ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ & ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Σπουδαστής:
Πεφάνης Στυλιανός

Εισηγητής:
Τσαγκανός Αθανάσιος

ΠΑΤΡΑ 2009

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το θέμα της εργασίας με το οποίο θα ασχοληθούμε είναι οι παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων. Πριν αναφερθούμε σε αυτούς θα πρέπει να αναλύσουμε και να κατανοήσουμε κάποιους βασικούς όρους όπως η στατιστική, οι μεταβλητές, ο πληθυσμός, το δείγμα, ο έλεγχος υποθέσεων, τα σφάλματα κ.α.

Στο πρώτο κεφάλαιο που είναι το εισαγωγικό σκοπό έχουμε να δείξουμε τους όρους αυτούς και να κάνουμε όσο το δυνατόν απλούστερη την κατανόηση τους τόσο σε σχέση με το συγκεκριμένο θέμα που ασχολούμαστε όσο και την χρήση τους γενικότερα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται εφαρμογή Παραμετρικών ελέγχων υποθέσεων, με λεπτομερή αναφορά σε πληθυσμό με μέση τιμή, διακύμανση, αναλογία ποσοστού, σε δύο πληθυσμούς με έλεγχο διαφοράς μέσης τιμής, διακύμανσης, αναλογίας ποσοστού και τέλος στο κεφάλαιο αυτό γίνεται έλεγχος υποθέσεων όταν εξετάζουμε ζευγαρωτές παρατηρήσεις, αλλά και την περίπτωση εξέτασης περισσότερων των δύο δειγμάτων.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται η ίδια ακριβώς διαδικασία με το δεύτερο κεφάλαιο αφορά όμως περιπτώσεις μη παραμετρικών ελέγχων υποθέσεων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο κάνουμε την σύγκριση των δύο πιο πάνω περιπτώσεων και οι εξαγωγή συμπερασμάτων.

Τέλος η βιβλιογραφία με τη βοήθεια της οποίας καταφέραμε να φέρουμε σε πέρας την συγκεκριμένη εργασία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ1 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Γενικά

Θα ξεκινήσουμε λέγοντας κάποια πράγματα για τη στατιστική, μία επιστήμη η οποία χρησιμοποιείται σε όλους σχεδόν τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας. Είναι απαραίτητη στη Διοίκηση, στη Δημογραφία, στην Οικονομία καθώς και στην Ιατρική, στη Φυσική, στην Αστρονομία, στη Βιομηχανία και σε πολλούς άλλους τομείς.

Στατιστική είναι η επιστήμη που ασχολείται με τις επιστημονικές μεθόδους συλλογής, οργάνωσης, παρουσίασης και ανάλυσης των αριθμητικών εκείνων στοιχείων που αναφέρονται σε χαρακτηριστικές ιδιότητες διαφόρων φαινομένων και έχει ως σκοπό τη συστηματική μελέτη αυτών των στοιχείων για την κατάληξη σε γενικά συμπεράσματα που είναι χρήσιμα στη διαδικασία της λήψης ορθών αποφάσεων.

Στατιστικά στοιχεία που αφορούν την οικονομία υπάρχουν στην ΕΣΥΕ (Εθνική Στατιστική Υπηρεσία Ελλάδος). Είναι γενική γραμματεία που ανήκει στο υπουργείο Εθνικής Οικονομίας και Οικονομικών.

Συλλέγει στατιστικά στοιχεία που αφορούν τον πληθυσμό, είναι υπεύθυνη για την απογραφή του πληθυσμού κάθε 10 χρόνια, την υγεία, την κοινωνική ασφάλιση, την απασχόληση, την υγεία και την εκπαίδευση.

Χρήση των στατιστικών στοιχείων που συλλέγει κάνουν τόσο το ελληνικό κράτος όσο και διεθνείς οργανισμοί όπως η UNESCO (United Nations Educational Scientific and Cultural Organization), ο ΟΗΕ (Οργανισμός Ηνωμένων Εθνών) και ο ΟΟΣΑ (Οργανισμός Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης), αλλά και επιχειρήσεις επιστήμονες και απλοί πολίτες.

Επίσης, η ICAP, είναι η μεγαλύτερη εταιρία οικονομικών πληροφοριών, εκδόσεων και συμβούλων επιχειρήσεων στην Ελλάδα. Είναι μέλος του διεθνούς δικτύου Credit Alliance, της FEDIS(Federation of business information services), της EADP(European Association of Directory Publishers), της FEACO(European Federation of Management Consulting Association) και του διεθνούς οργανισμού ερευνών Gallup international. Επίσης, είναι μέλος του ΣΕΣΜΑ, του ΣΕΔΕΑ και της ESOMAR.

Αναλύοντας τον ορισμό της Στατιστικής παρατηρούμε ότι τα βασικά στάδια που ακολουθούμε για τη μελέτη των ιδιοτήτων των διαφόρων μονάδων μιας πολυπληθούς ομάδας είναι τα εξής :

i. Η συγκέντρωση των στατιστικών στοιχείων που είναι αναγκαία για τη μελέτη του προβλήματος που θέλουμε να ερευνήσουμε.

ii. Η μεθοδική επεξεργασία και παρουσίαση των στατιστικών στοιχείων σε μορφή αριθμητικών πινάκων και γραφικών παραστάσεων.

iii. Η ανάλυση των στοιχείων αυτών και η εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων για να ληφθούν σωστές αποφάσεις.

Οι χαρακτηριστικές ιδιότητες των στατιστικών στοιχείων/ μονάδων ενός πληθυσμού, με τη μελέτη των οποίων ασχολείται η Στατιστική, ονομάζονται μεταβλητές. Οι μεταβλητές διακρίνονται σε δύο κυρίως κατηγορίες, στις ποιοτικές και στις ποσοτικές. Οι ποιοτικές μεταβλητές εκφράζονται με λέξεις και δεν επιδέχονται μέτρηση π.χ. "η οικογενειακή κατάσταση ενός ατόμου" .Οι ποσοτικές μεταβλητές εκφράζονται με αριθμούς οπότε επιδέχονται μέτρηση π.χ. "η ηλικία ενός ατόμου".

Με τη σειρά τους οι ποσοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε ασυνεχείς και συνεχείς. Ασυνεχείς ονομάζονται οι μεταβλητές που μπορούν να λάβουν πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος τιμών π.χ. "η ένδειξη ενός ζαριού". Συνεχείς ονομάζονται οι μεταβλητές που μπορούν να λάβουν όλες τις τιμές ενός διαστήματος π.χ. "το βάρος ενός ατόμου".

1.2 Στατιστικός πληθυσμός - Δείγμα

Με τον όρο "πληθυσμός" στη Στατιστική εννοούμε το σύνολο των ατόμων ή των αντικειμένων στα οποία αναφέρονται οι παρατηρήσεις μας και θέλουμε να τα μελετήσουμε. Αντικείμενο μελέτης της Στατιστικής δεν είναι οι μονάδες ενός πληθυσμού αλλά οι ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά που περιέχουν οι μονάδες αυτές. Ο πληθυσμός μπορεί να είναι άπειρος είτε πεπερασμένος ο οποίος με τη σειρά διακρίνεται σε πολυπληθή και ολιγοπληθή.

Ωστόσο σε αρκετές περιπτώσεις ο εξεταζόμενος πληθυσμός είναι πάρα πολύ μεγάλος ή η μελέτη των ιδιοτήτων του καταστρέφει τις μονάδες του. Στην περίπτωση αυτή αντί του πληθυσμού, εξετάζουμε ένα δείγμα από αυτόν, το οποίο επιλέγουμε κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι πληροφορίες, οι εκτιμήσεις και τα συμπεράσματα που θα λάβουμε από αυτό να έχουν ισχύ για το σύνολο του πληθυσμού στον οποίο ανήκει το δείγμα. Π.χ. είναι πιο εύκολο να μετρήσουμε την ακροαματικότητα μιας τηλεοπτικής εκπομπής, εξετάζοντας ένα αντιπροσωπευτικό μέρος του πληθυσμού μιας χώρας, παρά όλο τον πληθυσμό της.

Η παραπάνω μέθοδος ονομάζεται δειγματοληψία και είναι μία από τις σπουδαιότερες και συνηθέστερες μεθόδους συλλογής στατιστικών στοιχείων.

1.3 Έλεγχος Υποθέσεων

Με τον όρο "*έλεγχος υποθέσεων*" εννοούμε μία συμπερασματικά διαδικασία, η οποία χρησιμοποιεί τα δεδομένα ενός δείγματος για να εκτιμήσει την αξιοπιστία μιας υπόθεσης που έγινε για τον πληθυσμό, από τον οποίο προήλθε το δείγμα.

Για τους ελέγχους υποθέσεων χρησιμοποιείται μία συγκεκριμένη διαδικασία, η οποία περιλαμβάνει τρία στάδια :

i. Κάνουμε αρχικά μία υπόθεση για τον πληθυσμό. Συνήθως η υπόθεση αφορά την τιμή μιας παραμέτρου όπως για παράδειγμα τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση ή τη διάμεσο.

ii. Στη συνέχεια παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα από τον πληθυσμό τον οποίο θέλουμε να εξετάσουμε.

iii. Στο τέλος, συγκρίνουμε τα δεδομένα του δείγματος με την υπόθεση.

Αν τα δεδομένα του δείγματος είναι συνεπή με την υπόθεση, τότε συμπεραίνουμε ότι η υπόθεση είναι αληθής. Αν όμως υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ των δεδομένων του δείγματος και της υπόθεσης τότε η υπόθεση είναι ψευδής. Εξετάζουμε, δηλαδή κατά πόσο η διαφορά ανάμεσα στην τιμή της παραμέτρου που εκτιμήσαμε από το δείγμα και εκείνη της παραμέτρου που υποθέσαμε ότι έχει ο πληθυσμός είναι φαινομενική και οφείλεται στις τυχαίες διακυμάνσεις της δειγματοληψίας ή είναι πραγματική και πρέπει να δεχτούμε ότι η υπόθεση δεν ισχύει.

Στους ελέγχους υποθέσεων χρησιμοποιούνται οι στατιστικές υποθέσεων οι οποίες είναι απλές μαθηματικές σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων του πληθυσμού που χρειάζονται στατιστικές αποδείξεις. Υπάρχουν δύο είδη στατιστικών υποθέσεων, οι μηδενικές υποθέσεις οι οποίες συμβολίζονται με H_0 και οι εναλλακτικές υποθέσεις που συμβολίζονται με H_1. Η μηδενική υπόθεση H_0 προβλέπει ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή δεν έχει καμία επίδραση στην εξαρτημένη μεταβλητή για τον πληθυσμό. Η εναλλακτική υπόθεση H_1 είναι η αντίθετη της μηδενικής υπόθεσης, δηλαδή η H_1 προβλέπει ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή θα έχει κάποια επίδραση στην εξαρτημένη μεταβλητή. Πρέπει να σημειώσουμε ότι και οι δύο υποθέσεις (H_0 και H_1) αναφέρονται σε έναν πληθυσμό του οποίου δεν γνωρίζουμε τη μέση τιμή του πληθυσμού πριν αρχίσει ο έλεγχος.

Σύμφωνα με τα παραπάνω ο έλεγχος μιας υπόθεσης μας πληροφορεί για ποια δείγματα γίνεται αποδεκτή η υπόθεση H_0 και για ποια απορρίπτεται. Δηλαδή, ένας έλεγχος διαιρεί το χώρο σε δύο αμοιβαία αποκλειόμενα υποσύνολα, στο ένα από τα οποία αποδεχόμαστε την υπόθεση H_0 και αυτό το λέμε περιοχή αποδοχής, ενώ στο άλλο που το λέμε κρίσιμη περιοχή, απορρίπτουμε την υπόθεση H_0 και κατά συνέπεια αποδεχόμαστε την υπόθεση H_1.

Ο έλεγχος αποδοχής ή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης H_0 μπορεί να είναι αμφίπλευρος (π.χ. αν η μέση τιμή του δείγματος ορίζεται ίση με τη μέση τιμή του πληθυσμού ή κάποια άλλη τιμή) ή μονόπλευρος (π.χ. αν η μέση τιμή του δείγματος ορίζεται μεγαλύτερη ή μικρότερη από τη μέση τιμή του πληθυσμού ή κάποιας άλλης τιμής).

Στον αμφίπλευρο έλεγχο (H_0:$\mu = \mu_0$ έναντι της H_1:$\mu = \mu_0$) το επίπεδο σημαντικότητας α ισοκατανέμεται στα δύο άκρα της τυποποιημένης κανονικής καμπύλης και προσδιορίζουμε τις κριτικές z-τιμές).

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις που ενδιαφερόμαστε αν μία στατιστική παράμετρος (π.χ. η μέση τιμή ενός πληθυσμού) είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη μιας συγκεκριμένης τιμής μ_0. Τότε οι ελεγχόμενες υποθέσεις είναι:

H_0: $\mu = \mu_0$ έναντι της H_1 :$\mu < \mu_0$

H_1: $\mu = \mu_0$ έναντι της H_1 :$\mu > \mu_0$

Αυτοί οι έλεγχοι υποθέσεων ονομάζονται μονόπλευροι έλεγχοι και διακρίνονται σε μονόπλευρους προς τα αριστερά (αριστερόπλευρος έλεγχος), στους οποίους το επίπεδο σημαντικότητας α τοποθετείται ολόκληρο στην αριστερή πλευρά της κανονικής καμπύλης και σε μονόπλευρους προς τα δεξιά (δεξιόπλευρος έλεγχος), στους οποίους το επίπεδο σημαντικότητας α τοποθετείται ολόκληρο στην δεξιά πλευρά της κανονικής καμπύλης.

1.4 Είδη σφαλμάτων

Κατά τον έλεγχο μίας στατιστικής υπόθεσης είναι δυνατό να γίνουν δύο ειδών σφαλμάτων:

i. Σφάλμα πρώτου είδους ή κίνδυνος α

Ονομάζεται το σφάλμα που κάνουμε όταν απορρίπτουμε μία υπόθεση που στην πραγματικότητα είναι αληθινή. Το σφάλμα αυτό το εκφράζουμε ως πιθανότητα και το συμβολίζουμε με α, δηλαδή:

$\alpha = P\{$απορρίπτουμε την H_0, ενώ η H_0 είναι ορθή$\}$

Την πιθανότητα α να απορρίψουμε εσφαλμένα μία υπόθεση Ho που στην πραγματικότητα είναι αληθινή την ονομάζουμε *επίπεδο σημαντικότητας*.

ii. Σφάλμα δεύτερου είδους ή κίνδυνος β

Ονομάζεται το σφάλμα που κάνουμε όταν δεχόμαστε μία υπόθεση που στην πραγματικότητα δεν είναι αληθινή. Το σφάλμα αυτό το εκφράζουμε όμοια με τον κίνδυνο α ως πιθανότητα και το συμβολίζουμε με β, δηλαδή:

$\beta = P\{$δεχόμαστε την H_0, ενώ η H_1 είναι ορθή$\}$

Τα δυνατά αποτελέσματα ενός ελέγχου υποθέσεων μπορούμε να τα συνοψίσουμε όπως φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

ΑΠΟΦΑΣΗ	**ΥΠΟΘΕΣΗ**	
	H_0 ΑΛΗΘΙΝΗ	H_0 ΕΣΦΑΛΜΕΝΗ
ΑΠΟΔΟΧΗ H_0	Ορθή Απόφαση	Σφάλμα δεύτερου είδους Πιθανότητα β
ΑΠΟΡΡΙΨΗ H_0	Σφάλμα πρώτου είδους Πιθανότητα α	Ορθή Απόφαση

Πίνακας 1.4.1.1: Δυνατά αποτελέσματα ενός ελέγχου υποθέσεων.

Οποιαδήποτε διαδικασία ελέγχου υποθέσεων για να είναι ικανοποιητική πρέπει να τείνει στην ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων α και β. Αυτό δεν είναι εύκολο για ορισμένο μέγεθος δείγματος δεδομένου ότι οποιαδήποτε απόπειρα να μειώσουμε το σφάλμα του ενός είδους προκαλεί αύξηση του σφάλματος του άλλου. Εξαιτίας αυτού επιδιώκουμε τη μείωση του περισσότερου σοβαρού σφάλματος. Ο μόνος τρόπος να μειώσουμε και τα δύο είδη σφαλμάτων είναι να αυξήσουμε το μέγεθος του δείγματος που μπορεί να μην μπορούμε να το κάνουμε στην πράξη. Συνεπώς, παρόλο που θέλουμε να διατηρούμε και τα δύο είδη των σφαλμάτων σε ένα ελάχιστο επίπεδο, για ορισμένο βέβαια μέγεθος δείγματος n, δεν μπορούμε να ελέγχουμε ταυτόχρονα και τα δύο.

1.5 Επίπεδο σημαντικότητας

Ο όρος *επίπεδο σημαντικότητας* προέρχεται από το γεγονός ότι μία τιμή του κριτηρίου ελέγχου που ανήκει στην περιοχή απόρριψης λέγεται σημαντική.

Επομένως μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Επίπεδο σημαντικότητας ή α-επίπεδο (alpha level) ενός στατιστικού ελέγχου είναι η πιθανότητα (την τιμή της οποίας καθορίζει ο ερευνητής) που αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο απόρριψης μίας μηδενικής υπόθεσης, η οποία είναι αληθής, υπέρ της εναλλακτικής υπόθεσης.

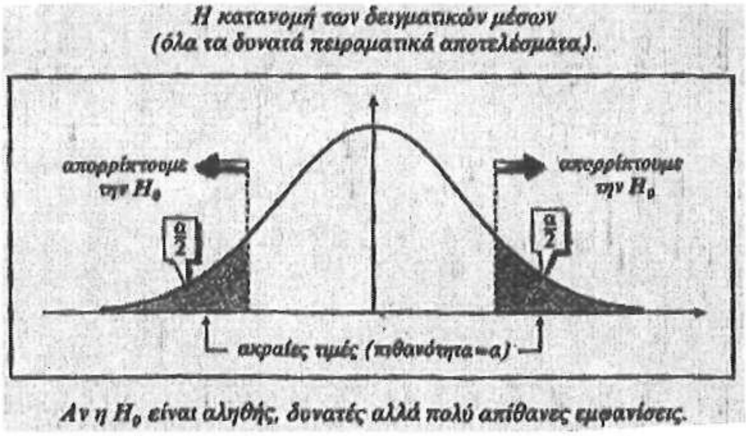
Φυσικά αυτό γίνεται γιατί τα αποτελέσματα από το δείγμα υποδεικνύουν ως αληθινή την εναλλακτική υπόθεση και όχι τη μηδενική.

Το επίπεδο σημαντικότητας (α-επίπεδο) χρησιμοποιείται για να χωριστεί η κατανομή των δειγματικών μέσων σε δύο τμήματα:

i. Δειγματικούς μέσους που είναι σε *αρμονία* με την H_0 (το κέντρο της κατανομής).

ii. Δειγματικούς μέσους που είναι σημαντικά διαφορετικοί από την H_0(οι τιμές στα άκρα της κατανομής – οι *ουρές*).

Όταν παίρνουμε δεδομένα του δείγματος που οι τιμές *πέφτουν* στα άκρα της κατανομής (στις ουρές), συμπεραίνουμε ότι υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ των δεδομένων του δείγματος και της υπόθεσης Ho και θα την απορρίψουμε.



Διάγραμμα 1.5.1:Δυνατές τιμές αν η H_0 είναι αληθής.

Ακραίες τιμές, όπως ορίστηκαν με το α-επίπεδο, είναι πολύ απίθανο να εμφανιστούν όταν η H_0 είναι αληθής, αλλά υπάρχει μικρή πιθανότητα(ίση με α) ότι τέτοια δεδομένα θα εμφανιστούν. Σε αυτή την περίπτωση απορρίπτουμε την H_0. Αυτό σημαίνει ότι με πιθανότητα α ή 100α% κάναμε σφάλμα τύπου I.

Γενικά : έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση ότι ο μέσος μ του πληθυσμού έχει μία συγκεκριμένη τιμή μ_0. Από τον ελεγχόμενο πληθυσμό παίρνουμε τυχαίο δείγμα μεγέθους ν και υπολογίζουμε τη μέση τιμή $\bar{x}$ δείγματος.

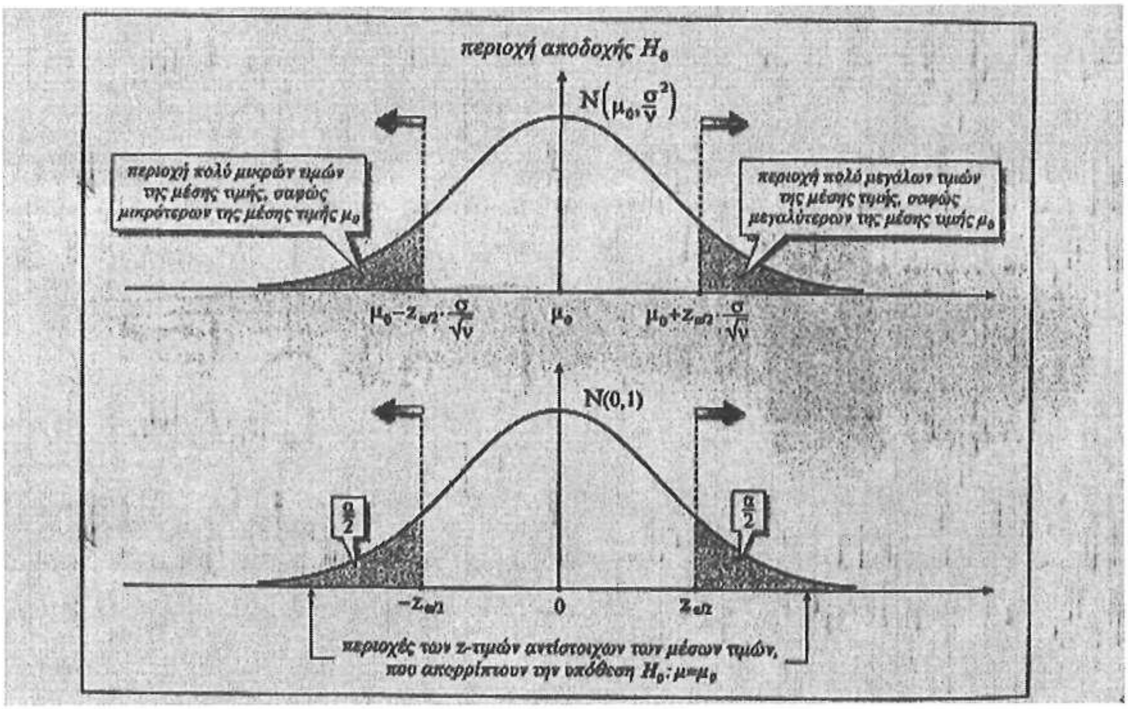
Η διαδικασία για τον έλεγχο μιας στατιστικής υπόθεσης ακολουθεί τα παρακάτω στάδια:

i. Δηλώνουμε την υπόθεση H_0, δηλαδή H_0:$\mu=\mu_0$, H_1:$\mu\neq\mu_0$ και καθορίζουμε το επίπεδο σημαντικότητας α=0,01 ή α=0,05 ή α=0,10.

ii. Θέτουμε το κατάλληλο στατιστικό κριτήριο ελέγχου, από το οποίο προκύπτει μία συγκεκριμένη τιμή. Αν, για παράδειγμα, το δείγμα είναι πολυπληθές ($\nu\geq30$), τότε ως κατάλληλο κριτήριο παίρνουμε τη z-τιμή

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \quad (1)\,, \quad \text{όπου} \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} \quad (2)$$

iii. Με βάση το επίπεδο σημαντικότητας (α-επίπεδο) βρίσκουμε τις κριτικές τιμές $-z_{\alpha/2}$ και $z_{\alpha/2}$ της τυποποιημένης κανονικής κατανομής από τους πίνακες και καθορίζουμε τις περιοχές αποδοχής και απόρριψης της H_0.



Διάγραμμα 1.5.2: Περιοχές αποδοχής της H_0 .

iv. Συγκρίνουμε τη z-τιμή που βρέθηκε από το κριτήριο ελέγχου (1) με τις κριτικές τιμές $-z_{\alpha/2}$ και $z_{\alpha/2}$. Αν αυτή η z-τιμή του κριτηρίου ικανοποιεί μία από τις ανισότητες $z<-z_{\alpha/2}$ ή $z>z_{\alpha/2}$, τότε **απορρίπτουμε** την H_0. Αν όμως η z-τιμή του κριτηρίου ικανοποιεί την ανισότητα $-z_{\alpha/2}<z<z_{\alpha/2}$, τότε **αποδεχόμαστε** την H_0.

1.6 Κεντρικό οριακό θεώρημα

Αν μία τυχαία μεταβλητή Χ κατανέμεται κανονικά, τότε και η κατανομή των μέσων δειγμάτων $\bar{x}$ κατανέμεται κανονικά, με μέσο αριθμητικό ίσο με το μέσο αριθμητικό του πληθυσμού $\bar{x} = \mu$ και διακύμανση ίση με τη διακύμανση του πληθυσμού, αφού διαιρεθεί με το μέγεθος του δείγματος: $\sigma_x^2 = \frac{\sigma}{n}$.

Τα παραπάνω όμως δεν ισχύουν αν η κατανομή του πληθυσμού δεν είναι κανονική. Ανεξάρτητα όμως από τη μορφή της κατανομής του γεννήτορα πληθυσμού, αν το μέγεθος του δείγματος είναι αρκετά μεγάλο (n>30), τότε η κατανομή των μέσων δειγμάτων τείνει να γίνει κανονική, όσο αυξάνει το μέγεθος του δείγματος με μέσο $\bar{x} = \mu$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Το παραπάνω θεώρημα ονομάζεται *κεντρικό οριακό θεώρημα* και ισχύει τόσο για συνεχείς, όσο και για ασυνεχείς κατανομές.

Επομένως, όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο (n>30), η τυχαία μεταβλητή $\bar{x}$ θα ακολουθεί την κανονική κατανομή $\mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, ανεξάρτητα από τη μορφή της κατανομής του γεννήτορα πληθυσμού από τον οποίο προέρχεται το δείγμα.

Τα παραπάνω ισχύουν και στην περίπτωση κατά την οποία οι παρατηρήσεις δεν προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό, έχουν όμως επιλεγεί κατά τυχαίο τρόπο και ανεξάρτητα η μία παρατήρηση από την άλλη, από n πληθυσμούς με μέσους αριθμητικούς $\mu_1, \mu_2, \mu_3, ..., \mu_n$ και διακυμάνσεις $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, ..., \sigma_n^2$ αντίστοιχα.

Στην περίπτωση αυτή η μεταβλητή $\mathrm{Z} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + ... + \mathrm{X}_i + ... + \mathrm{X}_n$ ακολουθεί, σύμφωνα με τις παραπάνω προϋποθέσεις ως προς n, κατά προσέγγιση την κανονική κατανομή με:

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + ... + \mu_i + ... + \mu_n$$

και:

$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + ... + \sigma_i^2 + ... + \sigma_n^2$.

1.7 Η έννοια του εκτιμητή

Ο τύπος που δηλώνει τη συγκεκριμένη διαδικασία πράξεων την οποία πρέπει να ακολουθήσουμε, προκειμένου να εκτιμήσουμε μία παράμετρο(έστω θ), καλείται *εκτιμητής ή εκτιμήτρια συνάρτηση*. Η συγκεκριμένη τιμή που παίρνει ο εκτιμητής, όταν εφαρμόζεται σε συγκεκριμένο δείγμα παρατηρήσεων λέγεται εκτίμηση της αντίστοιχης παραμέτρου θ του πληθυσμού.

Έτσι, αν πάρουμε ως εκτίμηση του αριθμητικού μέσου μ του πληθυσμού τον αριθμητικό μέσο $\bar{x}$ των τιμών ενός συγκεκριμένου δείγματος $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, τότε η εκτιμήτρια συνάρτηση παίρνει τη μορφή:

$$T = T(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \frac{1}{n}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n).$$

Η ορισμένη τιμή του $\bar{x}$ αποτελεί εκτίμηση του μέσου μ του πληθυσμού. Η εκτίμηση μιας παραμέτρου θ του πληθυσμού θα είναι τόσο πιο σωστή, όσο καλύτερη θα είναι η αντίστοιχη εκτιμήτρια συνάρτηση που χρησιμοποιείται.

Αν η κατανομή δειγματοληψίας του εκτιμητή T έχει μέσο αριθμητικό ίσο με θ, δηλαδή αν ισχύει η σχέση:

$$E(T) = \theta$$

η εκτιμήτρια συνάρτηση λέγεται *αμερόληπτη*.

Στην περίπτωση που $E(T) \neq \theta$, λέμε ότι η εκτιμήτρια συνάρτηση T είναι *μεροληπτική* και η διαφορά $b(T) = E(T) - \theta$ ονομάζεται μεροληψία της εκτιμήτριας συνάρτησης ή συστηματικό σφάλμα.

Ο δειγματικός μέσος αριθμητικός $(\overline{X})$ είναι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια συνάρτηση του μέσου μ του πληθυσμού, οποιαδήποτε και αν είναι η κατανομή του πληθυσμού, δηλαδή:

$$E(\overline{X}) = \mu .$$

Μια αμερόληπτη εκτιμήτρια συνάρτηση Τ μιας παραμέτρου θ του πληθυσμού λέγεται *αποτελεσματική,* όταν η κατανομή δειγματοληψίας της εκτιμήτριας συνάρτησης έχει τη μικρότερη διακύμανση από όλες τις διακυμάνσεις των κατανομών δειγματοληψίας όλων των αμερόληπτων εκτιμητριών συναρτήσεων παραμέτρου θ.

Μια εκτιμήτρια συνάρτηση Τ μιας παραμέτρου θ λέγεται ότι είναι *συνεπής*, άν, καθώς αυξάνει το μέγεθος του δείγματος, η τιμή της εκτιμήτριας συνάρτησης που προκύπτει τείνει προς την τιμή της παραμέτρου θ του πληθυσμού.

Μια εκτιμήτρια συνάρτηση ονομάζεται *επαρκής*, όταν χρησιμοποιεί όλες τις σχετικές με την παράμετρο πληροφορίες που περιέχονται στο δείγμα, έτσι ώστε καμιά άλλη εκτιμήτρια συνάρτηση να μη δίνει επιπρόσθετες πληροφορίες σχετικά με την υπό εκτίμηση παράμετρο θ. Αποδεικνύεται ότι ο μέσος του δείγματος $\overline{X}$ είναι επαρκής εκτιμήτρια συνάρτηση του μέσου μ του πληθυσμού, γιατί δίνει όλες τις πληροφορίες που μπορεί να ληφθούν από το δείγμα που έχει επιλεγεί για την εκτίμηση του μέσου μ του πληθυσμού.

Η διάμεσος που προκύπτει από το δείγμα δεν είναι επαρκής εκτιμήτρια συνάρτηση, γιατί δεν χρησιμοποιεί τις τιμές των παρατηρήσεων, αλλά μόνο τη θέση αυτών.

Εάν θέλουμε να εξετάσουμε την *αποτελεσματικότητα* μιας οποιασδήποτε εκτιμήτριας συνάρτησης, είτε αυτή είναι μεροληπτική, είτε είναι αμερόληπτη, χρησιμοποιούμε ένα μέτρο που υπολογίζει τη διακύμανση της εκτιμήτριας συνάρτησης σε σχέση με την πληθυσμιακή παράμετρο θ του γεννήτορα πληθυσμού. Το μέτρο αυτό ονομάζεται μέσο τετραγωνικό σφάλμα και δίνεται από τη σχέση:

$$\mu.\tau.\sigma.(\mathrm{T}) = \mathrm{E}(\mathrm{T}-\theta)^2 .$$

Εκείνη η εκτιμήτρια συνάρτηση που μας δίνει το μικρότερο μ.τ.σ. είναι η καλύτερη.

1.8 Κατανομές

1.8.1 Κανονική κατανομή

Η *κανονική κατανομή* είναι η σπουδαιότερη από όλες τις θεωρητικές κατανομές, όπως η κατανομή Poisson, η γεωμετρική κατανομή, η υπεργεωμετρική και η κατανομή Pascal, γιατί έχει πολύ μεγάλη εφαρμογή στη θεωρία των πιθανοτήτων, τη στατιστική και τη δειγματοληψία.

Αν έχουμε μία συνεχή τυχαία μεταβλητή X που μπορεί να πάρει τιμές από -∞ έως +∞ και εάν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X δίνεται από τη σχέση :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

λέμε τότε ότι η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο μ και διακύμανση σ^2, όπου:

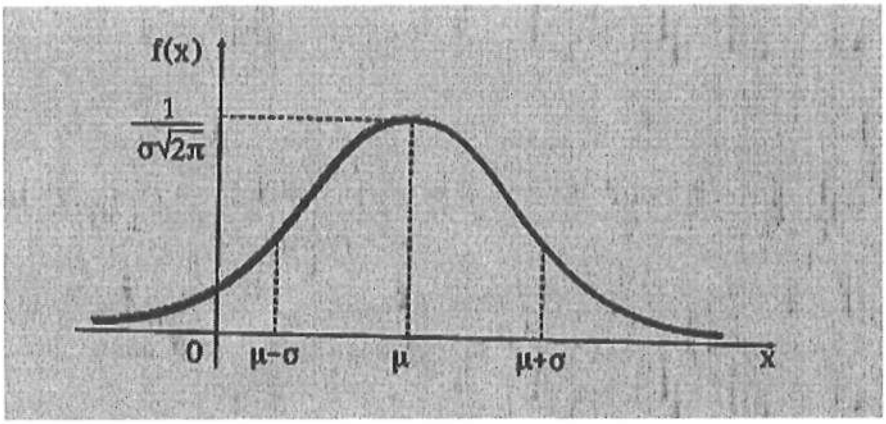
μ: ο μέσος της τυχαίας μεταβλητής X, που προσδιορίζει τη θέση της καμπύλης και παίρνει τιμές από -∞ έως +∞ ($-\infty \leq \mu \leq \infty$),

σ: η τυπική απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής X που παίρνει μόνο θετικές τιμές (σ>0) και προσδιορίζει το σχήμα της καμπύλης,

e: 2,71828 και

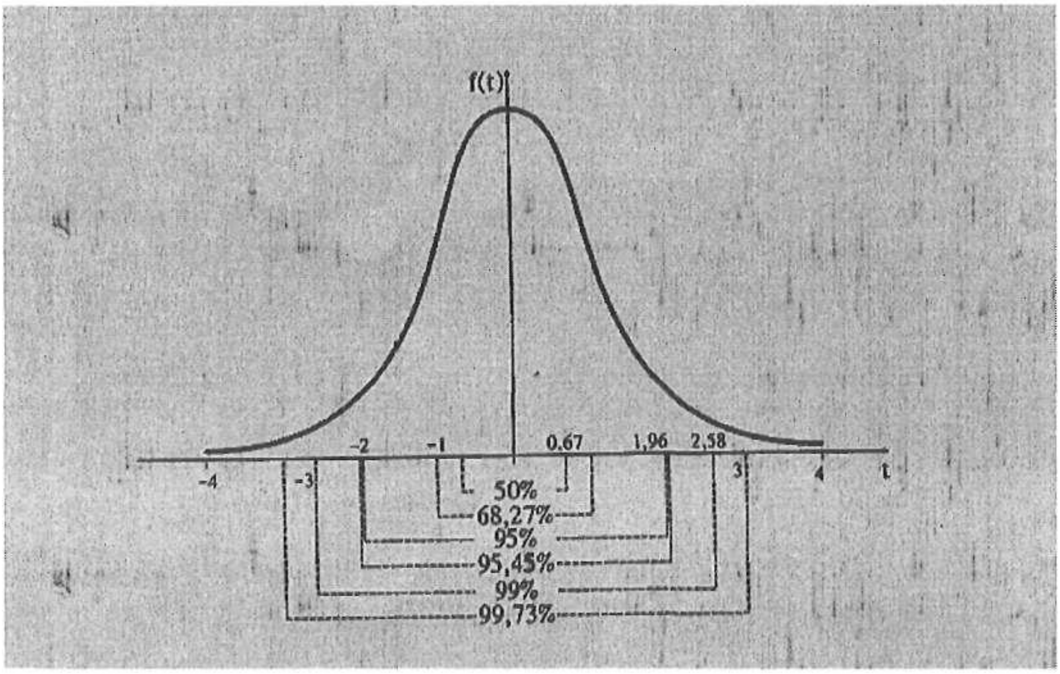
π: 3.14159

Η κανονική κατανομή έχει συντελεστή ασυμμετρίας Pearson $\beta_1 = 0$ και συντελεστή κυρτότητας $\beta_2 = 3$. Ακόμη, ο μέσος, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή συμπίπτουν $(\mu = m = m_0)$. Σε περίπτωση που μία κατανομή συχνοτήτων έχει $\beta_1 = 0$ και $\beta_2 = 3$ τότε ακολουθεί την κανονική κατανομή.



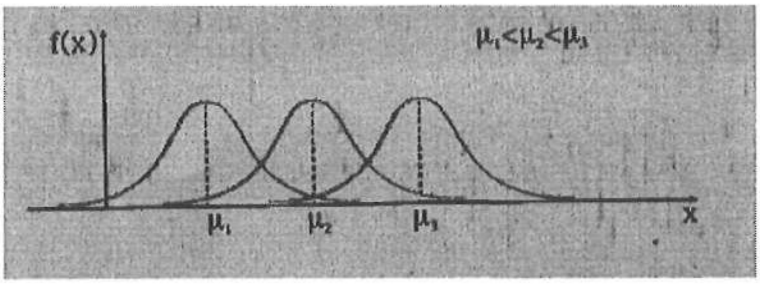
Διάγραμμα 1.8.1.1: Πυκνότητας πιθανότητας κανονικής κατανομής.

Σε απόσταση σ από το μέσο, δηλαδή μ- σ ≤ x ≤ μ +σ , περιλαμβάνεται το 68,72% του συνολικού εμβαδού της κανονικής καμπύλης. Σε απόσταση 2σ από το μέσο αριθμητικό περιλαμβάνεται το 95,45% του συνολικού εμβαδού της καμπύλης. Σε απόσταση 3σ περιλαμβάνεται το 99,73 του συνολικού εμβαδού.



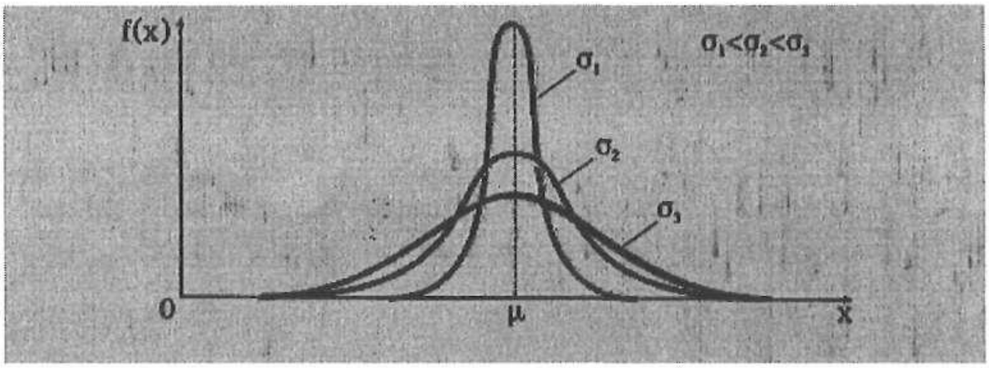
Διάγραμμα 1.8.1.2: Κανονικής κατανομής.

Όταν υπάρχει μεταβολή των μ και σ έχουμε καινούρια ζεύγη από καμπύλες κανονικής κατανομής. Επομένως, υπάρχουν δύο περιπτώσεις, η πρώτη είναι όταν μεταβάλλεται η μέση τιμή μ και η τυπική απόκλιση σ παραμένει σταθερή. Τότε οι καμπύλες έχουν την παρακάτω μορφή:



Διάγραμμα 1.8.1.3: Κανονικής κατανομής όταν $\mu_1<\mu_2<\mu_3$.

Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν η μέση τιμή παραμένει σταθερή και μεταβάλλεται η τυπική απόκλιση. Οι καμπύλες σε αυτή την περίπτωση έχουν τη μορφή:



Διάγραμμα 1.8.1.4: Κανονικής κατανομής όταν $\sigma_1<\sigma_2<\sigma_3$.

Οπότε συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν άπειρες κανονικές κατανομές, όσα είναι δηλαδή και τα ζεύγη των παραμέτρων μ και σ.

Πολλές φορές θα χρειαστεί να υπολογίσουμε από τον παρακάτω τύπο την πιθανότητα μία τυχαία μεταβλητή να ακολουθεί την κανονική κατανομή όταν μεταβληθούν οι τιμές των μ και σ :

$$P\{\alpha \le x \le \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} dx .$$

Επειδή όμως υπάρχουν πολλές δυσκολίες στην εφαρμογή του υπολογισμού αυτού, κάνουμε γραμμικό μετασχηματισμό, αντικαθιστώντας τη μεταβλητή x με μία νέα μεταβλητή z, δηλαδή:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}.$$

Αν λοιπόν μία τυχαία μεταβλητή x ακολουθεί την κανονική κατανομή που έχει μέσο μ και διακύμανση σ^2 τότε η τυχαία μεταβλητή z ακολουθεί την κανονική κατανομή που έχει μέσο μ=0 και διακύμανση σ^2=1. Στην περίπτωση αυτή, η κατανομή ονομάζεται τυποποιημένη κανονική κατανομή και συμβολίζεται με N(0,1). Όταν η κανονική κατανομή είναι τυποποιημένη τότε μεταξύ ±1 η καμπύλη περιλαμβάνει το 68% περίπου των περιπτώσεων, μεταξύ ±2 περίπου το 95,4% και μεταξύ ±3 περίπου το 99,7% των περιπτώσεων.

Επειδή η κατανομή της μεταβλητής z είναι ανεξάρτητη από τις παραμέτρους μ και σ μπορούμε να κατασκευάσουμε πίνακες οι οποίοι μας δίνουν τις διάφορες τιμές της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής F(z) για z από -4 έως 4. Οι πίνακες μας δίνουν συνήθως τις τιμές της F(z) για θετικές μόνο τιμές της μεταβλητής z, γιατί για αρνητικές τιμές της z χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$F(-z) = 1 - F(z).$$

1.8.2 Κατανομή X^2

Η κατανομή X^2 είναι παράγωγος συνάρτηση της κανονικής κατανομής και ορίζεται ως εξής: έστω ότι οι τυχαίες μεταβλητές $x_1, x_2, x_3, \dots, x_\nu$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και κάθε μια από αυτές κατανέμεται κανονικά με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1. Αν όμως πάρουμε το άθροισμα των τετραγώνων των παραπάνω μεταβλητών:

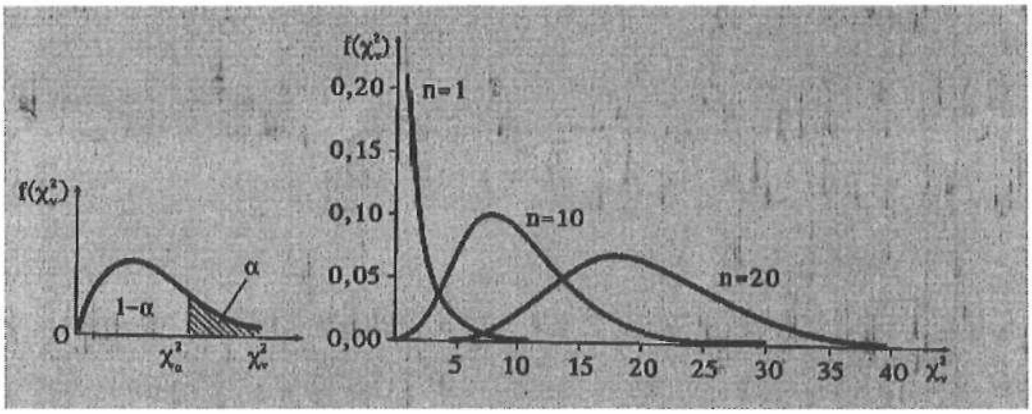
$$X^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_\nu^2 .$$

Τότε το άθροισμα αυτό δεν κατανέμεται όπως η τυπική κανονική κατανομή, αλλά ακολουθεί μια άλλη κατανομή που ονομάζεται χ τετράγωνο και συμβολίζεται X^2 .Η κατανομή X^2 εξαρτάται από τους βαθμούς ελευθερίας και παίρνει μόνο θετικές τιμές : $0< X^2 <\infty$ και έχει συνήθως ασυμμετρική μορφή.

Η συνάρτηση κατανομής της X^2 είναι :

$$F(x^2) = P\{x_\nu^2 < x_\alpha^2\} = \int_0^{x_\alpha^2} f(x^2) d(x^2).$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X^2 έχει γραφική παράσταση που εξαρτάται από τους βαθμούς ελευθερίας. Όταν το ν μεταβάλλεται, τότε και η καμπύλη X^2 αλλάζει μορφή και θέση στον οριζόντιο άξονα και τείνει προς την τυπική κανονική κατανομή όταν $\nu \to \infty$.



Διάγραμμα 1.8.2.1: Κατανομής X^2 για διάφορες τιμές του ν.

1.8.3 Κατανομή t του Student

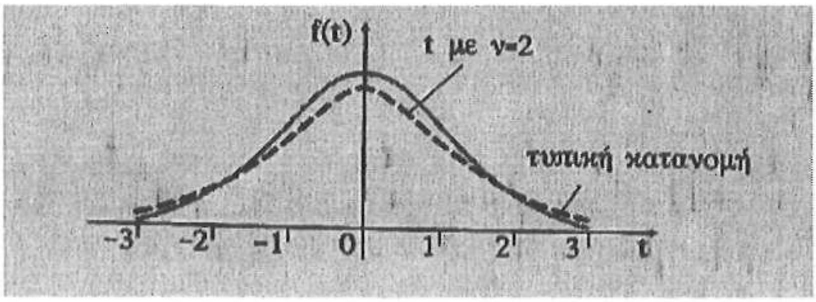
Η κατανομή t είναι παράγωγος κατανομή της κανονικής κατανομής και την ορίζουμε ως εξής: αν η τυχαία μεταβλητή Z ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1 και η Y μια άλλη μεταβλητή, ανεξάρτητη της X, που ακολουθεί την κατανομή X^2 με v=n-1 βαθμούς ελευθερίας τότε η τυχαία μεταβλητή:

$$t_\nu = \frac{z}{\sqrt{\frac{Y}{\nu}}}$$

ακολουθεί την κατανομή t με v βαθμούς ελευθερίας. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής t για v βαθμούς ελευθερίας δίνεται από τη σχέση:

$$F(t) = \mathrm{P}\{T \le t\} \int_{-\infty}^{t} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{\nu}}} dt \, .$$

Ο συντελεστής κυρτότητας β_2 της κατανομής t είναι μικρότερος του συντελεστή $\beta_2 = 3$ της κανονικής κατανομής. Όταν όμως n>30 τότε η κατανομή t πλησιάζει τη μορφή της τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Στην κατανομή t είναι περισσότερο πιθανό να έχουμε μεγαλύτερες αποκλίσεις από τον αριθμητικό μέσο σε σχέση με την κανονική κατανομή.



Διάγραμμα 1.8.3.1: Κατανομής t.

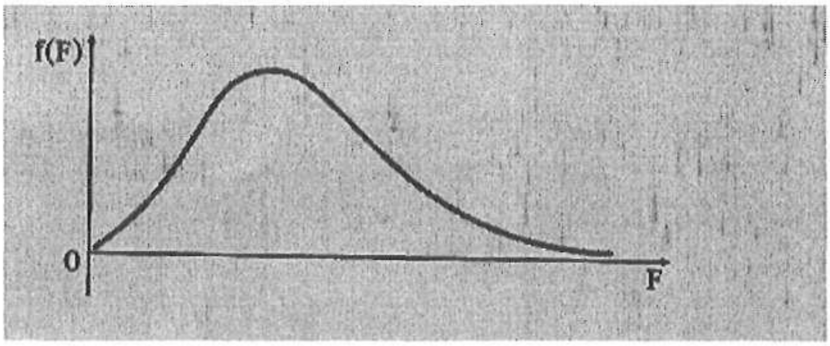
1.8.4 Κατανομή F

Αν κάθε μία από τις ανεξάρτητες μεταβλητές x και y ακολουθεί κατανομή X^2 με ν_1 και ν_2 βαθμούς ελευθερίας, τότε η τυχαία μεταβλητή $F = \frac{X:\nu_1}{Y:\nu_2}$ ακολουθεί την κατανομή F με ν_1 και ν_2 βαθμούς ελευθερίας (F_{ν_1,ν_2}) όπου $\nu_1 = n_1 - 1$ και $\nu_2 = n_2 - 1$.

Αν μεταβληθούν οι βαθμοί ελευθερίας ν_1 και ν_2, θα πάρουμε μία οικογένεια κατανομών. Η συνάρτηση κατανομής της F δίνεται από τη σχέση:

$$f(F) = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \cdot \frac{F^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}F\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}} \text{ , αν } 0 < F < \infty .$$

Η καμπύλη της f(F) τείνει προς την κανονική κατανομή για μεγαλύτερες τιμές των ν_1 και ν_2. Η παράμετρος F_{ν_1,ν_2} δεν παίρνει αρνητικές τιμές. Συνήθως η καμπύλη της F είναι συμμετρική προς τα δεξιά και η μορφή της εξαρτάται από τους βαθμούς ελευθερίας ν_1 και ν_2.



Διάγραμμα 1.8.4.1: Κατανομής F.

1.8.5 Κατανομή Poisson

Η κατανομή Poisson ανακαλύφθηκε από το Γάλλο S. D. Poisson στις αρχές του 19^{ου} αιώνα. Η κατανομή του Poisson εφαρμόζεται σε εκείνες τις περιπτώσεις στις οποίες το ενδεχόμενο 'επιτυχία' εμφανίζεται σπάνια, ενώ το μέγεθος του δείγματος είναι αρκετά μεγάλο, ώστε ο αναμενόμενος μέσος αριθμητικός E(x)=np να είναι αριθμός μεταξύ 0 και 10. Στην περίπτωση αυτή οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής x που αναφέρονται στο ενδεχόμενο 'επιτυχία' τείνουν να συγκεντρωθούν στις πρώτες μικρές τιμές του x, ενώ οι μεγάλες τιμές δεν έχουν συχνότητες. Η συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Poisson δίνεται από τη σχέση:

$$P\{X = x\} = P_x = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

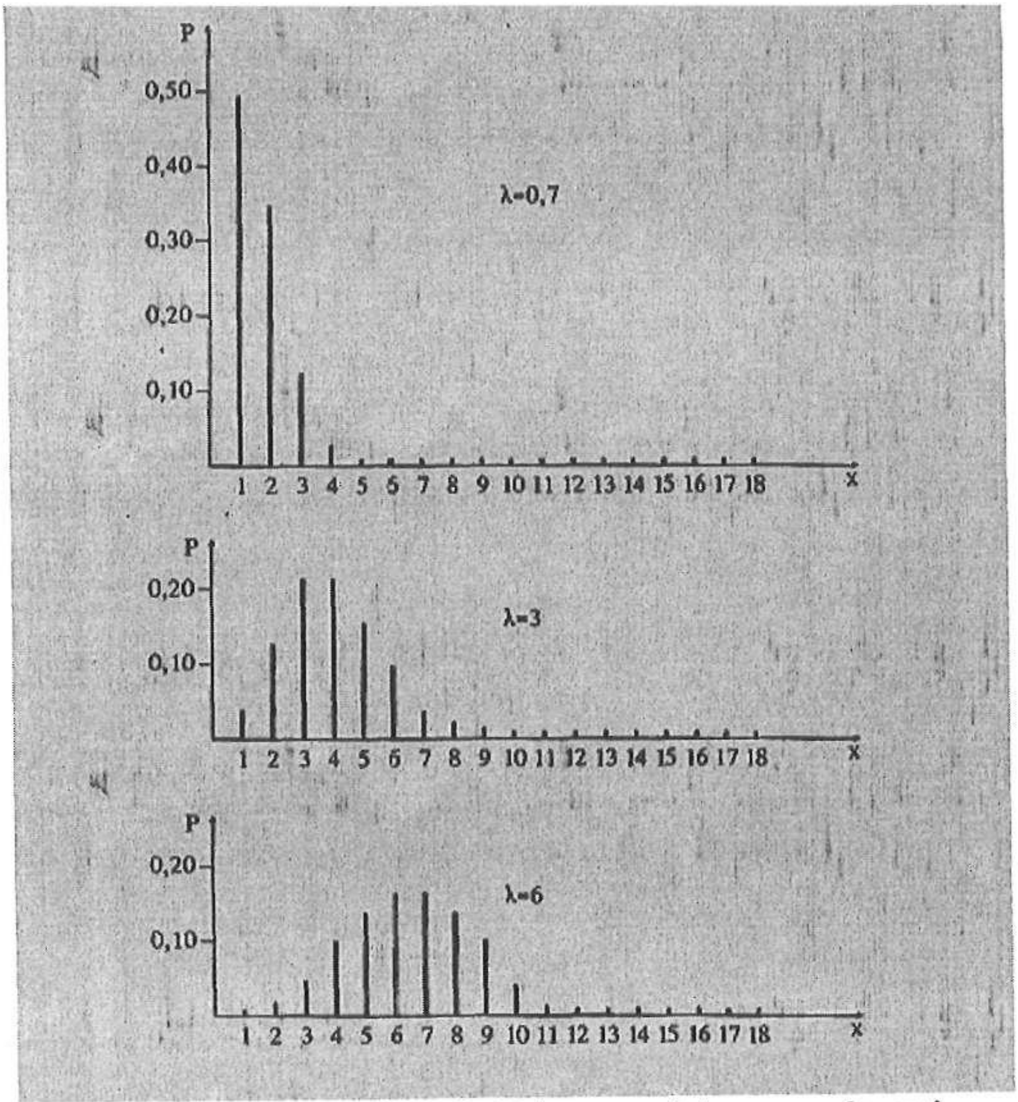
όπου x=1,2,3,….,n

λ= ο μέσος της κατανομής

e= 2,71828

P_x η πιθανότητα σε ένα δείγμα μεγέθους n μονάδων να έχουμε x επιτυχίες. Για να αποφύγουμε τους παραπάνω υπολογισμούς και επειδή η κατανομή περιέχει μόνο μία παράμετρο (λ) χρησιμοποιούμε ειδικούς πίνακες που δίνουν τις πιθανότητες για διάφορες τιμές του λ=np.

Η κατανομή Poisson τείνει προς την κανονική κατανομή με την αύξηση της παραμέτρου λ. Επίσης τείνει να γίνει συμμετρική όταν το λ αυξάνει και η κατανομή είναι μεσόκυρτη όταν $\beta_2 - 3$.



Διάγραμμα 1.8.5.1: Κατανομής Poisson για διάφορες τιμές του λ.

Τέλος, η κατανομή Poisson χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις σπανίων γεγονότων, που παρουσιάζονται σε χρονικά διαστήματα ορισμένης διάρκειας όπως για παράδειγμα ο αριθμός των ατυχημάτων σε ένα ορισμένο σημείο και για μία ορισμένη χρονική περίοδο.

1.8.6 Υπεργεωμετρική κατανομή

Υποθέτουμε ότι έχουμε μία κάλπη που περιέχει Ν σφαιρίδια. Από τα Ν αυτά σφαιρίδια Τα N_1 είναι άσπρα και τα N_2 είναι μαύρα, έτσι ώστε $N_1 + N_2 = N$.

Υποθέτουμε, επίσης, ότι από την παραπάνω κάλπη εξάγονται n σφαιρίδια χωρίς επανάθεση. Η πιθανότητα από τα n σφαιρίδια να εξαχθούν x λευκά και τα υπόλοιπα n-x μαύρα υπολογίζεται με τον παρακάτω τρόπο:

Οι δυνατοί τρόποι εξαγωγής x σφαιριδίων από τα N_1 είναι $C_x^{N_1}$ και οι δυνατοί τρόποι να εξαχθούν n-x μαύρα σφαιρίδια από τα N_2 θα είναι $C_{n-x}^{N_2}$.

Επομένως, η πιθανότητα που ζητούμε θα είναι:

$$\mathrm{P}\{X = x\} = \frac{C_x^{N_1} \cdot C_{n-x}^{N_2}}{C_n^N}.$$

Αν η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο:

$$\mathrm{P}\{X = x\} = \frac{C_x^{N_1} \cdot C_{n-x}^{N_2}}{C_n^N} = \frac{\binom{N_1}{x} \cdot \binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την υπεργεωμετρική κατανομή.

Ο υπεργεωμετρικός νόμος εξαρτάται από τρεις παραμέτρους:

1. Το μέγεθος N του πληθυσμού που ερευνούμε
2. Το μέγεθος n του δείγματος
3. Το ποσοστό $\rho = \dfrac{N_1}{N}$.

Η μαθηματική ελπίδα ή αναμενόμενη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X, δίνεται από τον τύπο:

$$\mathrm{E}(X) = n\rho.$$

Η διακύμανση της X δίνεται από τον τύπο:

$$Var(\mathrm{X}) = \sigma^2 = npq \cdot \frac{N-n}{N-1}.$$

Αν οι μονάδες N του πληθυσμού είναι πολύ μεγάλος αριθμός και το μέγεθος του δείγματος σε σχέση με τις μονάδες του πληθυσμού είναι μικρός αριθμός, τότε ο υπολογισμός των πιθανοτήτων των τιμών της τυχαίας μεταβλητής X που υπολογίζονται με την υπεργεωμετρική κατανομή δε διαφέρει πολύ από τον υπολογισμό των πιθανοτήτων με τη διωνυμική κατανομή.

Η υπεργεωμετρική κατανομή χρησιμοποιείται αρκετά στον ποιοτικό έλεγχο.

1.8.7 Γεωμετρική κατανομή

Έστω μια ασυνεχής τυχαία μεταβλητή που παίρνει τιμές :1,2,3,…,n. Αν η συνάρτηση πιθανότητας της X δίνεται από τον τύπο:

$$\mathrm{P}\{x\} = \mathrm{P}\{X = x\} = q^{x-1}p$$

λέμε τότε ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή.

Η τιμή $q^{x-1}p$ μας δίνει την πιθανότητα να έχουμε αποτυχία στις x-1 πρώτες δοκιμές και επιτυχία στη x δοκιμή, όπου x=1,2,3,….

Η μαθηματική ελπίδα δίνεται από τον τύπο:

$$E(X) = \frac{1}{p}.$$

Η διακύμανση από τον τύπο:

$$Var(X) = \frac{q}{p^2}.$$

1.8.8 Κατανομή Pascal

Έστω ότι έχουμε μία κάλπη που περιέχει Λ λευκά και N-Λ μαύρα σφαιρίδια. Έστω ακόμη ότι η τυχαία μεταβλητή X αναφέρεται στον αριθμό των εξαγωγών με επανάληψη που απαιτούνται για να έχουμε r επιτυχίες. Η τυχαία μεταβλητή X θα πάρει τις τιμές:

$$X = r, r+1, r+2, r+3, \ldots$$

Εάν κατά τη λ-1 εξαγωγή έχουμε r-1 επιτυχίες και έχουμε επιτυχία και κατά τη λ δοκιμή, τότε η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να πάρει την τιμή λ (όπου λ ≥ r) δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathrm{P}\{X = \lambda\} = \binom{\lambda-1}{r-1} p^r q^{\lambda-r}.$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται κατανομή του Pascal.

Η μαθηματική ελπίδα δίνεται από τον τύπο:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{r}{p}.$$

Η διακύμανση από τον τύπο:

$$Var(X) = \frac{r \cdot q}{p^2}.$$

1.8.9 Κατανομή βήτα

Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή βήτα, αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}, \quad \text{αν } 0 < x < 1 \quad \text{ή} \quad f(x) = 0, \quad \text{αν } x \le 0 \text{ και } x \ge 1$$

όπου α>0, β>0 και B(α, β) η συνάρτηση βήτα, που δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx, \quad \text{αν } (\alpha,\ \beta>0)$$

Η μαθηματική ελπίδα και η διακύμανση της κατανομής βήτα είναι:

$$E(X)=\mu=\frac{a}{a+\beta}$$

και

$$Var(x)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

1.8.10 Κατανομή γάμα

Μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή γάμα, αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f(x)=\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\nu)}x^{\nu-1}e^{-x/\beta}, \text{ αν } x>0 \qquad \text{ή} \qquad f(x)=0\ , \text{ αν } x\leq 0$$

όπου α>0, β>0 και Γ(ν) η συνάρτηση γάμα, που δίνεται από το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$\Gamma(\nu)=\int_0^{\infty}x^{\nu-1}e^{-x}dx \quad (\nu>0)$$

Η συνάρτηση γάμα ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις:

1. $\Gamma(\nu+1)=\nu\Gamma(\nu)$, αν ν>0

2. $\Gamma(1)=1$

3. $\Gamma(\nu)=(\nu+1)!$, αν ν φυσικός αριθμός

Η μαθηματική ελπίδα και η διακύμανση της κατανομής γάμα αποδεικνύεται ότι είναι:

$$E(x)=\mu=\alpha\beta \qquad \text{και} \qquad Var(x)=\sigma_x^2=\alpha\beta^2\ .$$

Οι συναρτήσεις βήτα και γάμα συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση:

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2:ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΙ ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

2.1 Εισαγωγή

Μία μεταβλητή μπορεί να υπολογισθεί μέσα από μία σειρά παραμέτρων όπως είναι ο μέσος ή η τυπική απόκλιση. Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τη μεταβλητή και να τη χρησιμοποιήσουμε σε αναλύσεις πρέπει να ισχύουν τρεις υποθέσεις. Αν ισχύουν αυτές οι υποθέσεις τότε τα δεδομένα παραμετρικά και επομένως χρησιμοποιούνται οι παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων για να ελέγχουμε τα δεδομένα. Οι τρεις υποθέσεις που πρέπει να ισχύουν είναι οι παρακάτω:

i. Αρχικά τα δεδομένα πρέπει να προέρχονται από έναν κανονικό πληθυσμό. Όσο πιο μεγάλο είναι το δείγμα από το οποίο προέρχονται τα δεδομένα τόσο μεγαλύτερη πιθανότητα υπάρχει τα δεδομένα να προέρχονται από κανονική κατανομή.

ii. Στη συνέχεια πρέπει οι πληθυσμοί από τους οποίους έχουμε επιλέξει τα δείγματα να έχουν ίσες διακυμάνσεις. Αυτό είναι πολύ σημαντικό για τον έλεγχο των δεδομένων και επιτυγχάνεται με το να εξετάσουμε το εύρος ή την τυπική απόκλιση των δεδομένων.

iii. Τα δεδομένα τα οποία υπολογίζονται πρέπει κατά διαστήματα να έχουν μία κλιμάκωση.

Επομένως οι παραμετρικοί έλεγχοι εστιάζονται στην τυχαιότητα του δείγματος και στις υποθέσεις για τον πληθυσμό. Για να τους κατανοήσουμε καλύτερα πρέπει επίσης να αναλύσουμε κάποιες βασικές έννοιες που χρησιμοποιούνται σε αυτούς. Η υπόθεση που έχει μεγαλύτερη ισχύ ακόμα και από την κανονικότητα και την ομοιογένεια της διακύμανσης είναι η τυχαία επιλογή του δείγματος από τον πληθυσμό. Χωρίς την τυχαία επιλογή δεν μπορούμε να κάνουμε κάποια στατιστική αναφορά για το μέσο ενός μεγαλύτερου πληθυσμού. Ένα δεύτερο χαρακτηριστικό των παραμετρικών ελέγχων είναι μία σειρά από υποθέσεις που αφορούν την κανονικότητα του δείγματος, την ομοιογένεια της διακύμανσης και τα σφάλματα.

Υπάρχουν δύο λόγοι για τους οποίους οι υποθέσεις αυτές είναι σημαντικές. Εάν λοιπόν έχουμε κανονικότητα και για να έχουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα τότε ο μόνος λόγος για να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση είναι να διαφέρουν οι μέσοι των πληθυσμών. Ο δεύτερος λόγος είναι ότι όταν χρησιμοποιούμε τα χαρακτηριστικά των πληθυσμών από τους οποίους έχουμε επιλέξει το δείγμα για να εκθέσουμε συμπεράσματα για τα δείγματα. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε κανονικότητα τότε ξέρουμε αρκετά για τα δείγματα των πληθυσμών και μπορούμε να καταλήξουμε σε συμπεράσματα.

Ένα ακόμη χαρακτηριστικό των παραμετρικών ελέγχων είναι η μηδενική υπόθεση. Για παράδειγμα, εφόσον έχουμε δεκτεί την κανονικότητα και την ομοσκεδαστικότητα τότε το μόνο πρόβλημα που υπάρχει είναι η διαφορά των μέσων. Η μηδενική υπόθεση όμως δεν εξετάζει τη διαφορά των μέσων αλλά τον τρόπο που χρησιμοποιείται για να ελέγξουμε τη διαφορά των μέσων με εναλλακτική υπόθεση έναν άλλο τρόπο με τον οποίο μπορούμε να ελέγξουμε τη διαφορά των μέσων.

Υπάρχουν αρκετοί παραμετρικοί έλεγχοι οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ελέγξουμε κάποιες υποθέσεις. Οι έλεγχοι αυτοί χωρίζονται σε τέσσερις κατηγορίες, ανάλογα με το είδος του πληθυσμού που χρησιμοποιούν. Όταν έχουμε, λοιπόν, *ένα δείγμα* οι έλεγχοι που χρησιμοποιούνται είναι:

i. <u>Ο έλεγχος υποθέσεων της μέσης τιμής</u> :θέλουμε να ελέγξουμε αν η μέση τιμή του πληθυσμού (μ) είναι ίση με τη μέση τιμή του δείγματος (μ_0) και πρέπει να ισχύει ότι ο πληθυσμός ακολουθεί την κανονική κατανομή, το μέγεθος του δείγματος να είναι μεγάλο($n>30$) και η διακύμανση του πληθυσμού να είναι γνωστή.

ii. <u>Ο έλεγχος υποθέσεων της μεταβλητότητας ή της διακύμανσης</u>: είναι εφαρμόσιμος όταν θέλουμε να ελέγξουμε αν η μεταβλητότητα του πληθυσμού είναι ίση με μία ορισμένη τιμή.

iii. <u>Ο έλεγχος υποθέσεων της αναλογίας ή του ποσοστού</u>: τον χρησιμοποιούμε όταν θέλουμε να ελέγξουμε κατά πόσο η αναλογία των μελών του πληθυσμού, τα οποία έχουν μία συγκεκριμένη ιδιότητα, είναι ίση προς μία ορισμένη τιμή P_0.

Σε περίπτωση που έχουμε *δύο δείγματα* οι έλεγχοι που είναι εφαρμόσιμοι είναι οι εξής:

i. <u>Ο έλεγχος υποθέσεων της ισότητας ή της διαφοράς των μέσων τιμών</u>: συγκρίνουμε, δηλαδή, τους δύο πληθυσμούς χρησιμοποιώντας ως κριτήριο τις μέσες τιμές τους για να ελέγξουμε τη διαφορά τους. Προσπαθούμε, δηλαδή, να εξακριβώσουμε σε περίπτωση που υπάρχει, την αιτία της διαφοράς.

ii. <u>Ο έλεγχος υποθέσεων των διαφορών των διακυμάνσεων</u>: είναι εφαρμόσιμος όταν θέλουμε να διαπιστώσουμε αν τα δείγματα προέρχονται από έναν ή δύο πληθυσμούς με σημαντικές ή όχι διαφορές μεταξύ τους ή γενικά αν οι εξεταζόμενες παράμετροι διαφέρουν στατιστικά σημαντικά μεταξύ τους.

iii. <u>Ο έλεγχος υποθέσεων του λόγου των μεταβλητοτήτων ή των διακυμάνσεων</u>: είναι εφαρμόσιμος για να μπορούμε να συγκρίνουμε τη συνέπεια δύο παραγωγικών διαδικασιών.

iv. <u>Ο έλεγχος υποθέσεων της διαφοράς των ποσοστών</u>: χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να ελέγξουμε ότι δεν υφίσταται διαφορά ανάμεσα στις αναλογίες των πληθυσμών.

Σε περίπτωση που έχουμε *ζευγαρωτές* παρατηρήσεις χρησιμοποιείται μόνο ένας έλεγχος ο οποίος ονομάζεται <u>έλεγχος υποθέσεων των διαφορών των μέσων τιμών</u>. Ο έλεγχος αυτός εφαρμόζεται όταν δεν υπάρχει ανεξαρτησία μεταξύ των δύο δειγμάτων και τότε θα πρέπει να ελέγχονται, όχι οι διαφορές των μέσων τιμών, αλλά η μέση τιμή της διαφοράς των εξαρτημένων ζευγών που σχηματίζονται. Όταν υφίσταται εξάρτηση μεταξύ των τιμών των δύο δειγμάτων, τότε δε γίνεται αναφορά σε κανονικά κατανεμημένους πληθυσμούς και οι διακυμάνσεις των δύο πληθυσμών θεωρούνται άνισες.

Όταν έχουμε *περισσότερα από δύο δείγματα* τότε ο έλεγχος που εφαρμόζεται είναι ο έλεγχος υποθέσεων των μέσων τιμών ο οποίος για να εφαρμοστεί θα πρέπει να ισχύει ότι όλα τα δείγματα έχουν το ίδιο μέγεθος, η διακύμανση της κατανομής είναι ίδια για κάθε σειρά των δειγματοληψιών των δειγμάτων και θα πρέπει κάθε ομάδα να χαρακτηρίζεται από μία ιδιότητα.

2.2 Έλεγχοι υποθέσεων όταν εξετάζουμε έναν πληθυσμό

2.2.1 Έλεγχος υποθέσεων της μέσης τιμής

Ας υποθέσουμε ότι πήραμε ένα τυχαίο δείγμα $x_1,x_2,\ldots,x_n$ από έναν πληθυσμό που ακολουθεί την κανονική κατανομή, η διακύμανσή του είναι γνωστή και το μέγεθος του δείγματος είναι αρκετά μεγάλο ($n>30$) .

Οι υποθέσεις για τον έλεγχο της μέσης τιμής μ του πληθυσμού είναι οι παρακάτω:

i. $H_0:\mu=\mu_0$ έναντι $H_1:\mu \neq \mu_0$

ii. $H_0:\mu= \mu_0$ έναντι $H_1:\mu > \mu_0$

iii. $H_0:\mu= \mu_0$ έναντι $H_1:\mu < \mu_0$

Υποθέτουμε δηλαδή κάθε φορά ότι η μέση τιμή μ του πληθυσμού είναι ίση με μ_0 και η ισχύς της υπόθεσης αυτής ελέγχεται σε σχέση με την υπόθεση ότι η μέση τιμή μ είναι διάφορη, μεγαλύτερη ή μικρότερη του μ_0.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη μέση τιμή του δείγματος $(\bar{x})$. Γνωρίζουμε ότι η κατανομή της εκτιμήτριας $\overline{X}$ είναι κανονική, είτε ο πληθυσμός από τον οποίο προέρχεται το δείγμα είναι κανονικός, είτε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι κανονικός επειδή το δείγμα είναι αρκετά μεγάλο.

Στην πρώτη περίπτωση:

Μηδενική υπόθεση: H_0:μ= μ_0

Έναντι της εναλλακτικής: H_1:μ $\neq$ μ_0

σε επίπεδο σημαντικότητας α

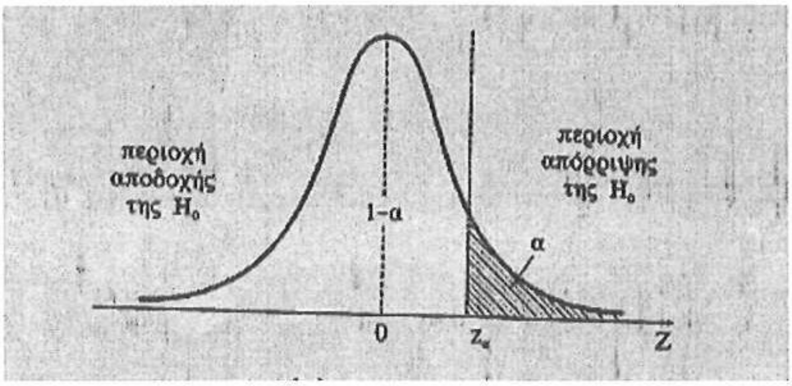
Στην περίπτωση αυτή ο έλεγχος είναι δίπλευρος και το επίπεδο σημαντικότητας α ισοκατανέμεται στο δεξιό και αριστερό άκρο της καμπύλης τυπικής κανονικής κατανομής.

Αν $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{\alpha/2}$ ή $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -z_{\alpha/2}$

απορρίπτουμε την H_0

Αν $-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}$

αποδεχόμαστε την H_0



Διάγραμμα 2.2.1.1: Περιοχή αποδοχής της H_0 αν $-z_{\alpha/2}<Z<z_{\alpha/2}$.

Στη δεύτερη περίπτωση

Μηδενική υπόθεση: H_0:μ= μ_0

Έναντι της εναλλακτικής H_1:μ> μ_0

Σε επίπεδο σημαντικότητας α

Στην περίπτωση αυτή ο έλεγχος είναι μονόπλευρος και το επίπεδο σημαντικότητας α τοποθετείται στο δεξιό άκρο της τυπικής κανονικής κατανομής.

Αν $Z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma - x} > z_\alpha$ απορρίπτουμε την H_0

Αν $Z < z_\alpha$ δεχόμαστε την H_0

<u>Στην τρίτη περίπτωση</u>

Μηδενική υπόθεση: $H_0: \mu = \mu_0$

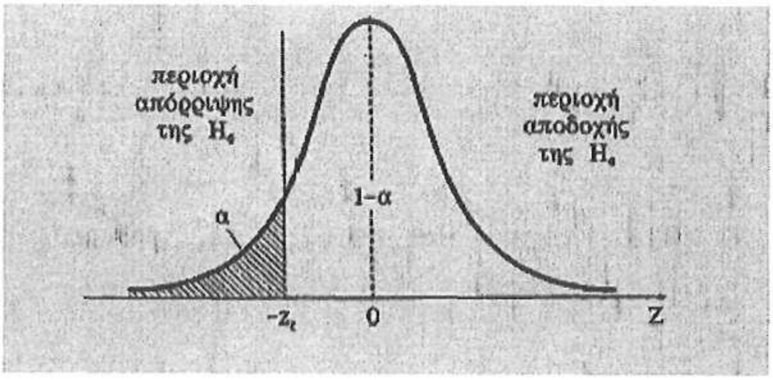
Έναντι της εναλλακτικής: $H_1: \mu < \mu_0$

Σε επίπεδο σημαντικότητας α

Στην περίπτωση αυτή ο έλεγχος είναι μονόπλευρος και το επίπεδο σημαντικότητας α βρίσκεται στο αριστερό άκρο της κανονικής κατανομής.

Αν $Z > z_\alpha$ ή $Z < -z_\alpha$ απορρίπτουμε την H_0

Αν $-z_\alpha < Z < z_\alpha$ δεχόμαστε την H_0



Διάγραμμα 2.2.1.2: Περιοχή αποδοχής της H_0 αν $-z_\alpha < Z < z_\alpha$.

Τις τιμές $z_{\alpha/2}$, $-z_{\alpha/2}$, z_α και $-z_\alpha$ τις παίρνουμε από τον πίνακα της κανονικής κατανομής.

Ο αντίστοιχος μη παραμετρικός έλεγχος υποθέσεων, στον οποίο θα αναφερθούμε στο επόμενο κεφάλαιο, γίνεται όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό($n<30$) και η διακύμανση του πληθυσμού άγνωστη.

Παράδειγμα:

Οι μαθητές ενός Λυκείου ισχυρίζονται ότι ο μέσος χρόνος που χρειάζονται για να φτάσουν στο σχολείο είναι λιγότερος από 25 λεπτά. Ο διευθυντής του σχολείου προκειμένου να ελέγξει αυτόν τον ισχυρισμό πήρε ένα τυχαίο δείγμα από χρόνους διαδρομής προς το σχολείο 36 μαθητών. Το δείγμα έχει $\bar{x} = 21$ και $\sigma = 8{,}4$. Στηριζόμενος στα δεδομένα του δείγματος ο διευθυντής μπορεί να απορρίψει τον ισχυρισμό των μαθητών σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$;

20	15	12	18	10	14
16	30	32	35	30	10
12	28	25	15	10	20
32	15	10	12	30	28
25	10	18	12	30	32
30	35	20	20	15	30

Πίνακας 2.2.1.3: Χρόνος διαδρομής μαθητών

Λύση :

Ισχύει : Z_α =NORMISINV(1-α)

Το συμπέρασμα βρίσκεται ως εξής:

Αν $Z > z_\alpha$ ή $Z<-z_\alpha$ απορρίπτουμε την H_0

Αν $-z_\alpha <Z< z_\alpha$ δεχόμαστε την H_0

Παρακάτω είναι τα αποτελέσματα της άσκησης στο φύλλο εντολών του EXCEL.

H_0	μ=μ0			α=	0,05
H_1	μ<μ0			μ0=	25
σ=	8,4			Z=	-2,857
σ^2=	70,56				
n=	36				
Χμέσος=	21				
Ζα=	1,644853476				
-Ζα=	-1,644853476				

Πίνακας 2.2.1.4 : Αποτελέσματα

$Z<Z_a$ Άρα απορρίπτουμε την H_0 .

2.2.2 Έλεγχος υποθέσεων της διακύμανσης ή της μεταβλητότητας

Υποθέτουμε ότι παίρνουμε ένα δείγμα μεγέθους n, από έναν πληθυσμό που ακολουθεί την κανονική κατανομή. Η διακύμανση του δείγματος S^2 ,είναι η εκτιμήτρια της διακύμανσης του πληθυσμού. Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση ότι η διακύμανση του πληθυσμού, από τον οποίο προέρχεται το δείγμα, είναι ίση με μία ορισμένη τιμή σ_o^2. Οι υποθέσεις που μπορούμε να κάνουμε για τη διακύμανση είναι οι παρακάτω:

i. $H_o:\sigma^2=\sigma_o^2$ έναντι $H_1:\sigma^2\neq\sigma_o^2$

ii. $H_o:\sigma^2=\sigma_o^2$ έναντι $H_1:\sigma^2>\sigma_o^2$

iii. $H_o:\sigma^2=\sigma_o^2$ έναντι $H_1:\sigma^2<\sigma_o^2$

Αν η μέση τιμή του πληθυσμού είναι γνωστή τότε η υπόθεση H_o των παραπάνω περιπτώσεων ελέγχεται από το κριτήριο:

$$x^2 = \frac{\Sigma(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}.$$

Αν ,όμως, η μέση τιμή είναι άγνωστη τότε η υπόθεση H_o ελέγχεται από το κριτήριο:

$$x^2 = \frac{\Sigma\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}.$$

Για να καθορίσουμε την περιοχή αποδοχής, ή την κρίσιμη περιοχή, δηλαδή την περιοχή που απορρίπτουμε την υπόθεση, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι εφόσον ο πληθυσμός του οποίου αγνοούμε τη διακύμανση σ^2 ακολουθεί την κανονική κατανομή, η μεταβλητή $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ ακολουθεί την κατανομή X_ν^2, όπου $\nu = n-1$ και S^2 η εκτιμήτρια της διακύμανσης του πληθυσμού.

<u>Στην πρώτη περίπτωση:</u>

Μηδενική υπόθεση: H_o:σ^2=σ_o^2

Έναντι της εναλλακτικής: H_1:$\sigma^2 \neq \sigma_o^2$

Η H_o γίνεται δεκτή αν $x^2_{\nu,1-\alpha/2} < x^2 < x^2_{\nu,\alpha/2}$

<u>Στη δεύτερη περίπτωση:</u>

Μηδενική υπόθεση: H_o:σ^2=σ_o^2

Έναντι της εναλλακτικής: H_1:$\sigma^2 > \sigma_o^2$

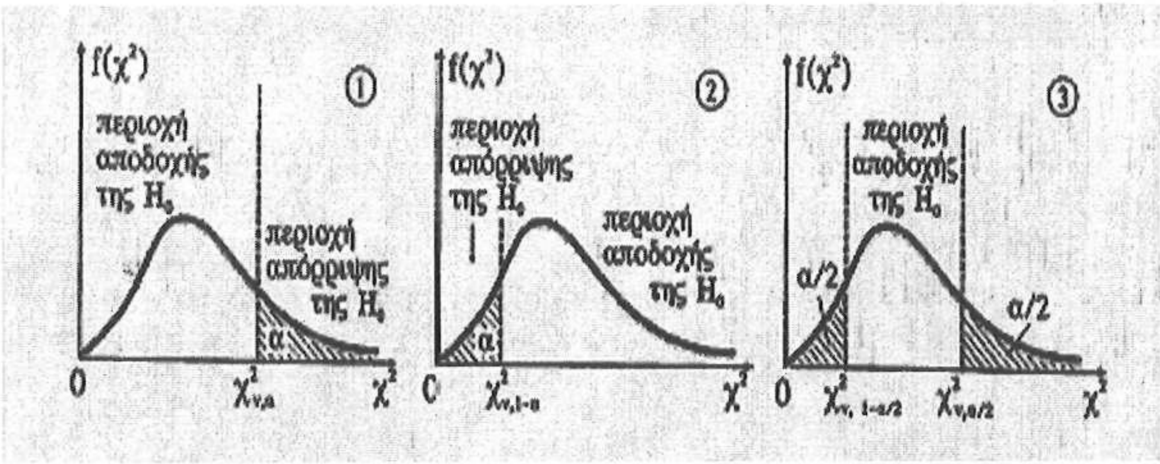
Η H_o γίνεται δεκτή αν $x^2 < x^2_{\nu,\alpha}$

<u>Στην τρίτη περίπτωση:</u>

Μηδενική υπόθεση: H_o:σ^2=σ_o^2

Έναντι της εναλλακτικής: H_1:$\sigma^2 < \sigma_o^2$

Η H_o γίνεται δεκτή αν $x^2 > x^2_{\nu,1-\alpha}$



Διάγραμμα 2.2.2.1:Περιοχές αποδοχές της H_0 των τριών περιπτώσεων.

Παράδειγμα:

Σε ένα δείγμα 25 παρατηρήσεων που ακολουθούν την Κανονική Κατανομή με μέσο μ και διακύμανση σ^2 , ισχύει s^2 =7. Να ελεγχθεί η υπόθεση: H_0 : σ^2 =5, έναντι της H_1 : σ^2 >5, στο επίπεδο σημαντικότητας α=0,05.

Λύση:

Ο έλεγχος είναι μονόπλευρος δεξιά . Το κριτήριο είναι : $x^2 =(n-1)s^2 /\sigma^2$ και η κριτική τιμή είναι : x_α^2= CHIINV(α;n-1).

Παρακάτω είναι τα αποτελέσματα της άσκησης στο φύλλο εντολών στο EXCEL.

H0:	σ^2=5
H1:	σ^2>5
n=	25
s^2=	7
α=	0,05
σ^2=	5
x^2=	33,6
n-1=	24
xα^2=	36,41503

Πίνακας 2.2.2.2 : Αποτελέσματα στο Excel.

$x^2 < x_\alpha^2$ Άρα η H_0 δεν απορρίπτεται.

2.2.3 Έλεγχος υποθέσεων της αναλογίας ή του ποσοστού

Ας υποθέσουμε ότι σε έναν πληθυσμό υπάρχει μία αναλογία, έστω ρ, με μία ορισμένη ιδιότητα. Παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από τον πληθυσμό στον οποίο έστω ότι X από τα στοιχεία του έχουν τη συγκεκριμένη ιδιότητα. Η εκτιμήτρια της ρ είναι η $\hat{P} = \frac{X}{n}$.

Θέλουμε να ελέγξουμε κατά πόσο η αναλογία των μελών του πληθυσμού, τα οποία έχουν τη συγκεκριμένη ιδιότητα, είναι ίση προς ορισμένη τιμή του ρ_0.

Οι υποθέσεις που μπορούμε να κάνουμε για την αναλογία των μελών του πληθυσμού είναι οι παρακάτω:

i. H_0: $\rho=\rho_0$ έναντι H_1: $\rho\neq\rho_o$

ii. H_0: $\rho=\rho_0$ έναντι H_1: $\rho>\rho_o$

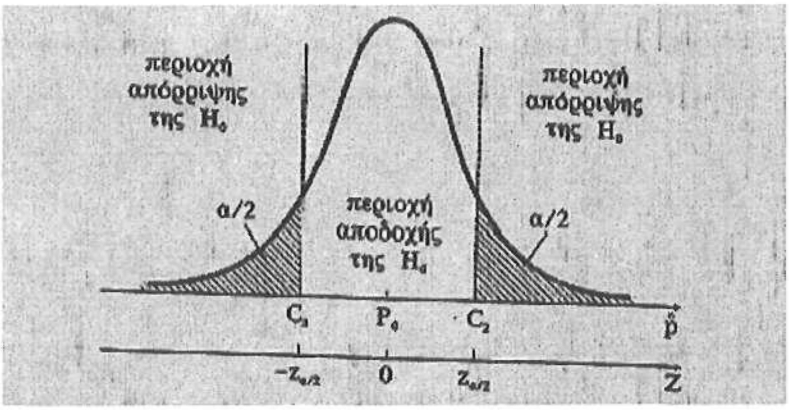
iii. H_0: $\rho=\rho_0$ έναντι H_1: $\rho<\rho_o$

Για να ελέγξουμε τις παραπάνω υποθέσεις θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η κατανομή δειγματοληψίας της αναλογίας, της αναλογίας, δηλαδή της εκτιμήτριας $\hat{P} = \frac{X}{n}$, είναι κανονική ή κατά προσέγγιση κανονική, εφόσον τα μεγέθη των δειγμάτων είναι μεγάλα (n>30), με μέση τιμή $\mu_{\hat{P}} = P$ και τυπική απόκλιση $S_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$, όπου κατ' ανάγκη την P την αντικαθιστούμε με την τιμή της $\hat{P}$.

Το κριτήριο που χρησιμοποιούμε για να ελέγξουμε τις παραπάνω τρεις υποθέσεις είναι:

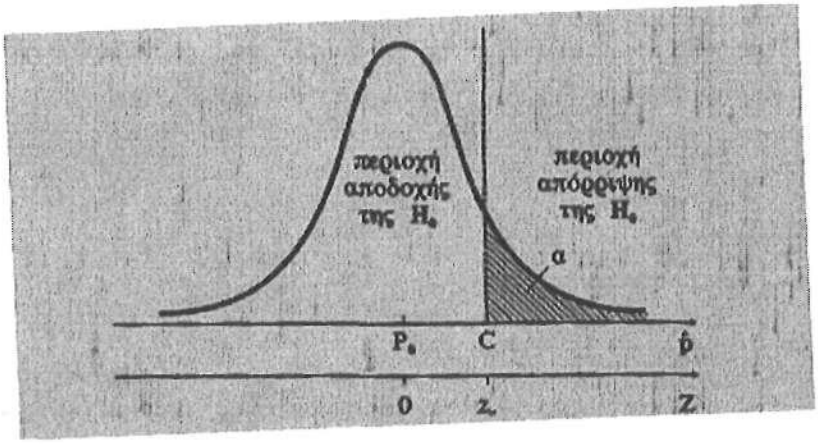
$$Z = \frac{\hat{P}-\rho}{S_{\hat{p}}} = \frac{\hat{P}-\rho_0}{S_{\hat{\rho}}}.$$

Στην πρώτη περίπτωση η υπόθεση H_0 γίνεται δεκτή αν $|Z|<Z_{\alpha/2}$.



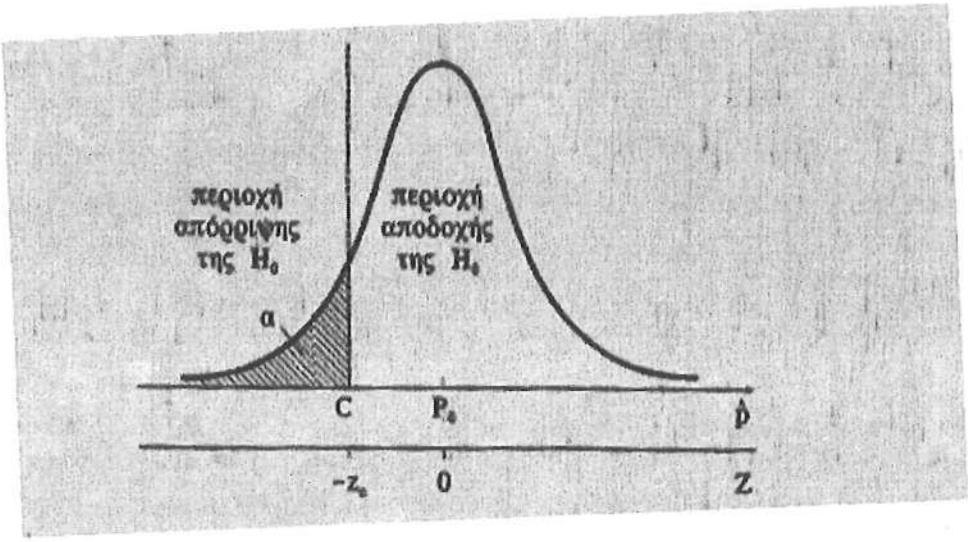
Διάγραμμα 2.2.3.1: Περιοχή αποδοχής της H_0 αν $|Z|<Z_{\alpha/2}$.

Στη δεύτερη περίπτωση η υπόθεση H_0 γίνεται δεκτή αν $Z<Z_{\alpha}$.



Διάγραμμα 2.2.3.2: Περιοχή αποδοχής της H_0 αν $Z<Z_{\alpha}$.

Στην τρίτη περίπτωση η υπόθεση H_0 γίνεται δεκτή αν $Z<-Z_{\alpha}$.



Διάγραμμα 2.2.3.3: Περιοχή αποδοχής της H_0 αν $Z<-Z_\alpha$.

Τις τιμές $Z_{\alpha/2}$, Z_α , $-Z_\alpha$ τις παίρνουμε από τους πίνακες της κανονικής κατανομής

<u>Παράδειγμα:</u>

Σε ένα εργοστάσιο ανταλλακτικών αυτοκινήτων ένας πελάτης αγόρασε 50 ίδια κομμάτια και διαπίστωσε ότι τα 4 ήταν ελαττωματικά. Μήπως αληθεύει ο ισχυρισμός του πελάτη ότι ο πληθυσμός από τον οποίο προέρχεται το δείγμα περιέχει 5% ελαττωματικά, σε επίπεδο σημαντικότητας 5%;

<u>Λύση:</u>

Η στατιστική συνάρτηση του ελέγχου είναι:

$$Z = \frac{\hat{P} - \rho}{S_{\hat{p}}} = \frac{\hat{P} - \rho_0}{S_{\hat{\rho}}}$$

Κριτική τιμή $-Z_\alpha$ = -NORMSINV(α).

Αν $Z<-Z_\alpha$ η υπόθεση H_0 απορρίπτεται.

Παρακάτω είναι τα αποτελέσματα της άσκησης στο φύλλο εντολών στο EXCEL.

n=	50			A=	0,05	
x=	4			x/n=	0,08	
H0:p=	0,2					
H1:p<	0,2					
Z=	-2,121					
Zα=	-1,645					

Πίνακας 2.2.3.4: Αποτελέσματα στο Excel.

$Z<-Z_\alpha$ άρα η υπόθεση H_0 απορρίπτεται.

2.3 Έλεγχοι υποθέσεων όταν εξετάζουμε δύο πληθυσμούς

2.3.1 Έλεγχος υποθέσεων της ισότητας ή της διαφοράς της μέσης τιμής δύο κανονικών πληθυσμών

Κατά τη μελέτη του ελέγχου της ισότητας ή της διαφοράς της μέσης τιμής δύο κανονικών πληθυσμών, ανάλογα με το αν οι διακυμάνσεις των πληθυσμών σ_1^2 και σ_2^2 είναι γνωστές ή άγνωστες, διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

1. Οι διακυμάνσεις σ_1^2 και σ_2^2 είναι γνωστές

Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο πληθυσμούς που έχουν μέσους μ_1 και μ_2 και διακυμάνσεις σ_1^2 και σ_2^2 αντίστοιχα. Παίρνουμε δύο τυχαία και ανεξάρτητα δείγματα μεταξύ τους μεγέθους n_1 και n_2 αντίστοιχα και υπολογίζουμε τους μέσους αριθμητικούς $\overline{X}_1$ και $\overline{X}_2$ αντίστοιχα. Οι υποθέσεις που μπορούμε να κάνουμε για την ισότητα/ διαφορά των μέσων τιμών είναι οι παρακάτω:

1. $H_0:\mu_1-\mu_2=0$ ή $H_0:\mu_1=\mu_2$ έναντι $H_1:\mu_1-\mu_2>0$ ή $H_1:\mu_1>\mu_2$
2. $H_0:\mu_1-\mu_2=0$ ή $H_0:\mu_1=\mu_2$ έναντι $H_1:\mu_1-\mu_2<0$ ή $H_1:\mu_1<\mu_2$

3. $H_0:\mu_1-\mu_2=0$ ή $H_0:\mu_1=\mu_2$ έναντι $H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0$ ή $H_1:\mu_1\neq\mu_2$

Εφόσον $\overline{X}_1$ και $\overline{X}_2$ είναι οι μέσοι αριθμητικοί των δύο τυχαίων και ανεξάρτητων δειγμάτων, τότε η κατανομή δειγματοληψίας της διαφοράς $\overline{X}_1$ - $\overline{X}_2$ έχει μέση τιμή $\mu_1-\mu_2$, διακύμανση $\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$ και τυπική απόκλιση $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$, οπότε:

$$Z=\frac{\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2\right)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad \text{ή} \quad Z=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad \text{γιατί } \mu_1-\mu_2=0.$$

Η σχέση αυτή αποτελεί το κριτήριο των υποθέσεων που κάναμε.

<u>Στην πρώτη περίπτωση</u>

Μηδενική υπόθεση: H_0: $\mu_1-\mu_2=0$ ή H_0: $\mu_1=\mu_2$

Έναντι της εναλλακτικής : H_1: $\mu_1-\mu_2>0$ ή H_1: $\mu_1>\mu_2$

Η Ho γίνεται δεκτή αν $Z<z_\alpha$

<u>Στη δεύτερη περίπτωση</u>

Μηδενική υπόθεση: Ho: $\mu_1-\mu_2=0$ ή Ho: $\mu_1=\mu_2$

Έναντι της εναλλακτικής : H: $\mu_1-\mu_2<0$ ή H1: $\mu_1<\mu_2$

Η Ho γίνεται δεκτή αν $Z>-z_\alpha$

<u>Στην τρίτη περίπτωση</u>

Μηδενική υπόθεση: H_0: $\mu_1-\mu_2=0$ ή H_0: $\mu_1=\mu_2$

Έναντι της εναλλακτικής : H_1: $\mu_1-\mu_2\neq 0$ ή $H_1:\mu_1\neq\mu_2$

Η Ho γίνεται δεκτή αν $-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}$

2. Οι διακυμάνσεις σ_1^2 και σ_2^2 είναι άγνωστες και το μέγεθος του δείγματος μικρό

Σε αυτή την περίπτωση η υπόθεση H_0 των τριών παραπάνω συνδυασμών ελέγχεται με το κριτήριο:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}.$$

3. Οι διακυμάνσεις σ_1^2 και σ_2^2 είναι άγνωστες και ίσες και το μέγεθος του δείγματος μικρό

Σε αυτή την περίπτωση η υπόθεση H_0 των τριών παραπάνω συνδυασμών ελέγχεται με το κριτήριο:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

όπου: $S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

και n_1+n_2-2 οι βαθμοί ελευθερίας.

Η τιμή t στις δύο τελευταίες περιπτώσεις συγκρίνεται με την τιμή που παίρνουμε από τους πίνακες της κατανομής t του Student, με $v= n_1+n_2-2$ βαθμούς ελευθερίας. Έτσι, αν :

$H_0:\mu_1-\mu_2=0$ ή $H_0:\mu_1=\mu_2$ έναντι $H_1:\mu_1-\mu_2>0$ ή $H_1:\mu_1>\mu_2$

Αποδεχόμαστε την υπόθεση H_0 όταν:

$$t<t_{v,2\alpha}$$

$H_0:\mu_1-\mu_2=0$ ή $H_0:\mu_1=\mu_2$ έναντι $H_1:\mu_1-\mu_2<0$ ή $H_1:\mu_1<\mu_2$

Αποδεχόμαστε την υπόθεση H_0 όταν:

$$-t_{v,2\alpha}<t$$

$H_0:\mu_1-\mu_2=0$ ή $H_0:\mu_1=\mu_2$ έναντι $H_1:\mu_1-\mu_2\neq0$ ή $H_1:\mu_1\neq\mu_2$

Αποδεχόμαστε την υπόθεση H_0 όταν:

$$-t_{v,\alpha} < t < t_{v,\alpha}$$

Παράδειγμα:

Δύο ανεξάρτητα δείγματα μεγεθών $n_1=n_2=15$ ακολουθούν την Κανονική Κατανομή με μέσους μ_1 και μ_2 και διακυμάνσεις σ_1 και σ_2 αντίστοιχα. Ισχύει:

$\bar{x}_1 = 68{,}53$, $s_1 = 18{,}14$

$\bar{x}_2 = 68{,}53$, $s_1 = 18{,}14$

Υποθέτουμε ότι οι διακυμάνσεις είναι άγνωστες και ίσες.

Να γίνει ο έλεγχος της υπόθεσης $H_0:\mu_1=\mu_2$ έναντι της $H_1:\mu_1<\mu_2$ σε επίπεδο σημαντικότητας α=0,05.

Λύση:

Ο έλεγχος είναι μονόπλευρος αριστερά. Η κριτική τιμή είναι:

$t_{n1+n2-2}$ =TINV(2*α;n_1+n_2-2).

Το κριτήριο είναι:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \quad \text{όπου:} \quad S^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

Αν $t < t_{\alpha,n1+n2-2}$ απορρίπτεται η υπόθεση H_0 .

Παρακάτω είναι τα αποτελέσματα της άσκησης στο φύλλο εντολών στο EXCEL.

x1=	68,53			H0 : μ1=μ2
s1=	18,14			H1 : μ1<μ2
n1=	15			
x2=	69,81			
s2=	18,78			
n2=	15			
α=	0,05			
s^2=	340,874			

t=	-0,1898645			
tα,n1+n2-2=	1,7011303			

Πίνακας 2.3.1.1 : Αποτελέσματα στο Excel.

$t < t_{\alpha,n1+n2-2}$ άρα η υπόθεση H_0 απορρίπτεται.

2.3.2. Έλεγχος υποθέσεων της διαφοράς των διακυμάνσεων

Έστω ότι έχουμε δύο τυχαία δείγματα μεγέθους n_1 και n_2 με διακυμάνσεις s_1^2 και s_2^2 τα οποία προέρχονται από δύο κανονικούς πληθυσμούς. Αν οι διακυμάνσεις των πληθυσμών σ_1^2 και σ_1^2 είναι ίσες τότε προκύπτει ότι και οι διακυμάνσεις των δύο δειγμάτων s_1^2 και s_2^2 είναι ίσες μεταξύ τους.

Έχει αποδειχθεί ότι οι λόγοι των διακυμάνσεων $\frac{s_1^2}{s_2^2}$, ενός πλήθους ζευγών δειγμάτων με μεγέθη n_1 και n_2 λαμβανομένων ανά δύο ορίζουν ένα δείγμα το οποίο ακολουθεί την F-κατανομή. Έτσι το κριτήριο, με τη βοήθεια του οποίου θα εξετάσουμε αυτόν τον έλεγχο, είναι η σχέση:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

για $\nu_1 = n_1 - 1$ και $\nu_2 = n_2 - 1$ βαθμούς ελευθερίας.

Για $s_1^2 = s_2^2$, F=1, άρα θα πρέπει να συγκριθεί η τιμή F, από τους πίνακες της F-κατανομής, σε σχέση με την τιμή 1. Οι πίνακες της F-κατανομής είναι πίνακες διπλής εισόδου, στους οποίους οι γραμμές αναφέρονται στους βαθμούς ελευθερίας του αριθμητή της τιμής F και οι στήλες στους βαθμούς ελευθερίας του παρανομαστή της τιμής F. Αν εξετασθούν οι τιμές των πινάκων αυτών φαίνεται ότι όλες είναι μεγαλύτερες του 1, άρα θα πρέπει για να μπορεί να γίνει η σύγκριση, να υπολογίζεται η τιμή της F έτσι ώστε στον αριθμητή να τίθεται η μεγαλύτερη από τις δύο τιμές των διακυμάνσεων των δύο δειγμάτων, ώστε τελικά το κλάσμα να παίρνει τιμές μεγαλύτερες τις μονάδας.

Στον δίπλευρο έλεγχο:

H_0: $s_1^2 - s_2^2 = 0$ ή $s_1^2 = s_2^2$ έναντι της H_1: $s_1^2 - s_2^2 \neq 0$ ή $s_1^2 \neq s_2^2$

Αν ισχύει $F < F_{0.05}$ αποδεχόμαστε την H_0.

Αν ισχύει $F_{0.05} < F < F_{0.01}$, τότε πιθανόν να ισχύει η H_0.

Αν ισχύει $F > F_{0.01}$, τότε απορρίπτουμε την H_0.

Στο μονόπλευρο έλεγχο:

Αν $s_2 > s_1$,τότε : H_0: $s_1^2 \geq s_2^2$ έναντι της H_1: $s_1^2 < s_2^2$

Ενώ αν $s_1 > s_2$, τότε H_0: $s_1^2 \leq s_2^2$ έναντι της H_1: $s_1^2 > s_2^2$

Για να αποδεχτούμε τη μηδενική υπόθεση H_0 και στις δυο περιπτώσεις, θα πρέπει να ισχύει: $F < F_{\alpha(N_2-1,N_1-2)}$ ή $F_{\alpha(N_1-1,N_2-2)}$.

Παράδειγμα:

Δυο ανεξάρτητα δείγματα $n_1 = n_2 = 18$ ακολουθούν την κανονική κατανομή και με διακυμάνσεις s_1^2 και s_2^2 ισχύει ότι:

$\bar{x}_1 = 69, \quad s_1 = 11$

$\bar{x}_2 = 16, \quad s_2 = 72$

Για $v_1 = n_1 - 1$ και $v_2 = n_2 - 1$βαθμούς ελευθερίας. Να γίνει ο έλεγχος H_0: $s_1^2 \geq s_2^2$ έναντι της H_1: $s_1^2 < s_2^2$ και σε επίπεδο σημαντικότητας α=5%.

2.3.3. Έλεγχος υποθέσεων του λόγου των διακυμάνσεων δύο κανονικών πληθυσμών

Πολλές φορές από δύο κανονικούς πληθυσμούς παίρνουμε δύο δείγματα n_1 και n_2 με τη βοήθεια των οποίων θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση ότι οι διακυμάνσεις τους είναι ίδιες (H_o:$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$). Οι υποθέσεις που αναφέρονται στις δύο διακυμάνσεις είναι οι παρακάτω:

1. $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ ή $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ έναντι της $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$ ή $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

2. $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ ή $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ έναντι της $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$ ή $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

3. $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ ή $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ έναντι της $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$ ή $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$.

α) Αν οι μέσοι αριθμητικοί μ_1 και μ_2 είναι γνωστοί τότε η υπόθεση H_o των παραπάνω υποθέσεων ελέγχεται με το κριτήριο:

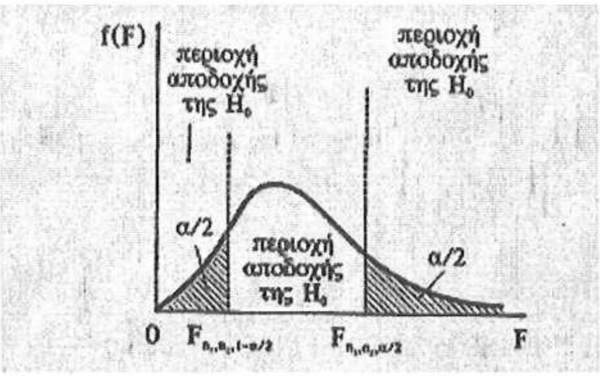
$$F = \frac{\dfrac{\sum (X_i - \mu_1)^2}{n_1}}{\dfrac{\sum (Y_i - \mu_2)^2}{n_2}} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \qquad \sim F_{n1,n2,\alpha}$$

<u>Στην πρώτη περίπτωση:</u>

Μηδενική υπόθεση: $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ ή $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Έναντι της εναλλακτικής: $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$ ή $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Η H_o γίνεται δεκτή αν $F_{n1,n2,1-\alpha/2} < F < F_{n1,n2,\alpha/2}$



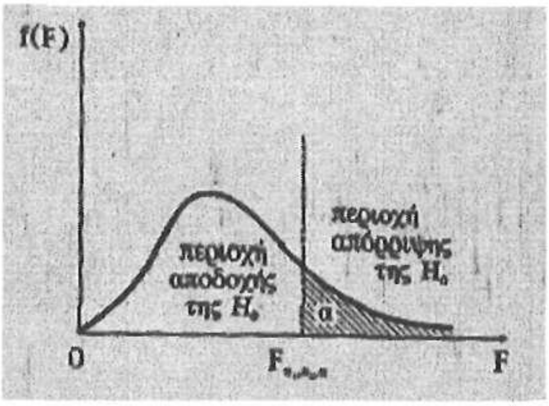
Διάγραμμα 2.3.3.1: Περιοχή αποδοχής της H_0 αν $F_{n1,n2,1-\alpha/2} < F < F_{n1,n2,\alpha/2}$.

Στη δεύτερη περίπτωση:

Μηδενική υπόθεση: $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ ή $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Έναντι της εναλλακτικής: $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$ ή $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

Η H_o γίνεται δεκτή αν $F < F_{n1,n2,\alpha}$



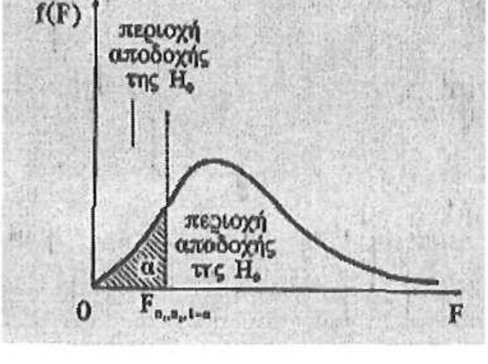
Διάγραμμα 2.3.3.2: Περιοχή αποδοχής της H_0 αν $F < F_{n1,n2,\alpha}$.

Στην τρίτη περίπτωση:

Μηδενική υπόθεση: $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ ή $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Έναντι της εναλλακτικής: $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$ ή $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

Η H_o γίνεται δεκτή αν $F > F_{n1,n2,1-\alpha}$



Διάγραμμα 2.3.3.3: περιοχή αποδοχής της H_0 αν F> $F_{n1,n2,1-\alpha}$.

β) Αν οι μέσοι αριθμητικοί μ_1 και μ_2 είναι άγνωστοι τότε η υπόθεση H_o των τριών περιπτώσεων ελέγχεται με το κριτήριο:

$$F = \frac{\dfrac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n_1 - 1}}{\dfrac{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{n_2 - 1}} = \frac{S_1^2}{S_2^2}.$$

Στην πρώτη περίπτωση:

Μηδενική υπόθεση: $H_0 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ ή $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Έναντι της εναλλακτικής: $H_1 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$ ή $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Η H_o γίνεται δεκτή αν $F_{v1,v2,1-\alpha/2}$ <F< $F_{v1,v2,\alpha/2}$

Στη δεύτερη περίπτωση:

Μηδενική υπόθεση: $H_0 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ ή $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Έναντι της εναλλακτικής: $H_1 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$ ή $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

Η H_o γίνεται δεκτή αν F< $F_{v1,v2,\alpha}$

Στην τρίτη περίπτωση:

Μηδενική υπόθεση: $H_0 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ ή $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Έναντι της εναλλακτικής: $H_1 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$ ή $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

Η H_o γίνεται δεκτή αν F> $F_{v1,v2,1-\alpha}$

Όπου $\nu_1 = n_1 - 1$ και $\nu_2 = n_2 - 1$ είναι οι βαθμοί ελευθερίας.

Τις τιμές $F_{n1,n2,\alpha}$, $F_{n1,n2,1-\alpha}$, $F_{n1,n2,1-\alpha/2}$, $F_{n1,n2,\alpha/2}$, $F_{\nu1,\nu2,\alpha}$, $F_{\nu1,\nu2,1-\alpha}$, $F_{\nu1,\nu2,1-\alpha/2}$, $F_{\nu1,\nu2,\alpha/2}$ τις παίρνουμε από τους πίνακες κατανομής F του Shedecor με βαθμούς ελευθερίας n_1 και n_2 και επίπεδο σημαντικότητας α.

Παράδειγμα:

Δίνονται δύο ανεξάρτητα δείγματα μεγεθών n_1 και n_2 , που ακολουθούν την Κανονική κατανομή με μέσους μ_1 και μ_2 και διακυμάνσεις σ_1 και σ_2 αντίστοιχα. Οι παρατηρήσεις δίνονται στον επόμενο πίνακα αποτελεσμάτων του EXCEL. Να ελεγχθεί η υπόθεση : $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, έναντι της $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$, σε επίπεδο σημαντικότητας α=0,05.

Λύση:

Το κριτήριο είναι: $F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$.

Η κριτική τιμή είναι: $F_{\alpha/2} = F(\alpha/2; n_1 - 1; n_2 - 1)$.

Η υπόθεση H_0 απορρίπτεται αν $F > F_{\alpha/2}$.

Παρακάτω είναι τα αποτελέσματα της άσκησης στο φύλλο εντολών στο EXCEL.

A	B
3,4	1,2
2,7	5,1
5,4	4,3
2,1	0,8
3	3,2
3,1	3
3	3,8

H0:σ1^2=σ2^2	
H1:σ1^2≠σ2^2	
α=	0,05
n1=	21
n2=	25
s1^2=	1,6971429
s2^2=	1,355

3,5	1,3
1,6	2,2
2,6	0,4
3,6	2,7
6,4	1,5
5,3	2,1
3	3,3
3	1,8
2,9	2,4
5	4,6
0,9	2,8
2,2	1,8
3,1	3,6
2,9	2,2
	2,8
	1,7
	2,8
	2,1

Πίνακας 2.3.3.5 :Δείγματα

F=	1,252504
Fα/2,n1-1,n2-2=	2,327269

Πίνακας 2.3.3.4:Αποτελέσματα στο Excel.

$F<F_{\alpha/2,n1-1,n2-1}=$ Άρα η H_0 δεν απορρίπτεται

2.3.4. Έλεγχος υποθέσεων της διαφοράς δύο αναλογιών

Έστω ότι έχουμε δύο ανεξάρτητους διωνυμικούς πληθυσμούς Π_1 και Π_2 και από τον κάθε πληθυσμό παίρνουμε ένα δείγμα μεγέθους n_1 και n_2 αντίστοιχα. Οι υποθέσεις που μπορούμε να κάνουμε για τη διαφορά των αναλογιών P_1 και P_2 των δύο πληθυσμών αντίστοιχα είναι:

1. H_0: $P_1 = P_2$ ή H_0: $P_1 - P_2 = 0$ έναντι H_1: $P_1 > P_2$ ή H_1: $P_1 - P_2 > 0$

2. H_0: $P_1 = P_2$ ή H_0: $P_1 - P_2 = 0$ έναντι H_1: $P_1 < P_2$ ή H_1: $P_1 - P_2 < 0$

3. H_0: $P_1 = P_2$ ή H_0: $P_1 - P_2 = 0$ έναντι H_1: $P_1 \neq P_2$ ή H_1: $P_1 - P_2 \neq 0$

Αν το μέγεθος των δειγμάτων είναι μεγάλο (n>30) τότε η υπόθεση H_0 των τριών παραπάνω περιπτώσεων ελέγχεται από το κριτήριο:

$$Z = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\sqrt{\hat{\rho}\left(1-\hat{\rho}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

Όπου $\hat{\rho} = \frac{n_1\rho_1 + n_2\rho_2}{n_1 + n_2}$ και ρ_1, ρ_2 τα αντίστοιχα δειγματικά ποσοστά.

Στην πρώτη περίπτωση η H_0 γίνεται δεκτή αν $Z < Z_\alpha$.

Στη δεύτερη περίπτωση η H_0 γίνεται δεκτή αν $Z > -Z_\alpha$.

Στην τρίτη περίπτωση η H_0 γίνεται δεκτή αν $|Z| < Z_{\alpha/2}$.

<u>Παράδειγμα:</u>

Δύο σπουδαστές κάνοντας μία έρευνα για τις ανάγκες της πτυχιακής τους εργασίας διαπίστωσαν ότι από ένα τυχαίο δείγμα 200 σπουδαστών το 30% είναι καπνιστές ενώ από ένα τυχαίο δείγμα 150 σπουδαστριών καπνίστριες είναι το 20%.Να ελεγχθεί η υπόθεση:

$H_0 : P_1 = P_2$ έναντι της $H_1 : P_1 > P_2$

σε επίπεδο σημαντικότητας α=5%.

<u>Λύση:</u>

Ο έλεγχος είναι μονόπλευρος και η κριτική τιμή είναι:

Z_α:NORMSINV(1-α) .

Αν $Z < Z_\alpha$ η υπόθεση H_0 δεν απορρίπτεται.

Παρακάτω είναι τα αποτελέσματα της άσκησης στο φύλλο εντολών στο EXCEL.

n1=	200			
^p1=	0,3			H0:p1=p2
n2=	150			H1:p1>p2

^p2=	0,2			
α=	0,05			
^p=	0,25714			
Z=	2,1183			
Zα=	1,64485			

Πίνακας 2.3.4.1: Αποτελέσματα στο Excel

$Z>Z_α$ άρα η υπόθεση H_0 απορρίπτεται.

2.4. Έλεγχοι υποθέσεων όταν εξετάζουμε ζευγαρωτές παρατηρήσεις

2.4.1. Έλεγχος των διαφορών των μέσων τιμών

Έστω ότι έχουμε δύο δείγματα ίσου μεγέθους N και υφίσταται εξάρτηση μεταξύ των τιμών τους, οπότε δε γίνεται αναφορά σε κανονικά κατανεμημένους πληθυσμούς και οι διακυμάνσεις των δύο πληθυσμών θεωρούνται άνισες. Ο έλεγχος t στην προκειμένη περίπτωση προϋποθέτει ότι μόνο το σύνολο των διαφορών των τιμών μεταξύ των εξαρτημένων ζευγών προέρχεται από ένα κανονικά κατανεμημένο πληθυσμό διαφορών και είναι ένας ισχυρότερος έλεγχος από αυτόν που αναφέρεται στις διαφορές των μέσων τιμών, γιατί λαμβάνεται υπόψη η μεταβλητότητα του δείγματος των διαφορών ανά ζεύγη.

Για τη σύγκριση των δύο δειγμάτων θεωρείται ότι το σύνολο των διαφορών $x_{1,k}$-$x_{2,k}$,όπου $x_{1,k}$, $x_{2,k}$ είναι τα ζεύγη που ορίζονται από τα δύο δείγματα (k=1,2,..,N).

Για να ελέγξουμε, λοιπόν, αν οι διαφορές $μ_{1,k}$-$μ_{2,k}$ του πληθυσμού των διαφορών με μέση τιμή $μ_d$ είναι στατιστικά σημαντικές ή όχι θα πρέπει να θεωρηθεί ότι δεν είναι στατικά σημαντικές, οπότε και η μέση τιμή τους μ_d δε θα είναι στατικά σημαντική.

Οι υποθέσεις που μπορούμε να κάνουμε είναι:

1. H_0: μ_d=c έναντι της H_1: $\mu_d \neq c$
2. H_0: μ_d<c έναντι της H_1: $\mu_d \geq c$
3. H_0: μ_d>c έναντι της H_1: $\mu_d \leq c$

Το κριτήριο, το οποίο χρησιμοποιούμε για να εξετάσουμε τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις είναι η τυποποιημένη τιμή:

$$t = \frac{d - \mu_d}{s_d} = \frac{d}{s_d}$$

όπου,

$$d = \sum_{k=1}^{N} \frac{d_k}{N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} (x_{1,k} - x_{2,k})$$

και

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N} (d_k - d)^2}{N \cdot (N-1)}}$$

με ν=Ν-1 βαθμούς ελευθερίας.

Η μηδενική υπόθεση H_0 γίνεται δεκτή αν $t<t_{\alpha/2}$.

<u>Παράδειγμα:</u>

Δυο ανεξάρτητα δείγματα n_1 και n_2 που δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή και με διακυμάνσεις s_1^2 και s_2^2 ισχύει ότι:

$\bar{x}_1 = 27{,}2$, $s_1 = 5{,}72$

$\bar{x}_2 = 29{,}2$, $s_2 = 7{,}03$

Οι διακυμάνσεις θεωρούνται άνισες.

Για ν=Ν-1 βαθμούς ελευθερίας. Να γίνει ο έλεγχος

H_0: μ_d=c έναντι της H_1: $\mu_d \neq c$, σε επίπεδο σημαντικότητας α=5% και να ελέγχει αν η μ_d είναι στατιστικά σημαντική.

2.5. Έλεγχοι υποθέσεων όταν εξετάζουμε περισσότερα από 2 δείγματα

2.5.1. Έλεγχος υποθέσεων των μέσων τιμών (ANOVA F-έλεγχος)

Για τη σύγκριση των μέσων τιμών περισσότερων των δύο δειγμάτων χρησιμοποιείται συνήθως η μονοπαραγοντική ανάλυση διακυμάνσεων με τη βοήθεια της οποίας ελέγχεται η ισότητα, των μέσων τιμών κ δειγμάτων (κ>2) επί του συνόλου.

Η μέθοδος αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι μία φυσική επέκταση της μεθόδου σύγκρισης δύο μέσων τιμών.

Για να είναι δυνατή κατ' αρχάς η εφαρμογή του ANOVA F- ελέγχου στις μέσες τιμές κ δειγμάτων θα πρέπει, με όσο το δυνατό λιγότερες αποκλίσεις να ικανοποιούνται οι παρακάτω προϋποθέσεις:

- Τα δείγματα ή οι πληθυσμοί από τους οποίους προέρχονται να ακολουθούν την κανονική κατανομή.
- Οι κ πληθυσμοί από τους οποίους προέρχονται τα δείγματα να έχουν ίσες διακυμάνσεις $\sigma_1=\sigma_2=\ldots=\sigma_\kappa$.
- Τα δείγματα να είναι τυχαία.
- Τα δείγματα να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Στην πράξη για να ελεγχθεί αν μπορεί να εφαρμοστεί ο ANOVA F - έλεγχος λαμβάνεται η μεγαλύτερη και η μικρότερη τιμή μεταξύ των τυπικών αποκλίσεων που υπολογίζονται από τα κ δείγματα.

Αν $\max(s_k)\leq 2\min(s_k)$ τότε θεωρείται ότι είναι δυνατή η εφαρμογή του ελέγχου(s_k: τυπική απόκλιση κ). Ο έλεγχος που κάνουμε είναι ο εξής:

H_0 : $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \ldots = \bar{x}_k$ έναντι της

H_1 : τουλάχιστον δύο από τις $\overline{x_n}$ μέσες τιμές (n=1,2,…,κ) είναι διάφορες μεταξύ τους

Το κριτήριο ελέγχου εδώ είναι η ποσότητα:

$$F = \frac{\dfrac{\left\{N_1 \cdot \left(\overline{x_1} - \overline{x}\right)^2 + N_2 \cdot \left(\overline{x_2} - \overline{x}\right)^2 + \ldots + N_k \cdot \left(\overline{x_k} - \overline{x}\right)^2\right\}}{k-1}}{\dfrac{\left\{(N_1 - 1)\cdot s_1^2 + (N_2 - 1)\cdot s_2^2 + \ldots + (N_k - 1)\cdot s_k^2\right\}}{N-k}}$$

Όπου N_κ τα μεγέθη των κ δειγμάτων $N=N_1+N_2+\ldots+N_\kappa$ και

$$\overline{x} = \frac{N_1 \cdot \overline{x_1} + N_2 \cdot \overline{x_2} + \ldots + N_k \cdot \overline{x_k}}{N}$$

Αν $F<F_\alpha$ δεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση H_0 , δηλαδή δεν υπάρχει στατικά σημαντική διαφορά μεταξύ των μέσων τιμών των κ δειγμάτων.

Αν $F>F_\alpha$ απορρίπτεται η H_0 , δηλαδή τουλάχιστον δύο από τις μέσες τιμές $\overline{x_n}$, (n=1,2,…,k) είναι στατιστικά σημαντικά διαφορές μεταξύ τους. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να βρεθεί ποιες είναι αυτές οι μέσες τιμές που διαφέρουν μεταξύ τους, δηλαδή πρέπει να συγκριθούν ανά δύο οι μέσες τιμές μεταξύ τους με την εφαρμογή συγκρίσεων ζευγών $\frac{\kappa \cdot (\kappa - 1)}{2}$ μέσων τιμών.

Την τιμή F_α την παίρνουμε από τον πίνακα της F-κατανομής, σε επίπεδο σημαντικότητας α για ν_α=κ-1 βαθμούς ελευθερίας του αριθμητή και ν_π= N -κ βαθμούς ελευθερίας του παρανομαστή.

Παράδειγμα:

Ορίζονται 3 δείγματα των οποίων τα μεγέθη, οι μέσες τιμές οι τυπικές αποκλίσεις και οι διακυμάνσεις δίνονται στον πίνακα. Να ελεγχθεί αν οι μέσες τιμές των 3 δειγμάτων είναι στατιστικά ίσες μεταξύ τους(α=0,05).

	Μέγεθος	**Μέση τιμή**	**Τυπική**	**Διακύμανση**

	δείγματος	$(\overline{x_i})$	απόκλιση (s_i)	(s_ι^2)
Δείγμα 1	15	7,3	0,9	0,81
Δείγμα 2	12	6,8	1,6	2,56
Δείγμα 3	8	7,7	1,7	2,89

Πίνακας 2.5.1.1: Τιμές δειγμάτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3:ΜΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΙ ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι στατιστικές διαδικασίες που μέχρι στιγμής έχουμε αναλύσει αφορούν συγκεκριμένες πληθυσμιακές παραμέτρους και χρησιμοποιούν συγκεκριμένες υποθέσεις για την πιθανότητα κατανομής των εκτιμητών του δείγματος ή υποθέσεις για τη 'φύση' του πληθυσμού. Οι στατιστικές διαδικασίες που περιγράφονται σε αυτό το κεφάλαιο δεν αφορούν συγκεκριμένες υποθέσεις. Πολλοί από τους ελέγχους δεν συμφωνούν με συγκεκριμένες παραμέτρους του πληθυσμού και συνεπώς γι' αυτό λέγονται μη παραμετρικοί. Μερικοί έλεγχοι δεν χρειάζονται υποθέσεις σχετικά με τις κατανομές του πληθυσμού. Γι΄αυτό οι μη παραμετρικοί έλεγχοι συχνά ονομάζονται 'μέθοδοι ελεύθερης κατανομής'.

Τυπικά, οι μη παραμετρικοί έλεγχοι χρησιμοποιούν λιγότερες πληροφορίες από τα δεδομένα. Το γεγονός αυτό καθιστά τους μη παραμετρικούς ελέγχους λιγότερο ισχυρούς σε σχέση με τους παραμετρικούς για ίδιες καταστάσεις, δηλαδή, όταν οι υποθέσεις των παραμετρικών ελέγχων ικανοποιούνται. Όταν οι υποθέσεις των παραμετρικών ελέγχων δεν ικανοποιούνται, τότε πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι μη παραμετρικοί έλεγχοι. Για παράδειγμα, στην ανάλυση της διασποράς (ANOVA) υποθέτουμε ότι οι πληθυσμοί που μας ενδιαφέρουν ακολουθούν την κανονική κατανομή με ίσες διακυμάνσεις. Αν αυτές οι υποθέσεις ικανοποιούνται τότε ο F έλεγχος του ANOVA είναι μία ισχυρή μέθοδος για να καθορίσει εάν οι μέσοι του πληθυσμού είναι ίσοι. Εάν οι υποθέσεις αυτές αθετούνται τότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μία εναλλακτική μέθοδο. Οι παραμετρικοί έλεγχοι προσφέρουν μία σωστή λύση. Το αντίστοιχο μη παραμετρικό τεστ του ANOVA ονομάζεται Kruskal-Wallis έλεγχος. Αυτός ο έλεγχος δεν χρειάζεται υποθέσεις σχετικά με τους πληθυσμούς στους οποίους αναφέρεται και χρησιμοποιεί μόνο παρατεταγμένες παρατηρήσεις.

Πολλοί από τους παραμετρικούς ελέγχους έχουν τους αντίστοιχους εναλλακτικούς μη παραμετρικούς ελέγχους όταν οι υποθέσεις που κάνουν δεν ικανοποιούνται. Σε αυτές τις περιπτώσεις οι μη παραμετρικοί έλεγχοι προσφέρουν την ιδανική λύση στο πρόβλημα. Επειδή οι μη παραμετρικοί έλεγχοι συνήθως χρειάζονται ελάχιστες υποθέσεις και χρησιμοποιούν λιγότερες πληροφορίες στα δεδομένα, συχνά λέγεται ότι μία παραμετρική διαδικασία είναι μία προσεγγιστική λύση σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα.

Για να θεωρείται ένας έλεγχος μη παραμετρικός πρέπει να ικανοποιεί τουλάχιστον ένα από τα παρακάτω κριτήρια:

i. Ο έλεγχος να συμφωνεί με τα απαριθμημένα δεδομένα.

ii. Ο έλεγχος να μη συμφωνεί με συγκεκριμένες παραμέτρους του πληθυσμού όπως ο μέσος.

iii. Ο έλεγχος να μη χρησιμοποιεί υποθέσεις σχετικά με συγκεκριμένη κατανομή του πληθυσμού(συγκεκριμένα την υπόθεση της κανονικότητας).

Επειδή οι μη παραμετρικοί έλεγχοι χρησιμοποιούν ελάχιστες υποθέσεις σε σχέση με τους παραμετρικούς, είναι χρήσιμοι όταν η κλιμάκωση των μετρήσεων είναι αδύναμη.

Υπάρχουν αρκετά είδη μη παραμετρικών ελέγχων τα οποία μπορούμε να τα χωρίσουμε σε τέσσερις κατηγορίες ανάλογα με το πόσα δείγματα χρησιμοποιούνται ώστε να πραγματοποιηθεί ο κάθε έλεγχος. Όταν λοιπόν έχουμε *ένα δείγμα* τα αντίστοιχα είδη των μη παραμετρικών ελέγχων που χρησιμοποιούνται είναι:

i. Ο έλεγχος υποθέσεων της μέσης τιμής: χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να ελέγξουμε αν η μέση τιμή του πληθυσμού (μ) είναι ίση με τη μέση τιμή του δείγματος όταν η διακύμανση του πληθυσμού είναι άγνωστη και το μέγεθος του δείγματος μικρό($n<30$).

ii. Ο έλεγχος υποθέσεων της ανεξαρτησίας: εφαρμόζεται όταν θέλουμε να ελέγξουμε τα στοιχεία ενός πληθυσμού ως προς δύο χαρακτηριστικά και αν αυτά είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

iii. Ο έλεγχος υποθέσεων x^2: χρησιμοποιείται όταν τα δεδομένα που έχουμε είναι αριθμήσιμα, δηλαδή, τα δεδομένα είναι μετρήσιμα ή συχνότητες.

iv. <u>Ο έλεγχος υποθέσεων των Kolmogorov- Smirnov</u>: είναι εφαρμόσιμος όταν η συνάρτηση της κατανομής του πληθυσμού είναι συνεχής.

v. <u>Ο προσημειακός έλεγχος υποθέσεων ή το Sign test</u>: χρησιμοποιείται όταν οι παρατηρήσεις του δείγματος είναι σε κλίμακα και δεν περιλαμβάνει υποθέσεις για τον πληθυσμό.

vi. <u>The Wilcoxon test</u>: είναι εφαρμόσιμος όταν θέλουμε να ελέγξουμε αν ο μέσος ενός πληθυσμού είναι ίσος με την τιμή που μας δίνεται και οι τιμές πρέπει να είναι σε κλίμακα.

Σε περίπτωση που έχουμε *δύο δείγματα* ανεξάρτητα μεταξύ τους οι έλεγχοι που χρησιμοποιούνται είναι οι εξής:

i. <u>Ο έλεγχος υποθέσεων της ισότητας ή της διαφοράς των μέσων τιμών</u>: χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να ελέγξουμε αν οι μέσες τιμές ή οι διαφορές των μέσων τιμών των δύο δειγμάτων είναι ίσες ή όχι.

ii. <u>Ο έλεγχος των διαφορών των διαμέσων</u> : χρησιμοποιείται όταν έχουμε δύο δείγματα και θέλουμε να διαπιστώσουμε αν οι δύο πληθυσμοί έχουν ίδιες διάμεσες τιμές. Βασική προϋπόθεση είναι ότι τα δύο εξεταζόμενα δείγματα ενώνονται και υπολογίζεται η διάμεσος του νέου δείγματος.

iii. <u>Ο έλεγχος ισότητας πολλών αναλογιών</u>: χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να ελέγξουμε τις τιμές που παίρνουμε από δύο ανεξάρτητα δείγματα που προέρχονται από τους δύο πληθυσμούς είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

iv. <u>Ο έλεγχος υποθέσεων των Kolmogorov- Smirnov</u>: χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να ελέγξουμε τη διαφορά ανάμεσα σε δύο κατανομές του πληθυσμού και ο έλεγχος βασίζεται στα δύο δείγματα των πληθυσμών.

v. <u>The Mann- Whithey test</u>: αναφέρεται σε δείγματα ίσου ή άνισου μεγέθους και στον έλεγχο αυτό δε χρησιμοποιούνται οι ίδιες οι τιμές των δύο δειγμάτων αλλά οι διατάξεις της σειράς αυτών κατά αύξουσα τάξη τιμών της εξεταζόμενης μεταβλητής των δύο δειγμάτων μαζί.

Όταν έχουμε *ζευγαρωτές ή ταξινομημένες κατά ζεύγη παρατηρήσεις* οι έλεγχοι πού χρησιμοποιούνται είναι οι παρακάτω:

i. Ο έλεγχος ομοιογένειας: αναφέρεται στη σύγκριση κατά ζεύγη μεταξύ των τιμών της χρονοσειράς μιας μεταβλητής Χ με τις τιμές της ίδιας μεταβλητής ενός άλλου δείγματος.

ii. Sign test: χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να ελέγξουμε αν οι δύο πληθυσμιακοί μέσοι είναι ίσοι και με βασική προϋπόθεση ότι οι τιμές των δύο δειγμάτων πρέπει να είναι κατά αύξουσα τάξη και τοποθετούνται σαν ζευγαρωτές παρατηρήσεις.

iii. The Wilcoxon test: χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να εξετάσουμε δύο πληθυσμούς για τους οποίους έχουμε ζευγαρωτές παρατηρήσεις. Πρέπει επίσης να ισχύει ότι η κατανομή μεταξύ των διαφορών των δύο πληθυσμών είναι συμμετρική, ακόμη ότι οι διαφορές είναι ανεξάρτητες και πρέπει να υπάρχει εσωτερική κλιμάκωση.

iv. The Spearman Rank Correlation Coefficient: είναι εφαρμόσιμος όταν θέλουμε να μετρήσουμε το βαθμό συσχέτισης ανάμεσα στις δύο μεταβλητές.

Σε περίπτωση που έχουμε πολλά ανεξάρτητα δείγματα οι έλεγχοι που εφαρμόζονται είναι οι παρακάτω:

i. Ο έλεγχος υποθέσεων των διαφορών των διαμέσων: εφαρμόζεται όταν έχουμε περισσότερα από δύο δείγματα και θέλουμε να διαπιστώσουμε αν οι πληθυσμοί έχουν ίσες διάμεσες τιμές. Βασική προϋπόθεση είναι ότι όλα τα δείγματα ενώνονται σε ένα και δημιουργούν ένα καινούριο δείγμα.

ii. The Kruskal-Wallis test: χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να συγκρίνουμε περισσότερους από δύο πληθυσμούς αν έχουν την ίδια κατανομή και τα δεδομένα πρέπει να έχουν κάποια κλιμάκωση.

iii. The Friedman test: μπορούμε να ελέγξουμε κατά πόσο ένα σύνολο ατόμων ή κάποιο μεμονωμένο άτομο κρίνει πολλά διαφορετικά προϊόντα ή θέματα.

3.2. Έλεγχοι υποθέσεων όταν εξετάζουμε έναν πληθυσμό

3.2.1. Έλεγχος υποθέσεων της μέσης τιμής

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στον έλεγχο μέσης τιμής με γνωστή τη διακύμανση του πληθυσμού, μεγάλο μέγεθος δείγματος ($n>30$) και ο πληθυσμός να ακολουθεί την κανονική κατανομή. Τώρα θα εξετάσουμε τη γίνεται όταν η διακύμανση του πληθυσμού είναι άγνωστη και το μέγεθος του δείγματος μικρό $n<30$.

Έχουμε τους ίδιους τρεις ελέγχους:

1. H_0: $\mu=\mu_0$ έναντι H_1:$\mu \neq \mu_0$
2. H_0: $\mu=\mu_0$ έναντι H_1:$\mu > \mu_0$
3. H_0: $\mu=\mu_0$ έναντι H_1:$\mu < \mu_0$

Αυτό που αλλάζει είναι το κριτήριο που ελέγχουμε την υπόθεση H_0 των τριών παραπάνω περιπτώσεων και είναι:

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}.$$

Η μεταβλητή t, ακολουθεί την κατανομή Student με $v=n-1$ βαθμούς ελευθερίας, όπου:

$$S^2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$ η διακύμανση του πληθυσμού.

Στην συνέχεια την τιμή t τη συγκρίνουμε με μία τιμή που παίρνουμε από τον πίνακα της κατανομής του Student, σε επίπεδο σημαντικότητας α και ν=n-1 βαθμούς ελευθερίας.

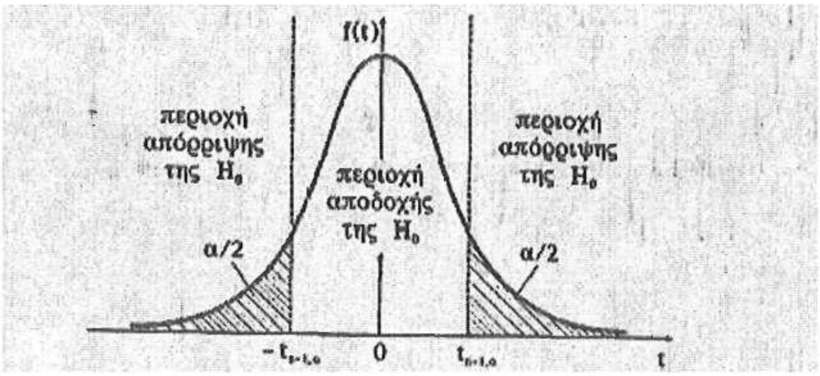
<u>Στην πρώτη περίπτωση:</u>

Μηδενική υπόθεση: H_0: $\mu=\mu_0$

Έναντι της εναλλακτικής: H_1:$\mu \neq \mu_0$

Ο έλεγχος είναι δίπλευρος και το επίπεδο σημαντικότητας α βρίσκεται στο δεξιό και αριστερό άκρο της κανονικής κατανομής

Αν $-t_{v,\alpha} < t < t_{v,\alpha}$ δεχόμαστε την H_0



Διάγραμμα 3.2.1.1: Περιοχή αποδοχής της H_0 αν $-t_{v,\alpha} < t < t_{v,\alpha}$.

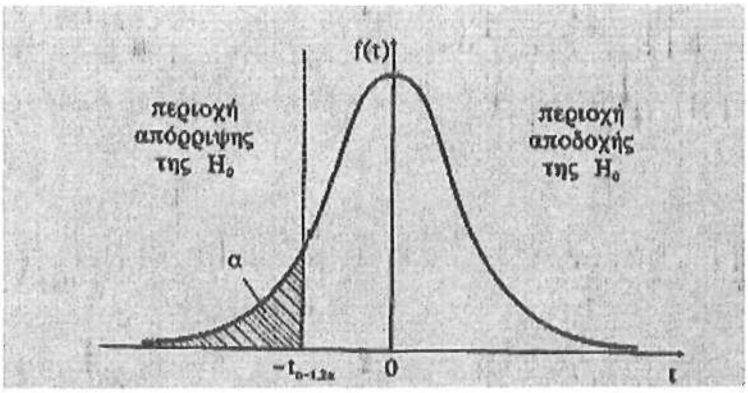
<u>Δεύτερη περίπτωση</u>

Μηδενική υπόθεση: H_0: $\mu=\mu_0$

Έναντι της εναλλακτικής: H_1:$\mu > \mu_0$

Ο έλεγχος είναι μονόπλευρος και το επίπεδο σημαντικότητας α βρίσκεται στο δεξιό άκρο της κανονικής κατανομής.

Αν $t < t_{v,2\alpha}$ δεχόμαστε την H_0



Διάγραμμα 3.2.1.2: Περιοχή αποδοχής της H_0 αν $t<t_{v,2\alpha}$.

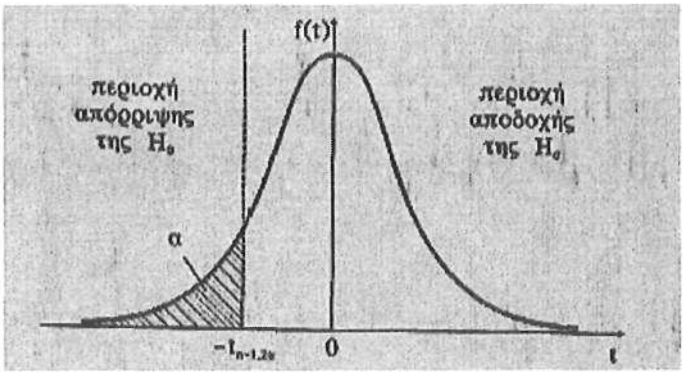
<u>Τρίτη περίπτωση</u>

Μηδενική υπόθεση: H_0: $\mu=\mu_0$

Έναντι της εναλλακτικής: H_1:$\mu < \mu_0$

Ο έλεγχος είναι μονόπλευρος και το επίπεδο σημαντικότητας α βρίσκεται στο αριστερό άκρο της κανονικής κατανομής.

Αν $-t_{v,2\alpha}<t$ δεχόμαστε την H_0



Διάγραμμα 3.2.1.3: Περιοχή αποδοχής της H_0 αν $-t_{v,2\alpha}<t$.

Τις τιμές $-t_{v,2\alpha}$, $t_{v,2\alpha}$, $-t_{v,\alpha}$, $t_{v,\alpha}$ τις παίρνουμε από τους πίνακες κατανομής Student με βαθμούς ελευθερίας v=n-1 και επίπεδο σημαντικότητας α.

Παράδειγμα:

Από έναν κανονικό πληθυσμό πήραμε ένα τυχαίο δείγμα με τιμές: 52, 62, 50, και 76. Να ελεγχθεί η υπόθεση:

H_0 :μ=52 έναντι της εναλλακτικής H_1 :μ>52

σε επίπεδο σημαντικότητας α=5%.

Λύση:

Ο έλεγχος είναι μονόπλευρος και η κριτική τιμή t_α είναι:

t_α = TINV(2*α;n-1)

Παρακάτω είναι τα αποτελέσματα της άσκησης στο φύλλο εντολών στο EXCEL.

x:	52	62	50	76		
N=	4				n-1=	3
H0:μ=	52				χμέσος=	60
H1:μ>	52				s=	11,888
A=	0,05					
T=	1,3459					
tv,2$^\alpha$=	2,3534					

Πίνακας 3.2.1.4: Αποτελέσματα στο Excel.

$t<t_{v,2\alpha}$ άρα η υπόθεση H_0 γίνεται δεκτή.

3.2.2. Έλεγχος ανεξαρτησίας

Έστω ότι έχουμε έναν πληθυσμό του όποίου τα στοιχεία μπορούν να ταξινομηθούν ως προς δύο χαρακτηριστικά (μεταβλητές), με τον έλεγχο ανεξαρτησίας μπορούμε να ελέγξουμε, με τη βοήθεια ενός τυχαίου δείγματος, αν τα δύο αυτά χαρακτηριστικά είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Αν Α και Β είναι δύο μεταβλητές (χαρακτηριστικά) και η μεταβλητή Α έχει κ κατηγορίες : $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\kappa$ και η μεταβλητή Β έχει λ : $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_\lambda$ ο έλεγχος που κάνουμε είναι:

H_o: Α, Β ανεξάρτητες μεταξύ τους έναντι H_1: Α, Β εξαρτημένες

Για να γίνει αυτός ο έλεγχος πρέπει να φτιάξουμε έναν πίνακα διπλής εισόδου(πίνακας συνάφειας) στον οποίο ταξινομούμε τα n στοιχεία του δείγματος με λ γραμμές και κ στήλες όπως παρακάτω:

Για να ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση ότι οι δύο μεταβλητές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, καταρτίζουμε έναν άλλο πίνακα θεωρητικών τιμών:

B	**A**							
	A_1	A_2	A_3	. . .	A_j	. . .	A_κ	f_i
B_1	Θ_{11}	θ_{12}	θ_{13}	. . .	θ_{1j}	. . .	$\theta_{1\kappa}$	f_1
B_2	Θ_{21}	θ_{22}	θ_{23}	. . .	θ_{2j}	. . .	$\theta_{2\kappa}$	f_2
B_3	Θ_{31}	θ_{32}	θ_{33}	. . .	θ_{3j}	. . .	$\theta_{3\kappa}$	f_3
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
B_i	θ_{i1}	θ_{i2}	θ_{i3}	. . .	θ_{ij}	. . .	$\theta_{i\kappa}$	f_i
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
B_λ	$\theta_{\lambda 1}$	$\theta_{\lambda 2}$	$\theta_{\lambda 3}$	. . .	$\theta_{\lambda j}$	. . .	$\theta_{\lambda\kappa}$	f_λ
f_j	F_1	f_2	f_3	. . .	f_j	. . .	f_κ	N

Πίνακας 3.2.2.1: Θεωρητικών τιμών

Κάθε τιμή θ_{ij} του πίνακα θεωρητικών τιμών υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\theta_{ij} = \frac{f_i \times f_j}{n}.$$

Για να γίνει ο έλεγχος της ανεξαρτησίας των μεταβλητών Α και Β συγκρίνουμε τις εμπειρικές (f_{ij}) με τις θεωρητικές (θ_{ij}) συχνότητες χρησιμοποιώντας το κριτήριο:

$$x^2 = \sum_{i=1}^{\lambda}\sum_{j=1}^{\kappa}\frac{\left(f_{ij} - \theta_{il}\right)^2}{\theta_{ij}}.$$

Στη συνέχεια συγκρίνουμε την τιμή x^2 με την κρίσιμη τιμή $x^2_{\nu,\alpha}$ που βρίσκουμε από τους πίνακες. Αν $x^2 < x^2_{\nu,\alpha}$ οι μεταβλητές Α και Β είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, δηλαδή αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση(H_0).

Στην περίπτωση που ο πίνακας διπλής εισόδου είναι τετράπτυχος (2x2) η τιμή x^2 υπολογίζεται χωρίς να υπολογιστούν πρώτα οι θεωρητικές τιμές με τον τύπο:

$$x^2 = \frac{n(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)(\gamma+\delta)}.$$

B	**A**		
	A_1	A_2	f_i
B_1	Α	β	α+β
B_2	Γ	δ	γ+δ
f_j	Α+γ	β+δ	n=α+β+γ+δ

Πίνακας 3.2.2.2: Τετράπτυχος πίνακας

Στη συνέχεια συγκρίνουμε με τον ίδιο τρόπο, όπως και παραπάνω, το x^2 με το $x^2_{\nu,\alpha}$ και αποδεχόμαστε ή όχι την H_0.

Την τιμή $x^2_{\nu,\alpha}$ την παίρνουμε από τον πίνακα της κατανομής x^2 με ν=(κ-1)(λ-1) βαθμούς ελευθερίας και επίπεδο σημαντικότητας α.

Παράδειγμα:

Σε ένα δείγμα 200 μαθητών της Β Λυκείου, να ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας α=1%, αν η επίδοση στο μάθημα της Άλγεβρας είναι ανεξάρτητη από την επίδοση στο μάθημα της Γεωμετρίας, σύμφωνα με τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα:

Επίδοση στην Αλγεβρα(Β)	**Επίδοση στη Γεωμετρία(Α)**			
	Καλή	Πολύ καλή	Άριστη	f_i
Καλή	10	40	10	60
Πολύ καλή	30	30	20	80
Άριστη	10	30	20	60
f_j	50	100	50	200

Πίνακας 3.2.2.3: Δεδομένα

Λύση:

Πρώτα πρέπει να σχηματίσουμε τον πίνακα των θεωρητικών τιμών ή πίνακα ανεξαρτησίας, χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$\theta_{ij} = \frac{f_i \times f_j}{n}.$$

Έτσι κατασκευάζεται ο παρακάτω πίνακας:

Επίδοση στην Αλγεβρα(Β)	**Επίδοση στη Γεωμετρία(Α)**		
	Καλή	Πολύ καλή	Άριστη
Καλή	15	30	15
Πολύ καλή	20	40	20
Άριστη	15	30	15

Πίνακας 3.2.2.4: Θεωρητικές τιμές

Ο έλεγχος που κάνουμε είναι:

H_0: οι δύο μεταβλητές Α και Β ανεξάρτητες

H_1: οι δύο μεταβλητές είναι εξαρτημένες

Το κριτήριο που θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

$$x^2 = \sum_{i=1}^{\lambda}\sum_{j=1}^{\kappa}\frac{(f_{ij}-\theta_{ij})^2}{\theta_{ij}}$$

άρα,

$x^2 = 17{,}5$

Από τους πίνακες, σε επίπεδο σημαντικότητας α=1% και βαθμούς ελευθερίας ν=(3-1)(3-1)=4, θα έχουμε:

$x_{\nu,\alpha} = x_{4,\,0{,}01} = 13{,}28$

$x^2 > x_{\nu,\alpha}$ Άρα η υπόθεση H_0 απορρίπτεται.

3.2.3. Έλεγχος x^2

Τον έλεγχο αυτόν, τον διαμόρφωσε ο Karl Pearson το 1903 και στηρίζεται στην κατανομή x^2 . Τον έλεγχο x^2 τον χρησιμοποιούμε όταν θέλουμε να εξετάσουμε εάν η κατανομή συχνοτήτων ενός δείγματος μεταξύ κ κατηγοριών βρίσκεται σε συμφωνία με την κατανομή που προβλέπεται από κάποιο μοντέλο πιθανότητας. Ουσιαστικά για να βγάλουμε συμπεράσματα για το x^2 κριτήριο συγκρίνουμε τις πραγματικές συχνότητες(f_0) με τις αντίστοιχες αναμενόμενες(f_e). Για να ισχύει πρέπει το μέγεθος του δείγματος να είναι τουλάχιστον 50 και οι επιμέρους κλάσεις τουλάχιστον 5 και δεν μας ενδιαφέρει η κανονικότητα ή μη του πληθυσμού από τον πληθυσμό από τον οποίο παίρνουμε τα δείγματα.

Ο έλεγχος x^2 χωρίζεται σε έξι κατηγορίες ανάλογα με το τι εξετάζει κάθε φορά, αυτές είναι: 1) ο έλεγχος x^2 για την καταλληλότητα του μεγέθους, 2) για τη σύγκριση κ αριθμήσεων (κλάσεων), 3) για τη συνοχή σε έναν 2x2 πίνακα, 4) για τη συνοχή σε έναν κx2 πίνακα, 5)για την αλληλουχία σε έναν 2xκ πίνακα, 6) για την ανεξαρτησία σε έναν pxq πίνακα. Στη συνέχεια θα αναλύσουμε κάθε κατηγορία του ελέγχου x^2 ξεχωριστά.

3.2.3.1. Έλεγχος x^2 για την καταλληλότητα του μοντέλου

Ο έλεγχος πραγματοποιείται για να εξετάσουμε τη σημαντικότητα των διαφορών ανάμεσα στις παρατηρηθείσες παρατηρήσεις οι οποίες είναι κατανεμημένες σε κ τάξεις και στις συχνότητες που θεωρητικά περιμένουμε να έχουμε σε κ τάξεις.

Για να μπορεί να πραγματοποιηθεί ο έλεγχος αυτός πρέπει να ισχύουν κάποιες υποθέσεις. Πρώτον, οι παρατηρήσεις και οι θεωρητικές κατανομές πρέπει να περιέχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων (δεδομένων). Δεύτερον, ο καταμερισμός των παρατηρήσεων σε κλάσεις (τάξεις) πρέπει να είναι ο ίδιος και για τις δύο κατανομές. Τρίτον, η προσδοκούσα συχνότητα σε κάθε κλάση πρέπει να είναι τουλάχιστον 5. Τέταρτον και τελευταίο, οι παρατηρηθείσες συχνότητες πρέπει να προέρχονται από τυχαίο δείγμα.

Με τον έλεγχο αυτό εξετάζουμε ότι:

H_0: οι παρατηρηθείσες και οι θεωρητικές κατανομές συμφωνούν

H_1: οι παρατηρηθείσες και οι θεωρητικές κατανομές δεν συμφωνούν

Για να διαπιστώσουμε ποια από τις παραπάνω υποθέσεις θα αποδεχθούμε ή όχι θα ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία. Ο τύπος που μας δίνει το x^2 στο συγκεκριμένο έλεγχο είναι:

$$x^2 = \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

όπου:

O_i :οι παρατηρηθείσες συχνότητες

E_i :οι θεωρητικές συχνότητες για κάθε κ κλάσεις

Το στατιστικό αυτό x^2 συγκρίνεται με την τιμή του x^2 που προέρχεται από τον πίνακα x^2 με ν βαθμούς ελευθερίας. Γενικά ισχύει ότι ν=κ-1. Ωστόσο, επειδή η θέωρητική κατανομή περιέχει m παραμέτρους τότε για το ν ισχύει ότι ν=κ-1-m. Αν η τιμή του x^2 του πίνακα είναι μεγαλύτερη από τη στατιστική τιμή του x^2 τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0 ,δηλαδή ότι οι παρατηρηθείσες και οι θεωρητικές κατανομές συμφωνούν.

Παράδειγμα:

Ρίχνουμε ένα ζάρι 120 φορές και καταγράφουμε τα αποτελέσματα τα οποία συμβολίζουμε με $O_ι$,ι=1,2,...,6. Μπορούμε να θεωρήσουμε, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 , ότι το ζάρι είναι αξιόπιστο;

Παρατηρηθείσες συχνότητες $O_ι$	25	17	15	23	24	16
Θεωρητικές συχνότητες $E_ι$	20	20	20	20	20	20

Πίνακας 3.2.3.1.1: Δεδομένα

Λύση:

Παρακάτω είναι τα αποτελέσματα της άσκησης στο φύλλο εντολών στο EXCEL.

Oι	25	17	15	23	24	16
Eι	20	20	20	20	20	20
((Oι-Eι)^2)/Eι	1,25	0,45	1,25	0,45	0,8	0,8

Πίνακας 3.2.3.1.2: Δεδομένα

H_0: το ζάρι είναι αξιόπιστο

H_1: το ζάρι δεν είναι αξιόπιστο

α=	0,05
ι=	6
n=	5
x^2=	5
Xα,n=	11,07

Πίνακας 3.2.3.1.3: Αποτελέσματα στο Excel.

$x^2 < x_{n,\alpha}$ Άρα η μηδενική υπόθεση H_0 δεν γίνεται δεκτή.

3.2.3.2. Έλεγχος x^2 για τη σύγκριση κ τάξεων

Ο έλεγχος αυτός χρησιμοποιείται για να εξετάσουμε τη σημαντικότητα των διαφορών ανάμεσα σε κ τάξεις. Η μόνη προϋπόθεση που πρέπει να ισχύει για να μπορεί να πραγματοποιηθεί ο έλεγχος είναι ότι οι τάξεις θα πρέπει να έχουν δημιουργηθεί κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες. Για τον παραπάνω έλεγχο έχουμε δύο μεθόδους ανάλογα με το αν η συχνότητα των τάξεων είναι ίση ή με το αν η συχνότητα των τάξεων δεν είναι ίση.

i. Όταν η συχνότητα των τάξεων είναι ίση:

Με τη διαδικασία αυτή θα εξετάσουμε αν:

H_0 :το N_i είναι συνεχές

έναντι της

H_1 :το N_i δεν είναι συνεχές

Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε για να διαπιστώσουμε ποια υπόθεση θα αποδεχτούμε είναι η εξής: συμβολίζουμε με N_i το σύνολο των τάξεων για i=1, 2, …, κ. Το στατιστικό x^2 δίνεται από τον τύπο:

$$x^2 = \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\left(N_i - \overline{N}\right)^2}{\overline{N}}$$

όπου $\overline{N}$ είναι ο μέσος των κ τάξεων και δίνεται από τον τύπο:

$$\overline{N} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} N_i}{\kappa}.$$

Το στατιστικό x^2 συγκρίνεται με την τιμή του x^2 που προέρχεται από τον πίνακα x^2 με κ-1 βαθμούς ελευθερίας και σε επίπεδο σημαντικότητας α. Αν το x^2 του πίνακα είναι μεγαλύτερο από το στατιστικό x^2 τότε απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση (H_0) ότι δηλαδή το N_i είναι συνεχές.

ii. <u>Όταν η συχνότητα των τάξεων δεν είναι ίση:</u>

Με τη διαδικασία αυτή θα εξετάσουμε αν:

H_0 :το N_i είναι συνεχές

έναντι της

H_1 :το N_i δεν είναι συνεχές

Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε για να διαπιστώσουμε ποια υπόθεση θα αποδεχτούμε είναι η ακόλουθη: συμβολίζουμε με N_i το σύνολο των τάξεων για i= 1, 2, …, κ και με t_i τη συχνότητα των i τάξεων. Το στατιστικό x^2 δίνεται από τον τύπο:

$$x^2 = \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\left(N_i - t_i \overline{R}\right)^2}{t_i \overline{R}}$$

όπου

$$\overline{R} = \frac{\sum N_i}{\sum t_i}$$

Το στατιστικό x^2 συγκρίνεται με την τιμή του x^2 που προέρχεται από τον πίνακα x^2 με κ-1 βαθμούς ελευθερίας και σε επίπεδο σημαντικότητας α. Εάν η τιμή του x^2 από τον πίνακα είναι μεγαλύτερη από την τιμή του στατιστικού x^2 τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση (H_0) ότι, δηλαδή, το N_i είναι συνεχές.

Παράδειγμα:

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω δείγμα και ότι η συχνότητα των $N_ι$, ι=1,…,4 τάξεων είναι ίση. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύνολο των τάξεων $N_ι$ είναι συνεχές σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05;

N_1=5, N_2=12, N_3=18, N_4=19

Λύση:

Παρακάτω είναι τα αποτελέσματα της άσκησης στο φύλλο εντολών στο EXCEL.

N1=	5
N2=	12
N3=	18
N4=	19
α=	0,05
ι=	4
n=	3
Nμέσο=	13,5
x^2=	9,2593
xα,n=	7,8147

H0: το σύνολο των τάξεων $N_ι$ είναι συνεχές
H1:το σύνολο των τάξεων $N_ι$ δεν είναι συνεχές

Πίνακας 3.2.3.2.1: Αποτελέσματα στο Excel.

$x^2 > x_{\alpha,n}$ Άρα η μηδενική υπόθεση H_0 δεν απορρίπτεται.

3.2.3.3. Έλεγχος x^2 για τη συνοχή σε έναν πίνακα 2x2

Ο έλεγχος αυτός χρησιμοποιείται για να εξετάσουμε τη σημαντικότητα των διαφορών ανάμεσα στις παρατηρηθείσες συχνότητες δύο διχοτομημένων κατανομών. Για να πραγματοποιηθεί ο έλεγχος αυτός πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες υποθέσεις: τα δύο δείγματα πρέπει να είναι αρκετά μεγάλα ($n>20$), και σε όλα τα κελιά οι συχνότητες (δεδομένα) πρέπει να είναι περισσότερες από 3.

Με τον έλεγχο αυτό θέλουμε να ελέγξουμε:

H_0 :τα δύο δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό

έναντι της

H_1 :τα δύο δείγματα δεν προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό

Η μέθοδος που ακολουθείται για να απορρίψουμε ή όχι την H_0 είναι η παρακάτω: τοποθετούμε τα δύο δείγματα σε έναν πίνακα 2x2 ο οποίος έχει την ακόλουθη μορφή:

	Τάξη 1	**Τάξη 2**	**Σύνολο**
Δείγμα 1	A	B	α+b
Δείγμα 2	C	D	c+d
Σύνολο	α+c	b+d	n=α+b+c+d

Πίνακας 3.2.3.3.1 : Πίνακας 2x2

Το στατιστικό x^2 δίνεται από τον τύπο:

$$x^2 = \frac{(n = 1)(ad - bc)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}.$$

Το στατιστικό x^2 συγκρίνεται με την τιμή του x^2 από τον πίνακα x^2 για 1 βαθμό ελευθερίας και σε επίπεδο σημαντικότητας α. Εάν η τιμή του x^2 που προέρχεται από τον πίνακα είναι μεγαλύτερη από την τιμή του στατιστικού x^2

απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση (H_0) ότι, δηλαδή, τα δύο δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό.

Παράδειγμα:

Έστω ότι έχουμε τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα:

	Τάξη 1	**Τάξη 2**	**Σύνολο**
Δείγμα 1	15	85	100
Δείγμα 2	4	77	81
Σύνολο	19	162	181

Πίνακας 3.2.3.3.2: Δεδομένα

Μπορούμε να ισχυριστούμε, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,10 και με 1 βαθμό ελευθερίας, ότι τα δύο δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό;

Λύση:

Παρακάτω είναι τα αποτελέσματα της άσκησης στο φύλλο εντολών στο EXCEL.

	Τάξη 1	**Τάξη 2**	**Σύνολο**
Δείγμα 1	15	85	100
Δείγμα 2	4	77	81
Σύνολο	19	162	181

α=	**0,1**
n=	1

H0: τα δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό
H: τα δείγματα δεν προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό

x^2=	0,0266417
xα,n=	2,7055406

Πίνακας 3.2.3.3.3: Αποτελέσματα στο Excel.

$x^2 < x_{\alpha,n}$ Άρα η μηδενική υπόθεση H_0 απορρίπτεται.

3.2.3.4. Έλεγχος x^2 για τη συνοχή σε έναν πίνακα κx2

Ο παρακάτω έλεγχος πραγματοποιείται για να εξετάσουμε τη σημαντικότητα των διαφορών ανάμεσα σε κ παρατηρηθείσες συχνότητες σε μία διχοτομημένη ταξινόμηση. Οι δύο περιορισμοί που πρέπει να ισχύουν είναι ότι το μέγεθος των κ δειγμάτων πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο και οι συχνότητες στα κελιά πρέπει να είναι ίσες με 5.

Οι υποθέσεις που κάνουμε για αυτόν τον έλεγχο είναι:

H_0 :τα δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό

έναντι της

H_1 :τα δείγματα δεν προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό

Η διαδικασία που ακολουθείται για να αποδεχτούμε ή όχι την H_0 είναι η ακόλουθη: τοποθετούμε τις παρατηρήσεις των κ δειγμάτων σε έναν πίνακα κx2 με την εξής μορφή:

	Τάξη 1	**Τάξη 2**	**Σύνολο**
Δείγμα 1	x_1	n_1-x_1	n_1
• • •	• • •	• • •	• • •
Δείγμα i	x_i	n_i-x_i	n_i
• • •	• • •	• • •	• • •
Δείγμα κ	x_κ	nκ-xκ	n_κ
Σύνολο	$x=\sum_{i=1}^{\kappa} x_i$	n-x	$n=\sum_{i=1}^{\kappa} n_1$

Πίνακας 3.2.3.4.1: Πίνακας κx2.

Το στατιστικό x^2 δίνεται από τον τύπο:

$$x^2 = \frac{n^2}{x(n-x)}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa}\frac{x_i^2}{n_i} - \frac{x^2}{n}\right\}.$$

Το στατιστικό x^2 συγκρίνεται με την τιμή του x^2 που προέρχεται από τον πίνακα x^2 με κ-1 βαθμούς ελευθερίας και σε επίπεδο σημαντικότητας α. Εάν η τιμή του x^2 που προέρχεται από τον πίνακα είναι μεγαλύτερη από την τιμή του στατιστικού x^2 τότε απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση (H_0) ότι, δηλαδή, τα δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό.

Παράδειγμα:

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

	Τάξη 1	**Τάξη 2**	**Σύνολο**
Δείγμα 1	14	22	36
Δείγμα 2	18	16	34
Δείγμα 3	8	2	10
Σύνολο	40	40	80

Πίνακας 3.2.3.4.2: Δεδομένα

Θέλουμε να εξετάσουμε αν, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05, τα 3 δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό.

Λύση:

Παρακάτω είναι τα αποτελέσματα της άσκησης στο φύλλο εντολών στο EXCEL.

	Τάξη 1	**Τάξη 2**	**Σύνολο**	xι^2/nι
Δείγμα 1	14	22	36	5,4444
Δείγμα 2	18	16	34	9,5294
Δείγμα 3	8	2	10	6,4
Σύνολο	40	40	80	20

α=	0,05
κ-1=	2
n^2=	6400
x(n-x)=	1600

H0: τα δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό
H1: τα δείγματα δεν προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό

x^2=	-154,505
xα,κ-1=	5,991476

Πίνακας 3.2.3.4.3: Αποτελέσματα στο Excel.

$x^2 < x_{\alpha,\kappa-1}$ Άρα η υπόθεση H_0 απορρίπτεται.

3.2.3.5. Έλεγχος x^2 για την αλληλουχία σε έναν 2xκ πίνακα

Ο έλεγχος αυτός χρησιμοποιείται για να εξετάσουμε τη σημαντικότητα των διαφορών ανάμεσα σε δύο κατανομές οι οποίες βασίζονται σε δύο δείγματα τα οποία κατανέμονται σε κ τάξεις. Για τον συγκεκριμένο έλεγχο υπάρχουν δύο περιορισμοί που πρέπει να υφίστανται, δηλαδή, ότι τα δύο δείγματα πρέπει να είναι αρκετά μεγάλα και οι τάξεις πρέπει να τοποθετούνται σε μία συνεχόμενη σειρά.

Οι υποθέσεις που κάνουμε για αυτόν τον έλεγχο είναι:

H_0 :τα δύο δείγματα προέρχονται από δύο πληθυσμούς που ακολουθούν την ίδια κατανομή

έναντι της

H_1 :τα δύο δείγματα προέρχονται από δύο πληθυσμούς που δεν ακολουθούν την ίδια κατανομή

Ο πίνακας θα έχει τη μορφή:

	Τάξη 1	Τάξη 2	. . .	Τάξη j	. . .	Τάξη κ	Σύνολο
Δείγμα 1	n_{11}	n_{12}		n_{1j}	. . .	$n_{1κ}$	N_1
Δείγμα 2	n_{21}	n_{22}		n_{2j}	. . .	$n_{2κ}$	N_2
Σύνολο	n_1	n_2	. . .	n_j	. . .	$n_κ$	N_1+N_2

Πίνακας 3.2.3.5.1: Πίνακας 2xκ

Όπου,

n_{ij} :η συχνότητα των χαρακτηριστικών σε ένα i δείγμα και σε j τάξη (i=1,2 και j=1,2,. . .,κ).

Συνεπώς, δημιουργείται ένας άλλος πίνακας με συχνότητες που υπολογίζονται όταν η τιμή στη σειρά i και στη στήλη j δίνεται από τον τύπο:

$$e_{ij} = \frac{N_i n_j}{N_1 + N_2}.$$

Το στατιστικό x^2 δίνεται από τον τύπο:

$$x^2 = \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{(n_{1j} - e_{1j})^2}{e_{1j}} + \sum_{j=1}^{\kappa} \frac{(n_{2j} - e_{2j})^2}{e_{2j}}.$$

Τέλος το στατιστικό x^2 συγκρίνεται με την τιμή του x^2 που παίρνουμε από τον πίνακα x^2 με κ-1 βαθμούς ελευθερίας και σε επίπεδο σημαντικότητας α. Αν το x^2 του πίνακα είναι μεγαλύτερο από το στατιστικό x^2 , απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση (H_0) ότι, δηλαδή, τα δύο δείγματα προέρχονται από δύο πληθυσμούς που ακολουθούν την ίδια κατανομή.

<u>Παράδειγμα:</u>

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

	Τάξη 1	Τάξη 2	Τάξη 3	Σύνολο
Δείγμα 1	50	47	56	153
Δείγμα 2	5	14	8	27
Σύνολο	55	61	64	180

Πίνακας 3.2.3.5.2: Δεδομένα

Θέλουμε να εξετάσουμε αν τα δύο δείγματα προέρχονται από δύο πληθυσμούς που ακολουθούν την ίδια κατανομή, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

Λύση:

Πρέπει πρώτα να κατασκευάσουμε έναν άλλο πίνακα με συχνότητες που υπολογίζονται όταν η τιμή στη σειρά i και στη στήλη j δίνεται από τον τύπο:

$$e_{ij} = \frac{N_i n_j}{N_1 + N_2} \qquad \text{π.χ. } e_{11} = \frac{153 \cdot 50}{180} = 42{,}5$$

ο πίνακας που προκύπτει είναι ο παρακάτω:

	Τάξη 1	**Τάξη 2**	**Τάξη 3**
Δείγμα 1	42,5	39,95	47,6
Δείγμα 2	0,75	2,1	1,2

Πίνακας 3.2.3.5.3: Συχνότητες

Ο έλεγχος που κάνουμε είναι:

H_0 :τα δύο δείγματα προέρχονται από δύο πληθυσμούς που ακολουθούν την ίδια κατανομή

H_1 :τα δύο δείγματα προέρχονται από δύο πληθυσμούς που δεν ακολουθούν την ίδια κατανομή

Παρακάτω είναι τα αποτελέσματα της άσκησης στο φύλλο εντολών στο EXCEL.

A=	0,05
K-1=	2
X^2=	134,1
χα,κ-1=	5,9915

Πίνακας 3.2.3.5.4: Αποτελέσματα

$x^2 > x_{\alpha,\kappa\text{-}1}$ άρα η υπόθεση H_0 γίνεται δεκτή.

3.2.3.6. Έλεγχος x^2 για την ανεξαρτησία σε έναν πίνακα pxq

Ο έλεγχος αυτός πραγματοποιείται για να εξετάσουμε τη διαφορά στη συχνότητα όταν αυτή ταξινομείται αρχικά με βάση ένα χαρακτηριστικό και στη συνέχεια ταξινομείται σχετικά με ένα δεύτερο χαρακτηριστικό. Οι περιορισμοί που υφίστανται για αυτόν τον έλεγχο είναι ότι το δείγμα πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο και κάθε κελί πρέπει να περιέχει περισσότερες από 5 συχνότητες.

Οι υποθέσεις που εξετάζουμε σε αυτόν τον έλεγχο είναι:

H_0 : τα δύο χαρακτηριστικά είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους

έναντι της

H_1 :τα δύο χαρακτηριστικά δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους

Το δείγμα μεγέθους N μπορεί να κατηγοριοποιηθεί σε ρ τάξεις με βάση το πρώτο χαρακτηριστικό και σε q τάξεις με βάση το δεύτερο χαρακτηριστικό. Συνεπώς οι συχνότητες θα έχουν την ακόλουθη μορφή:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="6">Πρώτο χαρακτηριστικό</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>...</td><td>i</td><td>...</td><td>ρ</td><td>Σύνολο</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Δεύτερο χαρακτηριστικό</td><td>1</td><td>N_{11}</td><td>n_{21}</td><td></td><td>n_{i1}</td><td></td><td>$n_{\rho 1}$</td><td>n_1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>N_{12}</td><td>n_{22}</td><td></td><td>n_{i2}</td><td></td><td>$n_{\rho 2}$</td><td>n_2</td></tr>
<tr><td>.
.
.</td><td>.
.
.</td><td>.
.
.</td><td>.
.
.</td><td>.
.
.</td><td>.
.
.</td><td>.
.
.</td><td>.
.
.</td></tr>
<tr><td>J</td><td>N_{1j}</td><td>n_{2j}</td><td></td><td>n_{ij}</td><td></td><td>$n_{\rho j}$</td><td>n_j</td></tr>
<tr><td>.
.
.</td><td>.
.
.</td><td>.
.
.</td><td></td><td>.
.
.</td><td></td><td>.
.
.</td><td>.
.
.</td></tr>
<tr><td>Q</td><td>N_{1q}</td><td>n_{2q}</td><td></td><td>n_{iq}</td><td></td><td>$n_{\rho q}$</td><td>n_q</td></tr>
<tr><td></td><td>Σύνολο</td><td>N_1</td><td>n_2</td><td>...</td><td>n_i</td><td>...</td><td>n_ρ</td><td>N</td></tr>
</table>

Πίνακας 3.2.3.6.1: Πίνακας pxq

Το στατιστικό x^2 δίνεται από τον τύπο:

$$x^2 = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_i n_j}{N} \right)^2}{\frac{n_i n_j}{N}}.$$

Το στατιστικό x^2 συγκρίνεται με την τιμή του x^2 που προέρχεται από τον πίνακα x^2 με (ρ-1)(q-1) βαθμούς ελευθερίας και σε επίπεδο σημαντικότητας α. Αν το x^2 του πίνακα είναι μεγαλύτερο από το στατιστικό x^2 τότε απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση (H_0) ότι, δηλαδή, τα δύο χαρακτηριστικά είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Παράδειγμα:

Διαλέξαμε ένα δείγμα 95 παιδιών στην ηλικία των 10 ετών και μετρήσαμε το βάρος και το ύψος τους. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα δύο αυτά χαρακτηριστικά, δηλαδή το βάρος και το ύψος των παιδιών, είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους(α=0,05);

		Ύψος(cm)		
		135-145	**145-155**	**Σύνολο**
Βάρος(kg)	**30-35**	32	12	44
	35-40	14	22	36
	40-45	6	9	15
	Σύνολο	52	43	95

Πίνακας 3.2.3.6.2: Δεδομένα

Λύση:

Ο έλεγχος που κάνουμε είναι:

H_0: τα δύο χαρακτηριστικά είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους

H_1 :τα δύο χαρακτηριστικά δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους

Παρακάτω είναι τα αποτελέσματα της άσκησης στο φύλλο εντολών στο EXCEL.

α=	0,05
(ρ-1)*(q-1)=	2
x^2=	90,27106267
xα,(ρ-1)*(q-1)=	5,991476357

Πίνακας 3.2.3.6.3: Αποτελέσματα στο Excel.

$x^2 > x_{\alpha,(\rho-1)*(q-1)}$ άρα η υπόθεση H_0 γίνεται δεκτή.

3.2.4. Έλεγχος Kolmogorov- Smirnov

Τον έλεγχο αυτόν τον χρησιμοποιούμε όταν θέλουμε να συγκρίνουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής του δείγματος F(x) που έχει τη μορφή $F(x)= P\{x<x_i\}$ με την αθροιστική συνάρτηση κατανομής μιας θεωρητικής κατανομής Φ(x) που έχει τη μορφή $\Phi(x)=P\{x<x_i\}$.

Η υπόθεση που θα εξετάσουμε είναι της μορφής:

H_0 :το δείγμα προέρχεται από την κατανομή που έχει συνάρτηση κατανομής την Φ(x)

H_1: το δείγμα προέρχεται από οποιαδήποτε άλλη κατανομή

Η συγκεκριμένη υπόθεση πραγματοποιείται με το παρακάτω κριτήριο:

$$D=\max | \Phi(x)-F(x) |$$

Η μέγιστη αυτή διαφορά μας δίνει την τιμή D_0 την οποία στη συνέχεια τη συγκρίνουμε με την τιμή $D_{n,\alpha}$ την οποία βρίσκουμε από τον πίνακα των Kolmogorov-Smirnov με n βαθμούς ελευθερίας και επίπεδο σημαντικότητας α.

Αφού έχουμε βρει τις δύο τιμές D_0 και $D_{n,\alpha}$ τότε αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση H_0 ότι, δηλαδή, το δείγμα προέρχεται από την κατανομή που έχει συνάρτηση κατανομής την Φ(x) όταν το $D_n<D_{n,\alpha}$.

Παράδειγμα:

Ρίχνουμε συγχρόνως 4 ζάρια 81 φορές. Θεωρείται ως επιτυχία, αν εμφανιστεί ο αριθμός 5 ή 6. Στον πίνακα μεταφέρονται όλα τα απαραίτητα στοιχεία για την ανάλυση. Στη στήλη (3) φαίνονται οι σχετικές συχνότητες, που τις πήραμε από τη διαίρεση των απόλυτων συχνοτήτων δια του συνολικού αριθμού των δοκιμών. Στη στήλη (4) φαίνονται οι πιθανότητες που λαμβάνονται από την ανάπτυξη του διωνύμου:

$$81\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^4$$

Να γίνει έλεγχος προσέγγισης της δειγματοληπτικής με τη θεωρητική κατανομή, σε επίπεδο σημαντικότητας 1%.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Επιτυχίες	Απόλυτη συχνότητα α_i	Σχετική συχνότητα $f_i=\frac{a_i}{N}$	Πιθανότητα P_i	$\Phi(x)=\sum P_i$	$F(x)=\sum\frac{a_i}{N}$	|Φ(x)-F(x)|
0	11	0,1358	0,1975	0,1975	0,1358	0,0617
1	34	0,4198	0,3951	0,5926	0,5556	0,0370
2	30	0,3704	0,2963	0,8889	0,9260	0,0371
3	6	0,0740	0,0987	0,9876	1,0000	0,0124
4	0	0,0000	0,0124	1,0000	1,0000	0,0000
Σύνολο	81	1,0000	1,0000		1,0000	

Πίνακας 3.2.4.1: Δεδομένα

Λύση:

Ο έλεγχος που κάνουμε είναι:

H_0 :το δείγμα προέρχεται από την κατανομή που έχει συνάρτηση κατανομής την Φ(x)

H_1: το δείγμα προέρχεται από οποιαδήποτε άλλη κατανομή

$D_0 = \max|\Phi(x) - F(x)|$,άρα

$D_0 = 0{,}0617$

$D_{n,\alpha} = D_{81,0,01} = \frac{1{,}63}{\sqrt{81}} = 0{,}181$

$D_0 < D_{81,0,01}$ Άρα η μηδενική υπόθεση H_0 γίνεται δεκτή.

3.2.5. Sign test

Για να μπορεί να εφαρμοστεί το Sign τεστ θα πρέπει οι παρατηρήσεις από το τυχαίο δείγμα να έχουν κάποια κλιμάκωση και χωρίς να περιλαμβάνει υποθέσεις για την κατανομή του πληθυσμού. Οι εναλλακτικές υποθέσεις μπορεί να είναι είτε αμφίπλευρες είτε μονόπλευρες.

Ο μονόπλευρος έλεγχος στον οποίο κάθε τιμή του δείγματος είναι μεγαλύτερη από την εξεταζόμενη τιμή του μέσου έχει τη μορφή: $\mathbf{H_1 : \mu > 0}$. Ο μονόπλευρος έλεγχος $\mathbf{H_1 : \mu < 0}$ έχει ισχύ όταν η κάθε τιμή του δείγματος είναι μικρότερη από την εξεταζόμενη τιμή του μέσου. Όταν η τιμή του δείγματος είναι ίση με του εξεταζόμενου μέσου τότε η περίπτωση να υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στις παρατηρήσεις μειώνεται.

Για να αποδεχτούμε την υπόθεση H_0 πρέπει ακριβώς τα μισά δεδομένα να είναι θετικά και τα άλλα μισά να είναι αρνητικά. Αν είναι να είναι παραπάνω από τα μισά στοιχεία θετικά ή αρνητικά τότε απορρίπτουμε την H0.

Όταν το δείγμα είναι πολύ μεγάλο τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η κανονική κατανομή.

Παράδειγμα:

Η εταιρία Breakstone παράγει βούτυρο και μαργαρίνη. Ο υπεύθυνος της εταιρίας θέλει να διαπιστώσει κατά πόσο οι άνθρωποι προτιμούν το βούτυρο ή τη μαργαρίνη. Επιλέχτηκε ένα τυχαίο δείγμα 44 καταναλωτών και ζητήθηκε από τον καθένα να δοκιμάσει και τα δύο προϊόντα και μετά να αναφέρει την προτίμησή του. Τα αποτελέσματα ήταν ότι 15 από τους καταναλωτές προτίμησαν τη μαργαρίνη, 27 προτίμησαν το βούτυρο και 2 κανένα από τα δύο. Υπάρχει απόδειξη ότι ένα από τα δύο προϊόντα προτιμάται από το άλλο;

3.2.6. The Wilcoxon test

Ο έλεγχος Wilcoxon χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να εξετάσουμε τις πληροφορίες σχετικά με το μέγεθος της διαφοράς μεταξύ των δύο μελών ενός ζεύγους. Τα δεδομένα πρέπει να έχουν κάποια εσωτερική κλιμάκωση και δεν υπάρχει καμία υπόθεση για την κατανομή του πληθυσμού. Η διαφορά ανάμεσα σε κάθε παρατηρούμενη τιμή και στην υποθετική τιμή του μέσου δίνεται από τον τύπο:

$$d: d=(x\text{-Medo}).$$

Εάν κάποια από στις διαφορές είναι ίση με το μηδέν τότε δεν την υπολογίζουμε στην ανάλυση με αποτέλεσμα το δείγμα να μειωθεί. Οι απόλυτες τιμές των διαφορών τοποθετούνται από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη. Τέλος, το άθροισμα των διαφορών ξεχωρίζεται για στις θετικές και στις αρνητικές διαφορές. Οι υποθέσεις που μπορούμε να κάνουμε είναι τρεις και είναι οι εξής:

1. H_0: μ= α έναντι H_1: μ<α

2. H_0: μ= α έναντι H_1: μ>α

3. H_0: μ= α έναντι H_1: μ≠α

Εάν τα αρνητικά δεδομένα και στις τρεις περιπτώσεις έχουν μεγαλύτερο άθροισμα από τα θετικά, τότε δεν αποδεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση(H_0). Εάν τα αρνητικά δεδομένα έχουν μικρότερο άθροισμα από τα θετικά τότε συνεχίζουμε τον έλεγχο και συγκρίνουμε την υπολογιζόμενη τιμή Τα με την τιμή του πίνακα. Εάν η τιμή αυτή είναι μεγαλύτερη από την τιμή που έχουμε τότε αποδεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση H_0.

Όταν το n≥25 και ισχύει η μηδενική υπόθεση, τότε το Στις προσεγγίζει την κανονική κατανομή η οποία υπολογίζεται από τον τύπο:

$$z = \frac{T - \mu_T}{\sigma_T}.$$

Ο μέσος μ_T και το σφάλμα σ_T υπολογίζονται από στις τύπους:

$$\mu_T = \frac{n(n+1)}{4} \qquad \text{και} \qquad \sigma_T = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}.$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Ο μέσος όρος μηνυμάτων που μεταδίδονται ανά ώρα από μία ιδιωτική εταιρία επικοινωνιών πιστεύεται ότι είναι 149. Οι υπεύθυνοι της εταιρίας πρόσφατα ανησυχούν για την πιθανότητα ότι η ζήτηση για αυτήν την υπηρεσία μπορεί να έχει καθοδική πορεία. Για αυτό το λόγο θέλουν να εξετάσουν τη μηδενική υπόθεση ότι ο μέσος όρος των μηνυμάτων είναι 149 έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης ότι ο μέσος όρος των μηνυμάτων είναι μικρότερος από 149. Επιλέχτηκε ένα τυχαίο δείγμα 25 λειτουργικών ορών και τα δεδομένα είναι:

151	144	123	178	105
112	140	167	177	185
129	160	110	170	198
165	109	118	155	102
164	180	139	166	182

Πίνακας 3.2.6.1: Δεδομένα

Υπάρχει απόδειξη ότι η υπηρεσία της εταιρίας έχει καθοδική πορεία(α=0,05);

Λύση:

Ο έλεγχος που θα εξετάσουμε είναι:

H_0: μ=149

H_1: μ<149

Θα λύσουμε την άσκηση με τη βοήθεια του προγράμματος SPSS Data Editor. Φτιάχνουμε μία μεταβλητή με όνομα «minimata» και αφού περάσουμε τα δεδομένα ακολουθούμε τα βήματα:

Analyze/Compare means/ One Sample T test.

Στο Output εμφανίζονται τα παρακάτω αποτελέσματα:

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
MINIMATA	25	149,16	28,828	5,766

One-Sample Test

	Test Value =149

	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
MINIMATA	,028	24	,978	,16	-11,74	12,06

Πίνακας 3.2.6.2: Πίνακας αποτελεσμάτων στο SPSS.

P= P-value/2= Sig. (2-tailed)/2=0,978/2=o,489>0,05 Άρα η υπόθεση H_0 γίνεται δεκτή, δηλαδή ο μέσος όρος μηνυμάτων είναι 149 και η υπηρεσία της εταιρίας δεν έχει καθοδική πορεία.

3.3. Έλεγχοι υποθέσεων όταν εξετάζουμε 2 ανεξάρτητα δείγματα

3.3.1. Έλεγχος της ισότητας/ διαφοράς των μέσων τιμών δύο μη κανονικών πληθυσμών

Έστω ότι έχουμε δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα, τα οποία πήραμε από δύο μη κανονικούς πληθυσμούς. Αν το μέγεθος του δείγματος n_1 και n_2 είναι μεγάλο (n_1 , n_2>30), τότε ο έλεγχος των στατιστικών υποθέσεων που αναφέρεται στη διαφορά μ_1-μ_2 των δύο μέσων γίνεται όπως και στην περίπτωση που τα δείγματα προέρχονται από κανονικούς πληθυσμούς (2.3.1.).

<u>Παράδειγμα:</u>

Μία βιομηχανία παράγει δύο είδη τροφών για νήπια, που τα ονομάζει τύπο Α και τύπο Β. Προκειμένου να μελετήσει την επίδραση των τροφών αυτών στο βάρος των νηπίων, κάνει το ακόλουθο πείραμα. Επιλέγει δύο ομάδες νηπίων που τις ονομάζει ομάδα A και ομάδα B, με 30 νήπια και 32 νήπια αντιστοίχως. Τρέφει τα νήπια τις ομάδας A με τροφή τύπου A και τα νήπια της ομάδας B με τροφή τύπου B. Το πείραμα αρχίζει από την ημέρα γέννησης του κάθε νηπίου και σταματάει μόλις το νήπιο γίνει ενός έτους. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει το βάρος σε κιλά που πήρε το καθένα νήπιο στη διάρκεια του πειράματος.

Ομάδα A			**Ομάδα B**		
5	10	7	7	6	8
7	5	7	6	8	8
8	6	8	9	8	10
5	9	8	10	5	10
9	10	6	5	9	9
6	10	9	5	7	5
7	9	10	5	7	5
8	6	7	10	5	8
6	6		8	5	8
10	8		9	10	6
9	7		7	10	

Πίνακας 3.3.1.1: Δεδομένα

Η βιομηχανία ισχυρίζεται ότι τα δύο είδη τροφών έχουν την ίδια επίδραση στο βάρος των νηπίων. Να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας α=5% ο ισχυρισμός της βιομηχανίας.

Λύση:

Παρακάτω είναι τα αποτελέσματα της άσκησης στο φύλλο εντολών στο EXCEL.

A	B	Διαφορά d		
5	7	-2	n1=	30
7	6	1	n2=	32
8	9	-1	α=	0,05
5	10	-5		
9	5	4		
6	5	1	H0:μd=	0
7	5	2	H1:μd≠	0
8	10	-2		
6	8	-2		
10	9	1	μέσος των d=	-0,3125
9	7	2	s των d=	3,094610299
10	6	4		
5	8	-3	βαθμοί ελευθερίας:	
6	8	-2	n1+n2-2=	60
9	5	4		
10	9	1	t=	-0,397359707
10	7	3	tα,n1+n2-2=	2,000297172
9	7	2		
6	5	1	t<tα,n1+n2-2	
6	5	1	Άρα η υπόθεση H0	
8	10	-2	Δεν απορρίπτεται.	
7	10	-3		
7	8	-1		
7	8	-1		
8	10	-2		
8	10	-2		
6	9	-3		
9	5	4		
10	5	5		
7	8	-1		
	8	-8		
	6	-6		

Πίνακας 3.3.1.2: Αποτελέσματα στο Excel.

3.3.2. Έλεγχος της ισότητας πολλών αναλογιών

Ο έλεγχος της ισότητας πολλών αναλογιών γίνεται με τον ίδιο τρόπο που ακολουθήσαμε στον έλεγχο ανεξαρτησίας (3.2.2.). Οι υποθέσεις που κάνουμε σε αυτή την περίπτωση είναι :

H_0: $\rho_1=\rho_2=\ldots=\rho_\kappa$ έναντι της

H_1:οι αναλογίες στους πληθυσμούς δεν είναι όλες ίσες μεταξύ τους

Παίρνουμε λοιπόν ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους n_1, n_2, …, n_k από τους k πληθυσμούς και οργανώνουμε τα στοιχεία των δειγμάτων σε ένα πίνακα 2xk, όπως φαίνεται παρακάτω:

	Δείγματα			
	1	2	…	k
Επιτυχίες	x_1	x_2	…	x_k
Αποτυχίες	N_1-x_1	n_2-x_2	…	n_k-x_k

Πίνακας 3.3.2.1: Πίνακας 2xk

Τις προσδοκώμενες συχνότητες θ_{ij} και την τιμή X^2 τις υπολογίζουμε από τις σχέσεις :

$$\theta_{ij}=\frac{f_i\times f_j}{n} \qquad x^2=\sum_{l=1}^{\lambda}\sum_{j=1}^{\kappa}\frac{(f_{ij}-\theta_{il})^2}{\theta_{ij}}.$$

Τέλος, αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση H_0 αν:

$$X^2>X^2_{\alpha,\nu}.$$

Την τιμή $X^2_{\alpha,\nu}$ την παίρνουμε από τον πίνακα X^2 με βαθμούς ελευθερίας $\nu=(2-1)(k-1)=k-1$ και επίπεδο σημαντικότητας α.

Παράδειγμα:

Ένα εργοστάσιο λειτουργεί σε τρεις βάρδιες την ημερήσια, τη βραδινή και τη νυχτερινή. Ο διευθυντής παραγωγής θέλησε να ελέγξει κατά πόσο τα ποσοστά των ελαττωματικών που παράγονται στις τρεις βάρδιες είναι ίσα. Για το σκοπό αυτό συγκέντρωσε τα στοιχεία που παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

	Βάρδιες		
	Ημερήσια	Βραδινή	Νυχτερινή
Ελαττωματικά	45	55	70
Καλά	905	890	870
Σύνολο	950	945	940

Πίνακας 3.3.2.2: Δεδομένα

Συγκεκριμένα, θέλει να διαπιστώσει κατά πόσο, σε επίπεδο σημαντικότητας α=0,025, οι αναλογίες των ελαττωματικών είναι ίδιες και στις τρεις βάρδιες.

Λύση:

Ο έλεγχος που κάνουμε είναι:

H_0: οι αναλογίες και στις τρεις βάρδιες είναι ίδιες

H_1: οι αναλογίες δεν είναι ίδιες και στις τρεις βάρδιες

Πρώτα κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα με τις προσδοκώμενες συχνότητες θ_{ij} :

	Βάρδιες		
	Ημερήσια	Βραδινή	Νυχτερινή
Ελαττωματικά	57	57	56
Καλά	893	888	884

Πίνακας 3.3.2.3: Προσδοκώμενες συχνότητες

Το κριτήριο είναι:

$$x^2 = \sum_{i=1}^{\lambda}\sum_{j=1}^{\kappa}\frac{(f_{ij}-\theta_{il})^2}{\theta_{ij}}$$, άρα

$x^2 = 6{,}42$

Από τον Πίνακα X^2 σε επίπεδο σημαντικότητας α=0,025 και βαθμούς ελευθερίας ν=κ-1=3-1=2, θα έχουμε :

$X^2_{\alpha,\nu} = X^2_{0,025,2} = 7{,}38$, άρα

$x^2 < X^2_{0,025,2}$, δηλαδή η υπόθεση H_0 απορρίπτεται.

3.3.3. Έλεγχος Kolmogorov-Smirnov

Τον έλεγχο αυτόν τον χρησιμοποιούμε όταν θέλουμε να εξετάσουμε τη σημαντικότητα της διαφοράς ανάμεσα σε δύο πληθυσμούς χρησιμοποιώντας δύο δείγματα από τους αντίστοιχούς πληθυσμούς. Ο μόνος περιορισμός που υφίσταται είναι το μέγεθος του δείγματος να είναι μεγαλύτερο από 15.

Η υπόθεση που θα εξετάσουμε είναι η παρακάτω:

H_0: τα δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό

H_1: τα δείγματα προέρχονται από διαφορετικούς πληθυσμούς

Έχουμε , λοιπόν, δύο δείγματα n_1 και n_2 από δύο πληθυσμούς με τις αντίστοιχες αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής $S_{n_1(x)}$ και $S_{n_2(y)}$. Βρίσκουμε τη μέγιστη τιμή της διαφοράς ανάμεσα στις δύο συναρτήσεις, δηλαδή:

$$D_0 = \max | S_{n_1(x)} - S_{n_2(y)} |$$

και την συγκρίνουμε με την τιμή $D_{n,\alpha}$ που παίρνουμε από τον πίνακα των Kolmogorov-Smirnov με n βαθμούς ελευθερίας και επίπεδο σημαντικότητας α. Αν η τιμή D_0 που βρούμε είναι μεγαλύτερη από την τιμή $D_{n,\alpha}$ που δίνει ο πίνακας τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0 ότι, δηλαδή τα δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό.

Παράδειγμα:

Σύμφωνα με τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα να ελέγξετε αν τα δύο δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,10.

Δείγμα 1			**Δείγμα 2**		
2	3	6	3	4	2
4	4	5	2	4	3
1	5	3	4	3	1
2	2	1	4	6	6
6	5	3	5	2	6

Πίνακας 3.3.3.1: Δεδομένα

3.3.4. The Mann Whithey Test

Ο έλεγχος αυτός εξετάζει την ισότητα δύο πληθυσμών και πιο συγκεκριμένα την ισότητα των μέσων δύο πληθυσμών. Είναι ο πιο συχνά χρησιμοποιούμενος έλεγχος αντί για τον έλεγχο t-ανεξάρτητων δειγμάτων. Οι μόνες υποθέσεις που χρειάζεται να κάνουμε για τον έλεγχο είναι ότι τα δείγματα θα πρέπει να έχουν επιλεχθεί τυχαία από τους δύο πληθυσμούς που μας ενδιαφέρουν και να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Οι υποθέσεις που μπορούμε να κάνουμε είναι:

1. H_0: οι κατανομές των δύο πληθυσμών είναι όμοιες

   έναντι της

   H_1: οι κατανομές των δύο πληθυσμών δεν είναι όμοιες
2. H_0: οι κατανομές των δύο πληθυσμών είναι όμοιες

   έναντι της

H_1: ένας από τους δύο πληθυσμούς είναι μικρότερος ή μεγαλύτερος από τον άλλο

Αρχικά συγκεντρώνουμε τα δύο δείγματα n_1 και n_2 και τοποθετούμε τις παρατηρήσεις από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το μέσο όρο από τις παρατηρήσεις όπως έχουν τοποθετηθεί με τη σειρά κλιμάκωσης. Έπειτα προσθέτουμε όλες τις κλιμακωτές παρατηρήσεις μόνο από τον έναν πληθυσμό και τον ονομάζουμε R_1 .στη συνέχεια υπολογίζουμε το U, το οποίο είναι ένα μέτρο για να υπολογίζουμε τη διαφορά ανάμεσα στα δύο δείγματα. Το U δίνεται από τον τύπο:

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1 .$$

Οι μεγάλες ή και οι μικρές τιμές του U είναι μία σοβαρή ένδειξη ότι υπάρχει διαφορά ανάμεσα στους πληθυσμούς. Η κατανομή του U για μικρά δείγματα δίνεται από τον πίνακα U. Για μεγάλα δείγματα χρησιμοποιούμε την κανονική κατανομή και συγκεκριμένα όταν και τα δύο δείγματα n_1 και n_2 είναι μεγαλύτερα του 10. Σ' αυτή την περίπτωση το κριτήριο με το οποίο εξετάζουμε τους ελέγχους είναι :

$$z = \frac{U - E_{(u)}}{\sigma_u}$$

όπου,

$$E_{(u)} = \frac{n_1 n_2}{2}, \text{ ο μέσος της κατανομής}$$

και

$$\sigma_{(u)} = \frac{\sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}}{12}, \text{ η τυπική απόκλιση.}$$

Για τα μεγάλα δείγματα και στις δύο περιπτώσεις ελέγχου, απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0 όταν το z είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από την τιμή του z_α που παίρνουμε από τον πίνακα της κανονικής κατανομής σε επίπεδο σημαντικότητας α. σημειώνεται ότι το U είναι μεγάλο όταν το R_1 είναι μικρό και το αντίστροφο.

Σε περίπτωση που έχουμε μικρά δείγματα, τότε έχουμε πρόβλημα γιατί ο πίνακας U δίνει τιμές μόνο για τον αριστερόπλευρο έλεγχο. Τότε θα πρέπει να ακολουθηθεί η παρακάτω διαδικασία:

i. Για τον αριστερόπλευρο έλεγχο: θεωρούμε το R_1 σαν το μεγαλύτερο από τα δύο αθροίσματα οπότε ταυτόχρονα θα έχουμε και μικρό U το οποίο θα μπορεί να δοθεί από τον πίνακα σε επίπεδο σημαντικότητας α/2.

ii. Για τον μονόπλευρο έλεγχο: εάν θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο πληθυσμός 1 είναι μεγαλύτερος από τον 2 τότε κοιτάμε το άθροισμα του δείγματος 1 και εάν το άθροισμα αυτό είναι μικρότερο από αυτό του δείγματος 2, δεχόμαστε την H_0 .στη συνέχεια υπολογίζουμε το U και χρησιμοποιούμε τον αριστερόπλευρο έλεγχο σε επίπεδο σημαντικότητας α.

Παράδειγμα:

Δύο τύποι κεραμικών σκευών για οικιακή χρήση κατασκευάστηκαν από δύο εργαστήρια. Το πρώτο κατασκευάστηκε στο εργαστήριο IBM στις Ηνωμένες Πολιτείες και το άλλο κατασκευάστηκε στο πανεπιστήμιο του Τόκυο στην Ιαπωνία. Η αποτελεσματικότητα της ηλεκτρικής αγωγιμότητας μετρήθηκε με μία ειδική φόρμουλα. Όσο πιο υψηλή είναι η μέτρηση τόσο πιο αποτελεσματικός είναι ο κατασκευαστής. Διαπιστώστε σύμφωνα με τα παρακάτω δεδομένα εάν ένας από τους δύο παρασκευαστές είναι πιο αποτελεσματικός.

Κατασκευαστής IBM:

143, 121, 120, 101, 107, 142, 118, 130, 128, 107, 108, 126

Κατασκευαστής Τόκυο:

102, 119, 121, 113, 126, 116, 117, 129, 104, 109, 110.

3.4. Έλεγχοι υποθέσεων όταν εξετάζουμε ζευγαρωτές ή ταξινομημένες κατά ζεύγη παρατηρήσεις

3.4.1. Έλεγχος ομοιογένειας

Έστω ότι έχουμε κ ανεξάρτητα δείγματα με μέγεθος $n_1, n_2, \ldots, n_k$, τα οποία έχουμε πάρει από κ>2 διωνυμικούς πληθυσμούς και θέλουμε να ελέγξουμε αν οι διωνυμικοί πληθυσμοί είναι ομοιογενείς ως προς P. Η υπόθεση που κάνουμε είναι :

H_0: $P_1=P_2=\ldots=P_\kappa$ έναντι της H_1: $P_1 \neq P_2 \neq \ldots \neq P_\kappa$

Εάν τα δείγματα είναι μεγάλα μπορούμε να ταξινομήσουμε τις παρατηρήσεις σε 2 x κ πίνακα διπλής εισόδου, όπως ο παρακάτω:

I	J				
	Δείγμα 1	Δείγμα 2	…	Δείγμα κ	Σύνολο
Επιτυχία	x_1	x_2	…	x_k	$\sum x_j$
Αποτυχία	n_1-x_1	n_2-x_2	…	N_k-x_k	$\sum n_j - \sum x_j$
Σύνολο	n_1	n_2	…	n_k	$\sum n_j = n$

Πίνακας 3.4.1.1: Πίνακας 2xκ

Για να ελέγξουμε την υπόθεση H_0 ότι τα ποσοστά είναι όλα ίσα, συγκρίνουμε τις εμπειρικές συχνότητες των παρατηρήσεων με τις αντίστοιχες θεωρητικές, που προέκυψαν με την προϋπόθεση της ισχύος της ομοιογένειας των ποσοστών.

Αν f_{ij} είναι οι εμπειρικές συχνότητες και θ_{ij} είναι οι θεωρητικές, τότε το κριτήριο ελέγχου θα είναι, όπως και στην περίπτωση της ανεξαρτησίας, το:

$$x^2 = \sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{r}\frac{(f_{ij}-\theta_{il})^2}{\theta_{ij}}.$$

Η υπόθεση H_0 γίνεται δεκτή αν $x^2 < x^2_{v,\alpha}$.

Τον αριθμό $x^2_{v,\alpha}$ τον παίρνουμε από τον πίνακα της κατανομής x^2 με βαθμούς ελευθερίας $v=(\kappa-1)(r-1)$ ή $v=\kappa-1$, γιατί $r-1=1$ και επίπεδο σημαντικότητας α.

Παράδειγμα:

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι επιτυχίες και οι αποτυχίες τριών ομάδων ποδοσφαίρου της Β΄ Εθνικής της χώρας μας για τους αγώνες που συμμετείχαν το έτος 2006.

I	J			
	Ομάδα Α	Ομάδα Β	Ομάδα Γ	Σύνολο
Επιτυχίες	5	3	4	12
Αποτυχίες	3	4	4	11
Σύνολο	8	7	8	23

Πίνακας 3.4.1.2: Δεδομένα

Να γίνει έλεγχος της υπόθεσης ότι το ποσοστό των αποτυχιών των ομάδων δεν διαφέρουν, δηλαδή:

$H_0 : P_1=P_2=P_3$ έναντι της $H_1 : P_1 \neq P_2 \neq P_3$

σε επίπεδο σημαντικότητας α=10%.

Λύση:

Κατασκευάζουμε πρώτα τον παρακάτω πίνακα των θεωρητικών τιμών:

I	J		
	Ομάδα Α	Ομάδα Β	Ομάδα Γ
Επιτυχίες	4,2	3,7	4,2
Αποτυχίες	3,8	3,3	3,8

Πίνακας 3.4.1.3: Θεωρητικές τιμές

Το κριτήριο είναι:

$$x^2 = \sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{r}\frac{(f_{ij}-\theta_{il})^2}{\theta_{ij}} \text{ , άρα}$$

$x^2 = 0,61$

από τους πίνακες σε επίπεδο σημαντικότητας α=0,10 και βαθμούς ελευθερίας ν=3-1=2, θα έχουμε:

$x^2_{\nu,\alpha} = x^2_{2,0,10} = 4{,}61$, έτσι

$x^2 < x^2_{\nu,\alpha}$ άρα η υπόθεση H_0 γίνεται δεκτή.

3.4.2. Sign test

Επίσης το Sign τεστ χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να ελέγξουμε αν οι μέσοι που προέρχονται από δυο πληθυσμούς είναι ίσοι. Οι παρατηρήσεις των δυο δειγμάτων θα πρέπει τουλάχιστον να έχουν κάποια κλιμάκωση και να μην υπάρχουν υποθέσεις για την κατανομή των πληθυσμών από τους οποίους προέρχονται τα δείγματα.

Ο μονόπλευρος έλεγχος για κάθε ζεύγος παρατηρήσεων στον οποίο κάθε μέτρηση του πρώτου δείγματος είναι μεγαλύτερη από τις μετρήσεις του δεύτερου δείγματος έχει τη μορφή $\mathbf{H_1 : \mu > 0}$.

Ο μονόπλευρος έλεγχος $\mathbf{H_1 : \mu < 0}$ έχει ισχύ όταν κάθε ζεύγος παρατηρήσεων στον οποίο κάθε μέτρηση του πρώτου δείγματος είναι μικρότερη από τις παρατηρήσεις του δεύτερου δείγματος. Εάν ένα ζεύγος μετρήσεων έχει την ίδια τιμή τότε αυτές οι παρατηρήσεις που έχουν κάποια σχέση μεταξύ τους βγαίνουν έξω από την ανάλυση τότε μειώνεται η επίδραση που επέρχεται στο δείγμα.

Εάν λοιπόν η υπόθεση ότι οι δυο πληθυσμοί έχουν το ίδιο επίπεδο σημαντικότητας τότε ο αριθμός των θετικών παρατηρήσεων πρέπει να είναι ακριβώς ίσος με τον αριθμό των αρνητικών παρατηρήσεων.

Εάν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγαλύτερο από 30 τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η κανονική κατανομή.

Παράδειγμα:

Σύμφωνα με τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα, να ελέγξετε αν οι μέσοι που προέρχονται από τους δύο πληθυσμούς είναι ίσοι, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,10.

x_i	0,19	0,22	0,18	0,17	1,20	0,14	0,09	0,13	0,26	0,66
y_i	0,21	0,27	0,15	0,18	0,40	0,08	0,14	0,28	0,30	0,68

Πίνακας 3.4.2.1: Δεδομένα

3.4.3. The Wilcoxon Signed-Rank Test

Για την κατανομή των δεδομένων ισχύει ότι και στον έλεγχο Wilcoxon για 1 δείγμα. Σ' αυτόν τον έλεγχο εξετάζουμε 2 πληθυσμούς για τους οποίους έχουμε ζευγαρωτές παρατηρήσεις. Υπάρχουν δύο ειδών έλεγχοι, ο αμφίπλευρος και ο μονόπλευρος (αριστερόπλευρος ή δεξιόπλευρος). Στον αμφίπλευρο έλεγχο η μηδενική υπόθεση είναι ότι η διαφορά των μέσων των δύο πληθυσμών είναι μηδέν ενώ η εναλλακτική υπόθεση είναι ότι η διαφορά των μέσων είναι μηδέν. Δηλαδή :

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ έναντι της $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Υποθέτουμε ότι η κατανομή μεταξύ των διαφορών των δύο πληθυσμών είναι συμμετρική, ακόμη ότι οι διαφορές είναι ανεξάρτητες και υπάρχει εσωτερική κλιμάκωση.

Αρχικά, τοποθετούμε τις ζευγαρωτές παρατηρήσεις των δύο μεταβλητών σύμφωνα με τον τύπο υπολογισμού της διαφοράς $D = x_1 - x_2$. Μετά παραθέτουμε τις διαφορές από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη. Έπειτα φτιάχνουμε τα θετικά και τα αρνητικά αθροίσματα των διαφορών.

Το Τα (του Wilcoxon) δίνεται από τον τύπο:

$T = \min(\Sigma_{(+)}, \Sigma_{(-)})$

είναι, δηλαδή, το μικρότερο από τα δύο αθροίσματα όπου $\Sigma_{(+)}$ το άθροισμα των θετικών διαφορών $\Sigma_{(-)}$ το άθροισμα των αρνητικών διαφορών.

Άρα απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση όταν η υπολογιζόμενη τιμή είναι μικρότερη από αυτή που δίνουν οι πίνακες.

Στους μονόπλευρους ελέγχους είτε είναι δεξιόπλευροι, είτε είναι αριστερόπλευροι αν η εναλλακτική υπόθεση είναι ότι ο μέσος του πρώτου πληθυσμού είναι μεγαλύτερος από το μέσο του δεύτερου, δηλαδή:

$H_0 : \mu_1 \neq \mu_2$ έναντι της $H_1 : \mu_1 > \mu_2$, χρησιμοποιούμε τις αρνητικές διαφορές. Ενώ, αν έχει η εναλλακτική υπόθεση τη μορφή:

$H_0 : \mu_1 \neq \mu_2$ έναντι της $H_1 : \mu_1 < \mu_2$, χρησιμοποιούμε τις θετικές διαφορές.

Συνεπώς και στις δύο περιπτώσεις ο έλεγχος βρίσκεται στην αριστερή πλευρά της κατανομής.

<u>Παράδειγμα:</u>

Ο υπεύθυνος ενός καταστήματος stock θέλει να εξετάσει εάν υπάρχει υψηλότερη από τη συνηθισμένη επιστροφή σε stock μετά από σκισίματα. Ένα τυχαίο δείγμα 10 stock τα οποία πρόσφατα σκίστηκαν, είναι διαθέσιμο. Για κάθε stock κατέγραψε το ποσοστό επιστροφής σε ένα μήνα πριν το σκίσιμο και το ποσοστό επιστροφής μετά το σκίσιμο. Τα δεδομένα είναι τα εξής:

Πριν το σκίσιμο(%):

0,5 , -0,2 , 0,9 , 1,1 , -0,7 , 1,5 , 2 , 1,3 , 1,6 , 2,1

Μετά το σκίσιμο(%):

1,1 , 0,3 , 1,2 , 1,9 , -0,2 , 1,4 , 1,8 , 1,8 , 2,4 , 2,2

Υπάρχει απόδειξη ότι το stock εξαρτάται από το μήνα που έγινε το σκίσιμο;

3.4.4. The Spearman Rank Correlation Coefficient

Όταν ισχύει η υπόθεση ότι οι κατανομές δυο μεταβλητών x και y δεν είναι κανονικές ή όταν τα δεδομένα είναι από μόνα τους σε σειρά ή έχουν μια συνηθισμένη κλιμάκωση τότε υπάρχουν εναλλακτικοί τρόποι για να μετρήσουμε το βαθμό συσχέτισης ανάμεσα σε αυτές μεταβλητές. Ένας από αυτούς είναι ο έλεγχος Spearman rank correlation coefficient.

Τα δεδομένα σ' αυτόν τον έλεγχο είναι ζευγάρια **n** παρατηρήσεων των δυο μεταβλητών x και y. Πρώτα κατατάσσουμε τις παρατηρήσεις της πρώτης μεταβλητής από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη. Μετά κατατάσσουμε ανεξάρτητα τις τιμές της δεύτερης μεταβλητής πάλι από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη. Όταν δεν υπάρχει σχέση ανάμεσα σε δυο τιμές της μεταβλητής x ή σε δυο τιμές της μεταβλητής y στην ίδια σειρά τότε η συσχέτιση κατά Spearman υπολογίζεται από το τύπο :

$$r_s = \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n\left(n^2-1\right)}.$$

Την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε επίσης όταν υπάρχει σχέση ανάμεσα σε τιμές του x ή σε τιμές του y και ο αριθμός των συσχετίσεων είναι μικρός σε σχέση με τον αριθμό των παρατηρήσεων. Όταν το $r_s = 1$ τότε υπάρχει θετική συσχέτιση ανάμεσα στις μεταβλητές x και y δηλαδή, η y αυξάνεται ότι και αν κάνει η x. Όταν το $r_s = -1$τότε υπάρχει αρνητική συσχέτιση, δηλαδή, όταν η x αυξάνεται τότε η y μειώνεται. Όταν το $r_s = 0$ τότε δεν υπάρχει σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές x και y. Οι παρατηρήσεις που βρίσκονται μέσα σε αυτά τα όρια είναι μια βασική ένδειξη για το βαθμό συσχέτισης ανάμεσα στις μεταβλητές x και y.

Επίσης το τεστ αυτό το χρησιμοποιούμε στη περίπτωση που θέλουμε να βγάλουμε στατιστικά συμπεράσματα για το πληθυσμό των μεταβλητών x και y. Αυτή η πληθυσμιακή κατανομή συμβολίζεται με $\mathbf{p_s}$. Σε αυτή τη περίπτωση θέλουμε να ελέγξουμε αν το $p_s = 0$, αν ισχύει αυτό τότε υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα στις μεταβλητές x και y.

Οι υποθέσεις για το τεστ συσχέτισης ανάμεσα σε δυο μεταβλητές είναι:

H_0: $\rho_s=0$ έναντι της H_1: $\rho_s \neq 0$

Αυτή είναι μια μορφή αμφίπλευρου ελέγχου για τη σχέση ανάμεσα στα x και y. Μια πιθανή εκδοχή είναι και ο μονόπλευρος έλεγχος. Εάν θέλουμε να ελέγξουμε την ύπαρξη θετικής συσχέτισης ανάμεσα στις μεταβλητές τότε η εναλλακτική υπόθεση για το p_s είναι $H_1 : p_s > 0$. Εάν θέλουμε να ελέγξουμε την ύπαρξη αρνητικής συσχέτισης τότε η εναλλακτική υπόθεση είναι $H_1 : p_s < 0$.

Όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρότερο ή ίσο του 30 τότε βρίσκουμε τη τιμή του p_s από τους πίνακες. Οι πίνακες δίνουν αποτελέσματα με επίπεδο σημαντικότητας α. Για τον αμφίπλευρο έλεγχο διπλασιάζουμε το επίπεδο σημαντικότητας που δίνεται και απορρίπτουμε την H_0 εάν το r_s είναι είτε μεγαλύτερο είτε ίσο με τη τιμή που δίνεται στο πίνακα. Στο μονόπλευρο έλεγχο $H_1 : p_s > 0$ απορρίπτουμε την H_0 μόνο αν το r_s είναι μεγαλύτερο ή ίσο του C. Επίσης στον μονόπλευρο έλεγχο H_1: $p_s < 0$ απορρίπτουμε την H0 μόνο αν το r_s είναι μικρότερο ή ίσο του – C.

Σε περίπτωση που τα δείγματα είναι μεγαλύτερα από το 30 τότε χρησιμοποιούμε την παρακάτω εξίσωση :

$$Z = r_s \sqrt{n-1} .$$

Παράδειγμα:

Ο διευθυντής ενός εκπαιδευτικού προγράμματος για το management θέλει να εξετάσει εάν υπάρχει θετική σχέση ανάμεσα στην απόδοση αυτών που έκαναν αίτηση σε ένα τεστ και στο ίδιο άτομο την επιτυχία που είχε στο πρόγραμμα. Ο διευθυντής διάλεξε 15 συμμετέχοντες σύμφωνα με την απόδοση τους στο τεστ πριν το πρόγραμμα και ξεχωριστά μέτρησε την απόδοσή τους μετά το πρόγραμμα. Εξετάστε εάν υπάρχει θετική σχέση ανάμεσα στην απόδοση πριν το πρόγραμμα και μετά το πρόγραμμα.

Συμμετέχοντες	**Απόδοση πριν το πρόγραμμα**	**Απόδοση μετά το πρόγραμμα**
1	8	7
2	9	5
3	4	9
4	2	6
5	3	1
6	10	8
7	1	2
8	5	10

9	6	15
10	15	14
11	13	4
12	14	3
13	12	11
14	7	12
15	11	13

Πίνακας 3.4.4.1: Δεδομένα

3.5. Έλεγχοι υποθέσεων όταν εξετάζουμε πολλά ανεξάρτητα δείγματα

3.5.1. The Kruskal-Wallis Test

Ο έλεγχος των Kruskal – Wallis είναι η αντίστοιχη μη παραμετρική ανάλυση της διασποράς κατά ένα παράγοντα. Μπορεί να θεωρηθεί μια επέκταση του ελέγχου Mann – Whitney για **κ** (κ – 2) ανεξάρτητα δείγματα. Υποθέτοντας ότι τα κ ανεξάρτητα δείγματα έχουν ίδιο τύπο με ίσες διασπορές, τότε με το κριτήριο αυτό ελέγχεται η υπόθεση ότι έχουν και ίσες μέσες τιμές.

Στον έλεγχο των Kruskal – Wallis χρησιμοποιούνται διατάξιμα δεδομένα τα οποία έχουν μια αύξουσα κλιμάκωση. Στον έλεγχο αυτό συγκρίνουμε περισσότερες από 2 κατανομές πληθυσμών. Η μηδενική υπόθεση είναι ότι όλοι οι πληθυσμοί έχουν την ίδια κατανομή ενώ η εναλλακτική υπόθεση είναι ότι τουλάχιστον 2 πληθυσμοί έχουν διαφορετική κατανομή μεταξύ τους.

Οι υποθέσεις στον έλεγχο των Kruskal – Wallis είναι :

H_0 : όλοι οι πληθυσμοί έχουν την ίδια κατανομή

H_1 : όλοι οι πληθυσμοί δεν έχουν την ίδια κατανομή

Τα δείγματα που χρησιμοποιούνται στον έλεγχο είναι τυχαία και προέρχονται από αντίστοιχους πληθυσμούς. Τα τυχαία δεδομένα που μελετούνται είναι συνεχής.

Διατάσσουμε τα δεδομένα από όλα τα δείγματα από τη μικρότερη παρατήρηση στη μεγαλύτερη ανεξάρτητα από το δείγμα το οποίο προέρχονται. Έπειτα προσθέτουμε όλους τους αντίστοιχους βαθμούς από κάθε δείγμα ξεχωριστά. Συμβολίζουμε με n_1 το μέγεθος του δείγματος 1, με n_2 το μέγεθος του δείγματος 2 και με n_k το μέγεθος του δείγματος κ. Με n συμβολίζουμε το συνολικό άθροισμα των δειγμάτων. Με R_1 συμβολίζουμε το άθροισμα των διατεταγμένων παρατηρήσεων του δείγματος 1, με R_2 το άθροισμα των διατεταγμένων παρατηρήσεων του δείγματος 2, μέχρι το R_K όσα δείγματα έχω.

Ο τύπος υπολογισμού του ελέγχου Kruskal – Wallis είναι ο παρακάτω :

$$H = \frac{12}{n(n+1)}\left(\sum_{j=1}^{\kappa}\frac{R_j^2}{n_j}\right) - 3(n+1)$$

όπου : $\mathbf{n_j}$ = το μέγεθος του j δείγματος

$\mathbf{n} = n_1+n_2+\ldots\ldots+n_k$:ο συνολικός αριθμός των παρατηρήσεων

$\mathbf{R_j}$ = το άθροισμα των βαθμών του j –οστού δείγματος

Για μικρά δείγματα $\mathbf{n_j < 5}$ τα αποτελέσματα βρίσκονται από τους πίνακες που ικανοποιούν την μηδενική υπόθεση. Για μεγαλύτερα δείγματα τα αποτελέσματα για την κατανομή που ικανοποιούν την μηδενική υπόθεση χρησιμοποιούμε την κατανομή Chi – square με κ – 1 βαθμούς ελευθερίας.

<u>Παράδειγμα:</u>

Ο υπεύθυνος ενός εκδοτικού εργοστασίου θέλει να διαπιστώσει εάν το κόστος μιας διαφήμισης σε εφημερίδα με ένα συγκεκριμένο μέγεθος είναι περίπου το ίδιο με τέσσερις εφημερίδες μεγάλης κυκλοφορίας. Επιλέχτηκε ένα τυχαίο δείγμα από 7 εφημερίδες και καταγράφηκε το κόστος. Τα δεδομένα είναι σε δολάρια.

Εφημερίδα Α	57	65	50	45	70	62	48
Εφημερίδα Β	72	81	64	55	90	38	75
Εφημερίδα Γ	35	42	58	59	46	60	61
Εφημερίδα Δ	73	85	92	68	82	94	66

Πίνακας 3.5.5.1: Δεδομένα

Πιστεύεται ότι υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στις τέσσερις εφημερίδες;

3.5.2. The Friedman Test

Με τον έλεγχο αυτό μπορούμε να ελέγξουμε κατά πόσο ένα σύνολο ατόμων ή κάποιο μεμονωμένο άτομο κρίνει πολλά προϊόντα ή θέματα. Ουσιαστικά αυτό το τεστ είναι μια προέκταση του Wilcoxon signed rank test ή του sign test για περισσότερες από δυο παρατηρήσεις ανά σύνολο ατόμων. Στο τεστ του Friedman οι παρατηρήσεις είναι παραπάνω από ένα ζεύγος, δηλαδή, για κάθε σύνολο ατόμων ή για κάθε άτομο αντιστοιχούν όλες οι παρατηρήσεις (κ). Αυτό το τεστ είναι πιο εύχρηστο όταν τα δεδομένα είναι σε στήλες.

Τα δεδομένα για αυτό το τεστ τοποθετούνται σε πίνακα. Στις σειρές του πίνακα βάζουμε τα σύνολα των ατόμων. Στις στήλες βάζουμε τα διαφορετικά προϊόντα ή θέματα που συμβολίζονται με κ.

	ΠΡΟΪΟΝ 1	ΠΡΟΪΟΝ 2	ΠΡΟΪΟΝ 3	....	ΠΡΟΪΟΝ κ
ΣΥΝΟΛΟ ΟΜΑΔΑΣ1					
ΣΥΝΟΛΟ ΟΜΑΔΑΣ2					
ΣΥΝΟΛΟ ΟΜΑΔΑΣ3					
....					
ΣΥΝΟΛΟ ΑΤΟΜΩΝn					
ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΣΤΗΛΩΝ	Σ1	Σ2	Σ3	....	Σκ

Πίνακας 3.5.2.1: Πίνακας nxk

Εάν τα δεδομένα δεν είναι κατανεμημένα σε στήλες τότε τις δημιουργούμε εμείς θέτοντας τη μικρότερη παρατήρηση 1, την αμέσως μεγαλύτερη 2 και αντίστοιχα μέχρι τη παρατήρηση κ. Μετά φτιάχνουμε το άθροισμα για κάθε στήλη. Το άθροισμα όλων των στηλών για το προϊόν 1 το θέτουμε Σ_1,Σ_2 για το προϊόν 2 μέχρι το συνολικό άθροισμα Σ_κ.

Οι υποθέσεις για το τεστ του Friedman είναι οι ακόλουθες :

H_0 : Οι κατανομές των προϊόντων κ είναι ίδιες

H_1 : Οι κατανομές των προϊόντων κ δεν είναι όλες ίδιες

Όταν το άθροισμα των στηλών για κάθε προϊόν δεν διαφέρει πολύ από το άθροισμα των στηλών για κάθε άλλο προϊόν τότε αποδέχομαι την H_0. Όταν υπάρχει μεγάλη διαφορά ανάμεσα στα αθροίσματα των στηλών τότε αποδέχομαι την H_1 και καταλήγω στο συμπέρασμα ότι τουλάχιστον δυο προϊόντα δεν έχουν την ίδια κατανομή. Τότε χρησιμοποιούμε το τεστ του Friedman που συμβολίζεται με $\mathbf{x^2}$.

$$X^2 = \frac{12}{n\kappa(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{\kappa} R_j^2 - 3n(\kappa|+1).$$

Όταν αποδέχομαι την H_0 τότε το x^2 πλησιάζει τη κατανομή Chisquare με βαθμούς ελευθερίας κ-1 όσο το n αυξάνεται.

<u>Παράδειγμα:</u>

Ένα τυχαίο δείγμα από 12 καταναλωτές ρωτήθηκε για τις προτιμήσεις του σε 4 αρώματα όπου ο κατασκευαστής θέλει να παρουσιάσει σε ένα κατάστημα στο διάδρομο της εισόδου. Τα δεδομένα είναι τα ακόλουθα:

Ερωτηθέντες	**Άρωμα 1**	**Άρωμα 2**	**Άρωμα 3**	**Άρωμα 4**
1	1	2	4	3
2	2	1	3	4
3	1	3	4	2
4	1	2	3	4
5	1	3	4	2
6	1	4	3	2
7	1	3	4	2
8	2	1	4	3
9	1	3	4	2
10	1	3	2	4
11	1	4	3	2
12	1	3	4	2

Πίνακας 3.5.2.2: Δεδομένα

Με 1 συμβολίζονται τα αρώματα που αρέσουν πάρα πολύ, με 2 αυτά που αρέσουν πολύ, με 3 αυτά που αρέσουν λίγο και με 4 αυτά που αρέσουν πολύ λίγο. Πιστεύεται ότι κάποιο από τα αρώματα αρέσει εξίσου το ίδιο;

Λύση:

H_0 : Οι κατανομές των 4 αρωμάτων είναι ίδιες

H_1 : Οι κατανομές των 4 αρωμάτων δεν είναι όλες ίδιες

Περνάμε τα δεδομένα μας στο πρόγραμμα SPSS Data Editor ακολουθούμε τα βήματα:

Analyze/Nonparametric Tests/ K Related Samples

Μετά περνάω τις 4 μεταβλητές στο Test Variables, κλικάρω Friedman και πατάω ok. Στο output εμφανίζονται τα εξής αποτελέσματα:

Ranks

	Mean Rank
ARWMA1	1,17
ARWMA2	2,67
ARWMA3	3,50
ARWMA4	2,67

Test Statistics

N	12
Chi-Square	20,400
df	3
Asymp. Sig.	,000

a Friedman Test

Πίνακας 3.5.2.3: Αποτελέσματα στο SPSS.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΛΕΓΧΩΝ

4.1. Εισαγωγή

Στα δύο παραπάνω κεφάλαια αναφερθήκαμε στις περιπτώσεις παραμετρικών και μη παραμετρικών ελέγχων υποθέσεων. Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφέρουμε κάποιες διαφορές μεταξύ των ελέγχων αυτών , καθώς επίσης θα κάνουμε και συγκρίσεις μεταξύ κάποιων ελέγχων.

Έχοντας, υπ' όψιν όσα αναφέρθηκαν κατανοούμε ότι εξετάζοντας έναν έλεγχο υποθέσεων, είτε αυτός είναι παραμετρικός είτε είναι μη παραμετρικός, συναντάμε ορισμένες φορές κάποιες δυσκολίες. Αυτό εξαρτάται από διάφορους παράγοντες κάθε φορά όπως για παράδειγμα: η διαδικασία του ελέγχου, το μέγεθος του δείγματος, η δυσκολία των πράξεων που πρέπει να γίνουν για να βγάλουμε συμπεράσματα και τα κριτήρια που προϋποθέτει κάθε έλεγχος. Για να αποφασίσουμε ποίον παραμετρικό ή μη παραμετρικό έλεγχο θα χρησιμοποιήσουμε ώστε να συγκρίνουμε σωστά τα δεδομένα που έχουμε πρέπει αρχικά να έχουμε υπόψη μας κάποια βασικά χαρακτηριστικά τους. Όταν χρησιμοποιούμε τους παραμετρικούς ελέγχους βασιζόμαστε στην υπόθεση ότι τα δεδομένα προέρχονται από την κανονική κατανομή και περιλαμβάνουν τον έλεγχο t – test και την ανάλυση της διασποράς. Έλεγχοι, οι οποίοι δεν χρησιμοποιούν σχετικά με την κατανομή του πληθυσμού χαρακτηρίζονται ως μη παραμετρικοί. Για να καταλήξουν σε συμπέρασμα, αρχικά κατατάσσουν τα δεδομένα από τα μικρότερα στα μεγαλύτερα και δημιουργούν κλάσεις . Σ' αυτούς τους ελέγχους περιλαμβάνονται και οι έλεγχοι : Wilcoxon, Mann – Whitney και Kruskal – Wallis. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται η αντιστοιχία των παραμετρικών και μη παραμετρικών ελέγχων ανάλογα με τον σκοπό για τον οποίο χρησιμοποιούνται.

	ΤΥΠΟΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ			
ΣΚΟΠΟΣ	**ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ**	**ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΜΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ**	**ΔΥΟΝΙΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ**	**ΧΡΟΝΟΣ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ**
Περιγραφή ενός δείγματος	Mean, SD	Median, interquartile range	Proportion	Kaplan Meier survival curve
Σύγκριση ενός δείγματος με την υποθετική Τιμή	One-sample *t* test	Wilcoxon test	Chi-square or Binomial test **	
Σύγκριση μη σχετιζόμενων δειγμάτων	Unpaired *t* test	Mann-Whitney test	Fisher's test (chi-square for large samples)	Log-rank test or Mantel-Haenszel*
Σύγκριση δυο σχετιζόμενων δειγμάτων	Paired *t* test	Wilcoxon test	McNemar's test	Conditional proportional hazards regression*
Σύγκριση τριών ή παραπάνω μη σχετιζόμενων Δειγμάτων	One-way ANOVA	Kruskal-Wallis test	Chi-square test	Cox proportional hazard regression**
Σύγκριση τριών ή παραπάνω σχετιζόμενων δειγμάτων	Repeated-measures ANOVA	Friedman test	Cochrane Q**	Conditional proportional hazards regression**
Ποιοτική σχέση ανάμεσα σε δυο μεταβλητές	Pearson correlation	Spearman correlation	Contingency coefficients**	

Πίνακας 4.1.1: Αντιστοιχία παραμετρικών και μη παραμετρικών ελέγχων.

Πριν επιλέξουμε ποιο τύπο ελέγχου θα χρησιμοποιήσουμε, θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας τα εξής τρία βασικά σημεία.

1. Στους παραμετρικούς ελέγχους μπορούμε να χρησιμοποιούμε την επέκταση του μεγέθους του δείγματος για να έχουν καλύτερη εφαρμογή οι υποθέσεις της κανονικότητας και των ίσων διακυμάνσεων Η επέκταση των δεδομένων μπορεί να δώσει αποτελέσματα τα οποία μπορούν να έχουν καλύτερη εφαρμογή.

2. Θα αποφασίσουμε για τον τύπο του ελέγχου αφού πρώτα εξετάσουμε από τι πεδία έχουμε συλλέξει τα δεδομένα μας και κατά πόσο αυτά που έχουμε συλλέξει προέρχονται από κανονικούς πληθυσμούς.

3. Πρέπει να λάβουμε σοβαρά υπόψη μας την πιθανότητα να υπάρχει μεγάλο μέγεθος του δείγματος. Το μεγάλο μέγεθος του δείγματος έχει περισσότερες πιθανότητες να δώσει τυπικές αποκλίσεις που προέρχονται από την κανονικότητα. Συνεπώς σ' αυτές τις περιπτώσεις όπου η μη – κανονικότητα δημιουργεί ανησυχίες. Σ' αυτές τις περιπτώσεις είναι πιο εύχρηστο να χρησιμοποιήσουμε τους παραμετρικούς ελέγχους και στις αντίστοιχες περιπτώσεις που έχουμε μικρό δείγμα να χρησιμοποιήσουμε τους μη – παραμετρικούς ελέγχους.

4.2. Επιλογή ανάμεσα στους παραμετρικούς και μη παραμετρικούς ελέγχους

Υπάρχουν δυο κατηγορίες που μπορούμε να βασιστούμε ώστε να φτάσουμε στο επιδιωκόμενο αποτέλεσμα, το οποίο είναι η σωστή επιλογή ανάμεσα στους ελέγχους. Το να διαλέξεις κάποιες φορές ανάμεσα σε παραμετρικούς και μη – παραμετρικούς ελέγχους είναι εύκολο.

Θα πρέπει, για παράδειγμα να διαλέξουμε έναν παραμετρικό έλεγχο εάν είμαστε σίγουροι ότι τα δεδομένα προέρχονται από την κανονική κατανομή. Ενώ έναν μη παραμετρικό έλεγχο τον επιλέγουμε σίγουρα εάν ισχύει μια από τις τρεις παρακάτω περιπτώσεις :

✓ Εάν τα δεδομένα είναι κατανεμημένα σε κλάσεις ή τα δεδομένα δεν προέρχονται ξεκάθαρα από την κανονική κατανομή

✓ Όταν κάποια δεδομένα είναι πολύ υψηλά ή χαμηλά σε σχέση με τα υπόλοιπα δεδομένα του δείγματος για να μετρηθούν. Επίσης εάν αυτά προέρχονται από την κανονική κατανομή είναι αδύνατο να τα εξετάσεις με παραμετρικό έλεγχο γιατί δεν γνωρίζουμε όλες τις μεταβλητές. Χρησιμοποιώντας έναν μη παραμετρικό έλεγχο αυτά τα δεδομένα θεωρούνται απλά. Ταξινομώντας τα πολύ μικρά δεδομένα για να μετρήσουμε μια χαμηλή τιμή και τα μεγάλα δεδομένα για μετρήσουμε μια υψηλή τιμή. Γιατί μόνο ένας μη – παραμετρικός έλεγχος γνωρίζει σχετικά με τις κλάσεις των τιμών και δεν χρειάζεται να γνωρίζει όλες τις τιμές της μεταβλητής ακριβώς.

✓ Εάν είμαστε σίγουροι ότι τα δεδομένα δεν προέρχονται από την κανονική κατανομή, τότε πρέπει να τα μετατρέψουμε έτσι ώστε να προέρχονται από την κανονική κατανομή.

Όμως δεν είναι πάντα εύκολο να διαλέξουμε ανάμεσα στους παραμετρικούς και μη – παραμετρικός ελέγχους και αυτό επειδή δεν μπορούμε να ξέρουμε πότε ένα δείγμα προέρχεται από την κανονική κατανομή. Επομένως πριν αποφασίσουμε ποια μορφή ελέγχου θα χρησιμοποιήσουμε θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τα τρία παρακάτω βασικά σημεία :

✓ Όταν έχουμε συλλέξει παραπάνω από εκατό παρατηρήσεις πρέπει αρχικά να κοιτάξουμε την κατανομή τους και θα είναι προφανές από τί είδους κατανομή προέρχεται. Συνεπώς θα χρησιμοποιήσουμε τον έλεγχο των Kolmogorov – Smirnoff όταν τα δεδομένα προέρχονται από την κανονική κατανομή . Όταν έχουμε μικρό δείγμα τότε είναι δύσκολο να αποφασίσουμε πότε τα δεδομένα ακολουθούν την κανονική κατανομή με σιγουριά, και ο αντίστοιχος παραμετρικός έλεγχος θα έχει λιγότερη ισχύ.

✓ Πριν αποφασίσουμε για το είδος του ελέγχου που θα χρησιμοποιήσουμε, θα πρέπει να έχουμε εξετάσει και τα προηγούμενα δεδομένα. Αυτό που μας ενδιαφέρει περισσότερο είναι η κατανομή που αφορά ολόκληρο τον πληθυσμό και όχι η κατανομή του δείγματος. Επομένως θα πρέπει να εξετάσουμε όλα τα δεδομένα και όχι μόνο αυτά που περιέχονται στην έρευνα.

✓ Όταν υπάρχει μεγάλη διασπορά των δεδομένων, πρέπει αναμφισβήτητα να περιμένουμε ότι τα δεδομένα προέρχονται από την κανονική κατανομή. Εάν υπάρχει έστω και η παραμικρή αμφιβολία υπάρχουν φορές που θα χρησιμοποιήσουμε έναν παραμετρικό έλεγχο εφόσον δεν παραβιάζεται η κανονικότητα και έναν μη – παραμετρικό έλεγχο εφόσον δεν είμαστε σίγουροι ότι παραβιάζεται η κανονικότητα.

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω βασικό ρόλο στη επιλογή του είδους του ελέγχου που θα χρησιμοποιήσουμε έχει το μέγεθος του δείγματος. Υπάρχουν τέσσερα σημεία που πρέπει να ληφθούν υπόψη :

✓ <u>Μεγάλο δείγμα</u> : Τι συμβαίνει όταν χρησιμοποιούμε έναν παραμετρικό έλεγχο για μια μη – κανονική κατανομή; Το κεντρικό θεώρημα ενισχύει την υπόθεση ότι οι παραμετρικοί έλεγχοι έχουν καλύτερα αποτελέσματα σε μεγάλα δείγματα ακόμα και αν ο πληθυσμός δεν είναι κανονικός. Το παράδοξο είναι ότι δεν μπορούμε να πούμε κατά πόσο το μεγάλο δείγμα είναι τόσο μεγάλο όσο χρειάζεται, γιατί αυτό εξαρτάται από τη φύση της μη – κανονικής κατανομής. Αν και η κατανομή του πληθυσμού είναι αρκετά μεγάλη, είναι καταλληλότερο να διαλέξουμε έναν παραμετρικό έλεγχο, όταν υπάρχουν τουλάχιστον πάνω από 24 δεδομένα σε κάθε δείγμα.

✓ <u>Μεγάλο δείγμα</u> : Τι συμβαίνει όταν χρησιμοποιούμε έναν μη – παραμετρικό έλεγχο σε κανονική κατανομή; Οι μη – παραμετρικοί έλεγχοι αποδίδουν καλύτερα όταν χρησιμοποιούμε μεγάλο δείγμα από κανονική κατανομή. Οι τιμές P τείνουν να είναι αρκετά μεγάλες, αλλά η απόκλιση είναι μικρή. Συνεπώς οι μη – παραμετρικοί έλεγχοι είναι σχετικά λιγότερο ισχυροί από τους παραμετρικούς ελέγχους για μεγάλα δείγματα.

✓ Μικρό δείγμα : Τι συμβαίνει όταν χρησιμοποιούμε έναν παραμετρικό έλεγχο σε μια μη – κανονική κατανομή; Αφού δεν μπορούμε να βασιστούμε στο κεντρικό θεώρημα συνεπώς και η τιμή Pδεν θα είναι αρκετά αξιόπιστη.

✓ Μικρό δείγμα : Όταν χρησιμοποιούμε έναν μη – παραμετρικό έλεγχο σε μια κανονική κατανομή, οι τιμές P τείνουν να είναι πολύ υψηλές. Οι μη – παραμετρικοί έλεγχοι έχουν λιγότερη ισχύ με τα μικρά δείγματα.

Επομένως, τα μεγάλα δείγματα δεν παρουσιάζουν προβλήματα . Είναι εύκολο να πούμε, ότι τα δεδομένα προέρχονται από την κανονική κατανομή, αλλά δεν υπάρχει λόγος γιατί οι μη – παραμετρικοί έλεγχοι είναι πιο ισχυροί και οι παραμετρικοί είναι πιο ανθεκτικοί. Το δίλημμα παρουσιάζεται στα μικρά δείγματα, γιατί είναι δύσκολο να πούμε, αν τα δεδομένα προέρχονται από την κανονική κατανομή και αυτό είναι που μας δημιουργεί πρόβλημα. Σε αυτή τη περίπτωση οι μη – παραμετρικοί έλεγχοι δεν είναι ισχυροί και οι παραμετρικοί δεν είναι ανθεκτικοί.

4.3. Σύγκριση παραμετρικών και μη παραμετρικών κριτηρίων

Σε αυτή την ενότητα θα συγκρίνουμε τους παραμετρικούς και τους μη – παραμετρικούς ελέγχους. Πιο συχνά χρησιμοποιούνται τα παραμετρικά κριτήρια γιατί αυτά εξετάζουν εκτιμήτριες ή τις τιμές των παραμέτρων. Όπως έχει ήδη αναφερθεί πολλές μη παραμετρικές διαδικασίες βασίζονται σε κλιμακωτά δεδομένα. Ταξινομούνται από το μικρότερο στο μεγαλύτερο και παίρνουν ακέραιες τιμές από το 1 μέχρι το μέγεθος του δείγματος. Για τα μεγάλα δείγματα πολλοί μη – παραμετρικοί έλεγχοι μπορεί να βασίζονται στη θεωρία της κανονικότητας . Για μικρά δείγματα χρησιμοποιούνται οι ίδιες μέθοδοι αλλά οι αποφάσεις για την σημαντικότητα γίνονται με το να συγκρίνουμε τη τιμή που θα βρούμε με την αντίστοιχη τιμή που δίνεται από τους στατιστικούς πίνακες.

Οι μη – παραμετρικοί έλεγχοι κάνουν λιγότερο ισχυρές υποθέσεις για τα δεδομένα. Για τις συγκεκριμένες παραμετρικές διαδικασίες για να έχουν ισχύ πρέπει οι προϋποθέσεις να δημιουργούνται σε συγκεκριμένες συνθήκες ή οι υποθέσεις πρέπει να ¨ συναντιούνται ¨ για τα μικρά δείγματα. Ο έλεγχος one sample t test, για παράδειγμα, θέτει σαν προϋπόθεση ότι οι παρατηρήσεις θα προέρχονται από την κανονική κατανομή. Για δυο ανεξάρτητα δείγματα, ο έλεγχος t test έχει την εναλλακτική υπόθεση ότι οι τυπικές αποκλίσεις του πληθυσμού είναι ίσες. Εάν παραβιάζονται αυτές οι υποθέσεις τότε τα αποτελέσματα της τιμής P value και τα διαστήματα εμπιστοσύνης μπορεί να μην είναι αξιόπιστα. Ωστόσο, η κανονικότητα δεν αποζητείται από τον έλεγχο του Wilcoxon και τους άλλους ελέγχους που βασίζονται στα κλιμακωτά δεδομένα, για να έχουν ασφαλή αποτελέσματα για το αν ο μέσος ενός κανονικού πληθυσμού είναι 0 ή εάν τα δυο δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό.

Επίσης, οι μη – παραμετρικές διαδικασίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δώσουν μια γρήγορη απάντηση με λίγους υπολογισμούς. Δυο από τις πιο απλές διαδικασίες είναι ο έλεγχος του Sign test και ο έλεγχος του μέσου. Ο έλεγχος του Sign test μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ζευγαρωτέ παρατηρήσεις για να ελέγξει την υπόθεση ότι οι διαφορές είναι ίσες ενώ ο έλεγχος του μέσου χρησιμοποιείται για να ελέγξει εάν τα δείγματα προέρχονται από τους ίδιους πληθυσμούς.

Οι μη – παραμετρικοί έλεγχοι έχουν κάποια αντικειμενικότητα, όταν δεν υπάρχει βαθύτερη κλιμάκωση για τα αρχικά δεδομένα. Υπάρχει μι αμφιβολία για τους παραμετρικούς ελέγχους όταν τα αποτελέσματα μπορούν να κατηγορηθούν για την ανεξαρτησία τους σχετικά με μια τεχνητή μέτρηση.

Οι έλεγχοι που χρησιμοποιούν κλιμακωτά δεδομένα έχουν το πλεονέκτημα ότι μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε πίνακες για ακριβείς κριτικές τιμές επειδή δεν υπάρχει σειρά στα δεδομένα. Η ίδια κριτική τιμή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για άλλες κατηγορίες δεδομένων με τον ίδιο αριθμό παρατηρήσεων, επειδή κάθε κατηγορία δεδομένων μπορεί να ταξινομηθεί σε κλίμακες από το 1 έως το μέγεθος του δείγματος.

Πολλές φορές τα δεδομένα δεν δημιουργούν ένα τυχαίο δείγμα από ένα μεγάλο πληθυσμό. Τα δεδομένα είναι αυτά που έχουμε. ΟΙ παραμετρικοί έλεγχοι βασίζονται στο ότι η δειγματοληψία από τα μεγάλα δείγματα δεν είναι αρκετά κατάλληλη. Επειδή δεν υπάρχουν μεγάλοι πληθυσμοί δεν υπάρχουν παράμετροι του πληθυσμού που να μπορούμε να εκτιμήσουμε. Ωστόσο, συγκεκριμένα είδη μη – παραμετρικών διαδικασιών μπορούν ν' αξιοποιηθούν σε αυτά τα δεδομένα χρησιμοποιώντας τυχαία μοντέλα.

Το μεγαλύτερο μειονέκτημα των μη – παραμετρικών ελέγχων βρίσκεται στο όνομα τους. Ονομάζονται έτσι επειδή δεν υπάρχουν παράμετροι για να περιγράψουν και γίνεται πιο δύσκολο να κάνουμε ποιοτικές προτάσεις σχετικά με την πραγματική διαφορά ανάμεσα στους πληθυσμούς. Για παράδειγμα όταν ο έλεγχος Sign test αναφέρει ότι δυο θεραπείες είναι διαφορετικές, δεν υπάρχει διάστημα εμπιστοσύνης και ο έλεγχος δεν αναφέρει σε τι διαφέρουν οι θεραπείες. Ωστόσο, μερικές φορές είναι πιθανό με το σωστό υλικό να υπολογίσουμε τις εκτιμήτριες για τους μέσους και τις διαφορές των μέσων. Παρόλα αυτά οι υπολογισμοί είναι πολύ μεγάλοι για να γίνουν στο χέρι.

Το δεύτερο σημαντικό μειονέκτημα των μη – παραμετρικών ελέγχων είναι ότι αφήνουν απέξω από την διαδικασία πληροφορίες. Ο έλεγχος Sign test, για παράδειγμα, χρησιμοποιεί μόνο τα πρόσημα των παρατηρήσεων. Η κλιμάκωση προστατεύει την πληροφορία σχετικά με τη σειρά των δεδομένων αλλά αλλοιώνει τις πραγματικές τιμές. Εξαιτίας αυτής τη αλλοίωσης των δεδομένων οι μη – παραμετρικές διαδικασίες δεν θα είναι ποτέ τόσο ισχυρές όσο οι παραμετρικές όταν αυτές θα μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Οι μη – παραμετρικές διαδικασίες αποτελούν από μόνες τους ένα πεδίο ειδίκευσης.

Ένας άλλος τρόπος σύγκρισης των παραμετρικών ελέγχων και των μη – παραμετρικών έχει να κάνει με την απλότητα κατασκευής, την ευκολία εφαρμογής, την ταχύτητα εφαρμογής, τα επίπεδα σημαντικότητας και την χρησιμότητα των μη παραμετρικών μεθόδων σε σχέση με των παραμετρικών.

Απλότητα κατασκευής: Τα περισσότερα μη παραμετρικά κριτήρια μπορούν να παραχθούν χρησιμοποιώντας απλούς συνδυαστικούς τύπους, ενώ η κατασκευή των παραμετρικών κριτηρίων απαιτεί περισσότερα μαθηματικά. Κατά τον Bradley, το γεγονός αυτό αποτελεί το σπουδαιότερο πλεονέκτημα των μη παραμετρικών κριτηρίων.

Ευκολία εφαρμογής: Οι μαθηματικές πράξεις που απαιτούνται για τον υπολογισμό των μη παραμετρικών διαδικασιών είναι γενικά λιγότερες παρά για τα αντίστοιχα παραμετρικά κριτήρια. Για τα κριτήρια ελεύθερων κατανομών συχνά απαιτείται μόνο αρίθμηση, πρόσθεση, ταξινόμηση.

Ταχύτητα εφαρμογής: Για μικρά δείγματα (μέγεθος δείγματος $n<30$) οι μη παραμετρικές διαδικασίες είναι γενικά ταχύτερες σε σχέση με τις παραμετρικές. Για μεγάλα όμως δείγματα τα μη παραμετρικά κριτήρια, ιδίως τα βαθμολογικά (rank test), απαιτούν περισσότερο χρόνο από τα παραμετρικά.

Επίπεδα σημαντικότητας: Η κατανομή των παραμετρικών κριτηρίων κάτω από τη μηδενική υπόθεση είναι συνήθως συνεχής οπότε μπορεί να βρει κανείς κάποια τιμή του κριτηρίου για την οποία η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι ακριβώς ίση με το καθορισμένο επίπεδο σημαντικότητας, έστω α. Αντίθετα η κατανομή των περισσότερων μη παραμετρικών κριτηρίων είναι διακριτή. Έτσι είτε πρέπει να επιλέγεται σαν επίπεδο σημαντικότητας μια από τις διακριτές αθροιστικές πιθανότητες του κριτηρίου, είτε πρέπει να εφαρμόζεται αυτό χρησιμοποιώντας σαν επίπεδο σημαντικότητας α μία αθροιστική πιθανότητα την οποία ποτέ δεν επιτυγχάνει το κριτήριο. Στην περίπτωση αυτή το μη παραμετρικό κριτήριο είναι συντηρητικό (conservative).

Χρησιμότητα των μη παραμετρικών μεθόδων: Σε πολλές περιπτώσεις η κατανομή του δειγματοληπτούμενου πληθυσμού παρεκλίνει τόσο πολύ από τη συμμετρία έτσι ώστε τα κλασικά κριτήρια να μην είναι τόσο ευσταθή. Αυτό συμβαίνει όταν τα μεγέθη των δειγμάτων των δύο πληθυσμών είτε δεν είναι ίσα είτε είναι αρκετά μικρά έτσι ώστε να μη μπορεί να εφαρμοστεί το κεντρικό οριακό θεώρημα που δικαιολογεί την κατά προσέγγιση κανονικότητα. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα των μη παραμετρικών μεθόδων είναι ότι μπορούν να εφαρμοστούν σε διατάξιμα δεδομένα ενώ οι παραμετρικές μέθοδοι προϋποθέτουν τις ίδιες τις μετρήσεις.

Έτσι μη παραμετρικά κριτήρια μπορούν να εφαρμοστούν σε πολλά πρακτικά προβλήματα με δεδομένα κατά κατηγορίες, δηλαδή οι παρατηρήσεις του δείγματος, είτε ποσοτικές είτε ποιοτικές, δεν υπάρχουν ξεχωριστά αλλά δίνονται μόνο με τη μορφή συχνοτήτων που αντιστοιχούν σε ορισμένες κατηγορίες. Τέλος, μερικές μη παραμετρικές μέθοδοι συχνά μπορούν να θεωρηθούν σαν προπαρασκευαστικές για αντίστοιχες παραμετρικές. Π.χ. ένα παραμετρικό κριτήριο που προϋποθέτει την κανονικότητα του δειγματοληπτούμενου πληθυσμού πρέπει να χρησιμοποιείται αφού προηγηθεί ένα μη παραμετρικό κριτήριο που ελέγχει κατά πόσο τα δεδομένα είναι δυνατό να προέρχονται από πληθυσμό που ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Ένας άλλος τρόπος σύγκρισης ανάμεσα στους παραμετρικούς και τους μη – παραμετρικούς ελέγχους είναι να γίνει μια σύγκριση ανάμεσα σε συγκεκριμένους ελέγχους.

Μια πρώτη σύγκριση θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί ανάμεσα στον έλεγχο ¨ two sample t – test ¨ και στον έλεγχο ¨ Mann – Whitney ¨. Ο πρώτος απαιτεί τρεις υποθέσεις : την κανονικότητα, ίσες διακυμάνσεις και ανεξαρτησία των δεδομένων. Ο δεύτερος δεν βασίζεται στην κανονικότητα αλλά πρέπει πρώτα να σιγουρέψουμε τις υποθέσεις για τις ίδιες διακυμάνσεις και την ανεξαρτησία. Επίσης, χρησιμοποιεί την εκτίμηση ότι, δηλαδή, μια τυχαία λήψη δεδομένου από τον πρώτο πληθυσμό έχει μεγαλύτερη τιμή από μια τυχαία λήψη από τον δεύτερο πληθυσμό. Αυτό μπορεί να είναι περισσότερο ή λιγότερο ενδιαφέρον από τον έλεγχο.

4.3.1 One or two sided P – value

Σε όλους τους ελέγχους πρέπει να διαλέξουμε πότε θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε one or two sided P – values. Θα εξετάσουμε τη διαφορά αυτή σ' έναν έλεγχο t – test . H P value (τιμή) υπολογίζεται για την μηδενική υπόθεση ότι δυο μέσοι των πληθυσμών είναι ίσοι και η διαφορά ανάμεσα στους μέσους των δυο δειγμάτων είναι τυχαία. Εάν ισχύει η μηδενική υπόθεση τότε ο μονόπλευρος έλεγχος είναι η πιθανότητα ότι οι μέσοι των δειγμάτων μπορεί να διαφέρουν όπως παρατηρήθηκε στην αρχή μόνο κατά τύχη, εφόσον οι μέσοι των πληθυσμών είναι πραγματικά ίσοι. H two – sided P value περιλαμβάνει τη πιθανότητα ότι ο μέσος του δείγματος μπορεί να διαφέρει ως προς την αντίθετη περίπτωση (π. χ η άλλη κατηγορία να έχει μεγαλύτερο μέσο) . H two sided P value είναι η διπλάσια της one sided P value. H one sided P value είναι κατάλληλη όταν ισχυριζόμαστε με βεβαιότητα ότι δεν υπάρχει διαφορά ανάμεσα στους μέσους ή ότι η διαφορά βρίσκεται σε περίπτωση που έχουμε εξακριβώσει από την αρχή (ότι δηλαδή κάποια κατηγορία έχει μεγαλύτερο μέσο). Εάν δεν μπορούμε να βρούμε με σιγουριά από που προέρχεται η διαφορά πριν συλλέξουμε τα δεδομένα τότε η two sided P value είναι η πιο κατάλληλη. Εάν επιλέξουμε one sided P value αυτό που πρέπει να κάνουμε πριν συλλέξουμε τα δεδομένα πρέπει πρώτα να θέσουμε τις υποθέσεις. Εάν τα δεδομένα πηγαίνουν σ' άλλη κατεύθυνση και υπάρχει έστω και μια μικρή αμφιβολία ότι τα δεδομένα ακολουθούν λάθος κατεύθυνση από τις υποθέσεις τότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το two sided P value, Ωστόσο, πρέπει πάντα υπολογίζουμε την two sided P value.

4.3.2. Paired or UN – paired test

Όταν χρησιμοποιούμε δυο ομάδες για να πραγματοποιήσουμε έναν έλεγχο πρέπει πρώτα να αποφασίσουμε εάν θα χρησιμοποιήσουμε ζευγαρωτές παρατηρήσεις. Όταν συγκρίνουμε τρεις ή και παραπάνω ομάδες δεν χρησιμοποιείται ποτέ ο όρος ζευγαρωτές παρατηρήσεις αλλά ο όρος επαναλαμβανόμενες μετρήσεις. Χρησιμοποιούμε un paired έλεγχο για να συγκρίνουμε ομάδες όταν οι αρχικές παρατηρήσεις δεν είναι ζευγαρωτές ή δεν ταιριάζουν μεταξύ επίσης. Διαλέγουμε ένα paired έλεγχο όταν οι τιμές παρουσιάζουν επαναλαμβανόμενες μετρήσεις σ' ένα θέμα ή μετρήσεις σε θέματα που ταιριάζουν μεταξύ επίσης. Οι ζευγαρωτές ή οι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις είναι επίσης κατάλληλες για επαναλαμβανόμενα εργαστηριακά πειράματα που διενεργούνται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Πρέπει να διαλέξουμε ένα paired έλεγχο όταν οι τιμές σε μια ομάδα έχουν πιο στενή με μια συγκεκριμένη τιμή από την άλλη ομάδα, από ότι με τυχαίες τιμές από την άλλη ομάδα. Είναι υποχρεωτικό να διαλέξουμε τον paired έλεγχο όταν τα αντικείμενα ταιριάζουν ή συσχετίζονται πριν συλλεχθούν τα δεδομένα. Δεν μπορούμε να βασιστούμε στα δεδομένα όταν αυτά έχουν αναλυθεί.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική:

1. Κιόχος Α. Πέτρος , 1993, Στατιστική , Εκδόσεις Interbooks
2. Καραγεώργος Λ. Δημήτρης, 2002 , Στατιστική περιγραφική και επαγωγική , Εκδόσεις Σαββάλας
3. Λιώκη. Λειβαδά. Ασημακόπουλος , 2004 , Εισαγωγή στην εφαρμοσμένη Στατιστική (τεύχος ΙΙ) , Εκδόσεις Συμμετρία
4. Φράγκος Κ. Χρήστος , 2002, Στατιστική επεξεργασία και ανάλυση δεδομένων με χρήση του Microsoft Excel, Εκδόσεις Σταμούλη Α.Ε
5. Χουβαρδάς Βασίλης , 1996, Στατιστική Επιχειρήσεων, Μακεδονικές Εκδόσεις

Ξενόγλωσση:

1. Leonard J. Kazmier, 1996 , Schaum's Outline of Business Statistics, McGraw – Hill Education- Europe
2. Amir D.Aczel. Jayavel, Sounderpandian, 2002 , Complete Business Statistics, McGraw – Hill Education – Europe
3. Gopal K. Kanji , 1999 , 100 Statistical Tests , Sae Publications Ltd.