο του 377 που θα ήταν ο 14ος όρος της δηλαδή για τον Φεβρουάριο του δεύτερου πλέον έτους. Αυτό είναι μια ειδική περίπτωση ενός αποτελέσματος που θα δείξουμε παρακάτω.

Εξετάζοντας ακόμη περισσότερο τον παραπάνω πίνακα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο καθένας από τους όρους που είναι στις στήλες μπορεί να βρεθεί και με άλλες μεθόδους. Για παράδειγμα οι όροι κάθε γραμμής (πλήθος των Α και πλήθος των Β) μετά την δεύτερη βρίσκονται σαν άθροισμα των δυο προηγούμενων όρων της αντίστοιχης στήλης, δηλαδή:

Οι όροι της τρίτης γραμμής είναι: 2 = 1+1, 1 = 1+0, 3 = 1+2

Οι όροι της τέταρτης γραμμής είναι: 3 = 1+2, 2 = 1+1, 5 = 2+3

Η σχέση λοιπόν αυτή μπορεί να περιγραφεί με έναν τύπο τον οποίο κα θα αποδείξουμε τώρα.

Γενικά ένα σύνολο αριθμών σε σειρά, όπως αυτά στις στήλες του πίνακα που δημιουργήσαμε παραπάνω, ονομάζεται ακολουθία. Μια ακολουθία μπορεί να έχει άπειρο πλήθος όρων η πεπερασμένο. Μια ακολουθία με άπειρο πλήθος όρων μπορεί να συμβολίζεται με : $\mathbf{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots}$, όπου οι υποδείκτες **n**, με n ακέραιο θετικό, προσδιορίζουν την θέση των όρων. Ένα τέτοιο παράδειγμα ακολουθίας είναι η ***αριθμητική πρόοδος*** όπου :

$$\mathbf{u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots, u_n, \ldots,}$$

$$2,\ 5,\ 8,\ \ldots, \overbrace{2+(n-1)3}, \ldots,$$ όπου ο τύπος για τον n-οστό όρο είναι : $\mathbf{U_n = U_{n-1} + 3, \quad n>1.}$

Ένας τέτοιος ορισμός λέγεται ***αναδρομικός ορισμός*** και ο τύπος λέγεται ***αναδρομικός τύπος***. Επεκτείνοντας την ιδέα αυτή προχωράμε έτσι ώστε να ορίσουμε τις ακολουθίες που είναι στις στήλες του πίνακα μας. Για παράδειγμα η ακολουθία της στήλης των Α ορίζεται αν γράψουμε τους δυο πρώτους όρους:

$$u_1=1, \qquad u_2=1,$$

και μετά τον αναδρομικό τύπο

$$\textbf{(R)} \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \qquad n>2.$$

Έτσι προκύπτει η ακολουθία 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …, όπως περιμέναμε. Για την στήλη των Β έχουμε $u_1=0$, $u_2=1$, και ο ίδιος αναδρομικός τύπος μας δίνει την ακολουθία 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …,

Εξετάζοντας τέλος την στήλη με το ολικό πλήθος των ζευγαριών έχουμε $u_1=1$, $u_2=2$ και προκύπτει η ακολουθία 1, 2, 3, 5, 8, 13, …. Η ακολουθία 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13… λέγεται και ακολουθία Fibonacci και οι όροι της αριθμοί Fibonacci διότι προήλθαν από το παραπάνω πρόβλημα του Fibonacci για τα κουνέλια. Θα συμβολίζουμε τον n-οστό αριθμό Fibonacci με $F_n$. Έτσι ,

$$F_1=1,\ F_2=1,\ F_3=2,\ F_4=3,\ F_5=5,\ F_6=8\ ,\ldots$$

Μπορούμε επίσης να γράψουμε τις εναλλακτικές μορφές :

$F_1=F_2=1,\qquad F_n=F_{n-1}+F_{n-2},\qquad n>2,$

Ή $\quad F_1=F_2=1,\qquad F_{n+1}=F_n+F_{n-1},\qquad n>1$

Ή $\quad F_1=F_2=1,\qquad F_{n+2}=F_{n+1}+F_n,\qquad n\geq 1.$

Ας κάνουμε τώρα λοιπόν μια πιο θεωρητική συζήτηση πάνω στο πρόβλημα αυτό των κουνελιών που έθεσε ο Fibonacci. Για κάθε ακέραιο θετικό n ορίζουμε για την πρώτη μέρα του n-οστού μήνα:

$A_n$= πλήθος των A (ενήλικα ζευγάρια κουνελιών)

$B_n$= πλήθος των B (ανήλικα ζευγάρια κουνελιών)

$T_n$= ολικό πλήθος ζευγαριών = $A_n+B_n$.

Μόνο λοιπόν όσα ζευγάρια είναι A την πρώτη μέρα του μήνα n, θα παράγουν B την πρώτη μέρα του μήνα n+1. Έτσι,

$$B_{n+1}=A_n,\qquad n\geq 1.$$

Κατά την συμπλήρωση λοιπόν του προηγούμενου πίνακα μας παρατηρήσαμε πως το πλήθος των A την πρώτη μέρα του μήνα n+2 είναι το άθροισμα των A κατά την πρώτη μέρα του μήνα n+1 και των B που γεννήθηκαν την μέρα αυτή. Έτσι,

$$A_{n+2}=A_{n+1}+B_{n+1}$$

και επειδή $B_{n+1}=A_n$, έχουμε

$$A_{n+2}=A_{n+1}+A_n\ ,\ n\geq 1$$

Από τον πίνακα ακόμη παρατηρούμε ότι $A_1=1$ και $A_2=1$. Ώστε η ακολουθία

$$A_1,A_2,A_3,\ldots$$

είναι η ακολουθία Fibonacci και

$$A_n=F_n,\ n\geq 1$$

Αφού $B_{n+1}= A_n$ για $n\geq 1$, έχουμε

$$B_n=A_{n-1}=F_{n-1} \text{ για } n\geq 2$$

Αν τώρα θέσουμε n=1στον τύπο αυτό, έχουμε

$$B_1=F_0$$

Αν θέσουμε n=1 στον τύπο $F_{n+1}=F_{n-1}$ βρίσκουμε,

$$F_2=F_1+F_0 \text{ ή } F_0=F_2-F_1=1-1=0,$$

Που αυτό συμφωνεί με την $B_1=0$ στον πίνακα μας. Έτσι λοιπόν ορίσαμε τον $F_n$ για n=0.

Τελικά το ολικό πλήθος των ζευγαριών την πρώτη μέρα του μήνα n είναι

$$T_n=A_n+B_n=F_n+F_{n-1}=F_{n+1}.$$

Τώρα πλέον μπορούμε να αποδείξουμε και το παρακάτω αποτέλεσμα που αναφέρθηκε παραπάνω ως μια ειδική περίπτωση .

Δηλαδή ‘’*το άθροισμα των πρώτων **n** αριθμών Fibonacci είναι μικρότερο από τον n+2 αριθμό Fibonacci κατά μια μονάδα*’’

Συμβολικά:

$$F_1+F_2+\ldots+F_n= F_{n+2}-1,\quad n\geq 1$$

Θυμόμαστε ότι $F_{n+2}=A_{n+2}$ και $A_{n+2}$ είναι ο αριθμός των A την πρώτη μέρα του μήνα n+2. Αρχικά είχαμε μόνο ένα A, πως όμως βρέθηκαν τα υπόλοιπα; Το καθένα από τα πρόσθετα A ήταν αρχικώς B.

Πόσα πρόσθετα A έχουμε; Ο αριθμός των πρόσθετων A είναι $A_{n+2}-1$.

Τώρα ένα μήνα μετά την γέννησή του, κάθε B γίνεται A. Αν προσθέσουμε το πλήθος των B από την πρώτη μέρα του πρώτου μήνα ως την πρώτη μέρα του μήνα n+1, το άθροισμα θα μας δώσει τον αριθμό των A κατά την πρώτη μέρα του μήνα n+2 εκτός από το αρχικό ζευγάρι. Έτσι ,

$$B_1+B_2+B_3+..+B_{n+1}=A_{n+2}-1.$$

Θυμόμαστε όμως ότι $B_1=0$, $B_n=F_{n-1}$ και $A_{n+2}=F_{n+2}$. Ώστε

$$F_1+F_2+\ldots+F_n=F_{n+2}-1 \text{ για } n\geq 1,$$

που είναι και αυτό που ζητούσαμε να αποδείξουμε.

Ο τύπος λοιπόν αυτός είναι ένα παράδειγμα ταυτότητας με αριθμούς Fibonacci.

Πολλές διαφορετικές ακολουθίες μπορούν να προσδιοριστούν από τον τύπο **(R)** που είδαμε παραπάνω με επιλογή διαφορετικών τιμών για τους δυο πρώτους όρους. Για παράδειγμα, αν πάρουμε $u_1=1$ και $u_2=3$ έχουμε,

**1,3,4,7,11,18,29,47,…,**

που θα ονομάζουμε **ακολουθία Lucas** προς τιμή του Γάλλου μαθηματικού του δεκάτου ενάτου αιώνα, **Edouard Lucas**. Ο Lucas έκανε πολλή δουλειά σε αναδρομικές ακολουθίες και είναι και αυτός που έδωσε στην ακολουθία Fibonacci το όνομα της. Ο **Edouard Lucas** σπούδασε στο École Normale in Amiens. Μετά το πέρας των σπουδών του εργάστηκε στο Paris Observatory κάτω από τη εποπτεία του Le Verrier.

Κατά την διάρκεια του πολέμου μεταξύ Γάλλων και Ρώσων (1870-1871) ο Lucas υπηρέτησε σαν αξιωματικός πυροβολικού. Αμέσως μετά το τέλος του πολέμου που βρήκε τους Γάλλους ηττημένους ο Lucas έγινε καθηγητής μαθηματικών στο

Lycée Charlemagne του Παρισίου. Ο Lucas έγινε γνωστός για την δουλεία του στη θεωρία των αριθμών αλλά και για την μελέτη του γύρω από τους αριθμούς Fibonacci πάνω στους οποίους βασίστηκε για την δημιουργία της δικιάς του ακολουθίας.

Οι όροι της ακολουθίας Lucas λέγονται **αριθμοί Lucas** και θα συμβολίζουμε τον n-οστό αριθμό Lucas με $L_n$. Όπως θα δούμε και σε παρακάτω κεφάλαιο της εργασίας αυτής οι αριθμοί Lucas σχετίζονται στενά με τους αριθμούς Fibonacci.

Γενικά αν οι δυο πρώτοι όροι της ακολουθία που ορίζεται από τον πιο πάνω τύπο **(R)** είναι τυχαίοι ακέραιοι p και q, δηλαδή εάν πάρουμε $u_1=p$ και $u_2=q$ τότε έχουμε

$$p,\ q,\ p+q,\ p+2q,\ 2p+3q\ ,3p+5q,\ldots,$$

που ονομάζεται γενικευμένη ακολουθία Fibonacci. Ο n-οστός όρος αυτής της ακολουθίας θα συμβολίζεται με $H_n$. Με την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής μπορεί να αποδειχθεί ότι η γενικευμένη ακολουθία Fibonacci συνδέεται με την ακολουθία Fibonacci με την σχέση

$$H_{n+2}=H_2F_{n+1}+H_1F_n \qquad n\geq o,\ F_0=0$$

ή εκφρασμένη με βάση της αρχικές τιμές p και q ,

$$H_{n+2}=qF_{n+1}+pF_n.$$

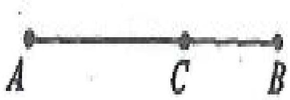
Βρίσκουμε τώρα τους πρώτους 14 διαδοχικούς λόγους $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ και $\frac{L_{n+1}}{L_n}$. Οι τιμές των διαδοχικών λόγων, όπως φαίνονται πιο κάτω, πλησιάζουν όλο και περισσότερο την τιμή του α, καθώς παίρνουμε μεγαλύτερες τιμές του n. Η απόδειξη δεν θα δοθεί εδώ. Μπορεί να παρατηρηθεί ότι ο πρώτος λόγος των αριθμών Fibonacci είναι μικρότερος του α, ο δεύτερος είναι μεγαλύτερος κλπ., ενώ στους αριθμούς Lucas ο πρώτος λόγος είναι μεγαλύτερος του α, ο δεύτερος μικρότερος του α, κλπ. Άρα λοιπόν:

| $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ | $\frac{L_{n+1}}{L_n}$ |
|---|---|
| 1/1=1,000 | 3/1=3,000 |
| 2/1  2,000 | 4/3  1,333 |
| 3/2=1,500 | 7/4=1,750 |
| 5/3  1,667 | 11/7  1,5714 |
| 8/5–1,600 | 18/11–1,6363 |
| 13/8=1,625 | 29/18=1,6111 |
| 21/13–1,6154 | 47/29–1,6207 |
| 34/21=1,619 | 76/47=1,6170 |
| 55/34–1,6176 | 123/76–1,6184 |
| 89/55=1,6182 | 199/123=1,6179 |
| 144/89–1,6180 | 322/199–1,6181 |
| 233/144=1,6181 | 521/322=1,6180 |
| 377/233–1,6180 | 843/521–1,6180 |
| 610/377=1,6180 | 1364/843=1,6180 |

όπου το $α\cong1,61803398875$

## 2.2 Συσχετισμός χρυσής τομής και δευτεροβάθμιας εξίσωσης Fibonacci.

Μας δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα AB και ζητούμε να βρούμε σημείο C (ανάμεσα στο A και B) τέτοιο ώστε το μήκος του μεγαλύτερου τμήματος να είναι το μέσο ανάλογο ανάμεσα στο μήκος του όλου τμήματος και στο μήκος του μικρότερου τμήματος. Δηλαδή, στο Σχήμα 1,




Σχήμα 1

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB},$$

Όπου AB≠0,AC ≠0, και CB≠0.

Βρίσκουμε πρώτα τη θετική αριθμητική τιμή του λόγου $\frac{AB}{AC}$ . Για ευκολία θέτουμε

$$x = \frac{AB}{AC} \quad (x > 0).$$

Τότε

$$x = \frac{AB}{AC} = \frac{AC + CB}{AC} = 1 + \frac{CB}{AC} = 1 + \frac{1}{\frac{AC}{CB}} = 1 + \frac{1}{\frac{AB}{AC}} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Από τη

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

με απαλοιφή του παρονομαστή προκύπτει

$$x^2 = x + 1, \text{ ή}$$

**(F)** $$x^2 - x - 1 = 0.$$

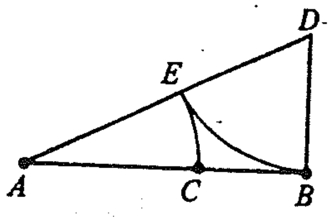
Οι ρίζες αυτής της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \; και \; \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Παρατηρείται πως α>0 και β< 0 και υπολογίζετε ότι α≅1,618 και β≅-0,618. Έτσι παίρνουμε τη θετική ρίζα α σαν την τιμή του ζητούμενου λόγου:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Χρησιμοποιούμε τώρα αυτή την αριθμητική τιμή για να βρούμε μια μέθοδο καθορισμού της θέσης του C στο ευθύγραμμο τμήμα AB. Φέρουμε την BD κάθετη στην AB έτσι ώστε $BD = \frac{AB}{2}$. Έπειτα φέρουμε την AD και βρίσκουμε το E, τέτοιο ώστε DB= DE και το C, έτσι που AC=AE.



Σχήμα 2

Τότε

$$\boldsymbol{AB=2BD, \quad ED=BD}$$

και με το Πυθαγόρειο θεώρημα,

$$\boldsymbol{AD=\sqrt{5}\,BD.}$$

Ώστε

$$\boldsymbol{AC=AE=AD\text{-}ED=\left(\sqrt{5}-1\right)BD}$$

$$\frac{AB}{AC}=\frac{2BD}{(\sqrt{5}-1)BD}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ο υπολογισμός αυτός επαληθεύει ότι η κατασκευή καθορίζει πράγματι τη θέση του C στο AB , έτσι ώστε

$$\frac{AB}{AC}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Επειδή α είναι η ρίζα της εξίσωσης (F), έχουμε

$$\boldsymbol{\alpha^2=\alpha+1}.$$

Πολλαπλασιάζοντας επί $a^n$ (n ακέραιος), προκύπτει

***(A)*** $$\boldsymbol{\alpha^{n+2}=\alpha^{n+1}+\alpha^n}.$$

Αν θέσουμε $u_n = a^n$ , n≥1, τότε $u_1 = a$ *και* $u_2 = a^2$, και βρίσκουμε την ακολουθία

$$\boldsymbol{\alpha,\ \alpha^2=\alpha+1,\ \alpha^3=\alpha^2+\alpha,\ldots,}$$

που επίσης ικανοποιεί τον τύπο (R). Όμοια έχουμε την

***(B)*** $$\boldsymbol{\beta^{n+2}=\beta^{n+1}+\beta^n}$$

και την ακολουθία

$$\boldsymbol{\beta,\ \beta^2=\beta+1,\ \beta^3=\beta^2+\beta,\ \ldots,}$$

που επίσης ικανοποιεί τον τύπο (R).

Μπορείτε εύκολα να επαληθεύσετε ότι

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=1} \text{ και } \boldsymbol{\alpha-\beta=\sqrt{5}.}$$

Αν τώρα αφαιρέσουμε κατά μέλη την (Β) από την (Α) και διαιρέσουμε το εξαγόμενο δια α-β(=$\sqrt{5} \neq 0$), βρίσκουμε

$$\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}.$$

Αν θέσουμε $u_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$, **n≥1,** τότε

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$$

και

$$u_1=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}=1$$

$$u_2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}=\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}=\frac{(\sqrt{5})(1)}{\sqrt{5}}=1.$$

Ώστε αυτή η ακολουθία $u_n$ είναι η ακολουθία Fibonacci, όπως ορίστηκε στην σελίδα 13. Έτσι έχουμε τον τύπο $F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\ n=1,2,3,..$ που λέγεται τύπος του Binet για τους αριθμούς Fibonacci, από το όνομα του Γάλλου μαθηματικού Jacques-Phillipe-Marie Binet (1786-1856). Επειδή οι ρίζες $\alpha$ και $\beta$ της εξίσωσης (F).

$$x^2-x-1=0,$$

σχετίζονται με τους αριθμούς Fibonacci, η εξίσωση (F) λέγεται **Δευτεροβάθμια εξίσωση Fibonacci.** Θα λέμε τη θετική ρίζα της (F),

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

**Χρυσή τομή.** (Αυτή συνήθως συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα $\varphi$).

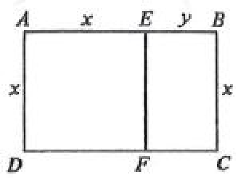
Το σημείο C στα Σχήματα 1 και 2, που διαιρεί το AB, έτσι ώστε

$$\frac{AB}{AC}=\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

λέμε ότι διαιρεί το AB σε Χρυσή Τομή.

Ας πάρουμε τώρα το ορθογώνιο στο Σχήμα 3 τέτοιο ώστε, αν από το ορθογώνιο αφαιρεθεί το τετράγωνο AEFD, τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου BCFE που απομένει, να έχουν τον ίδιο λόγο με τα μήκη των πλευρών του αρχικού ορθογωνίου. Δηλαδή,

$$\frac{BC}{EB}=\frac{AB}{DA}$$




Σχήμα 3

Τότε, αν DA=AE=BC=x και EB=y, θα έχουμε

$$\boldsymbol{\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}, \text{ ή } \frac{x}{y} = 1 + \frac{y}{x}.}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας επί $\frac{x}{y}$ βρίσκουμε

$$\boldsymbol{\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x}{y} + 1,}$$

ή

$$\boldsymbol{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 = 0,}$$

Που είναι της ίδιας μορφής με την εξίσωση (F), με την μεταβλητή $\left(\frac{x}{y}\right)$.

Αφού x και y είναι θετικοί, αναζητούμε τη θετική τιμή του $\frac{x}{y}$.

Έτσι,

$$\boldsymbol{\frac{x}{y} = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.}$$

Δηλαδή ο λόγος του μήκους προς το πλάτος του ορθογωνίου BCFE (καθώς και του ABCD) είναι ο αριθμός ***α (φ)***,η **Χρυσή Τομή.** Ένα τέτοιο ορθογώνιο λέγεται **Χρυσό Ορθογώνιο.**

Οι αναλογίες του Χρυσού Ορθογωνίου εμφανίζονται συχνά στην κλασική Ελληνική τέχνη και την αρχιτεκτονική. Όπως απέδειξαν οι Γερμανοί ψυχολόγοι Gustav Theodor Fechner(1801-1887) και Wilhelm Wundt (1832-1920), σε μια σειρά από ψυχολογικά πειράματα, οι περισσότεροι άνθρωποι προτιμούν υποσυνείδητα τις «χρυσές διαστάσεις», όταν επιλέγουν πίνακες, κάρτες, καθρέφτες, τυλιγμένα δέματα και άλλα ορθογώνια αντικείμενα. Για κάποιο λόγο που ούτε οι ψυχολόγοι ούτε οι καλλιτέχνες γνωρίζουν ακριβώς, το Χρυσό Ορθογώνιο ασκεί μεγάλη αισθητική γοητεία.

## 2.3 Σύντομος υπολογισμός μεγάλων $F_n$ και $L_n$

Σ' αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε αρκετά με ανισώσεις οπότε κρίνεται σκόπιμο να δούμε κάποιες προτάσεις.

Για πραγματικούς αριθμούς a,b,c και d έχουμε

( a ) αν a < b και c > 0 τότε ac < bc και $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

( b ) αν a < b και c < 0 τότε ac > bc και $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

( c ) αν a < b τότε a+c < b+c και a-c < b-c

( d ) αν 0 < $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ τότε $\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$ και αντίστροφα

( e ) αν $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ και $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ ,τότε $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$

( f ) αν │b│<1 τότε │b│$^n$ <1 για n= 1, 2, 3,…

( g ) αν a=b+c και c>0, τότε b<a

Θα χρειαστούμε επίσης την έννοια του ''ακέραιου μέρους '' ενός πραγματικού αριθμού, έστω χ. Αυτό είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που δεν ξεπερνά τον χ, και συμβολίζεται με $[\chi]$. Προφανώς ισχύει $[\chi] \leq \chi \leq [\chi] + 1$.

Έτσι

**[7,2]=7 και [7,9]=7**.

Όμοια έχουμε

**[-5,4]=-6 και [1/2]=0**

Είμαστε τώρα σε θέση να βρούμε μεθόδους για την εύρεση των Fn και Ln ή τουλάχιστον προσεγγίσεις τους, χωρίς να κάνουμε όλες τις προσθέσεις από την αρχή. Το πρώτο θεώρημα που θα αποδείξουμε είναι το ακόλουθο.

**ΘΕΩΡΗΜΑ Ι**

$$\boldsymbol{F_n} = [\frac{\boldsymbol{a^n}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}] \textit{ για n=1,2,3,….}$$

*Απόδειξη*. Από τον τύπο του Binet, έχουμε

$$\boldsymbol{F_n} = \frac{\boldsymbol{a^n - \beta^n}}{\sqrt{5}}, \textit{ n=1,2,3,….,}$$

Όπου $\boldsymbol{\alpha}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong \frac{1+2,236}{2} \cong \mathbf{1,618}$ και $\boldsymbol{\beta}=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong \mathbf{-0,618}$.

Μπορούμε να γράψουμε

$$\boldsymbol{F_n} = \frac{\boldsymbol{a^n}}{\sqrt{5}} - \frac{\boldsymbol{\beta^n}}{\sqrt{5}} = \left(\frac{\boldsymbol{a^n}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\boldsymbol{\beta^n}}{\sqrt{5}}\right).$$

Αφού όμως 0< $|\beta| < 1$, από την (f) έχουμε ότι 0< $|\beta|^n < 1$.

Αφού $\boldsymbol{1}<\frac{\sqrt{5}}{2}$ από την (e) προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{0}< |\boldsymbol{\beta}|^{\boldsymbol{n}} < \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Επειδή όμως $\sqrt{5} > 0$ με τη βοήθεια της (a) βρίσκουμε ότι

*(A)* $$\boldsymbol{0}<\frac{|\boldsymbol{\beta}|^{\boldsymbol{n}}}{\sqrt{5}}<\frac{1}{2}.$$

Τώρα προσθέτουμε $\frac{1}{2}$ και βρίσκουμε

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{|\boldsymbol{\beta}|^{\boldsymbol{n}}}{\sqrt{5}} < \boldsymbol{1}.$$

Παρά το ότι το β<0, για άρτιο n έχουμε $|\beta|^n = \beta^n$, και έτσι

**(B)** $$\text{για άρτιο } \boldsymbol{n}, \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{\boldsymbol{\beta^n}}{\sqrt{5}} < \boldsymbol{1}.$$

Από την άλλη τώρα για n περιττό έχουμε $|\beta|^n = -\beta^n$, και έτσι από την (A)

προκύπτει $$-\frac{1}{2} < +\frac{\beta^n}{\sqrt{5}} < 0.$$

Τότε προσθέτουμε πάλι $\frac{1}{2}$ και βρίσκουμε

**( C )** για περιττό $n$ $0 < \frac{1}{2} + \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$

Τώρα από τις ( B ) και ( C ) προκύπτει ότι γενικά

$$0 < \frac{1}{2} + \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} < 1.$$

Είδαμε όμως πως ο $F_n$ εκφράζεται σαν

$F_n = \left(\frac{a^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\beta^n}{\sqrt{5}}\right)$ και έτσι αφού δείξαμε ότι ο $\left(\frac{1}{2} + \frac{\beta^n}{\sqrt{5}}\right)$ είναι θετικός και μικρότερος της μονάδας, έχουμε

$$F_n < \frac{a^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} < F_n + 1,$$

ή

$$F_n = \left[\frac{a^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right] \text{ για } n=1,2,3,\ldots,$$

Και το θεώρημα αποδείχθηκε.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και το θεώρημα ΙΙ( του οποίου την απόδειξη παραλείπουμε)

**ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ** $Ln = \left[a^n + \frac{1}{2}\right]$ *για n=1,2,3,…,*

Στο βιβλίο του *N.N Vorobyov The Fibonacci numbers,* αποδεικνύεται πως ο $F_n$ ισούται με τον ακέραιο που είναι πλησιέστερα στον $\frac{a^n}{\sqrt{5}}$, δηλαδή

$$\left|F_n - \frac{a^n}{\sqrt{5}}\right| < \frac{1}{2}.$$

Με βάση αυτό το αποτέλεσμα ο $F_n$ υπολογίζεται, αν χρησιμοποιήσουμε λογαρίθμους με ικανοποιητικό αριθμό δεκαδικών ψηφίων.

Με όμοιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$|Ln - \alpha^n| < \frac{1}{2}.$$

Αλλά ας το δούμε λίγο και πιο πρακτικά ψάχνοντας το $F_{16}$.

Γνωρίζουμε ότι $F_{16} \cong \frac{a^{16}}{\sqrt{5}}$. Λογαριθμίζοντας έχουμε $\log \frac{a^{16}}{\sqrt{5}} \cong 16 \log \alpha - \log \alpha\, 2{,}236$

Επειδή θα πολλαπλασιάσουμε το $\log \alpha$ επί 16, τον παίρνουμε με πιο πολλά δεκαδικά ψηφία από εκείνα που σχεδιάζουμε να πάρουμε σε άλλους υπολογισμούς.

Παίρνοντας λοιπόν

$\boldsymbol{\alpha}$=$\frac{\mathbf{1+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}} \cong \frac{\mathbf{1+2,23607}}{\mathbf{2}} \cong \mathbf{1,6180}$,

και χρησιμοποιώντας λογαριθμικούς πίνακες πέντε δεκαδικών ψηφίων βρίσκουμε

$$\boldsymbol{log\,\alpha} \cong \mathbf{0,20898}.$$

Έτσι έχουμε

$\boldsymbol{log}\,\frac{\boldsymbol{\alpha}^{16}}{\sqrt{5}} \cong \mathbf{16(0,20898)}$ ***– 0,3494≅3,3437-0,3494≅2,9943,***

που συνεπάγεται $\frac{\alpha^{16}}{\sqrt{5}}$= 987,0.

Ώστε $F_{16}$=987.

**ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ** $\qquad \mathbf{F_{n+1}=\left[\alpha F_n + \frac{1}{2}\right]}$**, n=2,3,4,…,**

Απόδειξη.

Αφού $F_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}$, έχουμε

$$\boldsymbol{\alpha F_n} = \frac{\boldsymbol{\alpha^{n+1} - \alpha\beta^n}}{\sqrt{\mathbf{5}}} = \frac{\boldsymbol{\alpha^{n+1} - \alpha\beta^n - \beta^{n+1} + \beta^{n+1}}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$$

$$= \frac{\boldsymbol{\alpha^{n+1} - (\alpha\beta)\beta^{n-1} - \beta^{n+1} + \beta^{n+1}}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$$

Επειδή αβ= -1, έχουμε

$$\boldsymbol{\alpha F_n} = \frac{\boldsymbol{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} + \beta^{n+1} + \beta^{n-1}}}{\sqrt{\mathbf{5}}} = \boldsymbol{F_{n+1}} + \boldsymbol{\beta^{n-1}}\left(\frac{\boldsymbol{\beta^2} + \mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}\right).$$

Όμως $\quad \boldsymbol{\beta^2} + \mathbf{1} = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{2} = \frac{\mathbf{1-\sqrt{5}+4}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{5-\sqrt{5}}}{\mathbf{2}} = \sqrt{\mathbf{5}}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{5}}\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}\right) = -\sqrt{\mathbf{5}}\boldsymbol{\beta}.$

Ώστε $\quad \boldsymbol{\alpha F_n} = \boldsymbol{F_{n+1}} + \boldsymbol{\beta^{n-1}}(-\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{F_{n+1}} - \boldsymbol{\beta^n}$, **και**

**(D)** $$\boldsymbol{\alpha F_n}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \boldsymbol{F_{n+1}} + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \boldsymbol{\beta^n}\right).$$

Τώρα αφού $|\beta| < 0{,}62$, έχουμε $|\beta|^2 < \frac{1}{2}$, και έτσι

$$|\boldsymbol{\beta}|^{\boldsymbol{n}} < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ \textbf{για n} \geq \mathbf{2}.$$

Είναι επίσης $|\beta^n| = |\beta|^n$, και έτσι

$$|\boldsymbol{\beta^n}| < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \textbf{ή}\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} < \boldsymbol{\beta^n} < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}.$$

Με βάση τώρα την πρόταση (b) στην αρχή της ενότητας αυτής έχουμε

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} > -\boldsymbol{\beta^n} > -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \text{ή}\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} < -\boldsymbol{\beta^n} < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},$$

και τελικά

$$\mathbf{0}<\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \boldsymbol{\beta^n} < 1.$$

Αφού τώρα $\frac{1}{2} - \beta^n > 0$, από την (D) και την πρόταση (g) βρίσκουμε ότι

$$\boldsymbol{F_{n+1} < \alpha F_n + \frac{1}{2}}$$

Πρόσθετα, αφού $\frac{1}{2} - \beta^n < 1$, έχουμε

$$\boldsymbol{F_{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \beta^n\right) < F_{n+1} + 1}.$$

αντικαθιστούμε αυτές τις ανισώσεις τώρα στην (D) και έχουμε

$$\boldsymbol{F_{n+1}} < \alpha\boldsymbol{F_n} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} < \boldsymbol{F_{n+1} + 1},$$

ή

$$\boldsymbol{F_{n+1} = \left[\alpha F_n + \frac{1}{2}\right],\ n=2,3,4,\ldots,}$$

και το θεώρημα αποδείχτηκε.

**Πόρισμα**

$$\boldsymbol{F_{n+1} = \left[\frac{F_n + 1 + \sqrt{5F_n^2}}{2}\right], n \geq 2}.$$

Απόδειξη.

Από το Θεώρημα ΙΙΙ έχουμε

$$\boldsymbol{F_{n+1} = \left[\alpha F_n + \frac{1}{2}\right] = \left[F_n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{F_n + \sqrt{5}F_n + 1}{2}\right] = \left[\frac{F_n + 1 + \sqrt{5F_n^2}}{2}\right]}.$$

Το πόρισμα λοιπόν αυτό μας δείχνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τον $F_{n+1}$ από τον $F_n$ χωρίς να χρησιμοποιήσουμε ούτε το n ούτε το α.

Το αντίστοιχο θεώρημα και πόρισμα για τους αριθμούς Lucas αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο.

**ΘΕΩΡΗΜΑ IV**

$$\boldsymbol{L_{n+1} = \left[\alpha L_n + \frac{1}{2}\right], n \geq 4}.$$

**Πόρισμα**

$$\boldsymbol{L_{n+1} = \left[\frac{L_n + 1 + \sqrt{5L_n^2}}{2}\right], n \geq 4}.$$

Ας δούμε όμως και στην πράξη τα παραπάνω. Μας δίνεται λοιπόν ότι ο 610 είναι ένας αριθμός Fibonacci. Με βάση το πόρισμα του Θεωρήματος ΙΙΙ, ας βρούμε τον επόμενο.

Λύση: $F_{n+1} = \left[\frac{610+1+\sqrt{5(610)^2}}{2}\right] = \left[\frac{611+\sqrt{1860500}}{2}\right] = \left[\frac{611+1364,0}{2}\right] = \left[\frac{1975,0}{2}\right] = 987.$

Για μεγαλύτερους αριθμούς Fibonacci ίσως χρειαστεί να πάρουμε την $\sqrt{5}$ με πιο πολλά δεκαδικά ψηφία.

## 2.4 Ιδιότητες διαιρετότητας των αριθμών Fibonacci και Lucas.

Ας προσέξουμε λίγους από τους πρώτους αριθμούς Fibonacci:

Πίνακας 2

| $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ | $F_6$ | $F_7$ | $F_8$ | $F_9$ | $F_{10}$ | $F_{11}$ | $F_{12}$ | $F_{13}$ | $F_{14}$ | $F_{15}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 | 233 | 377 | 610 |

Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

1. Κάθε τρίτος $F_n$ είναι άρτιος, δηλαδή, ο $F_3$=2 διαιρεί τους $F_6$=8, $F_9$=34, $F_{12}$=144, $F_{15}$=610,…
2. Ο $F_4$=3 διαιρεί τους $F_8$=21, $F_{12}$=144…
3. Ο $F_5$=5 διαιρεί τους $F_{10}$=55, $F_{15}$=610,…
4. Ο $F_6$=8 διαιρεί τον $F_{12}$=144,…
5. Ο $F_7$=13 διαιρεί τον $F_{14}$=377,…

Τα παραδείγματα αυτά μας οδηγούν στο ακόλουθο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Κάθε αριθμός Fibonacci $F_k$ διαιρεί κάθε αριθμό Fibonacci $F_{nk}$ για n=1,2,3,… ή, αν ο r διαιρείται δια του s, τότε ο $F_r$ διαιρείται δια του $F_s$.

Θεωρούμε πρώτα το παράδειγμα

$$\boldsymbol{F_{10} = \frac{\alpha^{10} - \beta^{10}}{\alpha - \beta}}.$$

Η διαφορά ίσων δυνάμεων δυο αριθμών παραγοντοποιείται κατά διάφορους τρόπους. Εδώ μπορούμε να διαιρέσουμε τον $\alpha^{10} - \beta^{10}$ δια του $\alpha^2 - \beta^2$ ή δια του $\alpha^5 - \beta^5$, όπως φαίνεται πιο κάτω.

$$\boldsymbol{F_{10} = \frac{\alpha^{10}-\beta^{10}}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}(\alpha^8 - \alpha^6\beta^2 + \alpha^4\beta^4 + \alpha^2\beta^6 + \beta^8) = F_2[(\alpha^8 + \beta^8) + \alpha^2\beta^2(\alpha^4 + \beta^4) + \alpha^4\beta^4].}$$

Αφού $\alpha\beta = -1$,έχουμε

**(A)** $$\boldsymbol{F_{10} = F_2(L_8 + L_4 + 1)}.$$

Μπορούμε ακόμα να έχουμε

$$\boldsymbol{F_{10} = \frac{\alpha^{10}-\beta^{10}}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha^5-\beta^5}{\alpha-\beta}\left(\alpha^5 + \beta^5\right)}, \textbf{ ή}$$

**(B)** $$\boldsymbol{F_{10} = F_5 L_5.}$$

Ώστε, αφού ο $(L_8 + L_4 + 1)$ στην εξίσωση (Α) είναι ακέραιος, ο $F_2$ είναι παράγοντας του $F_{10}$. Επίσης, όπως προκύπτει από την (Β), ο $F_5$ είναι παράγοντας του $F_{10}$.

Γενικά, για να δείξουμε πως ο $F_{nk}$ είναι διαιρετέος δια του $F_k$ θεωρούμε την παραγοντοποίηση

**( C )**

$$\boldsymbol{F_{nk} = \frac{\alpha^{nk} - \beta^{nk}}{\alpha - \beta}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta}\left(\alpha^{(n-1)k} + \alpha^{(n-2)k}\beta^k + \alpha^{(\nu-3)k}\beta^{2k} + \dots + \alpha^k\beta^{(n-2)\kappa} + \beta^{(n-1)k}\right).}$$

Στην παρένθεση δεξιά ο πρώτος και ο τελευταίος όρος μαζί σχηματίζουν τον αριθμό Lucas

$$\boldsymbol{\alpha^{(n-1)k} + \beta^{(n-1)k} = L_{(n-1)k}.}$$

Ο δεύτερος και ο προτελευταίος όρος μαζί είναι το γινόμενο ενός αριθμού Lucas επί $(-1)^k$:

$$\boldsymbol{\alpha^{(n-2)k}\beta^k + \alpha^k\beta^{(n-2)\kappa} = \alpha^k\beta^k\left(\alpha^{(n-3)k} + \beta^{(n-3)k}\right) = (\alpha\beta)^k L_{(n-3)k} = (-1)^k L_{(n-3)k}.}$$

Μπορούμε να συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο. Προσέξτε ότι το πλήθος των όρων στην παρένθεση δεξιά στην ( C ) είναι n. Αν ο αριθμός n είναι άρτιος, τότε οι όροι παίρνονται σε συμμετρικά ζευγάρια και σχηματίζουν αριθμούς Lucas, που το άθροισμα τους είναι ακέραιος. Δείτε, για παράδειγμα, την εξίσωση (Β), όπου

$$\boldsymbol{F_{10} = F_{2\cdot 5} = F_5 L_5,}$$

με k=5 και n=2 που είναι άρτιος. Για περιττές τιμές του n, οι όροι σχηματίζουν και πάλι συμμετρικά ζευγάρια, εκτός από το μεσαίο που είναι της μορφής $(\alpha\beta)^{\frac{(n-1)k}{2}}$, και είναι σίγουρα ακέραιος. Έτσι η παρένθεση στο δεύτερο μέλος της ( C ) είναι αριθμός ακέραιος. Δείτε, για παράδειγμα, την εξίσωση (Α), όπου

$$\boldsymbol{F_{10} = F_{2\times 5} = F_2(L_8 + L_4 + 1),}$$

με k=2 και n=5 που είναι περιττός.

Δίνεται ένα ακόμη θεώρημα που αφορά το μέγιστο κοινό διαιρέτη δυο ακεραίων. Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δυο ακεραίων a και b συμβολίζεται με

$$(a, b) = d,$$

που σημαίνει πως ο d είναι ο πιο μεγάλος ακέραιος αριθμός που διαιρεί και τον a και τον b. Για παράδειγμα,

$$(14,2) = 2, (24,15) = 3, \text{και } (6765,610) = 5.$$

Ας δούμε τώρα και το θεώρημα διατυπωμένο.

**ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ**

$$(\boldsymbol{F_m}, \boldsymbol{F_n}) = \boldsymbol{F_{(m,n)}}.$$

Δηλαδή, ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δυο αριθμών Fibonacci είναι εκείνος ο αριθμός Fibonacci που έχει υποδείκτη το μέγιστο κοινό διαιρέτη των υποδεικτών των δυο αυτών αριθμών. Έτσι

$$(F_{15}, F_{14}) = (610,377) = F_{(15,14)} = F_1 = 1$$

$$(F_9, F_6) = (34,8) = F_{(9,6)} = F_3 = 2$$

$$(F_{12}, F_6) = (144,8) = F_{(12,6)} = F_6 = 8.$$

Εδώ ο $F_6$διαιρεί τον $F_{12}$.

Το Θεώρημα ΙΙ μπορεί να αποδειχθεί με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη (N.N Vorobyov, Fibonacci numbers Boston: D.C Health and Co., 1963 σελίδες 22-24) ή σαν η λύση μιας Διοφαντικής εξίσωσης (Glenn Michael, ‘’A new proof for an Old Property, ‘’The Fibonacci Quarterly, Vol. 2, No 1 February ,1964 σελίδες 57-58).

Το Θεώρημα Ι και το Θεώρημα ΙΙ συμπτύσσονται, όπως φαίνεται πιο κάτω στο

**ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ**

Ο αριθμός $F_n$ διαιρείται δια του $F_m$, αν και μόνο αν ο n διαιρείται δια του m.

Ας προσέξουμε τώρα τους πρώτους αριθμούς Lucas.

Πίνακας 3

| $L_1$ | $L_2$ | $L_3$ | $L_4$ | $L_5$ | $L_6$ | $L_7$ | $L_8$ | $L_9$ | $L_{10}$ | $L_{11}$ | $L_{12}$ | $L_{13}$ | $L_{14}$ | $L_{15}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 7 | 11 | 18 | 29 | 47 | 76 | 123 | 199 | 322 | 521 | 843 | 1364 |

Διαπιστώνουμε αμέσως πως κάθε τρίτος $L_n$ είναι άρτιος, όπως και για τους αριθμούς Fibonacci. Στη συνέχεια διαπιστώνουμε χωρίς απόδειξη δυο ενδιαφέροντα θεωρήματα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ IV**(L.Carlitz ‘’ A note on Fibonacci numbers, ’The Fibonacci Quarterly Vol.2, No 1 February 1964,σελίδες 15-28)

Ο $L_n$ διαιρεί τον$F_m$, αν και μόνο αν m=2kn, με n>1

Για παράδειγμα, ο $L_3$=4 διαιρεί τον $F_6$=8, τον $F_{12}$=144, και λοιπά.

**ΘΕΩΡΗΜΑ V**(L.Carlitz ‘’ A note on Fibonacci numbers, ’The Fibonacci Quarterly Vol.2, No 1 February 1964,σελίδες 15-28)

Ο $L_n$ διαιρεί τον $L_m$, αν και μόνο αν m=(2k-1)n, με n>1

Για παράδειγμα ο $L_3 = 4$ διαιρεί τον $L_9 = 76$ τον $L_{15} = 1364$, και λοιπά.

Φαίνεται εύκολα πως δυο διαδοχικοί αριθμοί Fibonacci δεν έχουν κοινό διαιρέτη εκτός από την μονάδα. Αν οι $F_{n+2}$ και $F_{n+1}$ είχαν κοινό διαιρέτη το d, τότε θα διαιρείτο με το d και ο αριθμός $\boldsymbol{F_n = F_{n+2} - F_{n+1}}$. Έτσι, θα προχωρούσαμε ως τον $F_2 = 1$, τον οποίο ο αριθμός d θα έπρεπε να διαιρεί. Αφού, ο d θα είναι ακέραιος θετικός πρέπει να είναι ο 1. Ένα όμοιο επιχείρημα μπορεί να προβληθεί και για τους αριθμούς Lucas έτσι έχουμε :

**ΘΕΩΡΗΜΑ VI** **ΘΕΩΡΗΜΑ VII**

$(\boldsymbol{F_{n+2}, F_{n+1}})$**=1** και $(\boldsymbol{L_{n+2}, L_{n+1}})$**=1**

## 2.5 Περιοδικότητα των αριθμών Fibonacci και Lucas.

Τι άλλο μπορούμε να βρούμε από τον πίνακα των αριθμών Fibonacci;

Πίνακας 4

| $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ | $F_6$ | $F_7$ | $F_8$ | $F_9$ | $F_{10}$ | $F_{11}$ | $F_{12}$ | $F_{13}$ | $F_{14}$ | $F_{15}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 | 233 | 377 | 610 |

Θεωρούμε την ακολουθία των πρώτων αριθμών και παρατηρούμε ότι:

Ο 2 διαιρεί τους $F_3$ , $F_6$ , κλπ.

Ο 3 διαιρεί τους $F_4$ , $F_8$ , κλπ.

Ο 5 διαιρεί τους $F_5$ , $F_{10}$ , κλπ.

Ο 7 διαιρεί τον $F_8$ , κατά συνέπεια και τον $F_{16}$ , κλπ.

Ο 11 διαιρεί τον $F_{10}$ , κατά συνέπεια και τον $F_{20}$ , κλπ.

Ο 13 διαιρεί τους $F_7$ , $F_{14}$ , κλπ.

Λογικό είναι να αναρωτηθούμε, αν κάθε πρώτος αριθμός διαιρεί κάποιο αριθμό Fibonacci (και κατά συνέπεια άπειρους). Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού θ’ αποδείξουμε πως κάθε ακέραιος διαιρεί κάποιον αριθμό Fibonacci.

Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ένα είδος περιοδικότητας των αριθμών Fibonacci. Όμως θεωρούμε πρώτα τα ακόλουθα.

Όλοι ξέρουμε τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς όπως πχ την δεκαδική μορφή του $\frac{1}{7}$.

Στη διαίρεση του 1 δια του 7 τα μόνα δυνατά υπόλοιπα είναι 0,1,2,3,4,5,6.

```
1,000000 | 7
  30     | 0,142857
   20
    60
     40
      50
       1
```

Σχήμα 4

Αν είχαμε υπόλοιπο 0 η διαίρεση θα ήταν τέλεια. Επειδή όμως βρίσκουμε μόνο τους άλλους έξι αριθμούς, η διαίρεση συνεχίζεται και οδηγεί στον περιοδικό αριθμό

$\frac{1}{7}$ = **0,142857142857142857….**

Κάθε ρητός αριθμός έχει ένα δεκαδικό περιοδικό ανάπτυγμα και αντίστροφα. (Ακόμα και ο $\frac{1}{2}$ = $\mathbf{0,500}$ ... = $\mathbf{0,499}$ ...**).**

Θα χρησιμοποιήσουμε ένα παρόμοιο επιχείρημα στη παρούσα συζήτηση, αλλά εδώ θ' αναφερόμαστε σε *επαναλαμβανόμενα διατεταγμένα ζεύγη υπολοίπων*.

Όταν διαιρέσουμε τους αριθμούς $F_0$ ως $F_{31}$ δια του 7,προκείπτει η πιο κάτω ακολουθία πηλίκων και υπολοίπων:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_0 =$ | $0 =$ | $0 \cdot 7 + 0$ | $F_{16} =$ | $987 =$ | $141 \cdot 7 + 0$ |
| $F_1 =$ | $1 =$ | $0 \cdot 7 + 1$ | $F_{17} =$ | $1597 =$ | $228 \cdot 7 + 1$ |
| $F_2 =$ | $1 =$ | $0 \cdot 7 + 1$ | $F_{18} =$ | $2584 =$ | $369 \cdot 7 + 1$ |
| $F_3 =$ | $2 =$ | $0 \cdot 7 + 2$ | $F_{19} =$ | $4181 =$ | $597 \cdot 7 + 2$ |
| $F_4 =$ | $3 =$ | $0 \cdot 7 + 3$ | $F_{20} =$ | $6765 =$ | $966 \cdot 7 + 3$ |
| $F_5 =$ | $5 =$ | $0 \cdot 7 + 5$ | $F_{21} =$ | $10946 =$ | $1563 \cdot 7 + 5$ |
| $F_6 =$ | $8 =$ | $1 \cdot 7 + 1$ | $F_{22} =$ | $17711 =$ | $2530 \cdot 7 + 1$ |
| $F_7 =$ | $13 =$ | $1 \cdot 7 + 6$ | $F_{23} =$ | $28657 =$ | $4093 \cdot 7 + 6$ |
| $F_8 =$ | $21 =$ | $3 \cdot 7 + 0$ | $F_{24} =$ | $46368 =$ | $6624 \cdot 7 + 0$ |
| $F_9 =$ | $34 =$ | $4 \cdot 7 + 6$ | $F_{25} =$ | $75025 =$ | $10717 \cdot 7 + 6$ |
| $F_{10} =$ | $55 =$ | $7 \cdot 7 + 6$ | $F_{26} =$ | $121393 =$ | $17341 \cdot 7 + 6$ |
| $F_{11} =$ | $89 =$ | $12 \cdot 7 + 5$ | $F_{27} =$ | $196418 =$ | $28059 \cdot 7 + 5$ |
| $F_{12} =$ | $144 =$ | $20 \cdot 7 + 4$ | $F_{28} =$ | $317811 =$ | $45401 \cdot 7 + 4$ |
| $F_{13} =$ | $233 =$ | $33 \cdot 7 + 2$ | $F_{29} =$ | $514229 =$ | $73461 \cdot 7 + 2$ |
| $F_{14} =$ | $377 =$ | $53 \cdot 7 + 6$ | $F_{30} =$ | $832040 =$ | $118862 \cdot 7 + 6$ |
| $F_{15} =$ | $610 =$ | $87 \cdot 7 + 1$ | $F_{31} =$ | $1346269 =$ | $192324 \cdot 7 + 1$ |

Όπως φαίνεται από τα υπόλοιπα ο αριθμός 7 διαιρεί τους $F_0$ , $F_8$ , $F_{16}$ και $F_{24}$ από τους αριθμούς του πίνακα.

Προσέξτε την μορφή των υπολοίπων (αφού κάθε $F_n$ είναι το άθροισμα των δυο προηγούμενων αριθμών).

$\mathbf{0 + 1 = 1, 1 + 1 = 2, \ldots 3 + 5 = 8 = 7 + 1, 1 + 6 = 7+0\ldots}$

Δηλαδή, μετά από το δεύτερο, κάθε υπόλοιπο ισούται με το άθροισμα των δυο προηγούμενων, μειωμένο, όπου χρειάζεται, κατά 7.

Θεωρούμε τις ακολουθίες των υπολοίπων

$$\mathbf{1, 6, 0, 6} \qquad \textbf{(αρχίζοντας με τον} \boldsymbol{F_6}\ \textbf{)}$$

και

$$\mathbf{6, 1, 0, 1} \qquad \textbf{(αρχίζοντας με τον} \boldsymbol{F_{14}}\ \textbf{).}$$

Προσέξτε ότι το ζεύγος (1,6) δίνει διαφορετική ακολουθία από αυτή που ακολουθεί το ζεύγος (6,1). Αφού υπάρχουν επτά δυνατά υπόλοιπα (0,1,2,3,4,5,6), όταν διαιρούμε δια 7, τότε μπορούν να υπάρχουν το πολύ $7 \times 7$ ή 49 διαφορετικά διατεταγμένα ζεύγη υπολοίπων. Έτσι σε κάθε 50 διατεταγμένα ζεύγη, δυο τουλάχιστον θα είναι τα ίδια. Στο δικό μας παράδειγμα δεν εμφανίζονται όλα τα δυνατά διατεταγμένα ζεύγη υπολοίπων και υπάρχουν πολλές επαναλήψεις, όπως του (0,1) για τους $F_1$, $F_2$ και τους $F_{17}$, $F_{18}$.

Θα δείξουμε τώρα πως, όταν θεωρούμε αριθμούς Fibonacci με υποδείκτες θετικούς ή μηδέν, το πρώτο ζεύγος υπολοίπων που επαναλαμβάνεται είναι το (0,1), πράγμα που είδαμε πιο πάνω για m=7. Ας είναι γενικά $(\boldsymbol{r_k}, \boldsymbol{r_{k+1}})$ τα ζεύγη των υπολοίπων που προκύπτουν από τη διαίρεση των αριθμών $\boldsymbol{F_k}$ και $\boldsymbol{F_{k+1}}$με κάποιο ακέραιο m. Θεωρούμε την ακολουθία και ζευγών

$$\boldsymbol{(r_0, r_1), (r_1, r_2), (r_2, r_3), \ldots, (r_n, r_{n+1}).}$$

Τα ζεύγη $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1})$ και $(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b_2})$, λέγονται ίσα, αν και μόνο αν $\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{a_2}$ και $\boldsymbol{b_1} = \boldsymbol{b_2}$. Σίγουρα, ανάμεσα στα πρώτα $\boldsymbol{m^2} + \mathbf{1}$ ζεύγη που προκύπτουν από την διαίρεση διαδοχικών αριθμών Fibonacci δια m, υπάρχουν δυο τουλάχιστον που είναι ίσα.(Ενδέχεται βέβαια να υπάρχουν περισσότερα από δύο ίσα ζεύγη, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.).

Ας υποθέσουμε τώρα πως το πρώτο ζεύγος που επαναλαμβάνεται είναι το $(\boldsymbol{r_k}, \boldsymbol{r_{k+1}}), \boldsymbol{k} \geq \mathbf{0}$. Τότε στην ακολουθία ζευγών θα υπάρχει ένα μεταγενέστερο ζεύγος $(\boldsymbol{r_n}, \boldsymbol{r_{n+1}})$, ίσο προς το $(\boldsymbol{r_k}, \boldsymbol{r_{k+1}})$ με $\boldsymbol{m^2} + \mathbf{1} \geq \boldsymbol{n} + \mathbf{1} \geq \boldsymbol{k} + \mathbf{1}$. Επειδή όμως τα ζεύγη είναι ίσα, θα είναι $\boldsymbol{r_k} = \boldsymbol{r_n}$ και $\boldsymbol{r_{k+1}} = \boldsymbol{r_{n+1}}$Αφού όμως

$$\boldsymbol{F_{k-1} = F_{k+1} - F_k} \textbf{ και } \boldsymbol{F_{n-1} = F_{n+1} - F_n}$$

διαιρούμε δια m και έχουμε

$$\boldsymbol{r_{k-1} = r_{k+1} - r_k} \textbf{ και } \boldsymbol{r_{n-1} = r_{n+1} - r_n}$$

Από τις ισότητες

$\boldsymbol{r_{k+1}} = \boldsymbol{r_{n+1}}$ και $\boldsymbol{r_k} = \boldsymbol{r_n}$ προκύπτει

$$\boldsymbol{r_{k-1} = r_{n-1}}$$

παρόλο που είναι δυνατό να χρειαστεί να προσθέσουμε **m** στους $\boldsymbol{r_{k-1}}$ και $\boldsymbol{r_{n-1}}$ για να γίνουν θετικοί. Έτσι τα ζεύγη $\boldsymbol{(r_{k-1}, r_k)}$ και $\boldsymbol{(r_{n-1}, r_n)}$ είναι επίσης ίσα. Δηλαδή κάθε επαναλαμβανόμενο ζεύγος έχει και ένα προηγούμενο ζεύγος που επαναλαμβάνεται, εκτός βέβαια από το (0,1) το οποίο δεν έχει προηγούμενο. Το (0,1) είναι λοιπόν το πρώτο επαναλαμβανόμενο ζεύγος στον πίνακα των ζευγών όπως φαίνεται και στην περίπτωση m=7 στον πίνακα της προηγούμενης σελίδας.

Ας είναι τώρα $\boldsymbol{(r_n, r_{n+1}) = (0, 1), n > 0}$, η δεύτερη εμφάνιση του (0,1) στην ακολουθία ζευγών υπολοίπων. Τότε $r_n = 0$ και ο $F_n$ διαιρείται δια του m, όπου $\boldsymbol{1 < n + 1 \leq m^2 + 1}$ ή $\boldsymbol{0 < n < m^2}$. Αποδείξαμε λοιπόν το παρακάτω θεώρημα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ Ι**

**Κάθε ακέραιος αριθμός m διαιρεί κάποιο αριθμό Fibonacci(>$\boldsymbol{F_0}$) του οποίου ο υποδείκτης δεν υπερβαίνει τον $\boldsymbol{m^2}$.**

Καθώς προχωρούμε στην ακολουθία των υπολοίπων μετά το δεύτερο ζεύγος (0,1) απλώς επαναλαμβάνουμε τα ζεύγη με την ίδια σειρά όπως και προηγούμενα, ώστε ο $F_{2n}$ θα διαιρείται επίσης δια m. Ορίζουμε λοιπόν τον n σαν την περίοδο του m στην ακολουθία Fibonacci και την συμβολίζουμε με $K_m$. Για παράδειγμα ,

$$K_7 = 16,$$

όπως μπορείτε εύκολα να διαπιστώσετε από τα ζεύγη υπολοίπων που βρήκαμε διαιρώντας δια 7 στις πιο πάνω σελίδες. Το ζεύγος (0,1) εμφανίζεται για πρώτη φορά με τους $F_0$και $F_1$. Η δεύτερη εμφάνιση αυτών των υπολοίπων γίνεται με τους $F_{16}$ και $F_{17}$. Ώστε τα ζεύγη υπολοίπων επαναλαμβάνονται σε κύκλους των 16, δηλαδή $K_7 = 16$.

Σημειώσαμε οπωσδήποτε πως ο $F_8$ είναι επίσης διαιρετός δια 7. Ο δείκτης του πρώτου θετικού αριθμού Fibonacci που είναι διαιρετός δια m, λέγεται *σειρά εμφάνισης ή σημείο εισδοχής* του αριθμού m στην ακολουθία Fibonacci. Έτσι το σημείο εισδοχής του 7 στους αριθμούς Fibonacci είναι το 8.

Υποστηρίζουμε πως ο αριθμός 7 διαιρεί έναν αριθμό Fibonacci τότε και μόνο τότε , αν ο υποδείκτης του είναι διαιρετός δια 8. Σημειώνουμε πως το μόνο τότε προκύπτει από την περιοδικότητα και όχι από το Θεώρημα ΙΙΙ της παραγράφου 2.4, γιατί ο αριθμός 7 δεν είναι αριθμός Fibonacci (Αξίζει να σημειωθεί πως ο αριθμός 7 δεν διαιρεί τον $F_7$). Αν ένας πρώτος αριθμός διαιρεί κάποιο αριθμό Fibonacci $F_d$, τότε διαιρεί και κάθε αριθμό $F_{nd}$ διότι ο $F_d$ διαιρεί τον $F_{nd}$. Σημειώστε πως αφού ο 7, που διαλέξαμε για το παράδειγμα περιοδικότητας, είναι ένας αριθμός Lucas θα μπορούσαμε στην συγκεκριμένη περίπτωση να εφαρμόσουμε το Θεώρημα IV της παραγράφου 2.4

Ας στραφούμε τώρα στους αριθμούς Lucas. Μπορεί εύκολα να δειχθεί πως ο 5 δε διαιρεί κανένα αριθμό Lucas:

$$L_0 = 2 = 0 \cdot 5 + 2 \qquad L_4 = 7 = 1 \cdot 5 + 2$$
$$L_1 = 1 = 0 \cdot 5 + 1 \qquad L_5 = 11 = 2 \cdot 5 + 1$$
$$L_2 = 3 = 0 \cdot 5 + 3 \qquad L_6 = 18 = 3 \cdot 5 + 3$$
$$L_3 = 4 = 0 \cdot 5 + 4 \qquad L_7 = 29 = 5 \cdot 5 + 4.$$

Έτσι θεωρώντας τα ζεύγη υπολοίπων που προκύπτουν από την διαίρεση στων αριθμών Lucas δια 5 φθάνουμε πάλι στο επαναλαμβανόμενο ζεύγος (2,1) με τους $L_4$ και $L_5$. Στην περίοδο μήκους 4 δεν υπάρχουν μηδενικά, το μηδέν δεν είναι αριθμός Lucas και αφού δεν υπάρχει υπόλοιπο μηδέν κανένας αριθμός Lucas δεν διαιρείται δια 5. Κάποιοι αριθμοί Lucas διαιρούνται βέβαια με άλλους ακέραιους για παράδειγμα με τον 6.

Στο βιβλίο ‘’*An Introduction to Fibonacci Discovery*’’ το Brother Alfred Brousseau ( St. Mary’s College, California 94575) υπάρχει ένας πίνακας (Πίνακας 3, σελ 55) των σημείων εισδοχής και των περιόδων των πρώτων αριθμών από 2 έως 269, τόσο στους αριθμούς Fibonacci,όσο και στους αριθμούς Lucas.

Οι αριθμοί Fibonacci και Lucas έχουν πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες υπολοίπων. Διατυπώνονται χωρίς απόδειξη τα πιο κάτω θεωρήματα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ**

**Αν ο $F_n$ διαιρεθεί δια του $F_m(n > m)$, τότε είτε το υπόλοιπο R είναι αριθμός Fibonacci, είτε ο αριθμός $F_m - R$ είναι αριθμός Fibonacci.**

Παραδείγματα:

$$89 = 2 \cdot 34 + 21, \text{ή } F_{11} = 2 \cdot F_9 + F_8$$
$$144 = 6 \cdot 21 + 18, \text{ή } F_{12} = 6 \cdot F_8 + 18.$$

Στην δεύτερη περίπτωση ο 18 δεν είναι αριθμός Fibonacci είναι όμως η διαφορά $F_8 - 18 = 21 - 18 = 3 = F_4$.

Μπορούμε να γράψουμε

$$F_{12} = 6 \cdot F_8 + (F_8 - F_4).$$

Βέβαια ο αριθμός $F_0 = 0$ είναι αριθμός Fibonacci και έτσι στην διαίρεση του $F_{10}$ δια του $F_5$ το υπόλοιπο 0 είναι αριθμός Fibonacci.

Η ιδιότητα που δίνεται στο Θεώρημα ΙΙ ισχύει και για τους αριθμούς Lucas με μια μόνο εξαίρεση. Έχουμε λοιπόν το ακόλουθο θεώρημα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ**

**Αν ο $L_n$ διαιρεθεί δια $L_m(n > m)$, τότε είτε το υπόλοιπο R είναι μηδέν ή ο R είναι αριθμός Lucas ή ο $L_m - R$ είναι αριθμός Lucas.**

Παραδείγματα:

$$76 = 19 \cdot 4 + 0, \quad \text{ή} \quad L_9 = 19 \cdot L_3 + 0$$

$$18 = 1 \cdot 11 + 7, \quad \text{ή} \quad L_6 = 1 \cdot L_5 + L_4$$

$$47 = 6 \cdot 7 + 5, \quad \text{ή} \quad L_8 = 6 \cdot L_4 + (L_4 - L_0).$$

Στο πρώτο παράδειγμα ο R=0 δεν είναι αριθμός Lucas, είναι όμως η πρώτη δυνατότητα που αναφέρεται στο θεώρημα.

Μια απόδειξη της ‘’Ιδιότητας των Υπολοίπων’’ βρίσκεται στο μικρό άρθρο του John H Halton ‘’Fibonacci Residues’’, The Fibonacci Quarterly, vol 2 No3 (October,1964), pp 217-218. Η ιδιότητα αυτή για τους αριθμούς Lucas αναπτύσσεται από τον Laurence Taylor στο άρθρο του ‘’Residues of Fibonacci-Like Sequences’’ The Fibonacci Quarterly, vol 5 No3(October,1967), pp 298-304. Στο ίδιο άρθρο βλέπουμε ότι οι ακολουθίες Fibonacci και Lucas είναι οι μόνες που πληρούν την αναδρομική ιδιότητα $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ και έχουν τις ιδιότητες που καθορίζουν τα θεωρήματα ΙΙ και ΙΙΙ.

# 3. Η ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΟΥ ΦΕΙΔΙΑ [Φ] ΚΑΙ Η ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ FIBONACCI

## 3.1 Εισαγωγή

Ίσως όλοι έχουμε την εντύπωση πως αυτό που λέγεται λόγος χρυσής τομής, είναι μία έμπνευση των αρχαίων Ελλήνων την οποία εκμεταλλεύτηκαν για να κατασκευάσουν κτίσματα ή να δημιουργήσουν μορφές με τέτοιες αναλογίες που προκαλούν έντονα την αίσθηση της αρμονίας και του ωραίου. Ένα ιδιαίτερα γνωστό κτίσμα της αρχαιότητας φημισμένο για την αρμονία των αναλογιών του είναι ο Παρθενώνας.

Χρειάζεται να αφιερώσουμε λίγο χρόνο ώστε να καταλάβουμε τι είναι ακριβώς αυτό που πρώτοι οι αρχαίοι Έλληνες ονόμασαν χρυσή τομή. Ίσως τότε διαπιστώσουμε πως και οι Αιγύπτιοι χρησιμοποίησαν αυτή την αναλογία για την κατασκευή της πυραμίδας της Γκίζας, αλλά κυρίως πως είναι μία αναλογία που πεισματικά τηρείται στη φύση και επομένως δεν αποτελεί κατασκεύασμα της ανθρώπινης φαντασίας. Αν η ανθρωπότητα δικαίως συνδέει το όνομα χρυσή τομή με τον Παρθενώνα και τους αρχαίους Έλληνες είναι γιατί αυτοί πρώτοι την μελέτησαν και εμπλούτισαν την γεωμετρία με άφθονες εφαρμογές της.

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα επιχειρήσουμε να δούμε τον γεωμετρικό ορισμό της χρυσής τομής, πως γίνεται η κατασκευή της, ποια γεωμετρικά αντικείμενα συνδέονται με αυτήν, αλλά κυρίως πού συναντάται στη φύση και την αρχιτεκτονική. Όπως είδαμε λοιπόν στο προηγούμενο κεφάλαιο ο Fibonacci μέσα από αυτό το πρόβλημα που διατύπωσε, άφησε σαν κληρονομιά του στον κόσμο την ακολουθία Fibonacci η οποία έγινε αντικείμενο πολλών συζητήσεων στο επιστημονικό κοινό αλλά και για τον υπόλοιπο κόσμο με το πέρασμα του χρόνου. Ένα όμως από τα πολλά παράδοξα της ακολουθίας αυτής είναι και το ότι υπακούει στον κανόνα της χρυσής τομής.

Ο Johannes Kepler το 1618 έγραψε στο βιβλίο του «Mysterium cosmographicum», ότι η Αρχαία Ελλάδα προίκισε τη γεωμετρία με δυο θησαυρούς, το Πυθαγόρειο θεώρημα και το Πρόβλημα της διαιρέσεως ενός ευθυγράμμου τμήματος σε άκρο και μέσο λόγο. Πολλούς αιώνες αργότερα το πρόβλημα αυτό ονομάστηκε «χρυσή τομή» διότι θεωρήθηκε ως η πλέον αρμονική διαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος σε δυο άνισα μέρη έτσι ώστε το ένα να μην είναι αντιαισθητικά μεγαλύτερο του άλλου. Δηλαδή να έχουν τόση αντίθεση μεταξύ τους ώστε να μην χάνεται η ενότητα του όλου. Η ονομασία αυτή πιθανότατα να δόθηκε από τον Leonardo Da

Vinci (1452 – 1519), αλλά κατά μια άλλη εκδοχή ‘’χρυσή τομή’’ ονομάστηκε κατά τα μέσα του $19^{ου}$ αιώνα από τον Martin Ohm, νεώτερο αδερφό του γνωστού φυσικού George Ohm, ενώ ο J Kepler την είχε ονομάσει ‘’ιερή γεωμετρία’’.

Στο παρόν κεφάλαιο λοιπόν θα εμβαθύνουμε στο βάθος του χρόνου σχετικά με το πώς ξεκίνησε η ιστορία της χρυσής τομής και του αριθμού Φ αλλά και στον συσχετισμό τους με την περίφημη ακολουθία Fibonacci.

## 3.2 Η Χρυσή τομή και ο αριθμός του Φειδία

Την φράση «**χρυσή τομή**» καθημερινά την χρησιμοποιεί ο άνθρωπος για να δηλώσει ότι βρήκε την κατάλληλη λύση που πρέπει η που ταιριάζει σε κάποιο θέμα. Η φράση όμως αυτή εκτός πολιτική, κοινωνική και οικονομική εφαρμογή έχει και γεωμετρική και είναι γνωστή ως «το γεωμετρικό πρόβλημα της Χρυσής Τομής» .

Ο χρυσός αριθμός **Φ** λοιπόν ανιχνεύθηκε για πρώτη φορά από τους αρχαίους Έλληνες και συγκεκριμένα από τους Πυθαγόρειους οι οποίοι ήταν οι πρώτοι που παρατήρησαν πως όλα πάνω στην γη, από το φυτικό βασίλειο έως και τον άνθρωπο, αναπτύσσονται βάσει μιας αναλογίας.

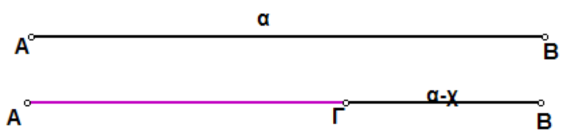
Ο αριθμός αυτός όπως είπαμε ανακαλύφθηκε από τους Πυθαγόρειους και έχει πάρει το συμβολισμό αυτό προς τιμή του γλύπτη Φειδία ($5^{ος}$ αιώνας π. Χ) ο οποίος ήταν και ο πρώτος που τον χρησιμοποίησε. Την χρυσή τομή εισήγαγε και υπολόγισε ο Πυθαγόρας (585-500 π. Χ) που γεννήθηκε στην Σάμο, και ορίζεται ως το πηλίκο των θετικών αριθμών $\frac{\alpha}{\beta}$ όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}$ που ισούται περίπου με 1,618.

Ο Πυθαγόρας λοιπόν ήταν ο πρώτος που διατύπωσε τον μαθηματικό ορισμό της αναλογίας χρησιμοποιώντας δύο ευθύγραμμα τμήματα.

Επαναλαμβάνουμε λοιπόν εδώ το γεωμετρικό πρόβλημα που πρωτοαναφέραμε στην παράγραφο 2.2 για να το μελετήσουμε με περισσότερη λεπτομέρεια

**Πρόβλημα**

Ένα δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα να διαιρεθεί σε δυο άνισα μέρη από τα οποία το μεγαλύτερο να είναι μέσο ανάλογο του μικρότερου μέρους και ολόκληρου του τμήματος.




Σχήμα 5

**Λύση**

Έστω ΑΒ=α το μήκος του δοσμένου ευθύγραμμου τμήματος και έστω Γ το ζητούμενο σημείο διαιρέσεως. Έστω ότι το μήκος του μεγαλυτέρου τμήματος ΑΓ είναι χ τότε ΓΒ = α-χ. πρέπει λοιπόν να ισχύει η σχέση:

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{\Gamma B}\ (1)$$

ή

$$A\Gamma^2 = AB \cdot \Gamma B$$

ή

$$\chi^2 = \alpha(\alpha - \chi)$$

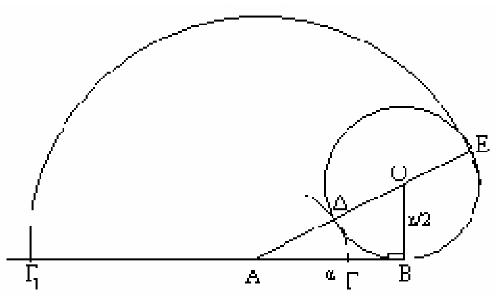
ή

$$\chi^2 + \alpha\chi - \alpha^2 = 0$$

Μια άλλη διατύπωση του προβλήματος είναι η εξής:

Να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα από ένα σημείο σε δυο άνισα μέρη έτσι ώστε ο λόγος ολόκληρου του ευθύγραμμου τμήματος προς το μεγαλύτερο μέρος να είναι ίσος με το λόγο του μεγάλου αυτού μέρους προς το μικρότερο.

Η κατασκευή λοιπόν του άγνωστου ευθύγραμμου τμήματος χ γίνεται ως εξής:




<u>Σχήμα 6</u>

Φέρνουμε κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στο σημείο Β. Στην κάθετη αυτή παίρνουμε τμήμα $BO = \frac{\alpha}{2.}$. Με κέντρο Ο και ακτίνα $\frac{\alpha}{2}$ γράφουμε κύκλο. Φέρνουμε το ΑΟ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ και Ε. Το μήκος ΑΔ είναι το ζητούμενο μήκος χ διότι είναι

$$A\Delta \cdot AE = AB^2$$

ή

$$\chi(\chi + \alpha) = \alpha^2 \text{ (είναι ΑΔ=χ, ΑΕ= χ+α,} AB^2 = \alpha^2)$$

ή

$$\chi^2 + \alpha\chi - \alpha^2 = 0$$

ή

$$\chi^2 = \alpha(\alpha - \chi).$$

Με κέντρο Α και ακτίνα ΑΔ γράφουμε κύκλο που τέμνει το ΑΒ στο Γ (είναι ΑΓ=ΑΔ). Το σημείο Γ είναι το ζητούμενο σημείο.

**Παρατήρηση**

Η σχέση $ΑΔ \cdot ΑΕ = ΑΒ^2$ γράφεται:

$$(ΑΕ - ΔΕ)ΑΕ = ΑΒ^2$$

ή

$$ΑΕ^2 = ΑΕ \cdot ΔΕ + ΑΒ^2$$

Είναι ΔΕ=ΑΒ=α. Άρα $ΑΕ^2 = ΑΕ \cdot ΑΒ + ΑΒ^2$

ή

$$ΑΕ^2 = ΑΒ(ΑΕ + ΑΒ).$$

Παίρνουμε επί της ΒΑ προς το μέρος του Α, $ΑΓ_1$=ΑΕ, οπότε

$$ΑΓ_1^2 = ΑΒ(ΑΓ_1 + ΑΒ)$$

ή

$$ΑΓ_1^2 = ΑΒ \cdot ΒΓ_1 \ (2)$$

ή

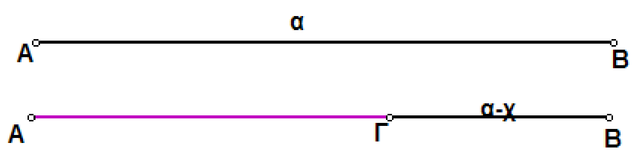
$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ_1} = \frac{ΑΓ_1}{ΒΓ_1} \ (3).$$

Η (3) δηλώνει ότι το σημείο $Γ_1$ διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε μέσο και άκρο λόγο εξωτερικά.

**Ο χρυσός αριθμός φ**

Θεωρούμε την σχέση της χρυσής τομής :

$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΑΓ}{ΓΒ} \ (1)$$




Σχήμα 7

Αν ΑΒ=α, ΑΓ=χ τότε ΒΓ=α-χ. Η (1) λοιπόν γράφεται:

$$\chi^2 = \alpha(\alpha - \chi)$$

ή

$$\chi^2 + \alpha\chi - \alpha^2 = 0$$

ή

$$\left(\frac{\chi}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\chi}{\alpha}\right) - 1 = 0,$$

οπότε έχουμε

$$\frac{\chi}{\alpha} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \qquad (2)$$

ή

$$\frac{\chi}{\alpha} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Η ρίζα $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ = 0,6180339… συμβολίζεται με φ. έτσι λοιπόν φ =0,6180339..

**Παρατήρηση**

Η ισότητα (2) $\frac{\chi}{\alpha} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ γράφεται

$$\frac{\alpha}{\chi} = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}}$$

ή

$$\frac{\alpha}{\chi} = \frac{2(1 + \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5})(-1 + \sqrt{5})}$$

ή

$$\frac{\alpha}{\chi} = \frac{2(1 + \sqrt{5})}{4}$$

ή

$$\frac{\alpha}{\chi} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Άρα είναι

$$\frac{\alpha}{\chi} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{\chi}{\alpha - \chi}.$$

Αν θεωρήσουμε ΑΒ=χ+α, ΑΓ=χ, ΒΓ=α τότε η (1) γράφεται:

$$\chi^2 = \alpha(\alpha + \chi)$$

ή

$$\chi^2 - \alpha\chi - \alpha^2 = 0$$

ή

$$\left(\frac{\chi}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\chi}{\alpha}\right) - 1 = 0,$$

οπότε έχουμε

$$\frac{\chi}{\alpha} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

**Παρατήρηση**

Η σχέση $ΑΓ^2 = ΑΒ \cdot ΓΒ$ για ΑΓ=α, ΑΒ=α+β, ΓΒ=β δίνει

$$\alpha^2 = (\alpha + \beta)\beta$$

ή

$$\alpha^2 = \alpha\beta + \beta^2$$

ή

$$\frac{\alpha^2}{\beta} = \alpha + \beta$$

ή

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha}$$

ή

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1 + \frac{\beta}{\alpha} \ (3)$$

Αν θέσουμε τώρα $\frac{\alpha}{\beta} = \chi$,τότε η (3) δίνει:

$$\chi = 1 + \frac{1}{\chi}$$

ή

$$\chi^2 - \chi - 1 = 0$$

ή

$$\chi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ή } \chi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Ο αριθμός $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339$ ονομάζεται χρυσός αριθμός και συμβολίζεται με το γράμμα Φ. Ανάλογα με την μορφή των εξισώσεων που προκύπτουν από την (1) η τιμή $\frac{\chi}{\alpha}$ είναι ίση με $\pm 1{,}6180339\ldots$ ή $\pm 0{,}6180339\ldots$Οι αριθμοί αυτοί είναι άρρητοι. Είναι επομένως:

$$Φ=1{,}61803398875$$

$$φ=0{,}61803398875$$

Άρα ο αριθμός φ είναι το δεκαδικό μέρος του αριθμού Φ. Μετά από πάρα πολλά χρόνια ο Fibonacci ανακάλυψε μία ακολουθία αριθμών που είχαν την ιδιότητα να εμφανίζουν την χρυσή αναλογία $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Δηλαδή:

Από το προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι

$F_1=F_2=1$ και

$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, για κάθε n=2,3,4,5…… είναι η ακολουθία Fibonacci.

Είναι δηλαδή $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, $F_4=3$, $F_5=5$, $F_6=8$, $F_7=13$,…Η ακολουθία λοιπόν αυτή έχει γενικό όρο:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

ή

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - (-\Phi)^n)\,, n = 1,2,3,\dots$$

Ισχύει ότι

$$\lim\frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618,\dots,$$

Που σημαίνει ότι οι λόγοι

$$\frac{F_2}{F_1},\frac{F_3}{F_2},\frac{F_4}{F_3},\frac{F_5}{F_4},\frac{F_6}{F_5},\dots,$$

Δηλαδή οι λόγοι:

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\dots$$

προσεγγίζουν την τιμή Φ=1.6180339..

**Ιδιότητες των αριθμών Φ και φ.**

1. **Είναι** $\boldsymbol{\frac{1}{\Phi} = \varphi}$ ή $\boldsymbol{\Phi = \frac{1}{\varphi}}$ ή $\boldsymbol{\Phi\cdot\varphi = 1}$
2. $\boldsymbol{\Phi^2 = 2 + \varphi = 2{,}618033988}$ **,**
3. $\boldsymbol{\Phi^2 = \Phi + 1,\ \Phi^3 = \Phi^2 + \Phi \dots .\ \Phi^\nu = \Phi^{\nu-1} + \Phi^{\nu-2}}$, **όπου ν θετικός ακέραιος.**
4. $\boldsymbol{\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi^3}\dots\frac{1}{\Phi^\nu} = \frac{1}{\Phi^{\nu+1}} + \frac{1}{\Phi^{\nu+2}}}$, **όπου ν θετικός ακέραιος.**
5. $\boldsymbol{\Phi = 1 + \varphi = 1 + \frac{1}{\Phi}}$
6. $\boldsymbol{\Phi + \frac{1}{\Phi^2} = 2}$
7. $\boldsymbol{\Phi + \varphi = \sqrt{5}}$
8. $\boldsymbol{\Phi = \frac{1}{\Phi - 1}}$
9. $\boldsymbol{\Phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}}$

**10.** $\boldsymbol{\Phi} = \sqrt{\mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{1} + \cdots}}}}$

**11.** $\frac{6}{5}\boldsymbol{\Phi}^{2} = \boldsymbol{\pi}(= \mathbf{3{,}1415} \ldots)$.

Με ακρίβεια 150 δεκαδικών ψηφίων, ο αριθμός αυτός αντιστοιχεί στο νούμερο:

1,6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486227052
6046281890244970720720418939113748475408807538689175212663386222353693
1793180060766

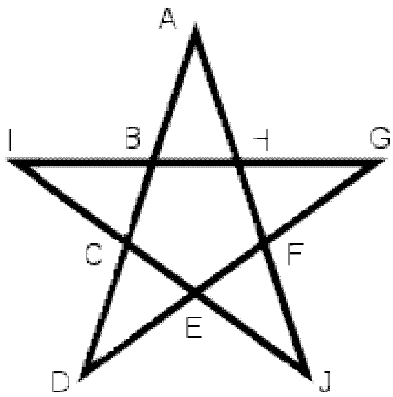
Ο Φ είναι ένα από εκείνους τους αριθμούς που η λειτουργία τους είναι έξω από το ανθρώπινα αντιληπτό και πεδίο ορισμού τους είναι το ιδεατό(παραδείγματα είναι οι αριθμοί π και e). Είναι φανερό ότι οι Πυθαγόρειοι ήξεραν τα πάντα για την χρήση του αριθμού φ γιατί και το πεντάγραμμα (πεντάλφα) που ήταν το σύμβολο της σχολής των πυθαγορείων υπόκειται σε αυτή την αναλογία.

Το Πεντάγραμμα πρωτοεμφανίστηκε στη Μεσοποταμία και στους Σουμέριους. Επίσης χρησιμοποιούσαν συμβολικά στην Αρχαία Ελλάδα και στη Βαβυλωνία. Στους Βαβυλώνιους οι άκρες του πενταγράμμου ήταν και μία κατεύθυνση, «πάνω, κάτω, αριστερά, δεξιά, μπροστά» και επίσης συνδέονταν αυτές οι κατευθύνσεις με τους πέντε πλανήτες: Δίας, Κρόνος, Αφροδίτη, Άρης, Ερμής. Στην Ελλάδα οι πρώτοι που ασχολήθηκαν ενδελεχώς με αυτό το σύμβολο ήταν ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι. Αυτοί ονόμαζαν το πεντάγραμμο Υγίεια ( Αρι-στοφάνης-Νεφέλες ) και έβλεπαν στο σύμβολο αυτό, λόγω των γεωμετρικών του ιδιοτήτων, μια μαθηματική τελειότητα. Οι νεοπυθαγόρειοι συμβόλιζαν τις άκρες του αστεριού (πενταγράμμου) με τα τέσσερα στοιχεία της φύσης και την πέμπτη με το θείο:

1. Ύδωρ
2. Γαία
3. Ιδέα ή Ιερόν
4. ΕΙλή (θερμότητα του ήλιου)
5. Αήρ

Τα αρχικά των λέξεων αυτών σχηματίζουν τη λέξη «Υ-Γ-Ι-ΕΙ-Α».

Η πεντάλφα κατασκευάζεται από ένα κανονικό πεντάγωνο φέρνοντας τις διαγώνιους στο πεντάγραμμο αυτό.




Σχήμα 8

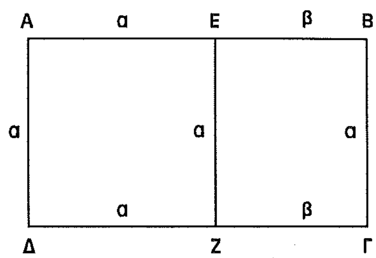
Η πεντάλφα συνδέεται με τη χρυσή τομή *φ*: ο λόγος κάθε ευθύγραμμου τμήματος που εμφανίζεται σε αυτή ως προς το αμέσως μικρότερό του ισούται με τη χρυσή τομή. Σύμφωνα με την εικόνα πάνω είναι

— — — .

**Το χρυσό ορθογώνιο**

Θεωρούμε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε αν από αυτό αφαιρεθεί το τετράγωνο ΑΕΖΔ, τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου ΒΓΖΕ που απομένει να έχουν τον ίδιο λόγο με τα μήκη των πλευρών του αρχικού.

Δηλαδή:




Σχήμα 9

— — **(1).**

Αν η και τότε η (1) γράφεται:

– —, **(2),**

ή

— — — —

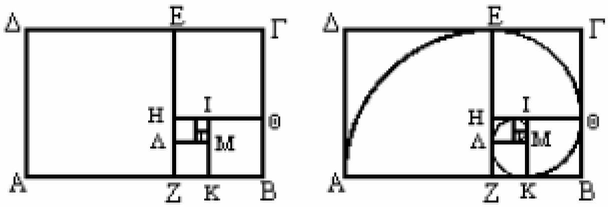
ή

– – **(3).**

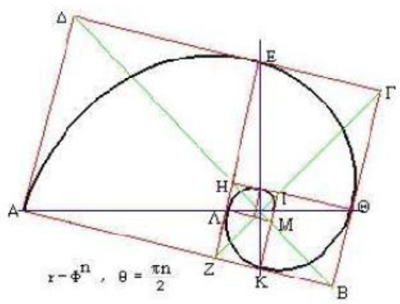
Από την εξίσωση (3) βρίσκουμε ότι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Άρα ο λόγος του μήκους προς το πλάτος του ορθογωνίου ΒΓΖΕ (καθώς και του ορθογωνίου ΑΒΓΔ) είναι ο αριθμός Φ. Ένα τέτοιο ορθογώνιο ονομάζεται χρυσό ορθογώνιο.

**Η χρυσή σπείρα**

Η χρυσή σπείρα κατασκευάζεται στο εσωτερικό ενός χρυσού ορθογωνίου ενώνοντας με εφαπτόμενα εσωτερικά τόξα τα διαδοχικά τετράγωνα που κατά-σκευάζουμε πάνω στις πλευρές κάθε νέου χρυσού ορθογωνίου που απομένει. Ξεκι-νάμε από ένα χρυσό ορθογώνιο ΑΒΓΔ και κατασκευάζουμε πάνω στις πλευρές του το τετράγωνο ΑΖΕΔ, οπότε απομένει μέσα στο αρχικό το μικρό, χρυσό επίσης, ορθογώνιο ΖΒΓΕ. Ανάλογα πάνω στις πλευρές του ΖΒΓΕ κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΕΗΘΓ, οπότε απομένει το νέο χρυσό ορθογώνιο ΗΘΒΖ. Πάνω σε αυτό κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΒΘΙΚ, οπότε απομένει το ορθογώνιο ΖΚΙΗ κ.ο.κ. Δημιουργούμε έτσι μια ακολουθία διαρκώς μικρότερων τετραγώνων στα οποία φέρουμε διαδοχικά τα αντίστοιχα εφαπτόμενα εσωτερικά τόξα στις πλευρές τους (με κέντρο μια αντίστοιχη κορυφή τους και ακτίνα τη πλευρά του τετραγώνου), δημιουργώντας με αυτό το τρόπο μια λογαριθμική καμπύλη που ονομάζεται χρυσή σπείρα (ή έλικα), η οποία εφάπτεται εσωτερικά στις πλευρές αυτών των τετραγώνων.




Σχήμα 10




Σχήμα 11

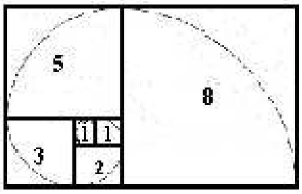
Η λογαριθμική αυτή σπείρα που παράγουν τα περιδυνιζόμενα χρυσά ορθογώνια συγκλίνει στο σημείο τομής των ΒΜ και ΓΖ, των οποίων ο λόγος είναι ο λόγος της χρυσής τομής Φ.

Τα σημεία πάνω στη χρυσή σπείρα ικανοποιούν την εξίσωση r = Φn και θ= n.π/2 σε πολικές συντεταγμένες και τελικά με την απαλοιφή του n: r = Φ2θ/π ή r = Μθ όπου Μ = Φ2/π

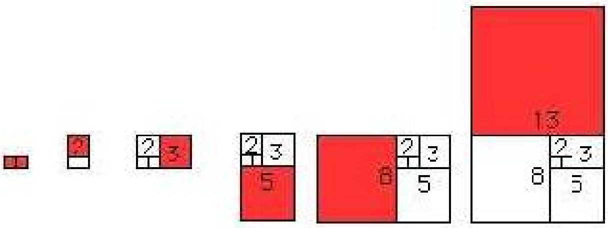
Η πραγματική αυτή σπείρα προσεγγίζεται αρκετά καλά από τη τεχνητή σπείρα που σχηματίζεται από τα τεταρτοκύκλια που εγγράφονται στα διαδοχικά τετράγωνα, όπως κάναμε προηγουμένως (η πραγματική όμως σπείρα τέμνει λίγο τις πλευρές των τετραγώνων αντί να εφάπτεται σε αυτές).

**Τα ορθογώνια και η σπείρα Fibonacci**

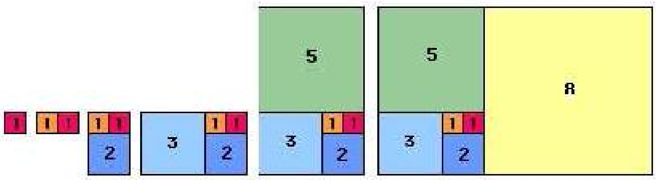
Η ακολουθία Fibonacci μπορεί να δημιουργηθεί γεωμετρικά με μια αντίστροφη διαδικασία από αυτή που χρησιμοποιήσαμε για να σχηματίσουμε μια χρυσή σπείρα ξεκινώντας από ένα χρυσό ορθογώνιο.




Σχήμα 12




Σχήμα 13

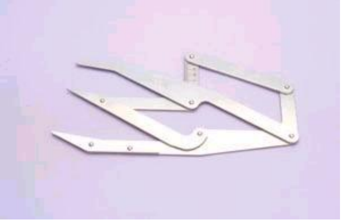



Σχήμα 14

Αρχίζουμε τώρα με ένα τετράγωνο και προσθέτουμε ένα παρόμοιο τετράγωνο για να σχηματίσουμε ένα νέο ορθογώνιο. Συνεχίζουμε να προσθέτουμε τετράγωνα των οποίων οι πλευρές να έχουν το μήκος της μεγαλύτερης πλευράς του ορθογωνίου (δηλαδή κάθε νέο τετράγωνο να έχει πλευρά ίση με το άθροισμα των πλευρών των δυο προηγούμενων από αυτό τετραγώνων). Η μεγαλύτερη αυτή πλευρά θα είναι πάντα ένας διαδοχικός αριθμός Fibonacci. Τα σχηματιζόμενα με αυτό το τρόπο διαδοχικά μεγαλύτερα ορθογώνια λέγονται ορθογώνια Fibonacci και θα πλησιάζουν συνεχώς να γίνουν ένα χρυσό ορθογώνιο. Αν ενώσουμε με τεταρτοκύκλια εσωτερικά αυτά τα τετράγωνα, όπως κάναμε και με τη χρυσή σπείρα, θα πάρουμε αντίστοιχα τη σπείρα Fibonacci. Μια παρόμοια καμπύλη με αυτή συμβαίνει στο κέλυφος ενός μικρού σαλίγκαρου ή μερικών κοχυλιών της θάλασσας. Ενώ η σπείρα των ορθογωνίων Fibonacci αυξάνει περίπου κατά ένα παράγοντα του Φ κάθε τέταρτο της στροφής (και απέχει αντίστοιχα Φ φορές περισσότερο από το κέντρο), στη σπείρα του ναυτίλου αυτό συμβαίνει κάθε μία πλήρη στροφή. Τα σπειροειδή αυτά σχήματα ονομάζονται ισογώνιες ή λογα-ριθμικές έλικες.

**Ο «χρυσός» κανόνας**

Είναι όργανο ρυθμισμένο έτσι ώστε να αντιστοιχεί στην αρχή "χρυσής αναλογίας" (1:1.618) και είναι χρήσιμο για να έχουμε αισθητικά αποτελέσματα.



*Εικόνα 2 Χρυσός κανόνας*

# 4. ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ FIBONACCI ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΑ ΜΑΤΙΑ ΜΑΣ.

## 4.1 Εισαγωγή

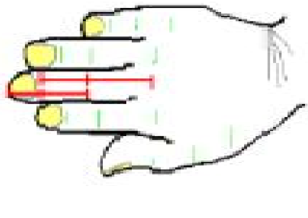
Στο παρόν κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να ανακαλύψουμε τα μυστικά των αριθμών Fibonacci, αλλά και του χρυσού αριθμού Φ που εμφανίζονται, τόσο στον φυσικό , όσο και στον συμπαντικό κόσμο. Ρίχνοντας μια γρήγορη ματιά στο φυσικό περιβάλλον μπορούμε να παρατηρήσουμε την άμεση σχέση που υπάρχει μεταξύ της αναφερόμενης ακολουθίας και του χρυσού αριθμού με τη βοτανολογία, π.χ. τα πέταλα των λουλουδιών, την τέχνη, τα μνημεία, το ανθρώπινο σώμα, ακόμη και ολόκληρο το σύμπαν.

## 4.2 Χρυσή Τομή και αριθμοί Fibonacci στον άνθρωπο

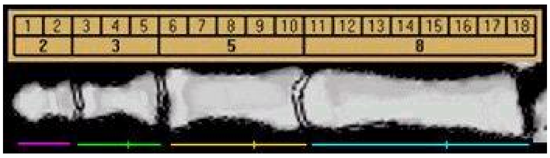
Όπως θα δούμε και παρακάτω για την τέχνη πολλοί καλλιτέχνες, κυρίως ζωγράφοι της Αναγέννησης, μελέτησαν τις αναλογίες στο ανθρώπινο σώμα. Τα συμπεράσματά τους ήταν ιδιαίτερα εντυπωσιακά για την σχέση των αναλογιών στο σώμα μας και την χρυσή τομή.

Ακόμη και σήμερα η χρυσή αναλογία απαντάται σε πλήθος αντικειμένων που φτιάχτηκαν από τον άνθρωπο αλλά ακόμη και στον ίδιο τον άνθρωπο. Ένα παράδειγμα είναι το ίδιο το ανθρώπινο χέρι. Κάθε άνθρωπος έχει δυο χέρια κάθε ένα από τα οποία έχει πέντε δάχτυλα, κάθε δάχτυλο αποτελείται από τρία τμήματα που χωρίζονται από δυο αρθρώσεις δηλαδή αριθμούς της ακολουθίας Fibonacci.

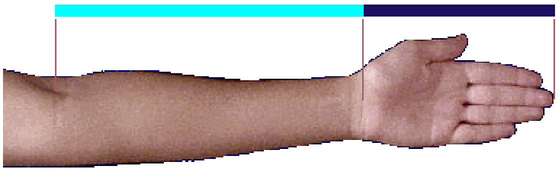
Για ρίξτε τώρα μια καλύτερη και πιο προσεκτική ματιά στα δάχτυλα του χεριού σας. Είστε σίγουροι ότι τα γνωρίζεται καλά; Κάθε δάχτυλο αποτελείται από τρείς φάλαγγες. Συνήθως η μεσαία φάλαγγα είναι 1,618 φορές πιο κοντή από την προηγούμενη και 1,618 φορές πιο μακριά από την επόμενη. Το ίδιο ισχύει με το μηκος του μπράτσου σας σε σχέση με το μήκος του πήχη σας που ισούται με το 1,618, δηλαδή ισούται με την Χρυσή Αναλογία.



*Εικόνα 3 Χρυσή αναλογία δακτύλων*




*Εικόνα 4 Φάλαγγες δείκτη χεριού*

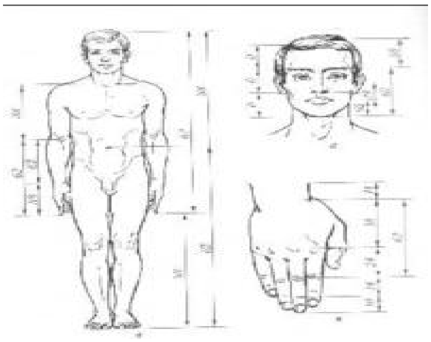


*Εικόνα 5 Διαίρεση του χεριού σε λόγο χρυσής τομής από τον καρπό*

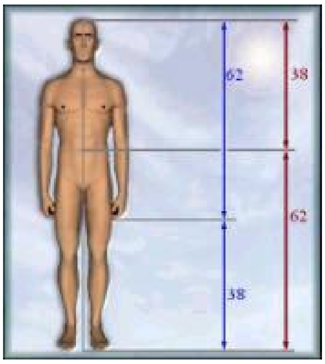
Καταλαβαίνουμε λοιπόν πως το σώμα μας είναι δομημένο και αναπτύσσεται σε αναλογίες Φ. Η απόσταση επίσης ζωτικών οργάνων ( π. χ εγκέφαλος – καρδία, στομάχι, γεννητικά όργανα κ. λ. π) εμπεριέχει αναλογίες Φ. Δεν είναι τυχαίο ότι πολλές "ανατολίτικες θρησκείες" και κινήματα στα πλαίσια της διδασκαλίας τους για διαλογισμό και "αυτοσυγκέντρωση" ή στη "γιόγκα" απαιτούν η στάση του ανθρώπινου σώματος (η οκλαδόν) να γίνεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε τα "κεντρικά – κομβικά" σημεία του σώματος να βρίσκονται σε μία αναλογία μεταξύ τους χρυσή, δηλαδή σε αναλογίες Φ (το Φ υψωμένο σε δυνάμεις 2,3,4 και το αντίστροφο 1/Φ υψωμένο σε δυνάμεις 2,3,4). Εξάλλου είναι γνωστό πως οι περισσότεροι πλαστικοί χειρούργοι στις επεμβάσεις τους χρησιμοποιούν τον χρυσό αριθμό και επιδιώκουν να επιτύχουν αναλογίες βασισμένες στο θεώρημα της Χρυσής τομής και τον Χρυσό αριθμό Φ

Άλλα γνωστά παραδείγματα στο ανθρώπινο σώμα είναι:

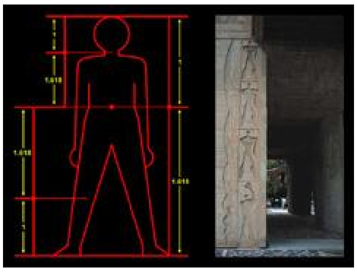
1. Η αναλογία μεταξύ του μήκους και του φάρδους του προσώπου
2. Η αναλογία την απόστασης μεταξύ των χειλιών και του σημείου που σμίγουν τα φρύδια προς το μήκος της μύτης
3. Η αναλογία του μήκους του στόματος προς το φάρδος της μύτης
4. Η αναλογία της απόστασης μεταξύ της γραμμής του ώμου και της κορυφής του κεφαλιού προς το μήκος του κεφαλιού
5. Η αναλογία της απόστασης μεταξύ του ομφαλού και του γονάτου προς την απόσταση μεταξύ του γονάτου και της άκρης του ποδιού
6. Η αναλογία της απόστασης μεταξύ του άκρου του δαχτύλου του χεριού και του αγκώνα προς την απόσταση μεταξύ του καρπού και του αγκώνα.



*Εικόνα 6 Χρυσή τομή σε ολόκληρο το σώμα*



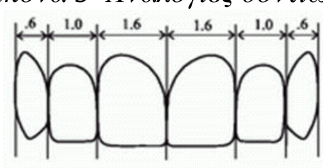

*Εικόνα 7 Η θεϊκή αναλογία στο σώμα*



*Εικόνα 8  Le Modulor*

Ο αρχιτέκτονας Le Corbusier (1887-1965) κατασκεύασε μια κλίμακα αναλογιών που ονόμασε ***Le Modulor***, η οποία βασίζεται στο ανθρώπινο σώμα. Σύμφωνα με αυτή, ο ομφαλός διαιρεί το ανθρώπινο σώμα σε λόγο χρυσής τομής.

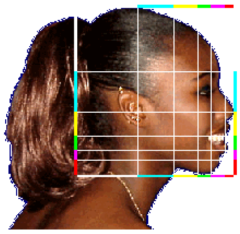
*Εικόνα 9  Αναλογίες δοντίων*




*Εικόνα 10 Χρυσές αναλογίες μεταξύ των δοντιών*

*Εικόνα 11 Η απόσταση μεταξύ των δύο ματιών είναι η απόσταση μεταξύ των «άσπρων του ματιού»*

Το κεφάλι διαμορφώνει ένα χρυσό ορθογώνιο με τα μάτια στο μέσο του. Το στόμα και η μύτη τοποθετούνται στις χρυσές διαιρέσεις της απόστασης μεταξύ των ματιών και του κατώτατου σημείου του πηγουνιού. Το **φ** καθορίζει τις διαστάσεις του ανθρώπινου προφίλ. Ακόμα και όταν βλέπουμε ένα κεφάλι από το πλάι, αυτό ακολουθεί τη χρυσή αναλογία.



*Εικόνα 12 Στο ανθρώπινο πρόσωπο βρίσκουμε άφθονα παραδείγματα του χρυσού λόγου.*

Πέρα όμως από τα επιστημονικά δεδομένα η χρυσή αναλογία, ο αριθμός φ, περιβάλλεται από ένα πέπλο μυστηρίου, κυρίως γιατί εντυπωσιακές προσεγγίσεις του απαντώνται, εντελώς απρόσμενα σε ένα σωρό μέρη στη φύση. Ακόμα και μια τομή του ανθρώπινου DNA φαίνεται να ενσωματώνεται άψογα σε ένα χρυσό δεκάγωνο. Η χρυσή αναλογία και τα σχήματα που σχετίζονται με αυτή συνεχίζουν να κινούν το ενδιαφέρον των μαθηματικών, αλλά και των απλών ανθρώπων.

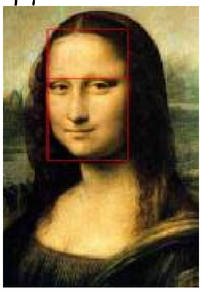
## 4.3 Η χρυσή τομή, στην γλυπτική και στην ζωγραφική

Η γνώση του αριθμού φ και του χρυσού ορθογωνίου ανάγεται στους αρχαίους Έλληνες οι οποίοι βάσισαν πάνω τους το πιο γνωστό έργο τέχνης: ο Παρθενώνας είναι γεμάτος από χρυσά ορθογώνια. Οι μαθητές του μαθηματικού και φιλοσόφου Πυθαγόρα έφταναν στο σημείο να θεωρούν τη χρυσή αναλογία, θεόπνευστη.

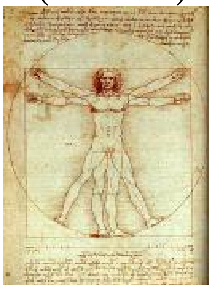
Κατά τον Μεσαίωνα, ενώ το ενδιαφέρον για τη χρυσή τομή ήταν αμείωτο στην αρχιτεκτονική, στη ζωγραφική και τις άλλες τέχνες έμοιαζε πως χάθηκε. Τον $16^{o}$ αιώνα ο Luca Pacioli (1445-1514) γεωμέτρης και φίλος ενός μεγάλου αναγεννησιακού ζωγράφου, «ξαναανακάλυψε» την χρυσή τομή. Το βιβλίο του, όπου μελετούσε τον αριθμό $\Phi$, εικονογραφήθηκε από τον γνωστό καλλιτέχνη Leonardo da Vinci.

Ο Leonardo για αρκετό καιρό έδειξε ένα διακαές ενδιαφέρον για τα μαθηματικά στην τέχνη και την φύση και επιδόθηκε σε συστηματικές μελέτες. Μελέτησε τις αναλογίες του ανθρωπίνου σώματος και ειδικότερα τις αναλογίες στο ανθρώπινο πρόσωπο. Αργότερα ο Leonardo Da Vinci ζωγράφισε το πρόσωπο της Mona Lisa ώστε αυτό να χωράει τέλεια σε ένα χρυσό ορθογώνιο και δόμησε τον υπόλοιπο πίνακα γύρω από το πρόσωπο χωρίζοντάς τον επίσης σε χρυσά ορθογώνια.

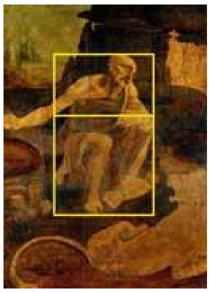
Εργα Leonardo da Vinci (1451-1519)



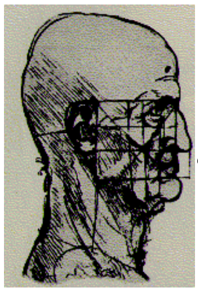
*Mona Lisa*



*Μελέτη αναλογιών σώματος κατά τον Vitruvious*

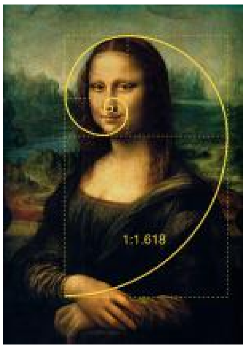


*Άγιος Ιερώνυμος*



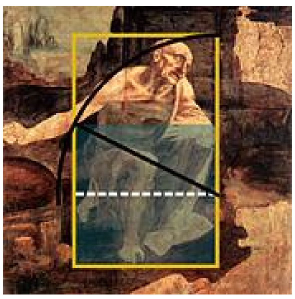
*Μελέτη αναλογιών προσώπου γέρου*

*Εικόνα 13*



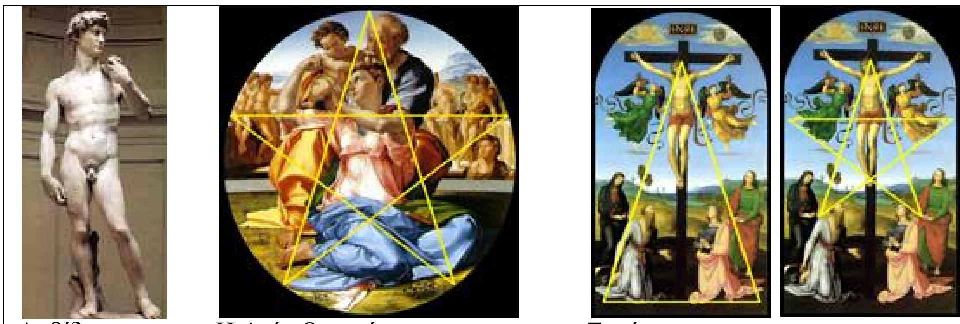

*Εικόνα 14 Η Μόνα Λίζα Leonardo Da Vinci σε σπείρα.*

Το ημιτελές έργο του Λεονάρντο ντα Βίντσι, Saint Jerome, απεικονίζει τον Άγιο Ιερώνυμο με ένα λιοντάρι να ξαπλώνει στο πόδι του. Ένα χρυσό παραλληλόγραμμο ταιριάζει ακριβώς γύρω από την κεντρική φιγούρα. Γι΄αυτό συχνά λέγεται ότι ο καλλιτέχνης σκόπιμα σχεδίασε την φιγούρα ώστε να ταιριάζει σε αυτή την αναλογία. Παρατηρήστε πως η κλασσική υποδιαίρεση του παραλληλόγραμμου στοιχίζεται με το προτεταμένο χέρι του St. Jerome



*Εικόνα 15 Saint Jerome*

Κατά την Αναγέννηση οι καλλιτέχνες άρχισαν να επιστρέφουν στα κλασσικά θέματα της αρχαιότητας για τις εμπνεύσεις τους και τις τεχνικές τους. Θα μπορούσαμε για παράδειγμα να αναφέρουμε τους Michelangelo (1475-1564) και Raphael (1483-1530) οι οποίοι επανέφεραν στις συνθέσεις τους την χρυσή τομή. Ο ομφαλός διαιρεί το σώμα του Δαβίδ του Michelangelo σε λόγο χρυσής τομής.



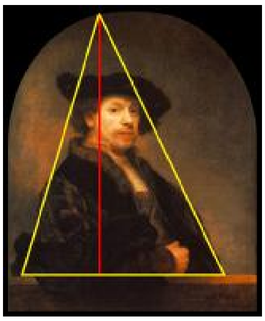

Δαβίδ Η Αγία Οικογένεια Σταύρωση

*Εικόνα 16*

Η ιερή οικογένεια του Michelangelo είναι διακεκριμένο έργο εξαιτίας της αναλογίας των κυρίων φιγούρων οι οποίες σχηματίζουν ένα πεντάγωνο(χρυσό αστέρι)

*Εικόνα 17 Η ιερή οικογένεια.*

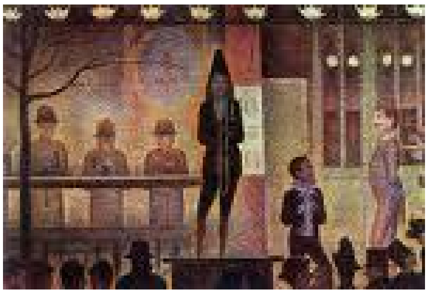
Η αυτοπροσωπογραφία του Rembrandt (1606-1669) είναι ένα παράδειγμα τριγωνικής σύνθεσης που ακολουθεί ένα περίπλοκο πλαίσιο που περιλαμβάνει τρεις ευθείες γραμμές. Τα άνισα μήκη των πλευρών προσθέτουν λίγη διαφορετικότητα. Η κάθετη γραμμή από την κορυφή του τρίγωνου στη βάση τέμνει τη βάση στο σημείο της χρυσής τομής.



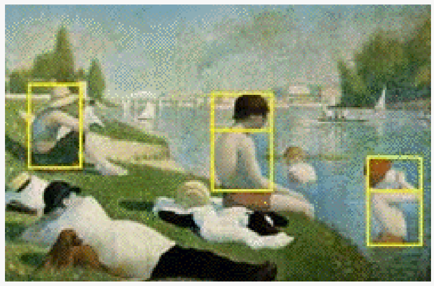
*Εικόνα 18 Rembrandt*

Η πιο πρόσφατη αναζήτηση για μία «γραμματική» στην τέχνη οδήγησε μοιραία τους σύγχρονους καλλιτέχνες στην χρήση της χρυσής τομής. *Η "Παρέλαση"* του Γάλλου νέο-ιμπρεσιονιστή καλλιτέχνη Seurat (1859 – 1891), που χαρακτηρίζεται από το γνωστό του στυλ με τις άπειρες κουκκίδες, περιέχει πλήθος παραδειγμάτων χρυσών αναλογιών.

Σύμφωνα με έναν εμπειρογνώμονα τέχνης, ο Seurat «επιτέθηκε σε κάθε καμβά του με τη χρυσή αναλογία». Σε αυτές τις δύο ζωγραφιές υπάρχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στις γεωμετρικές ομοιότητες επάνω στους καμβάδες του με τις χρυσές υποδιαιρέσεις.



*Εικόνα 19 Η Παρέλαση*



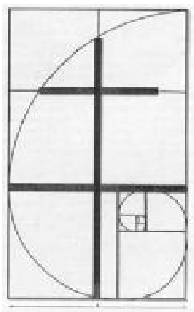
*Εικόνα 20 Bathers*

Το έργο Bathers έχει χρυσές υποδιαιρέσεις. Τρεις ‘‘χρυσές’’ φιγούρες έχουν τοποθετηθεί εκεί.

Ο *Μυστικός Δείπνος* του Salvador Dali (1904-1989) πλαισιώνεται από ένα χρυσό ορθογώνιο. Χρυσοί λόγοι χρησιμοποιήθηκαν για να καθορίσουν την θέση κάθε φιγούρας ενώ ο θόλος του δωματίου σχηματίζεται από τις έδρες κανονικού δωδεκάεδρου που είναι ένα από τα στερεά που συνδέεται άμεσα με την χρυσή τομή.

*Εικόνα 21Salvador Dali Ο Μυστικός Δείπνος*

Όμως ακόμα και ο χριστιανικός σταυρός αποτελείται από δύο κάθετες μεταξύ τους γραμμές με την αναλογία ανάμεσα στην κατακόρυφη και την οριζόντια να μην είναι άλλη από τον αριθμό Φ.



*Εικόνα 23 Σταυρός*

## 4.4 Το Φ στην μουσική

Είναι αξιοπρόσεκτο πως και η μουσική δεν έμεινε ανεπηρέαστη από την χρυσή τομή. Αγνοούμε όμως αν αυτό έγινε συνειδητά ή ασυνείδητα. Παρατηρούμε και εδώ στα έργα των μεγάλων συνθετών όπως του Μότσαρτ ή του Μπετόβεν να υπάρχει μία διαίρεση των συνθέσεων σε λόγους χρυσής τομής. Διάφοροι συνθέτες έχουν χρησιμοποιήσει τους αριθμούς Fibonacci στις μουσικές τους συνθέσεις. Ο Trudi Hammel Garland αναφέρει πολλά ανάλογα παραδείγματα στο κεφάλαιο για τη μουσική του βιβλίου του Fascinating Fibonaccis (Dale Seymours publications, 1987).

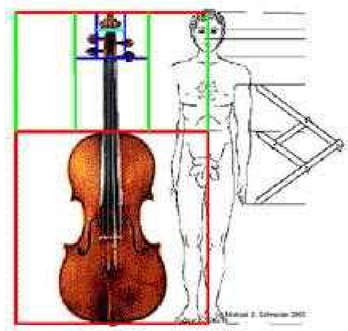
Για να το κατανοήσουμε αυτό καλύτερα, ας δούμε ένα παράδειγμα από την Πέμπτη συμφωνία του Μπετόβεν: Το περίφημο μοτίβο της διαιρεί την πρώτη πράξη, όπως φαίνεται και από το παρακάτω σχεδιάγραμμα, σε λόγο χρυσής τομής. Τα μέτρα που αναφέρονται είναι μουσικά μέτρα.

Πίνακας 5

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Μοτίβο 5 μέτρα | 372 μέτρα | Μοτίβο 5 μέτρα | 228 μέτρα | Μοτίβο 5 μέτρα |
| **X** | | | **Y** | |

Βλέπουμε την πρώτη πράξη να αποτελείται από το μοτίβο (5 μέτρα), ένα μουσικό τμήμα 372 μέτρα, ξανά το μοτίβο, ένα τμήμα 228 μέτρα και ολοκληρώνεται με το μοτίβο. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον λόγο του Χ μουσικού τμήματος προς το Υ, θα έχουμε:

1. **X = 372 + μοτίβο = 372 + 5 = 377**
2. **Y = 228 + μοτίβο = 228 + 5 = 233**
3. **X/Y = 233 / 377 = 1.618 (που είναι ο λόγος χρυσής τομής.)**



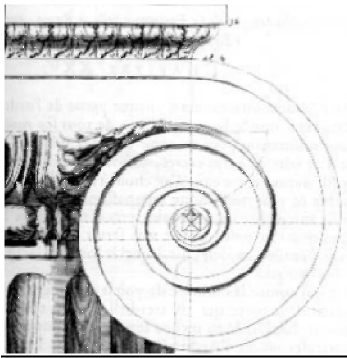
*Εικόνα 22 Μουσική και Φ*

Ο Mozart επίσης διαίρεσε μεγάλο αριθμό από τις σονάτες του σε δύο μέρη, η χρονική αναλογία των οποίων αντιστοιχεί στη χρυσή τομή, τον αριθμό φ, αν και υπάρχει σημαντική διχογνωμία για το κατά πόσο αυτό έγινε σκόπιμα. Πιο πρόσφατα ο

Ούγγρος συνθέτης Mela Bartok (και ο Γάλλος αρχιτέκτονας Le Corbusier) χρησιμοποίησε σκόπιμα τη χρυσή αναλογία στα έργα τους.

## 4.5Το Φ στην Αρχιτεκτονική

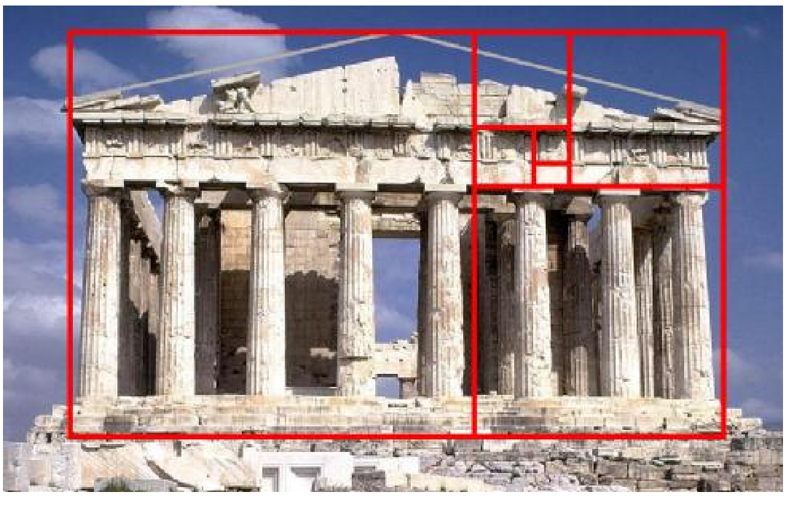
Φυσικά η επιρροή του λόγου χρυσής τομής ήταν τεράστια σε όλο τον αρχαίο ελλαδικό χώρο. Οι αρχαίοι Έλληνες κατασκεύαζαν σχεδόν όλα τους τα κτίσματα αλλά και τις διακοσμήσεις τους, με τον κανόνα της χρυσής τομής. Ίσως ο Παρθενώνας είναι το πιο χαρακτηριστικό και αρμονικό παράδειγμα.



*Εικόνα 24*
*Χρυσή σπείρα σε αρχαίο ελληνικό κιονόκρανο.*

Ο Παρθενώνας είναι μάλλον το καλύτερο παράδειγμα μαθηματικής προσέγγισης στην τέχνη. Ο αρχαίος ναός ταιριάζει ακριβώς σε ένα χρυσό παραλληλόγραμμο. Οι υποδιαιρέσεις του παραλληλόγραμμου ευθυγραμμίζονται ακριβώς στο μεγαλύτερο μέρος τους με την αρχιτεκτονική δομή του κτίσματος.

Η αναλογία του μήκους του κτηρίου προς το ύψος της πρόσοψης είναι **Φ**, η χρυσή τομή . Υπάρχει ένας άρτιος αριθμός στυλοβατών κατά μήκος του μετώπου, οι οποίοι είναι οκτώ, και ένας περιττός αριθμός κατά μήκος των πλευρών, που είναι δεκαεπτά Ο Παρθενώνας για αυτούς τους λόγους, θεωρείται και ως ‘’τέλειο κτήριο‘’

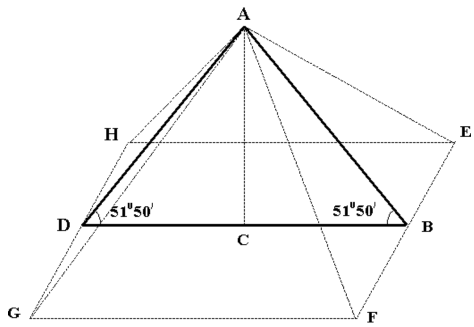


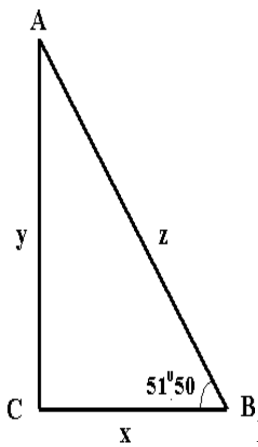
*Εικόνα 25 Παρθενώνας*

«Χρυσή τομή» επίσης ονομάζουμε και τη σχέση 4:9 που κυριαρχεί στον Παρθενώνα. Για παράδειγμα το πλάτος του στυλοβάτη προς το μήκος του, η διάμετρος των κιόνων προς το μεταξόνιο (1,905μ:4,296μ), το ύψος του ναού προς το πλάτος του (13,72μ:30,88=4:9), το πλάτος του κυρίως ναού προς το μήκος του. ενώ το πλάτος του ναού προς το ύψος έχουν μια σχέση 16:81, δηλ. 42:92 . Ο αριθμός **Φ** εμφανίζεται σε πολλές ακόμη αρχαιοελληνικές κατασκευές όπως στο αρχαίο θέατρο της Επιδαύρου όπου το κάτω διάζωμα έχει 34 κερκίδες ενώ το άνω 21. Παρατηρούμε λοιπόν πως 34/21 = (34+21)/34=1.618

Η χρήση του αριθμού φ στην αρχαιότητα είναι εντυπωσιακή. Ο αρχαίος Αιγυπτιακός πολιτισμός είναι ένας από τους πολιτισμούς που χρησιμοποίησαν τα μαθηματικά στη τέχνη. Είναι σχεδόν βέβαιο ότι απέδιδαν μαγικές ιδιότητες στην χρυσή τομή – χρυσό λόγο και φαίνεται η χρήση του στο χτίσιμο των μεγάλων πυραμίδων.

Αν εξετάσουμε την Μεγάλη Πυραμίδα της Γκίζας θα παρατηρήσουμε πως εάν την τμήσουμε κάθετα θα πάρουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, γνωστό και ως Αιγυπτιακό Τρίγωνο.

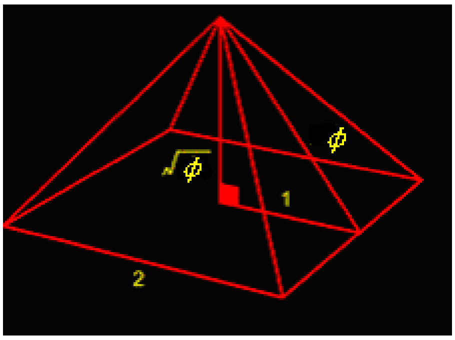


**Χρυσό ορθό τρίγωνο**

Ο λόγος του ύψους της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας (υποτείνουσα του τριγώνου) προς την απόσταση της πλευράς από το κέντρο (μισή πλευρά της βάσης DC=CB) είναι 1,61804… που διαφέρει από τον αριθμό $\phi$ στο πέμπτο δεκαδικό ψηφίο δηλαδή κατά 0,00003.

Αυτό λοιπόν σημαίνει ότι αν η πλευρά της βάσης είναι 2 μονάδες μήκους, τότε το ύψος ενός από τα τέσσερα τρίγωνα (AGF, AHG, HAE, AFE) που απαρτίζουν την παράπλευρη επιφάνεια της πυραμίδας είναι $\phi$, ενώ το ύψος της πυραμίδας είναι ¯, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχεδιάγραμμα.(βλέπε σελίδα 39, ιδιότητα 3)




*Εικόνα 26  Πυραμίδα της Γκίζας.*

**Μεσαιωνικά οικοδομήματα και άλλες μορφές τέχνης**

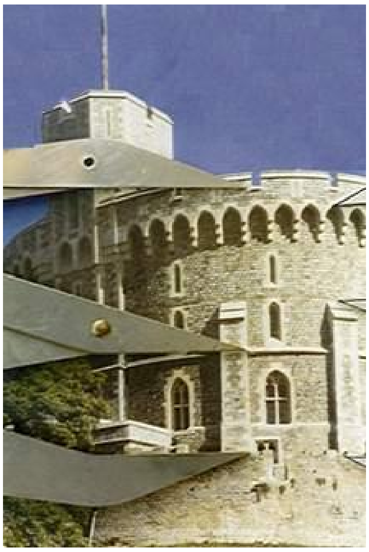
Και στον Μεσαίωνα, οι αρχιτεκτονικές τάσεις ήταν και πάλι η τήρηση των χρυσών αναλογιών τόσο στις εξωτερικές διαρρυθμίσεις των κτιρίων όσο και στις εσωτερικές διακοσμήσεις τους. Οι μεσαιωνικοί οικοδόμοι των εκκλησιών και των καθεδρικών ναών πλησίασαν πολύ με το σχέδιο των κτηρίων τους αυτά των Ελλήνων. Μια καλή γεωμετρική δομή ήταν ο στόχος τους. Μέσα και έξω, τα κτήρια τους ήταν περίπλοκες κατασκευές βασισμένες στη χρυσή τομή.


*Εικόνα 27Παράθυρο Αναγέννησης*

*Εικόνα 28 Το Σινικό τείχος της Κίνας*

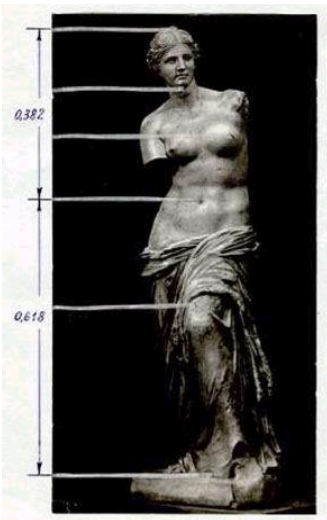
Ο

*Εικόνα 28 Θόλος του Αγίου Παύλου Λονδίνο*



*Εικόνα 29 Το κάστρο του Windsor*

*Εικόνα 30 Σπείρες στην αρχιτεκτονική και Εικόνα 31 Το Μεγάλο Τζαμί, Σαμάρα, Ιράκ.*




*Εικόνα 32 Αφροδίτη της Μήλου*

*Εικόνα 33 Διακόσμηση από τον πολιτισμό των Ατζέκων*

## 4.6 Το Φ στον χρόνο

### Μάγια και χρυσή τομή

Η ύπαρξη του αριθμού **Φ** και των αριθμών Fibonacci, όπως είδαμε πιο πάνω εμφανίζεται στο ανθρώπινο σώμα, σε διάφορες μορφές τέχνης αλλά ακόμη και σε κάποια από τα σπουδαιότερα μνημεία του κόσμου. Πως όμως θα μας φαινόταν αν μαθαίναμε πως ένας ακόμη αρχαίος πολιτισμός είχε εντάξει τους αριθμούς Fibonacci και την χρυσή τομή στο χρόνο;

Οι Μάγια είναι ένας λαός Ινδιάνων της Κεντρικής Αμερικής οι οποίοι είχαν αναπτύξει έναν από τους λαμπρότερους πολιτισμούς του Δυτικου Ημισφαιρίου. Οι ρίζες του πολιτισμού αυτού φτάνουν αρκετά πίσω στην προϊστορία, πέρα από τα 2000 π.Χ. όπου αντιστοιχεί η Αρχαϊκή περίοδος. Ήταν ένας πολιτισμός που ειδικευόταν στην γεωργία, στην αρχιτεκτονική ( δείγματα της οποίας έχουμε αρκετά εφόσον έφτιαξαν πυραμίδες, ναούς, άλλα κτίρια που στολίστηκαν με αξιοθαύμαστα κομψά σχέδια, γλυπτά και ζωγραφιστά), στην κατεργασία μετάλλων αλλά και στην αστρονομία. Τα αρχαιολογικά μνημεία που διασώθηκαν μέχρι τις μέρες μας, μας επιτρέπουν να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι ο πολιτισμός τους έφτανε στο επίπεδο των περισσότερο γνωστών πολιτισμών της αρχαιότητας, της Ελλάδας, Αιγύπτου, Ινδίας κ.ά.

Ένα από τα θέματα με τα οποία καταπιάστηκαν οι Μάγιας ήταν και η έννοια του χρόνου αλλά και ο χρόνος σαν μονάδα μέτρησης για τον άνθρωπο. Γνωρίζουμε ότι η κυκλική αντίληψη του χρόνου ήταν κοινή σε όλους τους αρχαίους λαούς και μας την έχει εξηγήσει από το 1949 ο ρουμάνος θρησκειολόγος Μίρτσεα Ελιάντε: «*Ο αρχαϊκός άνθρωπος δεν φέρει το άχθος του χρόνου, δεν καταγράφει το ανεπίστρεπτο του χρόνου. Με το να βλέπει μια κυκλική κίνηση στον χρόνο αναιρεί το ανεπίστρεπτό του. Το παρελθόν δεν είναι παρά η πρόβλεψη του μέλλοντος. Κατά κάποιο τρόπο μπορεί κανείς να πει ότι τίποτε το νέο δεν συμβαίνει στον κόσμο (του)*». Και καταλήγει, αφού αναφερθεί στον Πλάτωνα και στους Στωικούς: «*Ο συμπαντικός χρόνος είναι επανάληψη και ανακύκλωση, διηνεκής επιστροφή*» (βλ. «Le Mythe de l'ιternel retour: archetypes et retypes et rιpιtition, Mircea Eliade, 1949).

Ένα από τα πράγματα που εντυπωσίασε τους μελετητές των Μάγιας δεν ήταν απλώς η αντίληψή τους για περιοδική επανάληψη της Ιστορίας αλλά η ένταση με την οποία τη ζούσαν. Μια σημαντική ωστόσο παρατήρηση-επέκταση στο παραπάνω σκεπτικό έκανε ο αμερικανός καθηγητής του Πανεπιστημίου J. Madison, Gordon Fisher, στο δοκίμιό του «Nothing New Under the Sun: Cycles, Eternal Returns, Immortality»: «*Πολλή από την επιστήμη (που γνωρίζουμε σήμερα) αναπτύχθηκε μέσω αυτής της παρατήρησης των κατά τα φαινόμενα διηνεκών κύκλων των ουρανίων σωμάτων. Αλλά μπορεί να επισημάνει κανείς ότι χρειάστηκε ο διαχωρισμός τους από τις θρησκευτικές πεποιθήσεις (για να γίνουν επιστήμη). Η αρχή ενός τέτοιου διαχωρισμού καταγράφεται στην Ελλάδα του 5ου αιώνα π.Χ., αλλά ποιος ξέρει πότε άρχισε πραγματικά αυτός ο διαχωρισμός;*».

*Εικόνα 34 Μάγιας*

**Η χρυσή τομή του χρόνου**

Οι ουσιαστικές απαντήσεις στο γιατί οι Μάγιας έδειχναν τέτοια απόλυτη πίστη στο ότι τα πάντα επαναλαμβάνονται δόθηκαν όταν αποκαλύφθηκε από τους σωζόμενους κώδικες ο μηχανισμός των ημερολογίων τους. Συγκεκριμένα, το «ημερολόγιο τζόλκιν» ήταν σεληνιακό ημερολόγιο προσαρμοσμένο στο εικοσαδικό αριθμητικό τους σύστημα και στον κύκλο σοδειάς του Γιουκατάν: έτος 260 ημερών - όσες και οι ημέρες της ανθρώπινης κυοφορίας , μοιρασμένο σε μήνες των 20 ημερών, άρα 260/20 = 13 μήνες. Για «κανονικό ημερολόγιο», όμως, είχαν ένα άλλο, το «χαάμπ»: με εκπληκτική για την εποχή τους μαθηματική ακρίβεια μέτρησαν ότι ο κύκλος περί τον Ήλιο συντελείται σε 365,2420 ημέρες. Αυτό τους έδινε σφάλμα μόλις μίας ημέρας κάθε 10.000 χρόνια!

Για να μοιράσουν το έτος σε μήνες, υπολόγισαν 18 μήνες των 20 ημερών, συν πέντε (5) «επαγόμενες» (αρχαιοελληνιστί). Αλλά δεν σταμάτησαν εκεί: μέτρησαν και τις περιοδικές συνόδους του Δία με τον Κρόνο και όρισαν ένα «μακρύ έτος» 20 ετών.

Τέλος, μέτρησαν τον κύκλο της Αφροδίτης σε 584 ημέρες... παρά κάτι ψιλά και κατέγραψαν - στο κείμενο που σήμερα γνωρίζουμε ως κώδικα της Δρέσδης - ένα ημερολόγιο της Αφροδίτης διάρκειας 400 ετών. Στον κώδικα του Μεξικού (γνωστός ως Grolier) κατέγραψαν επίσης ένα ημερολόγιο της Αφροδίτης, αλλά με πολύ πιο λεπτομερή τρόπο. Όταν το αποκρυπτογράφησαν οι μελετητές, συνειδητοποίησαν ότι είχαν μπροστά τους το μοναδικό παγκοσμίως ημερολόγιο που προέβλεπε την εμφάνιση και την απόκρυψη της Αφροδίτης από τον ορατό ουρανό, σε διάστημα 1.352 ετών!

**Ο ρόλος τού Φ**

Οι εκπλήξεις από τα ευρήματα των Μάγιας δεν τελειώνουν εδώ. Διαπιστώθηκε ότι είχαν παρατηρήσει πως 52 έτη των 365 ημερών ισοδυναμούσαν με 73 έτη των 260 ημερών, δηλαδή συνέπιπταν κάθε 18.980 ημέρες. Με το πάθος υπολογισμού που τους διέκρινε, οι ιερείς προεξέτειναν τον υπολογισμό των συμπτώσεων, προς το μέλλον και το παρελθόν, παρατηρώντας και τις συμπτώσεις επανάληψης των ουρανίων φαινομένων. Έτσι έφθασαν στην απόλυτη πεποίθηση ότι τα πάντα επαναλαμβάνονται.

Η μονομανής αυτή ενασχόλησή τους με τον χρόνο θα απασχολούσε σήμερα ίσως μόνο τους αρχαιοαστροφυσικούς, αν οι ιερείς των Μάγιας δεν είχαν εμπλέξει στα ημερολόγιά τους τον... Χρυσό Αριθμό και δεν είχαν σημειώσει στους κώδικές τους μία αρχή και ένα τέλος του χρόνου!

Για το πρώτο, ήταν αρκετά μια παρατήρηση «Μαγιολόγων» ότι όλοι οι σημαδιακοί αριθμοί των ημερολογίων τους ήταν πολλαπλάσια του φοβερού Φ (του γνωστού αριθμού 1,6180339... που καθορίζει τη Χρυσή Αναλογία του Φειδία, τη συμπαντική αρμονία των Πυθαγορείων, τη Χρυσή Τομή του Λεονάρντο Ντα Βίντσι, την Ακολουθία του Fibonacci και τις μύριες εφαρμογές τους από τα αρχιτεκτονικά μνημεία και τις σπείρες των κοχυλιών ως τον τρόπο ανάπτυξης των φυτών και των ελίκων του DNA μας, ή τον τρόπο έλξης των γαλαξιών). Για παράδειγμα, οι αριθμοί 13, 52, 104 που κυριαρχούν στα ημερολόγια των Μάγιας είναι: 13=8Φ, 52=32Φ, 104=64Φ.

Αυτές όμως οι εντυπωσιακές συμπτώσεις δεν είναι ίσως παρά απλά παράγωγα μίας και μόνης σύμπτωσης, η οποία αναπόφευκτα κυριαρχεί σε ένα ημερολογιακό σύστημα εξαρτημένο από την κίνηση της Γης και της Αφροδίτης: ο κύκλος της Αφροδίτης περί τον Ήλιο διαρκεί περίπου 224,695 ημέρες, εκείνος της Γης κάπου 365,240 ημέρες, και ο μεταξύ τους λόγος είναι 224,695/365,240=0,615... δηλαδή φ!

## 4.7 Στη Φύση

Ο Πυθαγόρας πρώτος παρατήρησε ότι τα φυτά και τα ζώα δεν μεγαλώνουν τυχαία, αλλά σύμφωνα με ακριβείς μαθηματικούς κανόνες. Δεν είναι τυχαία δηλαδή τα όμορφα σχέδια των λουλουδιών. Οι αρχαίοι Έλληνες βρήκαν ότι τα σχέδια των λουλουδιών βασίζονται σε γεωμετρική αναλογία. Επίσης η ακολουθία κάνει την εμφάνισή της στη διάταξη των φύλων γύρω από το μίσχο. Εμφανίζεται ακόμα και στην ανάπτυξη των βελόνων αρκετών ειδών ελάτου, καθώς επίσης και στη διάταξη των πετάλων στις μαργαρίτες και τα ηλιοτρόπια. Μερικά κωνοφόρα δένδρα παρουσιάζουν τη σειρά αριθμών στη δομή της επιφάνειας των κορμών τους, ενώ τα φοινικόδεντρα στους δακτυλίους.

Όμως πώς προκύπτει αυτή η διάταξη, αυτή η συμμετρία σε σχέση με την ακολουθία. Στην περίπτωση του φυλλώματος μπορεί να σχετίζεται με τη μεγιστοποίηση του χώρου που είναι διαθέσιμος για την ανάπτυξη κάθε φύλλου ή το φώς πρέπει να πέφτει πάνω στο κάθε φύλλο. Η φύση προφανώς δεν προσπαθεί να χρησιμοποιήσει την ακολουθία Fibonacci, αυτή εμφανίζεται ώς το δευτερεύον αποτέλεσμα μιας πολύ βαθύτερης φυσικής διαδικασίας

Εάν οι σχέσεις του Φ με τον κόσμο μας περιορίζονταν στις μαθηματικές του ιδιότητες, τα πράγματα θα ήταν σχετικά απλά. Το περίεργο όμως είναι ότι το Φ ξεπροβάλει και μέσα από τη γεωμετρία της ίδιας της (Φ)ύσης. Τα λεγόμενα χρυσά σπειροειδή, που βασίζονται στο Φ, απαντώνται στις σπείρες οστρακοειδών όπως ο "Ναυτίλος", αλλά και στο σχήμα αρκετών σπειροειδών Γαλαξιών

### Πέταλα λουλουδιών

Πιθανώς οι περισσότεροι από μας δεν έχουν διαθέσει χρόνο να εξετάσουν πολύ προσεκτικά τον αριθμό ή τη ρύθμιση των πετάλων σε ένα λουλούδι. Εάν αποφασίζαμε να τον διαθέσουμε, διάφορα πράγματα θα γίνονταν προφανή. Πρώτα, θα βρίσκαμε ότι ο αριθμός πετάλων σε ένα λουλούδι είναι συχνά ένας από τους αριθμούς Fibonacci. Θα βρίσκαμε συχνά λουλούδια με ένα ή τρία πέταλα και κάπως σπανιότερα με δύο. Υπάρχουν εκατοντάδες είδη, τόσο άγρια όσο και καλλιεργημένα με πέντε πέταλα.

Τα λουλούδια με οκτώ πέταλα δεν είναι τόσο κοινά όπως με τα πέντε, αλλά υπάρχουν αρκετά διάφορα γνωστά είδη. Λουλούδια με δέκα τρία, είκοσι ένα και τριάντα τέσσερα πέταλα είναι επίσης αρκετά κοινά. Μπορούμε να μετρήσουμε στις μαργαρίτες 13, 21, 34, 55, ή και 89 πέταλα. Οι κοινές μαργαρίτες του αγρού έχουν συνήθως 34 πέταλα γεγονός που σίγουρα επηρεάζει το αποτέλεσμα του παιχνιδιού «μ’ αγαπά δεν μ’ αγαπά».

Φυσικά, οποιοδήποτε μέλος από το είδος μπορεί να παρεκκλίνει απ’ αυτόν τον κανόνα, όμως κατά προσέγγιση το πλήθος των πετάλων θα είναι ένας αριθμός

Fibonacci. Υπάρχει περισσότερη πιθανότητα μιας πιθανής παρέκκλισης προς τα κάτω παρά προς τα πάνω, έτσι ώστε το να βρούμε μαργαρίτα με 33 πέταλα είναι πιο πιθανό από το να βρούμε μία με 35. Οι εικόνες που ακολουθούν είναι ενδεικτικές για τους αριθμούς Fibonacci και τα πέταλα λουλουδιών.

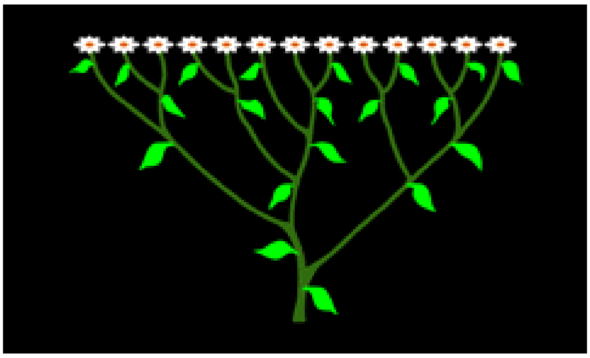
<u>Πίνακας 6</u>

| | |
|---|---|
|  |  |
| *white calla lily (ένα πέταλο)* | *Euphorbia (δύο πέταλα)* |
|  |  |
| *Trillium (τρία πέταλα)* | *Columbine (πέντε πέταλα)* |
|  |  |
| *Bloodroot (οκτώ πέταλα)* | *black-eyed susan (13 πέταλα)* |
|  |  |
| *Μαργαρίτα shasta (21 πέταλα)* | *Μαργαρίτες αγρού (34 πέταλα)* |

## Φυλλοταξία

Με τον όρο **φυλλοταξία** εννοούμε στη βοτανική την διάταξη των φύλλων και των κλώνων στην ανάπτυξη ενός φυτού. Θα προσπαθήσουμε να δείξουμε την άμεση συσχέτιση των αριθμών Fibonacci και με την φυλλοταξία, αφού πρώτα εξηγήσουμε τον μηχανισμό ανάπτυξης των κλώνων και των φύλλων.

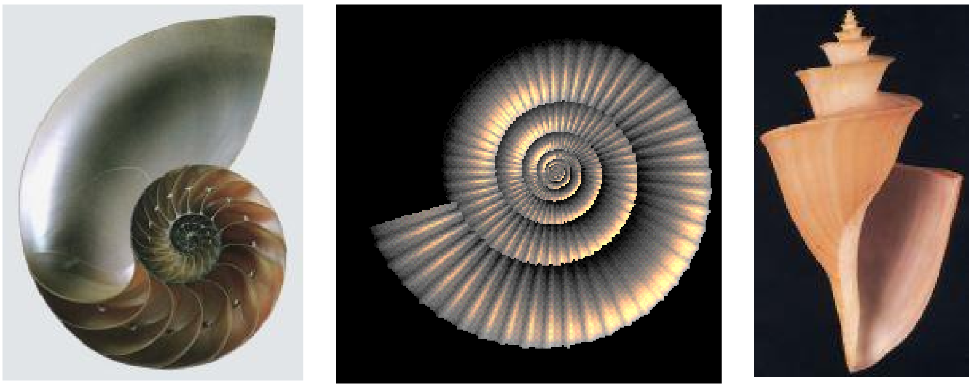
Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζεται ο τρόπος ανάπτυξης των κλώνων και των φύλλων. Οι νέοι βλαστοί αυξάνονται συνήθως από έναν οφθαλμό, ένα σημείο όπου ένα φύλλο αναπηδά από τον βασικό μίσχο ενός φυτού



*Εικόνα 35 Φυλλοταξία*

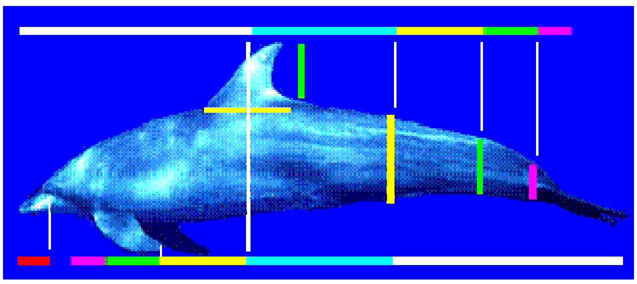
### Σπείρες και χρυσή τομή σε ζωντανούς οργανισμούς

Στο σώμα εντόμων και ζώων μπορούμε να διακρίνουμε λόγους χρυσής τομής. Στις επόμενες εικόνες φαίνονται κάποια από τα χιλιάδες παραδείγματα.

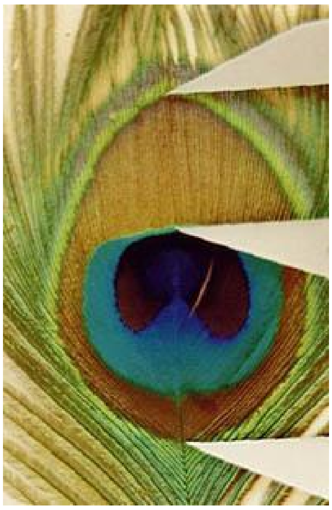


*Εικόνα 36, 37, 38κοχλίες.*

*Εικόνα 39 Μέλισσα*



*Εικόνα 40 Δελφίνι*

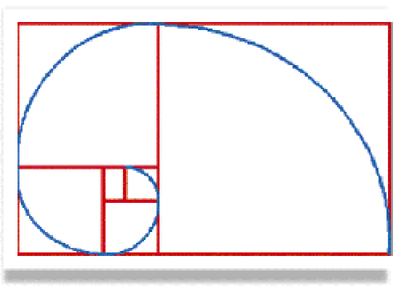


## 4.8 Κοιτώντας το σύμπαν από το τηλεσκόπιο

Οι επιστήμονες έχουν διαπιστώσει με έκπληξη ότι η λογαριθμική σπείρα εμφανίζεται σε σχήματα φυσικών αντικειμένων με εντελώς διαφορετικές ιδιότητες. Στη μικρότερη κλίμακα εμφανίζεται στα όστρακα πολλών θαλάσσιων οργανισμών, όπως για παράδειγμα είναι ο ναυτίλος. Στην ενδιάμεση κλίμακα εμφανίζεται στο σχήμα των κυκλώνων, όπως αποτυπώνεται χαρακτηριστικά στις φωτογραφίες των μετεωρολογικών δορυφόρων.

Τέλος στη μεγαλύτερη δυνατή κλίμακα εμφανίζεται στο σχήμα των σπειροειδών γαλαξιών, τεράστιων σχηματισμών από εκατοντάδες δισεκατομμύρια αστέρια, τους οποίους μπορούμε να απολαύσουμε στις φωτογραφίες των σύγχρονων τηλεσκοπίων.

Ο Πυθαγόρας υποστήριζε ότι αποτελεί μια από τις κρυμμένες αρμονίες της φύσης. Ο Ικτίνος τη χρησιμοποίησε στην κατασκευή του Παρθενώνα και ο Ντα Βίντσι στα υπέροχα γυμνά του. Κανένας όμως δεν μπορούσε να φανταστεί ότι χαρακτηρίζει τη μορφή φυσικών σχηματισμών σε όλες τις κλίμακες των μεγεθών, από τις μικρότερες, όπως είναι τα όστρακα, ως τις μεγαλύτερες, όπως είναι οι κυκλώνες και οι γαλαξίες. Πρόκειται για τη Χρυσή Τομή.



*Εικόνα 41 Σπείρα*

*Η λογαριθμική σπείρα (με μπλε γραμμή) μπορεί να εγγραφεί σε μια άπειρη ακολουθία «χρυσών» ορθογωνίων (με κόκκινη γραμμή)*

## Γαλαξίες

Πολλοί γαλαξίες έχουν σπειροειδή μορφή. Ορίζονται έτσι οι περισσότεροι των γαλαξιών από τη σπειροειδή όψη που παρουσιάζουν. Απαντάται και σ΄ αυτούς ο πυρήνας, που όμως μπορεί να μοιάζει με ελλειπτικό σχήμα ή και με επιμήκη ράβδο. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις από τα άκρα του ραβδωτού ή ελλειψοειδή πυρήνα εκφύονται βραχίονες που ελίσσονται σπειροειδώς περί τον πυρήνα, εξ' ού και σπειροειδείς. Το πλήθος αυτών των γαλαξιών αντιπροσωπεύει το 80% του συνόλου των γνωστών γαλαξιών.

Ανάλογα με το τύπο του πυρήνα ονομάζονται **κανονικοί** σπειροειδείς και συμβολίζονται με το γράμμα **S**, ενώ αν ο πυρήνας είναι ραβδωτός ονομάζονται ραβδωτοί σπειροειδείς και συμβολίζονται με το ζεύγος των γραμμάτων **SB** (B= Bar = Ράβδος). Οι **S** αντιπροσωπεύουν τα 2/3 του συνόλου των σπειροειδών, ενώ οι **SB** το 1/3 των σπειροειδών γαλαξιών

**Sa**: (=γαλαξίας σπειροειδής που οι βραχίονες σχεδόν συσφίγγουν το πυρήνα),

**Sb**: (=γαλαξίας σπειροειδής του οποίου οι βραχίονες αρχίζουν να ανοίγουν),

**Sc**: (=γαλαξίας σπειροειδής με πολύ απομακρυσμένους τους βραχίονες),

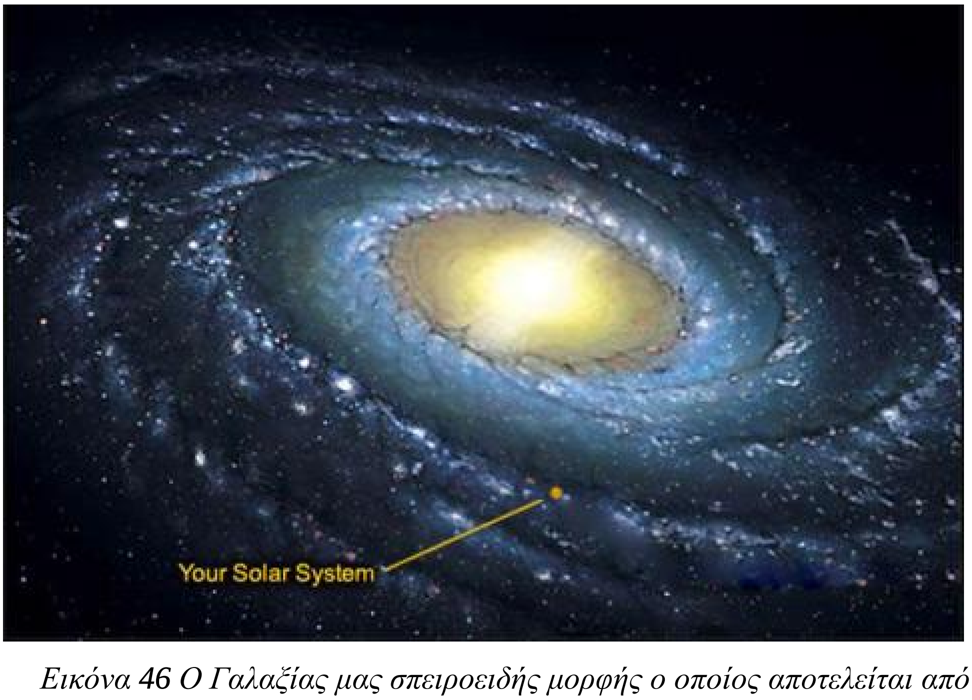
Στους Σπειροειδείς γαλαξίες ανήκει ο Γαλαξίας μας. Μορφολογικά μπορούμε να παρατηρήσουμε ένα κεντρικό εξόγκωμα φτωχό σε αέριο και σκόνη, που περιέχει κυρίως γέρικα άστρα

*Εικόνα 42 NGC 4414, ένας τυπικός σπειροειδής γαλαξίας που έχει διάμετρο γύρω στα 56.000 έτη φωτός και βρίσκεται σε απόσταση περίπου 60 εκατ. έτη φωτός.*

*Εικόνα 43Η πιο λεπτομερής εικόνα που φτιάχτηκε ποτέ για ένα σπειροειδή γαλαξία (οι διαστάσεις της είναι 16.000 επί 12.000 πίξελ) είναι αυτή του διάσημου γαλαξία Ανεμόμυλος ή M101, που ανήκει στην Μεγάλη Άρκτο.*

*Εικόνα 44 Σπειροειδής γαλαξίας Whirlpool.Ο σπειροειδής γαλαξίας (επίσης γνωστός και 51a, M51, ή NGC 5194) είναι ένας από τους διασημότερους σπειροειδείς γαλαξίες στον ουρανό που βρίσκεται σε μια απόσταση περίπου 23 εκατομμύρια έτη φωτός. Ο γαλαξίας και ο σύντροφός του (NGC 5195) παρατηρείται εύκολα και με κιάλια από τους ερασιτέχνες αστρονόμους*

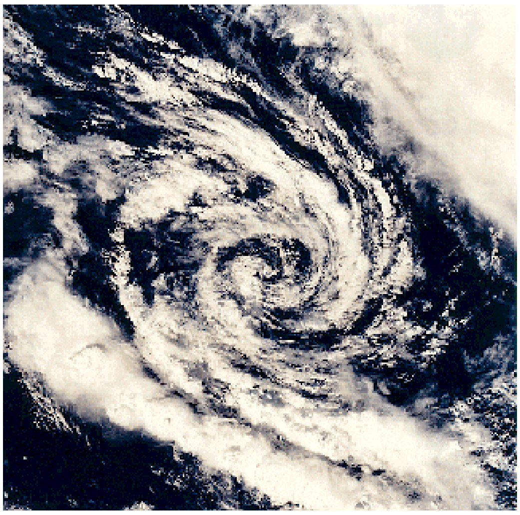
*Εικόνα 45 Οι σπειροειδείς γαλαξίες συγκαταλέγονται στα ομορφότερα αστρονομικά αντικείμενα. Οι περισσότεροι, όπως ο NGC 1097 (αριστερά), έχουν ένα κεντρικό ορθογώνιο ή «ράβδο» αστέρων. Άλλοι, όπως ο Messier 51 (δεξιά) δεν έχουν. Και οι δύο τύποι αποτελούνται από ένα πεπλατυσμένο περιστρεφόμενο δίσκο αστέρων, αερίων και σκόνης. Οι ράβδοι και οι βραχίονες είναι περιοχές μεγαλύτερης πυκνότητας*



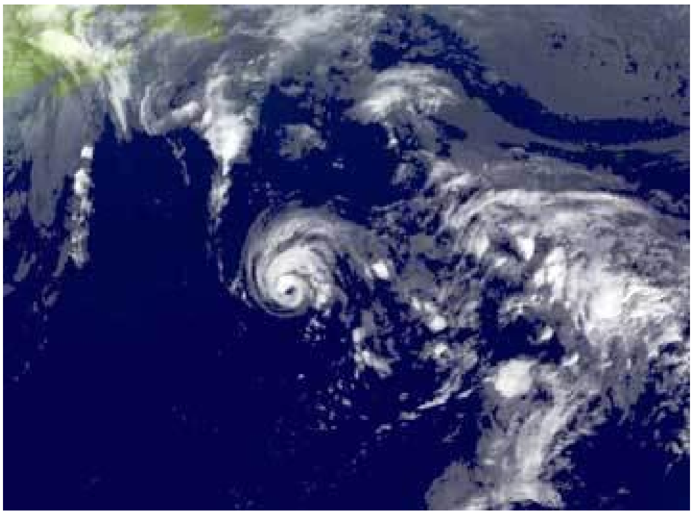

*Εικόνα 46 Ο Γαλαξίας μας σπειροειδής μορφής ο οποίος αποτελείται από περίπου 200 ΔΙΣΕΚΑΤΟΜΜΥΡΙΑ Αστέρια (ήλιους)*

## Κυκλώνες

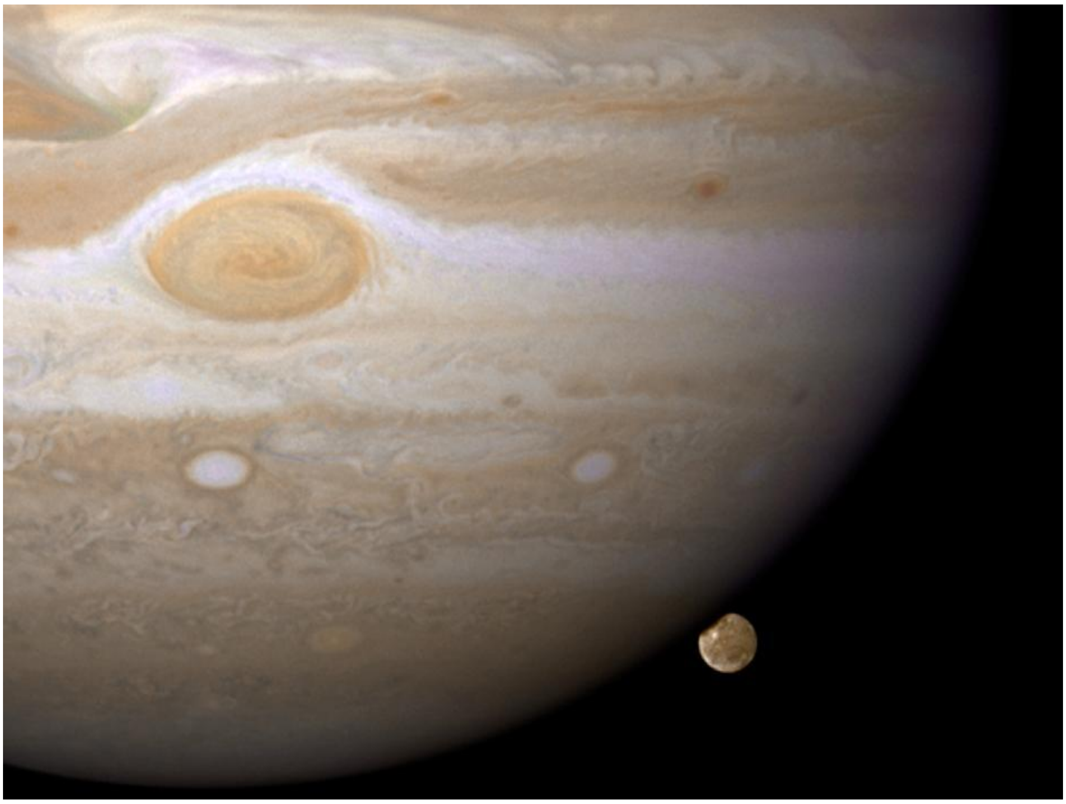
Οι κυκλώνες έχουν σπειροειδή μορφή. Η δημιουργία των κυκλώνων οφείλεται στη ροή του υγρού αέρα από περιοχές υψηλής πίεσης σε περιοχές χαμηλής. Λόγω της περιστροφής της Γης, τα ρεύματα του αέρα αποκλίνουν από την ευθεία, έτσι ώστε στο βόρειο ημισφαίριο όλοι οι κυκλώνες να περιστρέφονται αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού ενώ στο νότιο ημισφαίριο αντίστροφα. Τέτοιοι κυκλώνες έχουν φωτογραφηθεί από δορυφόρους, τόσο στην γη, όσο και σε άλλους πλανήτες όπως τον Δία ή τον Κρόνο



*Εικόνα 47 Κυκλώνας πάνω από τον ατλαντικό ωκεανό.*



*Εικόνα 48 Κυκλώνας στον ειρηνικό ωκεανό*



*Εικόνα 49 Σπειροειδής κυκλώνας στην επιφάνεια του Δία*

Γίνεται λοιπόν κατανοητό πως η ακολουθία των αριθμών Fibonacci καθώς και η Χρυσή Αναλογία δεν περιορίζονται μόνο μέσα στον πλανήτη που ζούμε μέσω κάποιων φυσικών φαινομένων όπως οι κυκλώνες αλλά και εκτός του πλανήτη μακριά στο άπειρο σύμπαν.

## **Βιβλιογραφία**- Internet


i. www.a-trade.com/fibonacci.htm

ii. www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibBio.html

iii. www.cs.rit.edu/~pga/Fibo/fact_sheet.html

iv. www.mysteries.b2w.gr/

v. www.lib.virginia.edu/science/parshall/fibonacc.html

vi. www.faculty.evansville.edu/ck6/bstud/fibo.html

vii. www.bartleby.com/65/fr/Fred2HRE.html

viii. www.magicdragon.com/UltimateSF/timeline13.html

ix. www.angelfire.com/realm/shades/

x. www.zyx.org/Fibonacci.html

xi. www.bwctc.northants.sch.uk/

xii. www.sonoran-sunsets.com/photon.html

xiii. www.newadvent.org

xiv. http://news.pathfinder.gr/scitech/476446.html

xv. Ι. ΔΑΚΟΓΛΟΥ, Ο ΜΥΣΤΙΚΟΣ ΚΩΔΙΚΑΣ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΑ, ΤΟΜΟΣ 1

xvi. Γ. ΠΛΑΝΑΣ, Η ΑΙΣΘΗΤΙΚΗ ΤΟΥ ΧΑΟΥΣ

xvii. http://www.world-mysteries.com/sci_17.htm

xviii. http://www.mathematicianspictures.com/FIBONACCI/Fibonacci.htm

xix. http://lost.yooblog.gr/2007/06/20/28/

xx. http://www.e-telescope.gr/gr/cat04/art04_040616.htm

xxi. http://el.wikipedia.org/wiki

xxii. http://www.focusmag.gr/articles/printable-article.rx?aid=398546

xxiii. http://el.wikipedia.org/wiki

xxiv. http://www.focusmag.gr/articles/view-article.rx?oid=202860

xxv. http://www.iranon.gr/penteli/PENTELI2addendum.htm

xxvi. http://www.atopo.gr/?p=136

xxvii. www.eled.uowm.gr/mathslife/.../Xrisi%20tomi%20kai%20Parthenonas.ppt

xxviii. *http://www.livepedia.gr/index.php*

xxix. *http://users.sch.gr/theoj/etwin/fibonacci/xrisi.htm*

xxx. *http://www.analogiaf.gr/*

xxxi. *http://www.diodos.gr/content/view/221/43/*

xxxii. *http://tvxs.gr/news*