ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΑΤΡΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΠΟΡΩΝ ΣΤΙΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΙΣ»

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΝΙΚΟΛΑΟΣ Α. ΚΑΝΑΒΟΣ

ΓΡΗΓΟΡΟΠΟΥΛΟΥ ΑΓΓΕΛΙΚΗ

ΘΩΜΟΠΟΥΛΟΥ ΒΑΣΙΛΙΚΗ

ΠΑΤΡΑ 2002

ΓΡΗΓΟΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΑΓΓΕΛΙΚΗ

ΘΩΜΟΠΟΥΛΟΥ
ΒΑΣΙΛΙΚΗ

«ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΠΟΡΩΝ ΣΤΙΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΙΣ»

ΠΑΤΡΑ 2002

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελ.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ....................3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ
ΔΟΙΚΗΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ - ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ
1.1 Διοικητική Επιστήμη....................4
1.2 Λήψη Αποφάσεων....................4
1.3 Συστήματα Παραγωγής....................6
1.4 Παράγοντες που επηρεάζουν τα Συστήματα Παραγωγής....................8
- Οι προβλέψεις....................8
- Τα συστήματα αποθεμάτων....................9
- Προγραμματισμός απαιτούμενων υλικών....................11
- Συγκεντρωτικός προγραμματισμός παραγωγής....................12
- Προγραμματισμός έργων....................13

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ
2.1 Επιχειρησιακή Έρευνα....................14
2.2 Συστήματα Ουρών Αναμονής....................15
2.3 Δυναμικός Προγραμματισμός....................16
2.4 Προσομοίωση....................16
2.5 Χρονικός Προγραμματισμός....................17
2.6 Γραμμικός Προγραμματισμός....................18

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ
Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ
3.1 Μαθηματικός Προγραμματισμός....................19
3.2 Γραμμικός Προγραμματισμός....................21
3.3 Διατύπωση Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού....................22
3.3.1 Η διαδικασία της διατύπωσης....................23
- Κατανόηση του προβλήματος....................23
- Ορίζοντας την αντικειμενική συνάρτηση....................24
- Ορίζοντας τους περιορισμούς....................24
- Εξετάζοντας τις προϋποθέσεις....................25
3.4 Γραφική Λύση....................28
3.5 Η Μέθοδος Simplex....................34
3.5.1 Αλγεβρικός προσδιορισμός λύσεων γραμμικού προγραμματισμού....................39
3.5.2 Προβλήματα ελαχιστοποίησης....................50
3.5.3 Προβλήματα με μη εφικτές λύσεις....................59

3.5.4 Προβλήματα με πολλαπλές βέλτιστες λύσεις.................61
3.5.5 Οικονομική ερμηνεία της τελικής λύσης.....................64
3.5.6 Ανάλυση ευαισθησίας...72
3.6 Χρήση του Η/Υ για Προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού....81
3.7 Το Δυαδικό ή το Δυικό Πρόβλημα.....................................84
3.8 Μεταφορά...87
3.9 Βορειοδυτικό Άκρο...91
3.9.1 Μέθοδος ελάχιστου σημείου......................................94
3.10 Χαρακτηριστικά Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού....96
3.11 Επεκτάσεις και Εφαρμογές του Γραμμικού Προγραμματισμού.....98

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

4.1 Εισαγωγή...99
4.2 Προγραμματισμός Ανθρώπινου Δυναμικού..........................99
4.3 Προγραμματισμός Λεωφορείων.......................................101
4.4 Διαφήμιση..100
4.5 Επενδύσεις...106

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

Η ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΧΝΙΔΙΩΝ ΚΑΙ Η ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

5.1 Η Θεωρία Παιχνιδιών...109
5.1.1 Η σχέση του γραμμικού προγραμματισμού με τη θεωρία παιχνιδιών..110
5.2 Η Θεωρία Αποφάσεων..111

ΕΠΙΛΟΓΟΣ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ...116

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ...118

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα από τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι επιχειρήσεις είναι και αυτό της δυσκολίας της κατανομής των περιορισμένων πόρων που έχουν στη διάθεσή τους. Για το λόγο αυτό επικαλείται τη διοικητική επιστήμη καθώς και την επιχειρησιακή έρευνα για να βοηθήσει. Πριν ανακαλυφθεί αυτή η επιστήμη, οι διαδικασίες γινόντουσαν από τις επιχειρήσεις με βάση τη τεχνολογία που είχαν στη διάθεσή τους. Τώρα όμως υπάρχει μία ολόκληρη επιστήμη την οποία επικαλούνται κάθε φορά που κρίνεται αναγκαίο.

Μία από τις μεθόδους της επιχειρησιακής έρευνας είναι και ο γραμμικός προγραμματισμός. Αποτελεί μία ειδική μορφή του μαθηματικού προγραμματισμού. Λέγοντας γραμμικό προγραμματισμό εννοούμε τη μαθηματική εκείνη μέθοδο που χρησιμοποιούμε για τη λύση προβλημάτων. Στα προβλήματα αυτά προσπαθούμε να βρούμε την άριστη χρησιμοποίηση των περιορισμένων πόρων μίας επιχείρησης έτσι ώστε να επιτύχουμε τη μεγιστοποίηση του κέρδους ή την ελαχιστοποίηση του κόστους.

Αρχικά ο προγραμματισμός χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση προβλημάτων στρατιωτικού προγραμματισμού, στη συνέχεια όμως επεκτάθηκε και σε βιομηχανικές και επιχειρησιακές δραστηριότητες. Ο γραμμικός προγραμματισμός έχει κάποιες μεθόδους για την επίλυση των προβλημάτων του, όπως η γραφική λύση, η μέθοδος Simplex, η μεταφορά κ.λπ.

Σε κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού υπάρχει μία γραμμική συνάρτηση που είναι το αντικείμενο της μεγιστοποίησης του κέρδους ή ελαχιστοποίησης του κόστους, η συνάρτηση αυτή λέγεται αντικειμενική συνάρτηση. Για την αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων ακολουθούμε δύο στάδια: α) κατασκευάζουμε το μαθηματικό μοντέλο και β) λύνουμε το πρόβλημα με μία από τις μεθόδους που υπάρχουν.

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός εφαρμόζεται σε προβλήματα παραγωγής, επενδύσεων, διατροφής, διαφήμισης, διοίκησης ανθρώπινου δυναμικού και γενικά σε όλα εκείνα τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν σε καθημερινή βάση οι επιχειρήσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1

ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

1.1 Διοικητική Επιστήμη

Οι συνεχείς τεχνολογικές και οικονομικές εξελίξεις και το ολοένα αυξανόμενο ανταγωνιστικό περιβάλλον καθιστούν αναγκαία την αύξηση της παραγωγικότητας οργανισμών και επιχειρήσεων για την επιβίωσή τους. Προϋπόθεση για την αύξηση της παραγωγικότητας και την ανάπτυξη της επιχείρησης είναι η λήψη σωστών αποφάσεων. Η Επιστήμη Αποφάσεων (Decision Science) μαζί με την Επιχειρησιακή Έρευνα (Operations Research) και την Διοικητική Επιστήμη (Management Science) συναποτελούν τον κλάδο εκείνο της Διοίκησης Επιχειρήσεων, που έχει ως αντικείμενο την επίλυση επιχειρησιακών προβλημάτων με ένα λογικό, επιστημονικό και συστηματικό τρόπο, καθώς και την ανάπτυξη αντίστοιχων μεθοδολογιών. Η Διοικητική Επιστήμη βασίζεται σε δύο θεμελιώδεις αρχές:

α) την χρήση επιστημονικών μεθόδων

β) την συστημική προσέγγιση

Με βάση τις δύο αυτές αρχές, η Ελληνική Εταιρία Διοίκησης Επιχειρήσεων, το 1972, καθόρισε την έννοια της Διοικητικής Επιστήμης ως την καθολική εκείνη λειτουργία, μέσω της οποίας επιτυγχάνεται ο αποτελεσματικότερος συνδυασμός των διαθεσίμων πόρων για την επίτευξη καθορισμένων στόχων.

1.2 Λήψη Αποφάσεων

Η πρακτική και η θεωρία του management έχει εξελιχθεί, ιδιαίτερα τα τελευταία 70 χρόνια, δίνοντας λύση σε ορισμένα επιχειρηματικά προβλήματα. Τέτοια προβλήματα αφορούν πολλές από τις δραστηριότητες μιας επιχείρησης και απαντούν σε κρίσιμες επιχειρηματικές ερωτήσεις, όπως: Ποιό είναι το αποδοτικότερο πρόγραμμα παραγωγής μιας βιομηχανίας; Ποιός ο βέλτιστος τρόπος χρησιμοποίησης των πόρων μιας επιχείρησης; Ποιά η οικονομικότερη πολιτική αποθεμάτων; Ποιός ο αποδοτικότερος τρόπος διαφήμισης; Ποιός ο προγραμματισμός της επιχείρησης; και άλλες παρόμοιες. Σε μια επιχείρηση ή έναν οργανισμό ο όρος προγραμματισμός περιλαμβάνει τη διαδικασία λήψης και υλοποίησης αποφάσεων, που θα οδηγούν στην επίτευξη ατομικών, ομαδικών και οργανωτικών στόχων. Η πολυδιάστατη φύση των επιχειρηματικών προβλημάτων, σε συνδυασμό με το διαρκώς μεταβαλλόμενο περιβάλλον, καθιστούν το έργο της λήψης αποφάσεων ιδιαίτερα πολύπλοκο και δύσκολο. Άλλωστε η λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων είναι μία από τις πιο βασικές λειτουργίες της Διοίκησης Επιχειρήσεων.

Η αντιμετώπιση ενός προβλήματος από τους υπεύθυνους λήψης αποφάσεων παριλαμβάνει συνήθως ορισμένα στάδια. Σαν **πρώτο στάδιο θεωρείται η αναγνώριση του γεγονότος ότι υπάρχει πρόβλημα και η περιγραφή του προβλήματος**. Η αναγνώριση του προβλήματος είναι σε πολλές περιπτώσεις το πιο σημαντικό αλλά και το πιο δύσκολο βήμα. Στην προσπάθειά της η Διοίκηση πρέπει να επικεντρωθεί σε ένα πρόβλημα ή μία ομάδα προβλημάτων, τα οποία μπορεί να τα καθορίσει και να τα περιγράψει με σαφήνεια καθορίζοντας συγχρόνως και τους στόχους της επιχείρησης με αντικειμενικό τρόπο. **Δεύτερο στάδιο είναι ο καθορισμός των παραμέτρων του προβλήματος**. Δηλαδή ο καθορισμός των παραγόντων εκείνων που επηρεάζουν την λύση του προβλήματος και οι οποίοι παράγοντες μπορούν να μεταβληθούν, ώστε να προκύψουν διαφορετικές εναλλακτικές λύσεις του προβλήματος. **Το τρίτο στάδιο της διαδικασίας λήψης αποφάσεων αναφέρεται στον εντοπισμό των περιορισμών του προβλήματος**. Οι υπεύθυνοι λήψης αποφάσεων πρέπει επίσης να αναγνωρίσουν και τους περιορισμούς μέσα στους οποίους οφείλουν να κινηθούν. *Για παράδειγμα, ο συνολικός προϋπολογισμός ενός νοσοκομείου είναι ένας περιορισμός στη διαδικασία λήψης αποφάσεων για αγορά νέου ιατρικού εξοπλισμού.*

Το επόμενο στάδιο είναι η αναζήτηση και η συστηματική ανάλυση των εναλλακτικών λύσεων. Η σύγκριση των εναλλακτικών λύσεων γίνεται για να επιλεγεί η «καλύτερη» ή η «βέλτιστη λύση». Βέβαια ο όρος «βέλτιστη λύση» πρέπει να συνδέεται με ένα προκαθορισμένο αντικειμενικό στόχο. Μόνο με τον καθορισμό ενός αντικειμενικού στόχου και με την ύπαρξη ποσοτικών κριτηρίων μέτρησης της απόδοσης κάθε εναλλακτικής λύσης σε σχέση με το στόχο, είναι δυνατή η σύγκριση των εναλλακτικών λύσεων κάθε προβλήματος, και ακολούθως ο εντοπισμός της βέλτιστης λύσης. Ακολουθεί **το στάδιο που αναφέρεται στην υλοποίηση της επιλεγείσας λύσης**. Έτσι λοιπόν, το τελευταίο βήμα της διαδικασίας είναι η υλοποίηση των λύσεων που προέκυψαν. Το στάδιο αυτό είναι τις περισσότερες φορές πιο δύσκολο από ότι αναμένεται. Η εμπειρία έχει δείξει ότι λάθος χειρισμοί στη φάση της υλοποίησης σωστών προτάσεων και επιλογών έχουν οδηγήσει την όλη προσπάθεια σε αποτυχία. Ακόμα και μετά την υλοποίηση της προτεινόμενης λύσης απαιτείται συνεχής παρακολούθηση και έλεγχος, ώστε να εντοπισθούν τυχόν αλλαγές και βελτιώσεις που μπορούν να γίνουν λόγω νέων δεδομένων, αλλαγών στις επιχειρηματικές παραμέτρους, νέων περιορισμών κ.ο.κ.

Η διοίκηση μιας επιχείρησης λαμβάνει πλήθος επιχειρηματικών αποφάσεων που καθορίζουν την δράση της, βραχυχρόνια ή μακροχρόνια και επηρεάζουν την επιτυχή ή όχι λειτουργία της επιχείρησης. Η λήψη των επιχειρηματικών αποφάσεων αποτελεί μια από τις σημαντικότερες δραστηριότητες στο πλαίσιο της διαδικασίας της διοίκησης.

1.3 Συστήματα Παραγωγής

Σήμερα η διαδικασία λήψης των επιχειρηματικών αποφάσεων διευκολύνει πολύ τη διοίκηση μιας επιχείρησης να επιλέξει το σύστημα παραγωγής. Εξάλλου η σωστή επιλογή του συστήματος παραγωγής θα οδηγήσει τα προβλήματα της επιχείρησης στη βέλτιστη λύση και η παραγωγή θα γίνει αποτελεσματικότερη. Η αποτελεσματικότητα της παραγωγής είναι ένα σχετικό μέγεθος και σημαίνει πόσο αποτελεσματικά χρησιμοποιούνται οι διαθέσιμοι πόροι (εισροές) για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος (εκροή). Η αποτελεσματικότητα αυτή του συστήματος παραγωγής αποτελεί ένα κοινό χαρακτηριστικό μεταξύ των ανεπτυγμένων και των υπό ανάπτυξη οικονομιών. Στις ανεπτυγμένες οικονομίες το σύστημα παραγωγής είναι έντασης κεφαλαίου, ενώ στις υπό ανάπτυξη οικονομίες το σύστημα παραγωγής είναι έντασης εργασίας. Και στις δύο, όμως, οικονομίες το σύστημα παραγωγής μπορεί να χαρακτηρίζεται αποτελεσματικό εάν - και μόνον εάν - ελαχιστοποιούν τους διαθέσιμους πόρους (εισροές) για την ίδια μονάδα προϊόντος (εκροή). Δηλαδή θα πρέπει να επιτυγχάνεται το ελάχιστο συνολικό κόστος (κεφάλαιο - εργασία - πρώτες ύλες) παραγωγής για την ίδια μονάδα προϊόντος. Και αυτό έχει πολύ μεγάλη σημασία και θα πρέπει να ληφθεί υπόψη κατά τη σχεδίαση, προγραμματισμό και έλεγχο ενός αποτελεσματικού συστήματος παραγωγής. Πιο συγκεκριμένα, κάθε σύστημα παραγωγής μετατρέπει μια δεδομένη ποσότητα από εισροές σε προκαθορισμένες ποσότητες εκροών. Οι εισροές μπορεί να αναφέρονται είτε σε «εργασία» είτε σε «πρώτες ύλες» είτε στο «κεφάλαιο» είτε σε «πληροφορίες». Η παραγωγική διαδικασία χαρακτηρίζεται από τη ροή υλικών ή πληροφοριών ή ανθρώπων.

Τα συστήματα παραγωγής διακρίνονται, με βάση τη χρησιμοποιούμενη μέθοδο παραγωγής, σε:

α) συνεχούς παραγωγής (continuous process or flow shop),

β) διαλειπομένης παραγωγής (intermittent process or job shop), γ) κατασκευής έργου (project shop)

Όσον αφορά την πρώτη κατηγορία, δηλαδή **τα συστήματα συνεχούς ροής**, η παραγωγή εξειδικεύεται σε ένα περιορισμένο αριθμό τυποποιημένων προϊόντων, που παράγονται σε αντίστοιχες γραμμές παραγωγής και προορίζονται για ευρεία κατανάλωση. Στα συστήματα αυτά η ροή του προϊόντος σε κάθε γραμμή είναι ίδια για κάθε κομμάτι. Ο παραγωγικός εξοπλισμός οργανώνεται χωροταξικά σε γραμμική διάταξη και είναι ειδικής χρήσης, με μεγάλο βαθμό αυτοματοποίησης. Στην κατηγορία αυτή ανήκει και η περίπτωση όπου το σύστημα συμπεριφέρεται σαν μια μηχανή, όπου οι εισροές μετασχηματίζονται σε ένα ή περισσότερα προϊόντα (π.χ. μια μονάδα παραγωγής τσιμέντου).

Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει **τα συστήματα διαλειπομένης παραγωγής ή κατά παραγγελία**, που παράγουν μεγάλη ποικιλία προϊόντων σε μικρές ποσότητες και με προδιαγραφές που ορίζονται από τον πελάτη, ο οποίος αναθέτει στο σύστημα την παραγωγή ενός αριθμού ίδιων προϊόντων (παραγγελία ή εργασία). Η ροή του προϊόντος στα συστήματα αυτά είναι διαφορετική για κάθε παραγγελία (παρτίδα παραγωγής). Η χωροταξική διάταξη είναι λειτουργική, δηλαδή ο παραγωγικός εξοπλισμός, που είναι γενικής χρήσης με γενικά περιορισμένο βαθμό αυτοματοποίησης, διατάσσεται σε ομάδες παραγωγικών μονάδων που εκτελούν την ίδια λειτουργία (π.χ. χωριστά οι τόρνοι, χωριστά οι πρέσσες κ.ο.κ.).

Αντίθετα **τα συστήματα κατασκευής έργων**, τα οποία ανήκουν στην τρίτη κατηγορία των συστημάτων παραγωγής, παράγουν συνήθως ένα προϊόν μεγάλου μεγέθους και αξίας, που προορίζεται για ένα πελάτη. Στα συστήματα αυτά ο παραγωγικός εξοπλισμός, που χαρακτηρίζεται από μικρό βαθμό αυτοματοποίησης, διατάσσεται γύρω από το προϊόν.

Εκτός από τις παραπάνω βασικές κατηγορίες υπάρχουν και άλλες μικρότερες, όπως **τα συστήματα με κύτταρα παραγωγής** (production cells). Η κατηγορία αυτή συνδυάζει τα πλεονεκτήματα των δύο πρώτων κατηγοριών. Η παραγωγή στα συστήματα αυτά πραγματοποιείται σε «κύτταρα», όπου παράγονται τα προϊόντα ομαδοποιημένα ανάλογα με τις ανάγκες τους σε πρώτες και βοηθητικές ύλες, σε μηχανές και ιδιοσυσκευές και σε εξειδικευμένο προσωπικό, καθώς και ανάλογα με τις διαδικασίες προετοιμασίας και ρύθμισης μηχανών και τη σειρά των απαιτούμενων επεξεργασιών.

Επίσης μια ενδιάμεση κατηγορία συστημάτων είναι **τα συστήματα παραγωγής σε παρτίδες** (batch - shop), που έχουν χαρακτηριστικά συστημάτων τόσο συνεχούς ροής όσο και παραγωγής κατά παραγγελία. Τα συστήματα αυτά συναντώνται συχνά στην πράξη και αφορούν παραγωγή αποθηκεύσιμων προϊόντων, που παράγονται με κοινό παραγωγικό εξοπλισμό (π.χ. βιομηχανίες ποτών, επίπλων). Για την μείωση των αποθεμάτων, η ετήσια ποσότητα που πρέπει να παραχθεί από κάθε προϊόν διαιρείται σε παρτίδες. Έτσι τα διάφορα προϊόντα του συστήματος παράγονται σε παρτίδες, οι οποίες διαδέχονται η μία την άλλη, σε ένα κύκλο που επαναλαμβάνεται αρκετές φορές στη διάρκεια του έτους.

Ειδικότερα τα θέματα που αναπτύσσονται και αφορούν τους παραπάνω τύπους παραγωγικών συστημάτων είναι οι προβλέψεις και οι μέθοδοι προβλέψεων, τα συστήματα αποθεμάτων, τα συστήματα προγραμματισμού, ο προγραμματισμός απαιτούμενων υλικών και ο προγραμματισμός έργων.

1.4 Παράγοντες που επηρεάζουν τα συστήματα παραγωγής

α) Οι Προβλέψεις

Για να είναι περισσότερο αποτελεσματική η λειτουργία του συστήματος παραγωγής, θα πρέπει να είναι αξιόπιστες οι σχετικές προβλέψεις, δηλαδή οι μέθοδοι και οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την διενέργεια εκτιμήσεων. Πολλές είναι οι μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί για την διενέργεια προβλέψεων και χρησιμοποιούνται για την λήψη αποφάσεων σε ποικίλες συνθήκες. Η επιλογή της κατάλληλης κάθε φορά μεθόδου, η εγκατάσταση και η χρήση της και η ερμηνεία των αποτελεσμάτων της είναι μερικά από τα προβλήματα που αντιμετωπίζονται στην πρακτική αξιοποίηση των μεθόδων αυτών. Ο βασικός παράγοντας που καθορίζει την επιλογή της μεθόδου προβλέψεων είναι το είδος των αποφάσεων που θα ληφθούν βάσει των προβλέψεων που θα προκύψουν.

Έτσι στο χώρο των προβλέψεων, οι μέθοδοι, που έχουν αναπτυχθεί και χρησιμοποιούνται στη λήψη αποφάσεων και στη διοίκηση παραγωγικών συστημάτων, διακρίνονται σε τρείς γενικές κατηγορίες:

α) <u>Μέθοδοι προεκβολής ή μέθοδοι χρονοσειρών.</u> Στις μεθόδους αυτές χρησιμοποιούνται στοιχεία από το παρελθόν για να γίνει πρόβλεψη για το μέλλον. Στόχος είναι να αναγνωριστεί ο τρόπος, με τον οποίο οι τιμές μιας μεταβλητής διαμορφώθηκαν στο παρελθόν, και να προβληθεί αυτός στο μέλλον. Εφόσον ο χρονικός ορίζοντας της πρόβλεψης είναι μικρός, αυτές οι μέθοδοι δίνουν συχνά αρκετά αξιόπιστα αποτελέσματα.

β) <u>Αιτιακές μέθοδοι.</u> Εδώ οι προβλέψεις βασίζονται στην υπόθεση ότι η προς πρόβλεψη μεταβλητή (π.χ. η ζήτηση για ένα προϊόν) είναι συνάρτηση ενός ή περισσότερων ανεξάρτητων παραγόντων (τιμή, διαφήμιση, διαθέσιμο εισόδημα κ.ο.κ.). Επιδιώκεται να προσδιοριστεί η σχέση ανάμεσα στην εξαρτημένη μεταβλητή και στους ανεξάρτητους παράγοντες. Βάσει αυτής της σχέσης οι μελλοντικές τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής μπορούν να προβλεφθούν, αν υπάρχουν προβλέψεις για τις μελλοντικές τιμές των ανεξάρτητων παραγόντων.

γ) Ποιοτικές μέθοδοι ή μέθοδοι κρίσης. Βασίζονται στις υποκειμενικές εκτιμήσεις των ατόμων, συνήθως ειδικών και στον συνδυασμό ποιοτικών και ποσοτικών στοιχείων. Εφαρμόζονται για προβλέψεις μελλοντικών εξελίξεων στην τεχνολογία, τις αγορές αγαθών κλπ.

Στον προγραμματισμό και στον έλεγχο της παραγωγής οι αποφάσεις που παίρνονται μπορεί να αφορούν διαφορετικούς χρονικούς ορίζοντες, οπότε χρησιμοποιούνται συνήθως διαφορετικές μέθοδοι προβλέψεων. Γενικά οι αποφάσεις που παίρνονται μπορούν να καταταχθούν σε τρεις κατηγορίες, ανάλογα με τον χρονικό ορίζοντα που αυτές αναφέρονται και τις επιπτώσεις που μπορούν να έχουν στο σύστημα (π.χ. στο ύψος των πόρων που δεσμεύονται). Έτσι οι αποφάσεις μπορεί να χαρακτηρίζονται ως ***βραχυπρόθεσμες*** (για ενέργειες που επηρεάζουν το παρόν και άμεσο μέλλον), ως ***μεσοπρόθεσμες*** (για ζητήματα που αφορούν τους επόμενους 6 - 12 μήνες) και ως ***μακροπρόθεσμες*** (για ζητήματα που έχουν να κάνουν με τα επόμενα 5 - 10 χρόνια).

Η αξιοπιστία μιας μεθόδου πρόβλεψης μπορεί να εκτιμηθεί βάσει των αποκλίσεων που εμφανίζονται μεταξύ των προβλέψεων που παράγει αυτή και των τιμών της μεταβλητής που διαμορφώνονται στην πράξη. Με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή στην βάση αυτών των αποκλίσεων, μπορεί να συγκριθεί αυτή η αξιοπιστία και η αποτελεσματικότητα διαφορετικών μεθόδων.

β) Τα Συστήματα Αποθεμάτων

Βασικό χαρακτηριστικό των συστημάτων παραγωγής τύπου flow - shop (συνεχούς παραγωγής) είναι η δημιουργία αποθεμάτων. Αυτή μπορεί να είναι είτε σχεδιασμένη (όπως στην περίπτωση συστημάτων με περιορισμένη δυναμικότητα που αποθεματοποιούν έτοιμα προϊόντα στην περίοδο χαμηλής ζήτησης για να μπορέσουν να ανταποκριθούν στην περίοδο υψηλής ζήτησης), είτε αποτέλεσμα διαφόρων παραγόντων (όπως είναι π.χ. η ύπαρξη ενός σημείου μποτιλιαρίσματος σε μια γραμμή παραγωγής, ο κακός προγραμματισμός της παραγωγής ή κάποια έκτακτα φαινόμενα). Αποθέματα μπορούν να δημιουργούνται και στην περίπτωση συστημάτων που παράγουν υπηρεσίες, όταν διατίθεται κατάλληλη τεχνολογία, όπως στην περίπτωση ενός προγράμματος λογισμικού που αποθηκεύεται σε δισκέτα ή ενός ψυχαγωγικού προγράμματος που αποθηκεύεται σε βιντεοκασσέτα.

Η διαχείριση των αποθεμάτων πρώτων υλών, ενδιάμεσων και τελικών προϊόντων, αποτελεί σημαντική λειτουργία σε ένα παραγωγικό σύστημα για πολλούς λόγους. Από τη μια μεριά, τα αποθέματα δεσμεύουν ένα μεγάλο ποσοστό του κεφαλαίου κίνησης των επιχειρήσεων. Επίσης δεσμεύουν ένα σημαντικό μέρος του διατιθέμενου χώρου σε μια επιχείρηση, ενώ η προμήθεια, φύλαξη, συντήρηση, ασφάλιση και, γενικά, διαχείριση των αποθεμάτων κοστίζουν. Από την άλλη μεριά, με την διατήρηση αποθεμάτων τελικών προϊόντων μπορεί να αποσυνδεθεί το παραγωγικό σύστημα από τις διακυμάνσεις της ζήτησης, αφού μια αύξηση της ζήτησης σε κάποια περίοδο θα μπορεί να αντιμετωπιστεί με υπάρχοντα αποθέματα, χωρίς δηλαδή αντίστοιχη αύξηση της παραγωγής την περίοδο αυτή. Η ύπαρξη επαρκών πρώτων υλών και ενδιάμεσων αποθεμάτων, άλλωστε, εξασφαλίζει τη συνεχή, χωρίς διακοπές, τροφοδότηση του παραγωγικού συστήματος, τη διατήρηση της ομαλής ροής της παραγωγής, την ανεξάρτητη λειτουργία μεταξύ των παραγωγικών σταδίων, την αύξηση του ρυθμού παραγωγής και την ελάττωση του βιομηχανικού κόστους. Ακόμα, με την αξιοποίηση των εκπτώσεων, μέσω της αποθεματοποίησης πρώτων υλών, επιτυγχάνεται μείωση του κόστους τους. Γενικά, το πρόβλημα της διαχείρισης των αποθεμάτων μπορεί να οριστεί:

Ως πρόβλημα εξισορρόπησης, συνήθως μέσα σε συνθήκες αβεβαιότητας, μεταξύ του κόστους έλλειψης και του κόστους πλεονάσματος αποθεμάτων πρώτων υλών, ενδιάμεσων και τελικών προϊόντων ενός παραγωγικού συστήματος.

Ένα αποτελεσματικό σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων συνεπάγεται εξοικονόμηση πόρων για την επιχείρηση (μικρότερο κόστος προμήθειας, μεγαλύτερα διαθέσιμα κεφάλαια κίνησης, χαμηλότερες δαπάνες για εργατικά, μεταφορικά, έξοδα διαδικασίας προμήθειας κλπ.), καλύτερη διανομή προϊόντων και ταχύτερη εξυπηρέτηση του πελάτη.

Εξαιτίας της σημασίας της λειτουργίας της διαχείρισης αποθεμάτων, έχουν αναπτυχθεί τεχνικές και συστήματα που αξιοποιούν τις δυνατότητες που παρέχει η Επιχειρησιακή Έρευνα και η Πληροφορική, ενώ η λειτουργία αυτή συγκεντρώνει την προσοχή των σύγχρονων συστημάτων διοίκησης. Στα πλαίσια της Επιχειρησιακής Έρευνας έχει αναπτυχθεί η *Θεωρία των Αποθεμάτων*, που εξετάζει συστηματικά τα σχετικά προβλήματα που συνδέονται με τη δημιουργία και την διαχείριση των αποθεμάτων, ενώ διατίθενται σχετικά συστήματα λογισμικού που βοηθούν στη συστηματική παρακολούθηση και τον έλεγχο των αποθεμάτων.

Τα αποθέματα μπορούν να ταξινομηθούν με κριτήριο την **επαναληπτικότητα** της παραγγελίας αναπλήρωσής τους, δηλαδή ανάλογα με το αν η παραγγελία γίνεται μία φορά (μεμονωμένη παραγγελία) ή επαναλαμβάνεται τακτικά (επαναλαμβανόμενη παραγγελία). Επίσης, με κριτήριο την **πηγή προμήθειας**, ανάλογα με το αν το είδος παραγγέλεται σε εξωτερικό προμηθευτή (π.χ. πρώτη ύλη ή εφόδια) ή παράγεται από την ίδια την επιχείρηση (ενδιάμεσα ή τελικά προϊόντα). Ένα άλλο κριτήριο είναι **η μορφή της μελλοντικής ζήτησης** ή ανάλωση του αποθέματος, σύμφωνα με το οποίο η ζήτηση, για ένα συγκεκριμένο είδος που έχει αποθεματοποιηθεί, χαρακηρίζεται ως σταθερή ή μεταβαλλόμενη (π.χ. λόγω τυχαίων διακυμάνσεων, τάσης ή εποχικότητας). Στην περίπτωση επαναλαμβανόμενων παραγγελιών, τα κυριότερα συστήματα διαχείρισης αποθεμάτων είναι:

- το σύστημα σταθερής ποσότητας παραγγελίας (ή σύστημα συνεχούς παρακολούθησης αποθέματος),
- το σύστημα σταθερής περιόδου παραγγελίας (ή σύστημα περιοδικής παρακολούθησης αποθέματος),
- το (μικτό) σύστημα επιλεκτικής αναπλήρωσης και
- το σύστημα προγραμματισμού απαιτούμενων υλικών.

γ) Προγραμματισμός Απαιτούμενων Υλικών

Τα συστήματα προγραμματισμού απαιτούμενων υλικών αφορούν τη διαχείριση υλικών που αποτελούν εξαρτήματα και, γενικά, πρώτη ύλη για την παραγωγή των τελικών προϊόντων ενός παραγωγικού συστήματος. Τέτοια υλικά συχνά αποτελούν το τελικό προϊόν ενός άλλου συστήματος. *Για παράδειγμα, το ύφασμα που αποτελεί πρώτη ύλη σε μια βιομηχανία ενδυμάτων, είναι τελικό προϊόν μιας υφαντουργίας.* Τα συστήματα προγραμματισμού απαιτούμενων υλικών αφορούν τη διαχείριση υλικών που είναι απαραίτητα για την εκτέλεση του προγράμματος παραγωγής και είτε παραγγέλονται σε εξωτερικούς προμηθευτές, είτε κατασκευάζονται από το ίδιο το παραγωγικό σύστημα. Ο προγραμματισμός τους, δηλαδή ο καθορισμός των ποσοτήτων και του χρόνου που πρέπει να είναι διαθέσιμες, στηρίζεται στις απαιτήσεις για υλικά, που καθορίζει συγκεκριμένα το πρόγραμμα παραγωγής, και όχι σε προβλέψεις. Γνωρίζοντας, δηλαδή, το πρόγραμμα παραγωγής μπορούν να καθοριστούν με ακρίβεια οι ποσότητες των πρώτων υλών, των υλικών, των εξαρτημάτων κλπ. που θα απαιτηθούν, καθώς και τις αντίστοιχες χρονικές περιόδους. Από αυτό συνεπάγεται ότι δεν τίθεται ζήτημα ύπαρξης αποθεμάτων ασφαλείας γι' αυτά τα υλικά, αφού η ζήτησή τους δεν χαρακτηρίζεται από τυχαιότητα. Η τυχαιότητα επεμβαίνει με διάφορους τρόπους, όπως ως αβεβαιότητα για το χρόνο παράδοσης μιας παρτίδας εξαρτημάτων, με συνέπεια να είναι απαραίτητη η διατήρηση αποθεμάτων ασφαλείας.

Ο στόχος των συστημάτων προγραμματισμού απαιτούμενων υλικών είναι η εξασφάλιση των ποσοτήτων των απαιτούμενων υλικών, ώστε να είναι διαθέσιμα στους χρόνους που χρειάζονται χωρίς να δημιουργούνται καταστάσεις υποαποθέματος, οπότε υπάρχει κίνδυνος να διακοπεί η παραγωγική διαδικασία. Παράλληλα πρέπει να αποφεύγεται η δημιουργία υπεραποθέματος, αφού συνεπάγεται δέσμευση κεφαλαίων, δαπάνες αποθήκευσης κλπ. Ένα τέτοιο σύστημα πρέπει να δίνει απάντηση στα ερωτήματα «πόσο να παραγγελθεί» και «πότε να παραγγελθεί» για κάθε υλικό που χρησιμοποιείται ως εισροή στην παραγωγική διαδικασία. Ο προγραμματισμός απαιτούμενων υλικών αποτελεί μια διοικητική λειτουργία, που εντάσσεται στη συνολική διαδικασία προγραμματισμού της παραγωγής.

δ) Συγκεντρωτικός Προγραμματισμός Παραγωγής

Ο Συγκεντρωτικός Προγραμματισμός Παραγωγής είναι η δραστηριότητα, με την οποία καθορίζεται το πρόγραμμα (πλάνο) της παραγωγής συγκεντρωτικά, δηλαδή για το σύνολο των προϊόντων ενός παραγωγικού συστήματος. Το συγκεντρωτικό πρόγραμμα παραγωγής περιλαμβάνει τις μεσοπρόθεσμες αποφάσεις της διοίκησης για τις τιμές των βασικών μεγεθών της παραγωγής. Τα μεγέθη αυτά είναι το συνολικό ύψος της παραγωγής, της απασχόλησης και των αποθεμάτων, συνήθως σε μηνιαία βάση, που τίθενται ως στόχοι για ένα μεσοπρόθεσμο ορίζοντα προγραμματισμού. Στο συγκεντρωτικό πρόγραμμα παραγωγής η διοίκηση του συστήματος καθορίζει πώς θα διατεθούν συνολικά οι πόροι του συστήματος στην παραγωγική λειτουργία.

Ο προγραμματισμός για μία μόνο περίοδο κάθε φορά, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι συνέπειες που έχουν οι αποφάσεις για αυτή την περίοδο πάνω στις άλλες περιόδους μέσα στον ορίζοντα προγραμματισμού, δεν οδηγεί στις καλύτερες αποφάσεις. Ο συγκεντρωτικός προγραμματισμός της παραγωγής γίνεται λαμβάνοντας υπόψη τα δεδομένα του συνόλου των περιόδων μέσα στον ορίζοντα προγραμματισμού.

Τα δεδομένα που απαιτούνται για την κατάρτιση του συγκεντρωτικού προγράμματος παραγωγής είναι η δυναμικότητα του συστήματος, η προβλεπόμενη ζήτηση στον ορίζοντα προγραμματισμού για κάθε περίοδο, τα υπάρχοντα αποθέματα και οι γενικοί στόχοι και κριτήρια προγραμματισμού που θέτει η διοίκηση. Απαραίτητη είναι και η γνώση των στοιχείων που αφορούν κυρίως το κόστος της παραγωγής, όπως το κόστος εργασίας για κανονικό χρόνο και υπερωρίες, το κόστος αποθεματοποίησης, το κόστος υποαποθέματος, το μεταβλητό κόστος της παραγωγής πλην μισθοδοσίας, το κόστος μεταβολών στο επίπεδο απασχόλησης κ.λπ. Με βάση αυτά τα δεδομένα μπορούν να διαμορφωθούν πολλά εναλλακτικά συγκεντρωτικά προγράμματα παραγωγής. Είναι φανερό ότι το συγκεντρωτικό πρόγραμμα παραγωγής αποτελεί το πλαίσιο, μέσα στο οποίο οργανώνεται και αναπτύσσεται η παραγωγική δραστηριότητα ενός συστήματος.

ε) Προγραμματισμός Έργων

Χαρακτηριστικό των συστημάτων αυτών είναι ότι παράγουν συνήθως ένα προϊόν μεγάλου μεγέθους και αξίας, που προορίζεται για ένα πελάτη, ενώ ο παραγωγικός εξοπλισμός τους χαρακτηρίζεται από μικρό βαθμό αυτοματοποίησης και κατά την παραγωγή διατάσσεται γύρω από το προϊόν. *Παραδείγματα τέτοιων συστημάτων είναι τεχνικές εταιρίες, που κατασκευάζουν δομικά έργα όπως κτίρια, λιμάνια, γέφυρες, ή κατασκευαστικές εταιρίες, που παράγουν μεγάλες μεταλλικές κατασκευές όπως πλοία, αεροσκάφη κ.λπ.*

Τα προβλήματα προγραμματισμού και οργάνωσης της εκτέλεσης ενός έργου προκύπτουν κυρίως από το μεγάλο πλήθος των επιμέρους δραστηριοτήτων, από την εκτέλεση των οποίων εξαρτάται η ολοκλήρωσή του. Οι δραστηριότητες αυτές συνδέονται μεταξύ τους με τεχνολογικές, φυσικές, οικονομικές ή άλλες σχέσεις προτεραιότητας, δηλαδή ποιό προηγείται και ποιό έπεται, ενώ υπόκεινται σε διάφορους περιορισμούς, π.χ. λόγω διαθέσιμων πόρων ή υπάρχοντος θεσμικού πλαισίου, που πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά τον προγραμματισμό τους. Τα παραπάνω προβλήματα αποκτούν ιδιαίτερη σημασία λόγω της κλίμακας των έργων, του κόστους κατασκευής τους, του ρόλου τους στην οικονομική και κοινωνική ζωή κ.λπ. Το ζητούμενο σε τέτοια προβλήματα είναι είτε η ελαχιστοποίηση του συνολικού χρόνου εκτέλεσης του έργου, είτε η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους, είτε η ελαχιστοποίηση του κόστους για ένα δεδομένο ολικό χρόνο, είτε η ελαχιστοποίηση του χρόνου εκτέλεσης για ένα δεδομένο κόστος, είτε τέλος η ελαχιστοποίηση των πόρων που αδρανούν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

2

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

2.1Επιχειρησιακή Έρευνα

Για να επιτευχθεί εντυπωσιακή βελτίωση του βαθμού παραγωγικότητας που αποτελεί κεντρικό στόχο κάθε οργανισμού ή επιχείρησης ιδιωτικής ή κρατικής, κερδοσκοπικής ή μη γίνεται με την εφαρμογή των σύγχρονων μεθόδων επιχειρησιακής έρευνας.

Η επιχειρησιακή έρευνα μπορεί να οριστεί ως η εφαρμογή σύγχρονων μεθόδων λήψης αποφάσεων επιστημονικά θεμελιωμένων, οι οποίες σκοπό έχουν την πιο αποτελεσματική χρησιμοποίηση των υπαρχόντων οικονομικών πόρων σε τεχνολογία, κεφαλαιακό εξοπλισμό και ανθρώπινο δυναμικό με βάση αντικειμενικά προκαθορισμένους στόχους.

Πριν από την εμφάνιση της επιχειρησιακής έρευνας η βελτίωση της παραγωγικότητας προερχόταν αποκλειστικά από τη χρησιμοποίηση προηγμένης τεχνολογίας.

Ιστορικά πρωτοεμφανίζεται στις αρχές του Β΄ Παγκοσμίου Πολέμου και προήλθε από την ανάγκη επίλυσης επιχειρησιακών προβλημάτων στις ένοπλες δυνάμεις της Μεγάλης Βρετανίας με επιστημονικές μεθόδους. Για την επίλυση των προβλημάτων αυτών αναπτύχθηκαν συγκεκριμένα μαθηματικά μοντέλα τα οποία μπορούσαν να επιλυθούν με εφαρμογή μαθηματικών μεθόδων, με στόχο τον προσδιορισμό της βέλτιστης κατανομής πόρων, τον έλεγχο των στρατιωτικών αποθεμάτων κ.λπ. Οι επιστημονικές αυτές μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων γνώρισαν και γνωρίζουν μια χωρίς προηγούμενο ανάπτυξη και η εφαρμογή τους επεκτείνεται καθημερινά και σε περισσότερες επιστημονικές περιοχές. Μεταξύ των περιοχών που η επιχειρησιακή έρευνα βρίσκει περισσότερες εφαρμογές είναι η παραγωγή, μεταφορές, μάρκετινγκ χωροθέτηση, υγεία, εκπαίδευση, προστασία περιβάλλοντος κ.λπ. Υπάρχουν διάφορες μεθοδολογίες για την αντιμετώπιση των επιχειρησιακών προβλημάτων, όπως τα συστήματα ουρών αναμονής, ο δυναμικός προγραμματισμός, η προσομείωση, ο χρονικός προγραμματισμός, ο γραμμικός προγραμματισμός κ.λπ. Παρακάτω θα δούμε αναλυτικά την έννοια των μεθόδων.

2.2 Συστήματα Ουρών Αναμονής

Η μελέτη των ουρών αναμονής είναι ένας από τους πρώτους κλάδους της επιχειρησιακής έρευνας που αναπτύχθηκαν, και έχει ένα ευρύ πεδίο εφαρμογών σε προβλήματα που συναντούμε καθημερινά.

Δημιουργείται όταν η τρέχουσα ζήτηση για μια εξυπηρέτηση είναι μεγαλύτερη από την δυνατότητα που έχει το σύστημα να παρέχει αυτή την εξυπηρέτηση. Η ύπαρξη στο σύστημα μεγαλύτερης δυναμικότητας από αυτή που χρειάζεται, θα έχει ως αποτέλεσμα μεγαλύτερο κόστος. Αν όμως είναι μικρότερη θα δημιουργηθεί συνωστισμός και η ουρά θα μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου. Κόστος δημιουργείται και με την ύπαρξη της ουράς όπως π.χ. κοινωνικό κόστος, κόστος διαρροής πελατών, κόστος αχρησιμοποίητων πόρων. Σκοπός λοιπόν είναι να βρεθεί μια οικονομική ισορροπία μεταξύ του κόστους εξυπηρέτησης και του κόστους που συνδέεται με την αναμονή για αυτή την εξυπηρέτηση. Πολλές από τις καθημερινές μας αποφάσεις επηρεάζονται από τη λειτουργία συστημάτων ουρών αναμονής.

Μερικά παραδείγματα ουρών αναμονής είναι:

- *Στα ταμεία των σούπερ μάρκετ, τραπεζών καθώς και σε υπηρεσίες εξυπηρέτησης κοινού*
- *Στα νοσοκομεία όπου οι ασθενείς αναμένουν την εισαγωγή τους για επεμβάσεις ή νοσηλεία*
- *Σε μια βιομηχανία όπου μηχανήματα που έχουν υποστεί βλάβη αναμένουν το συνεργείο επισκευής να τα επισκευάσει και να τα θέσει σε λειτουργία.*

Τα βασικά χαρακτηριστικά που διακρίνουμε σε ένα σύστημα ουράς αναμονής είναι: α) οι αφίξεις των πελατών στο σύστημα, β) οι πελάτες στην ουρά, γ) η εξυπηρέτηση των πελατών και τέλος δ) οι αναχωρήσεις των πελατών από το σύστημα.

Σε πολλές περιπτώσεις μας ενδιαφέρει η καλή λειτουργία μονάδων εξυπηρέτησης. Όσο αυξάνεται ο χρόνος εξυπηρέτησης τόσο ο χρόνος αναμονής ελαττώνεται. Τα μοντέλα ουρών αναμονής επιτρέπουν την ανάλυση παρόμοιων καταστάσεων έτσι ώστε λαμβάνοντας υπόψη το κόστος εξυπηρέτησης και το κόστος αναμονής να προσδιορισθεί ένα βέλτιστο επίπεδο εξυπηρέτησης.

Στη σημερινή κοινωνία παρατηρείται μεγάλη ανάπτυξη των συστημάτων ουρών αναμονής. Η μελέτη των συστημάτων αυτών έχει μεγάλη επίδραση τόσο στην ποιότητα ζωής όσο και στην παραγωγικότητα.

Εξετάζοντας τα συστήματα ουρών αναμονής διαμορφώνονται πρότυπα για τη λειτουργία τους και τα πρότυπα αυτά χρησιμοποιούνται για να προσδιοριστούν οι δείκτες της απόδοσης. Αυτό παρέχει σημαντική πληροφόρηση για την αποτελεσματική σχεδίαση των συστημάτων ουρών αναμονής, έτσι ώστε να υπάρχει μια εξισορρόπηση μεταξύ του κόστους για την παροχή της εξυπηρέτησης και του κόστους αναμονής για την εξυπηρέτηση αυτή.

2.3 Δυναμικός Προγραμματισμός

Ο δυναμικός προγραμματισμός περιλαμβάνει μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό μιας στρατηγικής που αποτελείται από μία σειρά αλληλοδιαδοχικών αποφάσεων, και που το αποτέλεσμα της κάθε μίας επηρεάζει τις επιλογές που θα γίνουν στις επόμενες φάσεις.

Στο δυναμικό προγραμματισμό δεν υπάρχει ούτε συγκεκριμένος τρόπος διατύπωσης ούτε και συγκεκριμένος τρόπος επίλυσης των αντίστοιχων προβλημάτων. Σχεδόν σε κάθε περίπτωση εφαρμογής της μεθοδολογίας δυναμικού προγραμματισμού απαιτείται ιδιαίτερη διατύπωση και προσέγγιση.

Στο δυναμικό προγραμματισμό έχουμε τη δυνατότητα επίλυσης του προβλήματος σε διαδοχικά στάδια. Σε κάθε στάδιο έχουμε την επιλογή μίας απόφασης μέσα από ένα δεδομένο σύνολο εναλλακτικών αποφάσεων. Η απόφαση που λαμβάνεται σε κάθε στάδιο επηρεάζει το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα όχι μόνο του συγκεκριμένου σταδίου αλλά και όλων εκείνων που ακολουθούν. Σε κάθε στάδιο διακρίνουμε ένα σύνολο πιθανών καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρίσκεται η βέλτιστη λύση. Οι πιθανές καταστάσεις σε κάθε στάδιο ορίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε για κάθε μία κατάσταση να υπάρχουν όλες εκείνες οι πληροφορίες που είναι απαραίτητες για τη λήψη μίας απόφασης στο συγκεκριμένο στάδιο. Σε κάθε στάδιο λαμβάνεται κάποια απόφαση η οποία εξαρτάται από την κατάσταση που υπάρχει στο συγκεκριμένο στάδιο.

2.4 Προσομοίωση

Η προσομείωση είναι μία μέθοδος επιχειρησιακής έρευνας που χρησιμοποιείται αρκετά συχνά για την επίλυση προβλημάτων και πολλές φορές αντικαθιστά ή υποκαθιστά τη χρήση αναλυτικών μαθηματικών μοντέλων στη μελέτη σύνθετων επιχειρησιακών προβλημάτων. Η μέθοδος της προσομείωσης δημιουργήθηκε λόγω των τεράστιων προβλημάτων που συναντούσαν οι επιστήμονες κατά τη μαθηματική μελέτη της συμπεριφοράς και της λειτουργίας των μεγάλων συστημάτων, η περιγραφή των οποίων οδηγούσε σε περίπλοκες μαθηματικές εξισώσεις που η επίλυσή τους ήταν αδύνατη ή θα είχε ως αποτέλεσμα την απώλεια χρόνου. Προσομείωση είναι η αναπαράσταση μερικών χαρακτηριστικών συμπεριφοράς ενός φυσικού συστήματος με συμπεριφορά ενός άλλου εικονικού συστήματος.

Η βασική ιδέα της προσομείωσης είναι να αξιοποιήσει κάποια τεχνάσματα για την απομίμηση ενός πραγματικού συστήματος με σκοπό τη μελέτη και κατανόηση των ιδιοτήτων του, της συμπεριφοράς και των χαρακτηριστικών της λειτουργίας του.

Για παράδειγμα αν θέλουμε να εξετάσουμε τα χαρακτηριστικά λειτουργίας ενός νέου αεροπλάνου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της προσομείωσης. Αυτό σημαίνει στη συγκεκριμένη περίπτωση ότι θα δημιουργήσουμε προϋποθέσεις πτήσης χωρίς όμως πραγματικά το αεροπλάνο να πετάει. Αυτό γίνεται διότι το κόστος πειραματισμού σε πραγματικές συνθήκες θα ήταν πάρα πολύ υψηλό και πιθανόν να έθετε σε κίνδυνο ανθρώπινες ζωές.

2.5 Χρονικός Προγραμματισμός

Στον χρονικό προγραμματισμό βασικό στοιχείο είναι ο καθορισμός ενός συγκεκριμένου χρονοδιαγράμματος κάθε μίας δραστηριότητας. Δηλαδή καθορίζεται ο χρόνος έναρξης και λήξης κάθε δραστηριότητας. Ο χρονικός προγραμματισμός περιλαμβάνει τη δημιουργία διαγραμμάτων που παρουσιάζουν το χρόνο έναρξης και λήξης κάθε δραστηριότητας, καθώς και το πρόγραμμα απασχόλησης των ανθρωπίνων πόρων.

Μερικές πληροφορίες που δίνει ο χρονικός προγραμματισμός στη διοίκηση ενός οργανισμού είναι:

- Ποιός είναι ο πιο σύντομος χρόνος ολοκλήρωσης μιας δραστηριότητας,
- Ποιό είναι το χρονοπρόγραμμα μίας δραστηριότητας,
- Ποιοί πόροι και σε τι ποσότητες θα χρειασθούν και σε ποιά χρονική στιγμή στη διάρκεια της δραστηριότητας,
- Πώς είναι δυνατόν να εντοπισθούν αποκλίσεις που πιθανόν να οδηγήσουν σε καθυστέρηση μιας δραστηριότητας,
- Εναλλακτικές λύσεις επιτάχυνσης της προόδου μιας δραστηριότητας.

2.6 Γραμμικός Προγραμματισμός

Μία μεθοδολογία της επιχειρησιακής έρευνας είναι και ο γραμμικός προγραμματισμός, ο οποίος έχει ευρύ πεδίο εφαρμογών. Ο γραμμικός προγραμματισμός λοιπόν είναι μία τεχνική που επιτρέπει σε μια επιχείρηση την κατανομή περιορισμένων πόρων που διαθέτει με τον πιο αποτελεσματικό τρόπο. Οι περιορισμοί μπορεί να αφορούν το διαθέσιμο προσωπικό, τις διαθέσιμες ώρες των μηχανημάτων, τα κεφάλαια μιας επιχείρησης, τους αποθηκευτικούς χώρους, τις πρώτες ύλες κ.λπ. Η κατανομή των πόρων μπορεί να αφορά την παραγωγή διαφορετικών προϊόντων, το πρόγραμμα παραγωγής, την επιλογή γεωγραφικών τοποθεσιών για την εγκατάσταση βιομηχανικών μονάδων, την επιλογή επενδυτικών σχεδίων, την επιλογή διαφημιστικής στρατηγικής κ.ο.κ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

3

Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

3.1 Μαθηματικός Προγραμματισμός

Η δυναμικότητα ενός συστήματος συνήθως χρησιμοποιείται για την παραγωγή μεγάλης ποικιλίας προϊόντων. Ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα της διοίκησης είναι η επιλογή των προϊόντων και των ποσοτήτων εκείνων, με τα οποία αριστοποιείται η αντικειμενική συνάρτηση του κόστους παραγωγής ή του οικονομικού κέρδους. Αυτός ο τύπος προβλήματος όπως και άλλοι τύποι προβλημάτων, που προσδιορίζουν την βέλτιστη κατανομή των μέσων παραγωγής, αντιμετωπίζονται με πολύ μεγάλη επιτυχία με τις μεθόδους του μαθηματικού και ειδικώτερα του γραμμικού προγραμματισμού. Ο μαθηματικός προγραμματισμός αναπτύχθηκε σημαντικά τα τελευταία πενήντα χρόνια, με σκοπό την επίλυση πρακτικών προβλημάτων όπως οικονομικών, επιχειρησιακών, στρατιωτικών κ.ο.κ. Πριν από την ανάπτυξη του μαθηματικού προγραμματισμού κάθε σχεδόν βελτίωση της παραγωγικότητας ήταν αποτέλεσμα κάποιας τεχνολογικής προόδου. Με τις τεχνικές του μαθηματικού προγραμματισμού επιτυγχάνεται πολλές φορές ουσιωδώς μεγαλύτερη αύξηση της παραγωγικότητας με τις υπάρχουσες τεχνολογικές συνθήκες.

Ο μαθηματικός προγραμματισμός αναφέρεται γενικά στην επίλυση προβλημάτων κατανομής περιορισμένων οικονομικών πόρων ή μέσων σε ένα σύνολο δραστηριοτήτων, έτσι ώστε να αριστοποιείται (ελαχιστοποιείται ή μεγιστοποιείται) μία ή περισσότερες συναρτήσεις επιλογής ή στόχου. Μέσα στα πλαίσια αυτά, τα κύρια χαρακτηριστικά στοιχεία κάθε μοντέλου μαθηματικού προγραμματισμού είναι τα εξής:

- Υπάρχει ένα σύνολο δραστηριοτήτων, οι οποίες μεταξύ πολλών άλλων μπορεί να είναι παραγωγή προϊόντων, παροχή διαφόρων ειδών υπηρεσιών κ.ο.κ. Σε κάθε δραστηριότητα συνήθως αντιστοιχεί μια μεταβλητή, η οποία δείχνει το ύψος της εκτέλεσης ή παραγωγής της δραστηριότητας.

- Υπάρχει ένα σύνολο οικονομικών πόρων ή μέσων, που διατίθενται σε περιορισμένες ποσότητες για την εκτέλεση των δραστηριοτήτων. Οι πόροι αυτοί μπορεί να είναι για παράδειγμα πρώτες ύλες κ.ο.κ.

Έτσι ο μαθηματικός προγραμματισμός μπορεί να οριστεί ως ένα κλάδο των εφαρμοσμένων μαθηματικών, που έχει ως αντικείμενο την μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση πραγματικών συναρτήσεων, κάτω από ορισμένους περιορισμούς για τις μεταβλητές.

Η λέξη προγραμματισμός δίνει ίσως την εντύπωση ότι πρόκειται για ένα κλάδο της επιστήμης των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Αυτό δεν είναι σωστό αν και η χρησιμοποίηση των ηλεκτρονικών υπολογιστών διευκολύνει κατά πολύ την επίλυση σύνθετων προβλημάτων μαθηματικού προγραμματισμού. Ο όρος προγραμματισμός, στην συγκεκριμένη περίπτωση, δηλώνει ότι οι ελεγχόμενες μεταβλητές του προτύπου πρόκειται να προγραμματισθούν ή επιλεγούν έτσι ώστε η συνάρτηση του προτύπου να βελτιστοποιείται, κάτω από τους περιορισμούς που έχουν δοθεί. Ανάλογα τώρα με τις διάφορες μορφές της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιοριστικών συναρτήσεων, ο μαθηματικός προγραμματισμός ταξινομείται στις εξής βασικές κατηγορίες:

1. **Γραμμικός Προγραμματισμός** (linear programming), όπου η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιοριστικές συναρτήσεις είναι γραμμικές συναρτήσεις.

2. **Μη γραμμικός Προγραμματισμός** (non-linear programming), όπου από τις περιοριστικές συναρτήσεις και την αντικειμενική συνάρτηση τουλάχιστον μία συνάρτηση είναι μη γραμμική.

3. **Αμιγής Ακέραιος Προγραμματισμός** (pure integer programming), όπου όλες οι μεταβλητές του προβλήματος παίρνουν ακέραιες μόνο τιμές. Προφανώς, ο αμιγής ακέραιος προγραμματισμός μπορεί να είναι γραμμικός ή μη γραμμικός. Δηλαδή αυτή η κατηγορία μπορεί να διακριθεί σε δύο υποκατηγορίες: τον **αμιγή ακέραιο γραμμικό προγραμματισμό** και τον **αμιγή ακέραιο μη γραμμικό προγραμματισμό**.

4. **Μικτός Ακέραιος Προγραμματισμός** (mixed integer programming), όπου οι μεταβλητές ενός γνήσιου μη κενού υποσυνόλου του συνόλου των μεταβλητών παίρνουν ακέραιες

τιμές και οι υπόλοιπες μεταβλητές είναι συνεχείς. Έτσι αυτή η κατηγορία μπορεί να διακριθεί και σε περιπτώσεις του **μικτού ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού** και του **μικτού ακέραιου μη γραμμικού προγραμματισμού**.

3.2 Γραμμικός Προγραμματισμός

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι μια ευρέως γνωστή μέθοδος της Επιχειρησιακής Έρευνας, η οποία χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων που αφορούν την βέλτιστη αξιοποίηση των διαθέσιμων πόρων, έτσι ώστε να υποβοηθηθεί το έργο των managers στη λήψη των αντίστοιχων αποφάσεων. Πολλές αποφάσεις, που λαμβάνονται σε έναν οργανισμό ή σε μια επιχείρηση, αφορούν την αποτελεσματική αξιοποίηση και χρήση των πόρων της επιχείρησης. Ως πόροι μιας επιχείρησης εννοούνται ο μηχανικός εξοπλισμός της, οι εργαζόμενοι (εργατοώρες), τα επενδεδυμένα κεφάλαια και τα κεφάλαια κινήσεως, οι διαθέσιμοι χώροι της επιχείρησης, οι πρώτες ύλες κ.α. Οι παραπάνω θεωρούνται ως οι σημαντικότεροι πόροι μιας επιχείρησης και είναι δυνατόν να διατεθούν για την παραγωγή προϊόντων (*όπως οι πρώτες ύλες, ο μηχανολογικός και λοιποί εξοπλισμοί*) ή υπηρεσιών (*όπως ο χρόνος των εργαζομένων*), τη διάθεση και διανομή των προϊόντων (*για παράδειγμα τα μεταφορικά μέσα*), τη διαφήμιση, διάφορες επενδυτικές αποφάσεις (*για παράδειγμα τα κεφάλαια*) της επιχείρησης κ.α.

Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού είναι προβλήματα βελτιστοποίησης κάτω από περιορισμούς. Οι περιορισμοί είναι γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών του προβλήματος και η συνάρτηση υπό βελτιστοποίηση, γνωστή σαν **αντικειμενική συνάρτηση**, πρέπει επίσης να είναι γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών. Έτσι εξηγείται η λέξη γραμμικός στον όρο «γραμμικός προγραμματισμός». Η λέξη προγραμματισμός χρησιμοποιείται επειδή αυτή η θεωρία έχει εφαρμογή σε προβλήματα προγραμματισμού (planning) / σχεδιασμού. Ο όρος «προγραμματισμός», πιο συγκεκριμένα, περιλαμβάνει την ανάπτυξη και επίλυση μέσω μαθηματικών μοντέλων, διαφόρων επιχειρησιακών προβλημάτων. Ο ρόλος του ηλεκτρονικού υπολογιστή είναι πολύ σπουδαίος στην επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού αλλά και γενικότερα στην επίλυση προβλημάτων με χρήση των μεθοδολογιών της Επιχειρησιακής Έρευνας. Πολλά από τα προβλήματα του γραμμικού προγραμματισμού που προκύπτουν στην πράξη είναι τόσο πολύπλοκα που η επίλυσή τους είναι τόσο δυνατή μόνο μέσω ειδικών προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός αναπτύχθηκε στις Ηνωμένες Πολιτείες στο τέλος της δεκαετίας του 1940, συγκεκριμένα γύρω στο 1949, για προβλήματα των ενόπλων δυνάμεων. Ο Dantzig στο βιβλίο του περιγράφει την αρχή του Γραμμικού Προγραμματισμού, καθώς και τις προηγούμενες εργασίες του Kantorovitch στην Σοβιετική Ένωση. Η δυνατότητα χρησιμοποίησης του Γραμμικού Προγραμματισμού σε επιχειρηματικά προβλήματα φάνηκε αρχικά στα προβλήματα αγροτικών επιχειρήσεων. Το πρόβλημα διατροφής ζώων με όσο το δυνατόν μικρότερο κόστος και με δεδομένο ελάχιστο περιεχόμενο σε θρεπτικά συστατικά διατυπώθηκε σαν πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Μερικά παραδείγματα βιομηχανιών που χρησιμοποιούν σήμερα τον Γραμμικό Προγραμματισμό είναι: διυλιστήρια πετρελαίου, βιομηχανίες χάλυβα, βιομηχανίες επεξεργασίας τροφίμων, κατασκευής χάρτου, τούβλων, ηλεκτρικών μηχανών κ.λπ. Επιπλέον ο Γραμμικός Προγραμματισμός αποτελεί το πιο βασικό και σημαντικό εργαλείο για διαδικασίες λήψης αποφάσεων σε πάρα πολλές επιχειρήσεις μικρότερου μεγέθους, καθώς και σε κοινωνικούς οργανισμούς και κυβερνητικές υπηρεσίες.

Γενικά, ο Γραμμικός Προγραμματισμός ασχολείται με προβλήματα κατανομής των περιορισμένων (οικονομικών) πόρων μεταξύ δραστηριοτήτων που ανταγωνίζονται. Αποτελεί την μέθοδο της Επιχειρησιακής Έρευνας, η οποία οδηγεί στην επίλυση των επιχειρησιακών προβλημάτων και κυρίως εκείνων που αναφέρονται την σωστή κατανομή των πόρων της επιχείρησης.

Πρόβλημα κατανομής θεωρείται ότι υπάρχει, όταν ο άνθρωπος προσπαθεί να επιλέξει το επίπεδο ορισμένων δραστηριοτήτων που ανταγωνίζονται για περιορισμένους διαθέσιμους πόρους, οι οποίοι είναι αναγκαίοι για την εκτέλεσή τους. Τέτοια προβλήματα είναι:

- Η κατανομή των παραγωγικών μέσων στα προϊόντα,
- Η κατανομή των Εθνικών πόρων στις ανάγκες της χώρας,
- Η επιλογή για επενδύσεις σε χαρτοφυλάκιο,
- Ο προγραμματισμός της γεωργικής παραγωγής της χώρας, κ.ο.κ.

3.3 Διατύπωση Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

Ο γραμμικός προγραμματισμός αποτελεί βοήθεια για την αντιμετώπιση πολλών περίπλοκων προβλημάτων αποφάσεων. Οι αποφάσεις όμως αυτές που θα παρθούν εξαρτώνται απόλυτα από την ακρίβεια της περιγραφής της κατάστασης που μελετάται και από την καταλληλότητα των προϋποθέσεων ή απλουστεύσεων που επιβάλλει ο μελετητής, δηλαδή από την ακρίβεια της διατύπωσης του προβλήματος.

Μέσα από το γραμμικό προγραμματισμό εντοπίζονται και απομονώνονται οι παράγοντες εκείνοι που θεωρούνται πιο σημαντικοί και που θα βοηθήσουν στην απόκτηση μιας λύσης. Η διατύπωση του προβλήματος απαιτεί μία πλήρη κατανόηση της πραγματικής κατάστασης που μελετάται, τον εντοπισμό των σημαντικών μεταβλητών και σχέσεων του προβλήματος και την επακριβή μαθηματική τους έκφραση μέσα από την αντικειμενική συνάρτηση σκοπού και τους περιορισμούς.

Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας αυτής συνήθως πρέπει να γίνουν διάφορες απλουστεύσεις ή προσεγγίσεις της πραγματικότητας είτε γιατί η πραγματικότητα δεν είναι απόλυτα κατανοητή ή γνωστή, είτε γιατί η επακριβής μαθηματική τους απεικόνιση περιπλέκει ιδιαίτερα την περιγραφή και περιορίζει τη δυνατότητα εφικτής λύσης. Οι απλουστεύσεις αυτές απομακρύνουν τη λύση που θα αποκτηθεί από την πραγματική λύση του προβλήματος. Ο εντοπισμός των κατάλληλων προσεγγίσεων για την απόκτηση μιας λύσης αλλά και η μετέπειτα εκτίμηση των επιδράσεων αυτών των προσεγγίσεων στα αποτελέσματα είναι ουσιώδους σημασίας στη χρήση του γραμμικού προγραμματισμού.

3.3.1 Η Διαδικασία της Διατύπωσης

Η διαδικασία της διατύπωσης ενός προτύπου γραμμικού προγραμματισμού περιλαμβάνει διάφορα στάδια. Τα πιο βασικά στάδια τα οποία πρέπει να προσέξει ιδιαίτερα αυτός που διατυπώνει το πρότυπο του γραμμικού προγραμματισμού είναι:

- η κατανόηση του προβλήματος
- ο ορισμός της αντικειμενικής συνάρτησης
- ο ορισμός των περιορισμών
- η εξέταση των προϋποθέσεων του γραμμικού προγραμματισμού

1) Κατανόηση του προβλήματος

Το στάδιο αυτό αποτελεί την προϋπόθεση για όλα τα επόμενα στάδια. Αποτελεί ίσως το πιο δύσκολο στάδιο σε όλα τα αληθινά προβλήματα. Εδώ πρέπει αρχικά να γίνει κατανοητό πιο είναι το πρόβλημα, τι εναλλακτικά σχέδια δράσης εξετάζονται, ποιές είναι οι μεταβλητές του προβλήματος. Επίσης να ληφθούν υπόψη τα ερωτήματα που έχουν τεθεί καθώς και πως σχετίζονται τα σχέδια δράσης με το πιθανό αποτέλεσμα. Στη διάρκεια που γίνεται αυτή η διαδικασία πρέπει επίσης να ξεκαθαριστεί ποιά στοιχεία από αυτά που δίνονται στο πρόβλημα είναι εκείνα που ενδιαφέρουν.

2) Ορίζοντας την αντικειμενική συνάρτηση

Το πρότυπο του γραμμικού προγραμματισμού απαιτεί μια μοναδική αντικειμενική συνάρτηση. Πολλές φορές όμως γίνεται να διατυπωθούν παραπάνω από ένα σκοπούς, όπου μάλιστα μερικούς από αυτούς τους σκοπούς να μην συμβιβάζονται με άλλους και όλοι τους να οδηγούν σε διαφορετική στρατηγική δράσης.

Παίρνουμε για παράδειγμα μια επιχείρηση η οποία πουλάει μια σειρά προϊόντων. Το τμήμα πωλήσεων της επιχείρησης ενδιαφέρεται για τον προσδιορισμό των προϊόντων τα οποία θα μεγιστοποιήσουν τις τρέχουσες ή μελλοντικές πωλήσεις του. Οι μέτοχοι της επιχείρησης ενδιαφέρονται γαι τον προσδιορισμό των προϊόντων τα οποία θα μεγιστοποιήσουν τα κέρδη. Το τμήμα παραγωγής ενδιαφέρεται για την καλύτερη απασχόληση του εργατικού δυναμικού κ.λ.π.

Σε περιπτώσεις σαν την προηγούμενη ο μελετητής μπορεί να ακολουθήσει μία πο τις παρακάτω τακτικές:

- να επιλέξει, σε συνδυασμό με τη διοίκηση και αφού εξετασθούν οι διάφοροι αντικειμενικοί σκοποί, τον σκοπό εκείνο ο οποίος ενδιαφέρει αμεσότερα
- να εκφράσει τους διάφορους επιμέρους στόχους, να τους απονείμει ανάλογα με τη σημασία τους και να υπολογίσει σαν αντικειμενική συνάρτηση το άθροισμα των γινομένων του κάθε επιμέρους στόχου επί το βάρος του
- να επιλέξει τον αμεσότερο σκοπό για αντικειμενική συνάρτηση, αλλά να εκφράσει τους άλλους σκοπούς σαν περιορισμούς όπου δε θα επιτραπεί να πέσουν χαμηλότερα από ορισμένα όρια ανοχής
- να χρησιμοποιήσει μεθόδους του προγραμματισμού στόχων με τις οποίες επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα των αποκλίσεων του κάθε σκοπού από κάθε στόχο.

3) Ορίζοντας τους περιορισμούς

Για να πετύχει το πρότυπο του γραμμικού προγραμματισμού πρέπει να διατυπωθούν με πληρότητα, ακρίβεια και συντομία όλοι οι περιορισμοί οι οποίοι είναι σχετικού με την κατάσταση που μελετάται. Οι περιορισμοί αυτοί μπορεί να είναι περιορισμοί δυναμικότητας (παραγωγής, αγοράς κ.λ.π.), τεχνολογίας, διαθέσιμων πρώτων υλών, νομικοί ή θεσμικοί κ.λ.π. Πρέπει όμως να προσέξουμε ώστε να περιλάβουμε μόνο τους άμεσα σχετικούς περιορισμούς τους οποίους να εκφράσουμε με συντομία και ακρίβεια.

4) Εξετάζοντας τις προϋποθέσεις

Όπως θα εξετάσουμε παρακάτω οι βασικές προϋποθέσεις που θα πρέπει να πληρεί το πρότυπο του γραμμικού προγραμματισμού είναι αυτό της γραμμικότητας, της βεβαιότητας και της διαιρετότητας. Οι προϋποθέσεις αυτές λοιπόν πρέπει προηγουμένως να εξετασθούν κατά πόσο είναι λογικές και δικαιολογημένες. Εάν δεν δικαιολογούνται τότε πρέπει να αναθεωρηθούν και να γίνουν άλλες προσεγγίσεις.

Για να γίνει πιο κατανοητή η μέθοδος του γραμμικού προγραμματισμού παρακάτω δίδεται ένα πρόβλημα του οποίου η μαθηματική διατύπωση είναι σχετικά απλή.

Μια από τις πιο κλασσικές εφαρμογές του γραμμικού προγραμματισμού είναι το πρόβλημα της μίξης της παραγωγής. Σε πολλές παραγωγικές επιχειρήσεις για την παραγωγή δύο ή περισσοτέρων προϊόντων χρησιμοποιούνται από κοινού οι περιορισμένοι πόροι της επιχείρησης, όπως ώρες εργασίας του προσωπικού, ώρες εργασίας των μηχανημάτων, πρώτες ύλες κ.λ.π. Για την παραγωγή κάθε προϊόντος απαιτείται διαφορετική ποσότητα των διαθέσιμων πόρων η οποία θα αποφέρει διαφορετικό κέρδος στην επιχείρηση.

Η επιχείρηση θα επιθυμούσε να προσδιορίσει την ποσότητα που θα πρέπει να παραχθεί από το κάθε προϊόν έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το συνολικό της κέρδος με τους περιορισμένους πόρους που διαθέτει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μια επιπλοποιία παράγει τραπέζια και καρέκλες κοινής χρήσης. Η διαδικασία παραγωγής και για τα δύο προϊόντα είναι παρόμοια και απαιτεί διαφορετικές ώρες εργασίας για το κάθε προϊόν στα δύο τμήματα της επιχείρησης, το ξυλουργείο και το βαφείο. Για την παραγωγή κάθε τραπεζιού απαιτούνται 8 ώρες στο ξυλουργείο και 4 ώρες στο βαφείο, ενώ για κάθε καρέκλα οι ώρες που απαιτούνται είναι είναι 8 στο ξυλουργείο και 2 στο βαφείο. Για τον επόμενο μήνα η επιχείρηση έχει προσδιορίσει ότι οι διαθέσιμες ώρες παραγωγής στο ξυλουργείο ανέρχονται συνολικά σε

960 ενώ στο βαφείο είναι μόλις 400. Για κάθε τραπέζι το μικτό κέρδος της επιχείρησης είναι 14.000 χ.μ. ενώ για κάθε καρέκλα είναι 10.000 χ.μ.

Το πρόβλημα της επιχείρησης είναι ο καθορισμός των ποσοτήτων παραγωγής σε τραπέζια και καρέκλες ώστε να πετύχει το μεγαλύτερο δυνατό κόστος. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι αγνοούμε το τύχον στοκ που διαθέτει η επιχείρηση καθώς και το γεγονός ότι η ζήτηση της αγοράς είναι ικανή να απορροφήσει την οποιαδήποτε ποσότητα θα παραχθεί. Στη συνέχεια θα δούμε πώς το παραπάνω πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού θα μπορούσε να διατυπωθεί.

Μεταβλητές

Το πρώτο πράγμα που θα κάνουμε είναι να ορίσουμε τις μεταβλητές του προβλήματος. Οι μεταβλητές του προβλήματος αφορούν τους παράγοντες εκείνους τους οποίους μπορούμε να καθορίσουμε ή τις ποσότητες που προσπαθούμε να προσδιορίσουμε στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Στην προκειμένη περίπτωση είναι τα τραπέζια και οι καρέκλες. Ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί είναι ο παρακάτω:

Χ= η ποσότητα (αριθμός) τραπεζιών που θα παραχθούν
Ψ= η ποσότητα (αριθμός) καρεκλών που θα παραχθούν

Τα δεδομένα του προβλήματος παραθέτονται στον παρακάτω πίνακα:

Τμήμα παραγωγής	Απαιτούμενες ώρες για την παραγωγή 1 μονάδας		Διαθέσιμες ώρες το μήνα
	Χ	Ψ	
Ξυλουργείο	8 ώρες	8 ώρες	960 ώρες
Βαφείο	4 ώρες	2 ώρες	400 ώρες
Κέρδος ανά μονάδα προϊόντος	14.000	10.000	

Αντικειμενική συνάρτηση

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε μέσω μιας μαθηματικής σχέσης το στόχο της επιχείρησης. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι η μεγιστοποίηση των κερδών της επιχείρησης. Από τα δεδομένα γνωρίζουμε ότι κάθε μονάδα Χ (τραπέζια) αποφέρει κέρδος 14.000 χ.μ. Αυτό σημαίνει ότι το κέρδος από τη παραγωγή Χ τραπεζιών είναι

14.000Χ. Ενώ το κέρδος από την παραγωγή Ψ καρεκλών είναι 10.000Ψ. Επομένως το συνολικό κέρδος της επιχείρησης από την παραγωγή Χ τραπεζιών και Ψ καρεκλών είναι:

Συνολικό κέρδος: 14.000Χ + 10.000 Ψ

Η παραπάνω συνάρτηση σημαίνει ότι για κάθε συνδυασμό ορισμένης ποσότητας τραπεζιών και καρεκλών η τιμή συνάρτησης 14.000Χ+10.000Ψ αντιστοιχεί στο κέρδος που προκύπτει από το δεδομένο συνδυασμό παραγωγής.

Η παραπάνω συνάρτηση που εκφράζει το συνολικό κέρδος της επιχείρησης και την οποία θα προσπαθήσουμε να μεγιστοποιήσουμε καλείται **αντικειμενική συνάρτηση**.

Περιορισμοί

Η αύξηση των ποσοτήτων παραγωγής οδηγεί και σε αύξηση των κερδών. Οι ποσότητες των κερδών όμως δεν μπορούν να αυξηθούν απεριόριστα και αυτό γιατί οι διαθέσιμες ώρες στα τμήματα του ξυλουργείου και του βαφείου είναι συγκεκριμένες. Το επόμενο βήμα είναι να οριστούν οι περιορισμοί του προβλήματος.

Αρχικά για το ξυλουργικό τμήμα:

*Κάθε τραπέζι χρειάζεται 8 ώρες για την κατασκευή του και κάθε καρέκλα χρειάζεται επίσης 8 ώρες για την κατασκευή της. Άρα τα τραπέζια θέλουν **8Χ ώρες** συνολικά για την κατασκευή τους και οι καρέκλες θέλουν **8Ψ ώρες** για την κατασκευή τους.*

Απαιτούμενες ώρες στο ξυλουργείο: 8Χ+8Ψ

Διαθέσιμες ώρες στο ξυλουργείο: 960

Επομένως ο περιορισμός που αφορά το ξυλουργείο θα έχει την εξής μορφή:

Περιορισμός ξυλουργείου:	8Χ+8Ψ	≤ 960
	(Απαιτούμενες ώρες	≤ διαθέσιμες)

Για το βαφείο:

*Κάθε τραπέζι χρειάζεται 4 ώρες στο βαφείο και κάθε καρέκλα χρειάζεται 2 ώρες. Επομένως για τα τραπέζια χρειάζεται συνολικά **4Χ ώρες** και για τις καρέκλες **2Ψ ώρες.***

Απαιτούμενες ώρες στο βαφείο: 4Χ+2Ψ

Διαθέσιμες ώρες στο βαφείο: 400

Επομένως ο περιορισμός που θα αφορά το βαφείο θα έχει την εξής μορφή:

Περιορισμός βαφείου:	4Χ+2Ψ	≤ 400
	(Απαιτούμενες ώρες ≤ διαθέσιμες)	

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των προβλημάτων του γραμμικού προγραμματισμού είναι ότι οι μεταβλητές του προβλήματος είναι αλληλένδετες και αλληλοεξαρτώμενες. Όταν αυξάνει η παραγωγή στο ένα προϊόν πρέπει να μειωθεί η παραγωγή του άλλου.

3.4 Γραφική Λύση

Μία από τις μεθόδους για την επίλυση των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού είναι και η γραφική λύση. Με τη μέθοδο αυτή λύνονται προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού που έχουν δύο μεταβλητές. Αυτό γίνεται γιατί δε μπορούν να παρασταθούν γραφικά παραπάνω από δύο μεταβλητές.

Για την εύρεση των τιμών που μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση βρίσκουμε τα ζεύγη των αριθμών που αποτελούν τις δυνατές λύσεις. Στη συνέχεια παίρνουμε το ζεύγος εκείνο των αριθμών που καθιστά την αντικειμενική συνάρτηση μέγιστη ή ελάχιστη ανάλογα με το τι μας ζητάει το πρόβλημα. Για το λόγο αυτό εισάγουμε ένα σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων Χ και Υ, και βρίσκουμε τα γραφικά εκείνα σημεία που επαληθεύουν συγχρόνως όλους τους περιορισμούς του προβλήματος. Σημαντικό στοιχείο που πρέπει να τονίσουμε είναι ότι επειδή οι μεταβλητές παίρνουν μόνο μη αρνητικές τιμές, το σύνολο των δυνατών λύσεων του προβλήματος θα βρίσκονται στο πρώτο τεταρτημόριο.

Πιο συγκεκριμένα σε προβλήματα που υπάρχουν δύο μεταβλητές και στα οποία χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της γραφικής λύσης ακολουθούνται οι παρακάτω φάσεις:

- Απεικονίζουμε σε ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων τις γραμμικές εξισώσεις με τους περιορισμούς
- Στη συνέχεια προσδιορίζουμε τις δυνατές λύσεις οι οποίες ικανοποιούν τους περιορισμούς του προβλήματος
- Απεικονίζουμε γραφικά και την αντικειμενική συνάρτηση η οποία μετατοπίζεται παράλληλα της αρχικής της θέσης ανάλογα με το σημείο που βρίσκονται οι δυνατές λύσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μια βιοτεχνία κατασκευάζει δύο τύπους καπέλλων. Για την κατασκευή του τύπου Α χρειάζεται 5 λεπτά για κόψιμο και 10 λεπτά για ράψιμο. Για την κατασκευή του τύπου Β χρειάζεται 8 λεπτά για κόψιμο και 8 λεπτά για ράψιμο. Ο διαθέσιμος χρόνος είναι 3 ώρες και 20 λεπτά για κόψιμο καπέλου και 4 ώρες για το ράψιμο. Το κέρδος της βιοτεχνίας είναι 0,5 της χρηματικής μονάδας για κάθε καπέλο τύπου Α και 0,6 της χρηματικής μονάδας για κάθε καπέλο του τύπου Β.
Ζητείται: *να κατασκευασθεί το μαθηματικό μοντέλο μεγιστοποίησης του κέρδους και στη συνέχεια με τη γραφική μέθοδο να βρεθεί ο αριθμός των καπέλων που πρέπει να κατασκευασθούν από κάθε τύπο, ώστε η επιχείρηση να μεγιστοποιήσει το κέρδος.*

Λύση:

	X	**Y**	
ΚΟΨΙΜΟ	5	8	3,20 ώρες
ΡΑΨΙΜΟ	10	8	4 ώρες
ΧΡΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ	0,5	0,6	

Πρώτα πρέπει να παραθέσουμε την αντικειμενική συνάρτηση. Το συνολικό κέρδος λοιπόν από την πώληση αυτών δίνεται από την παρακάτω αντικειμενική συνάρτηση:

$$K = 0{,}5X + 0{,}6Y$$

Στη συνέχεια πρέπει να παραθέσουμε και τους περιορισμούς. Συγκεκριμένα το κόψιμο των καπέλων και για τους δύο τύπους δεν πρέπει να ξεπερνάει τις 3 ώρες και 20 λεπτά ή 200 λεπτά.

$$5X + 8Y \leq 200$$

Ενώ για το ράψιμο των καπέλων δεν πρέπει να ξεπερνάει και για τους δύο τύπους τις 4 ώρες ή 240 λεπτά.

$$10X + 8Y \leq 240$$

Θα πρέπει να λάβουμε υπόψη και το γεγονός ότι οι αρθμοί X και Y θα πρέπει να είναι θετικοί. Αυτό σημαίνει ότι

$$X \geq 0,\ Y \geq 0$$

Οι περιορισμοί λοιπόν είναι:

$$5X + 8Y \leq 200$$

$$10X + 8Y \leq 240$$

$$X \geq 0,\ Y \geq 0$$

Για να μπορέσουμε να επιλύσουμε την ανίσωση της δίνουμε μορφή εξίσωσης έτσι ώστε να της βρούμε δύο σημεία και την απεικονίσουμε ως ευθεία πάνω στο σύστημα των συντεταγμένων.

Η ανισότητα $5X + 8Y \leq 200$ γίνεται $5X + 8Y = 200$ (1)

Για $X = 0$ τότε το Y με βάση την (1) γίνεται $Y = 25$
Για $Y = 0$ τότε το X με βάση την (1) γίνεται $X = 40$

Άρα η ευθεία ορίζεται από τα σημεία A(0,25) και B(40,0)

Η ανισότητα $10X + 8Y \leq 240$ γίνεται $10X + 8Y = 240$ (2)

Για $X = 0$ τότε το Y με βάση την (2) γίνεται $Y = 30$
Για $Y = 0$ τότε το X με βάση την (2) γίνεται $X = 24$

Άρα η ευθεία ορίζεται από τα σημεία Γ(0,30) και Δ(24,0)

Για να βρούμε που τέμνονται οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ πρέπει να λύσουμε το σύστημα :

$$\begin{array}{l} 5X+8Y=200 \\ 10X+8Y=240 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 5X=200-8Y \\ 10X+8Y=240 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} X=(200-8Y)/5 \\ 10[(200-8Y)/5]+8Y=240 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} X=(200-8Y)/5 \\ [2(200-8Y)]+8Y=240 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} X=(200-8Y)/5 \\ 400-16Y+8Y=240 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} X=(200-8Y)/5 \ (3) \\ \boxed{Y=20} \ (4) \end{array}$$

Με βάση την (4) η (3) γίνεται $X=(200-8*20)/5 \Rightarrow \boxed{X=8}$
Άρα το σημείο που τέμνονται οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι το Ε(8,20)

Όπως βλέπουμε στο διάγραμμα, το κυρτό κλειστό πολύγωνο ικανοποιεί τους περιορισμούς του προβλήματος. Επομένως κάθε σημείο του αποτελεί λύση του προβλήματος. Μας ενδιαφέρουν οι λύσεις εκείνες που μεγιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση. Θα λάβουμε υπόψη μας και σαν σημείο και την κορυφή των αξόνων Ο(0,0).

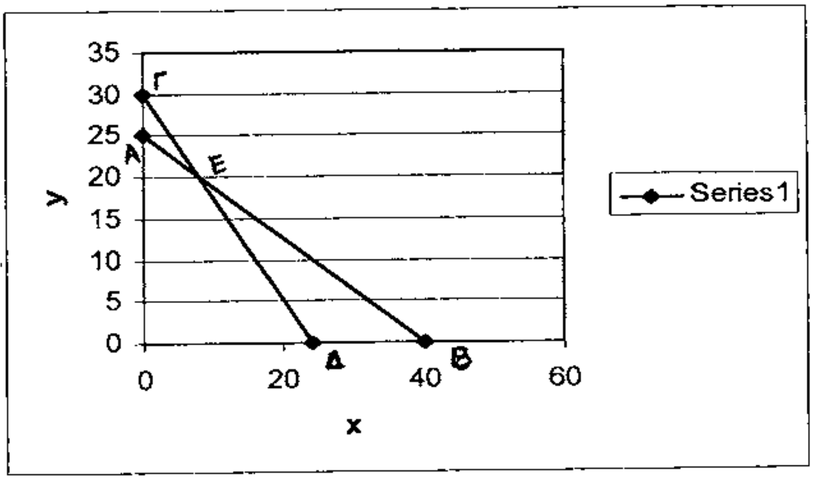
Για την ευθεία που περνάει απο την κορυφή των αξόνων Ο(0,0) τότε:
$K=0,5\bullet 0+0,6\bullet 0=0$ χρηματικές μονάδες

Για την ευθεία που περνάει από την κορυφή Α(0,25) τότε:
$K=0,5\bullet 0+0,6\bullet 25=15$ χρηματικές μονάδες

Για την ευθεία που περνάει από την κορυφή Δ(24,0) τότε:
$K=0,5\bullet 24+0,6\bullet 0=12$ χρηματικές μονάδες

Για την ευθεία που περνάει από την κορυφή Ε(8,20) τότε:
$K=0,5\bullet 8+0,6\bullet 20=16$ χρηματικές μονάδες

Άρα η αντικειμενική συνάρτηση $K=0,5X+0,6Y$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο σημείο Ε όπου X=8 και Y=20. εκεί η μέγιστη τιμή σε χρηματικές μονάδες είναι 16.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σε μία βιομηχανία παράγεται ένα προϊόν Ω που αποτελείται από δύο πρώτες ύλες X και Y. Το συνολικό βάρος του προϊόντος θα πρέπει να είναι μέχρι 10 κιλά. Το προϊόν θα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 3 κιλά από το X και 4 κιλά Y. Μία μονάδα του X κοστίζει 60 χρηματικές μονάδες ενώ μία μονάδα του Y κοστίζει 40 χρηματικές μονάδες.

Ζητούνται οι ποσότητες του X και Y που ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος. Επίσης ποιός θα είναι ο συνδυασμός των X και Y αν το συνολικό βάρος του προϊόντος είναι 10 κιλά ακριβώς;

Λύση:

Το συνολικό κόστος για την παραγωγή μίας μονάδας από το παραπάνω προϊόν φαίνεται από την παρακάτω αντικειμενική συνάρτηση:

$$K = 60X + 40Y$$

Οι περιορισμοί που προέκυψαν από τα δεδομένα είναι:

$$X + Y \leq 10$$
$$X \geq 3$$
$$Y \geq 4$$

Αν οι ποσότητες για να φτιαχτεί το προϊόν είναι $\boxed{X=3}$ και $\boxed{Y=4}$ A(3,4) που είναι και οι μικρότερες ποσότητες που μπορεί να περιέχει το προϊόν από την κάθε πρώτη ύλη τότε η αντικειμενική συνάρτηση θα γίνει:

$A(3,4) \rightarrow K=60X+40Y \Rightarrow K=60\bullet3+40\bullet4 \Rightarrow \boxed{K=340}$ χρηματικές μονάδες

Σύμφωνα όμως με τους περιορισμούς έχουμε:
$X+Y\leq10$ δηλαδή $X+Y=10$ (1)

Έστω ότι $\boxed{X=3}$, μέσω της (1) θα προκύψει ότι $\boxed{Y=7}$
Άρα το άλλο σημείο είναι B(3,7)

Έστω ότι $\boxed{Y=4}$, μέσω της (1) θα προκύψει ότι $\boxed{X=6}$
Άρα το άλλο σημείο είναι Γ(6,4)
Κάνω αντικατάσταση τους συνδυασμούς Β και Γ στην αντικειμενική συνάρτηση:

$B(3,7) \rightarrow K=60\bullet3+40\bullet7 \Rightarrow \boxed{K=460}$ χρηματικές μονάδες

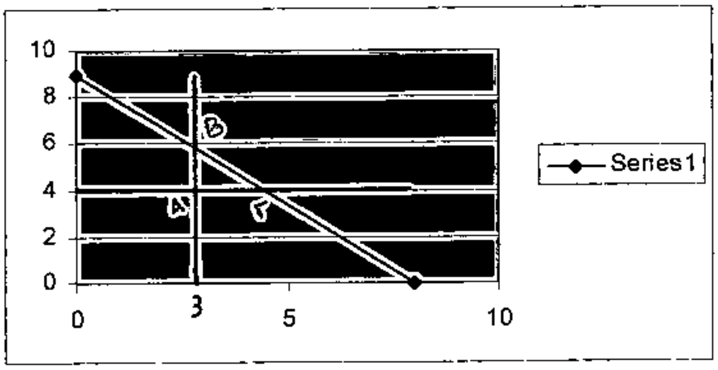
$\Gamma(6,4) \rightarrow K=60\bullet6+40\bullet4 \Rightarrow \boxed{K=520}$ χρηματικές μονάδες

Επαναλαμβάνουμε λοιπόν ότι για το συνδυασμό A(3,4) έχουμε 340 χρηματικές μονάδες, για το συνδυασμό B(3,7) έχουμε 460 χρηματικές μονάδες ενώ για το συνδυασμό Γ(6,4) έχουμε 520.
Άρα ο συνδυασμός εκείνος που ελαχιστοποιεί το κόστος είναι ο Α όπου K=340 χρηματικές μονάδες.

Για την περίπτωση όπου το προϊόν θα πρέπει να είναι ακριβώς 10 κιλά τότε θα πρέπει να διαλέξουμε μεταξύ των συνδυασμών Β και Γ αφού τα άθροισμα των κιλών των πρώτων υλών που χρησιμοποιήθηκαν είναι ακριβώς 10.

$B(3,7) \rightarrow X+Y=10,\ 3+7=10$
$\Gamma(6,4) \rightarrow X+Y=10,\ 6+4=10$

Ο καλύτερος συνδυασμός σε αυτή την περίπτωση είναι ο Β. Το άθροισμα της αντικειμενικής συνάρτησης του Β συνδυασμού είναι μικρότερο από αυτό του Γ(460<520).



3.5 Η Μέθοδος Simplex

Όταν το πρόβλημα έχει μόνο δύο μεταβλητές, τότε είναι δυνατή η επίλυσή του με τη βοήθεια της Γραφικής Μεθόδου. Η γραφική προσέγγιση δίνει την ευκαιρία να γίνουν κατανοητές οι βασικές αρχές των προβλημάτων του γραμμικού προγραμματισμού. Σε πραγματικές όμως εφαρμογές του γραμμικού προγραμματισμού ο αριθμός των μεταβλητών είναι πολύ μεγαλύτερος των δύο, και επομένως η γραφική προσέγγιση επίλυσης δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί. Πράγματι, για προβλήματα με περισσότερες από τρείς μεταβλητές, η εφαρμογή της Γραφικής Μεθόδου είναι αδύνατη. Τότε η επίλυση αυτών των προβλημάτων γίνεται αλγεβρικά, με τη βοήθεια της αλγορίθμου Simplex. **Η αλγόριθμος αυτή είναι μια συστηματική μέθοδος επίλυσης των προβλημάτων (οποιουδήποτε μεγέθους) του γραμμικού προγραμματισμού, η οποία είναι δυνατόν να υλοποιηθεί μέσω κατάλληλων προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή.**

Η μέθοδος Simplex επινοήθηκε το 1947 από τον Αμερικάνο Μαθηματικό George Dantzig. Ο ίδιος εξήγησε ότι πρίν από αυτόν, κανείς άλλος μαθηματικός δεν είχε ενδιαφερθεί ενεργά να λύσει τα προβλήματα αυτά. Ο λόγος ήταν ότι δεν είχε διατυπωθεί σοβαρά σε άλλα πρακτικά προβλήματα, μέχρι την στιγμή που εξετάσθηκε το πρόβλημα της κατανομής οικονομικών πόρων ή μέσων για βέλτιστη ικανοποίηση των ανθρώπινων αναγκών. Έτσι αναπτύχθηκε το μοντέλο του Γραμμικού Προγραμματισμού.

Η μέθοδος Simplex έχει αποδειχθεί ότι είναι μία από τις πιο αποτελεσματικές μεθόδους της Επιχειρησιακής Έρευνας και εφαρμόζεται ευρέως σε πολλές επιχειρήσεις, για μεγάλη ποικιλία προβλημάτων, όπου ο αντικειμενικός σκοπός είναι ο προσδιορισμός της άριστης κατανομής των διαθέσιμων πόρων. Η εν λόγω μέθοδος έχει υπολογιστική ικανότητα και ευελιξία. Θεωρείται ως μια υπολογιστικά ανώτερη μέθοδος από την Γραφική Λύση.

Για την εφαρμογή της Simplex σε προβλήματα με μεγάλο αριθμό μεταβλητών και περιορισμών, είναι απαραίτητη η χρησιμοποίηση των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Έτσι προβλήματα τα οποία θα ήταν αδύνατον να επιλυθούν ή τουλάχιστον θα απαιτούσαν μια σειρά από πλήθος μαθηματικούς υπολογισμούς, με μεγάλο χρονικό κόστος, τώρα αναλύονται μέσα σε ένα χρονικό διάστημα μικρότερο από αυτό της μίας ώρας. Σήμερα είναι εφικτή η λύση προβλημάτων με εκατοντάδες περιορισμούς (από 300 εως και 800) και χιλιάδες μεταβλητές. Επιπλέον υπάρχει και η δυνατότητα να διασπασθεί το αρχικό πρόβλημα σε μικρότερα κομμάτια (που θα αποτελούν και αυτά μικρά προβλήματα) και έτσι να επιλυθούν προβλήματα με χιλιάδες περιορισμούς και εκατομμύρια μεταβλητές.

Κατά την εφαρμογή της, η μέθοδος Simplex παρουσιάζει ορισμένες δυσχέρειες, είτε στη συλλογή κατάλληλων στοιχείων, είτε στις συνέπειες που εμφανίζονται κατά την παραδοχή της γραμμικότητας όλων των μαθηματικών σχέσεων. Παρά τις δυσχέρειες αυτές, η Simplex θεωρείται ως μία από τις πιο αποτελεσματικές μεθοδολογίες λόγο της ποσοτικής ανάλυσης πλήθους προβλημάτων.

Η προσέγγιση που ακολουθεί η μέθοδος Simplex, σε βασικές γραμμές, είναι ανάλογη με την προσέγγιση που ακολουθεί και η γραφική μέθοδος. Στην γραφική μέθοδο εξετάζοντας όλα τα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων, μπορεί να διαπιστωθεί ότι η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης είναι δυνατόν να επιτευχθεί μόνο στα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων. Η μέθοδος Simplex εξετάζει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μόνο στα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων με ένα συστηματικό αλγεβρικό τρόπο.

Εντελώς συνοπτικά, η διαδικασία που ακολουθείται προκειμένου να επιλυθεί ένα πρόβλημα με την μέθοδο Simplex, μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

Η αντικειμενική συνάρτηση τροποποιείται έτσι ώστε να δίνει κάθε φορά πληροφορίες που αναφέρονται είτε εάν μπορεί να βελτιωθεί ένα δεδομένο πρόγραμμα, είτε εάν μπορεί να προσδιορισθεί ο τρόπος σχεδίασης ενός νέου προγράμματος. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί με την χρήση πινάκων, δηλαδή η επίλυση του προβλήματος να υιοθετήσει μια πινακοποιημένη μορφή. Η προσέγγιση της Simplex ή η συστηματική μορφή διαδοχικών προσεγγίσεων βασίζεται στη

διαδοχική βελτίωση της λύσης του προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού με συστήματα πολλών εξισώσεων και πολλούς αγνώστους. Έτσι ετοιμάζεται στην αρχή ένα εφικτό πρόγραμμα στο οποίο δεν παραβιάζονται οι περιορισμοί του προβλήματος. Στη συνέχεια ελέγχεται η δυνατή αριστοποίησή του, εξετάζοντας την αντικειμενική συνάρτηση. Αν ο έλεγχος αποδείξει ότι μπορεί να σχεδιαστεί ένα καλύτερο πρόγραμμα, τότε το υπάρχον εφικτό πρόγραμμα τροποποιείται. Η ίδια διαδικασία δύναται να επαναληφθεί και στο καινούριο πρόγραμμα. Δηλαδή, το νέο πρόγραμμα ελέγχεται για αριστοποίηση και εφόσον είναι εφικτή μια παραιτέρω βελτίωση της αντικειμενικής συνάρτησης, τότε μπορεί να ετοιμαστεί ένα καινούριο πρόγραμμα. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να φθάσουμε στην βέλτιστη λύση.

Η μέθοδος Simplex εκτός από τον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης, δηλαδή τις τιμές των μεταβλητών και το αντίστοιχο βέλτιστο κέρδος ή κόστος, επιπλέον παρέχει πλήθος άλλων πληροφοριών οικονομικής φύσεως, οι οποίες δεν είναι δυνατόν να παραχθούν με άλλο τρόπο.

Παρακάτω θα ακολουθήσει η διατύπωση και η επίλυση ενός προβλήματος, μέσω του οποίου θα αναλυθούν τα βήματα της εν λόγο μεθόδου και θα γίνει αντιληπτή η μορφή της πρακτικά. Βέβαια θα γίνει αναφορά στο ίδιο πρόβλημα, που αναλύθηκε και παραπάνω, προκειμένου να γίνει περισσότερο κατανοητή η μέθοδος Simplex, αφού θα δούμε πως μπορεί η επίλυση ενός προβλήματος να πραγματοποιηθεί μέσα από τις μεθόδους του Γραμμικού Προγραμματισμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Όπως προαναφέρθηκε θα χρησιμοποιηθούν τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος, συγκεκριμένα της σελίδας 25, περιληπτικά:

Μια επιπλοποιία κατασκευάζει τραπέζια και καρέκλες για κοινή χρήση. Συγκεκριμένα:

Χ = ο αριθμός των Τραπεζιών που θα παραχθούν,

Ψ = ο αριθμός των Καρεκλών που θα παραχθούν,

Για την κατασκευή τους, η επιχείρηση διαθέτει δύο τμήματα:

(Α) το Ξυλουργείο

(Β) το Βαφείο

Επιπλέον προσδιορίστηκε:

- Η παραγωγική δυναμικότητα κάθε τμήματος παραγωγής (ξυλουργείο, βαφείο) που ήταν διαθέσιμη για τα δύο προϊόντα,
- Η παραγωγική δυναμικότητα που απαιτεί κάθε προϊόν για να παραχθεί μία μονάδα (δηλαδή οι απαιτούμενες ώρες για την παραγωγή κάθε μονάδας προϊόντος),
- Το κέρδος κάθε μονάδας προϊόντος.

Οι πληροφορίες αυτές μπορούν να παρατεθούν στον παρακάτω πίνακα, ως εξής:

ΤΜΗΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ	ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΩΡΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΜΙΑΣ ΜΟΝΑΔΑΣ		ΔΙΑΘΕΣΙΜΕΣ ΩΡΕΣ ΤΟΝ ΜΗΝΑ
ΠΡΟΪΟΝ	Χ	Ψ	
Α	8	8	960
Β	4	2	400
ΚΕΡΔΟΣ ΑΝΑ ΜΟΝΑΔΑ ΠΡΟΪΟΝΤΟΣ	14.000	10.000	

Έτσι η μαθηματική μορφή του προβλήματος θα είναι:

Αντικειμενική Συνάρτηση: max. $K = 14.000X + 10.000\Psi$
Υπό τους περιορισμούς: $8X + 8\Psi \leq 960$ (*περιορισμός ξυλουργείου*)
$4X + 2\Psi \leq 400$ (*περιορισμός βαφείου*)
$X \geq 0, \quad \Psi \geq 0$

Ο τρόπος με τον οποίο είναι διατυπωμένες οι ανισότητες, δεν βοηθάει στην εξεύρεση μιας αρχικής λύσης, μέσω της οποίας θα γίνει προσπάθεια να καταλήξουμε στην βέλτιστη λύση. Εξαιτίας του παραπάνω λόγου, το πρώτο βήμα της μεθόδου Simplex επιβάλει την μετατροπή όλων των περιορισμών που διατυπώνονται με ανισότητες σε ισότητες. Η μετατροπή αυτή επιτυγχάνεται με τη χρήση μη αρνητικών μεταβλητών, που ονομάζονται ***χαλαρές ή βοηθητικές ή μεταβλητές περιθωρίου*** (**slack variables**) και οι οποίες προσθέτονται στο αριστερό μέρος των ανισοτήτων. Οι μεταβλητές περιθωρίου αντιπροσωπεύουν αχρησιμοποίητους πόρους στη διαδικασία μεγιστοποίησης του κέρδους και συμβολίζονται σαν: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 κ.ο.κ. Οι δείκτες των νέων αυτών μεταβλητών δείχνουν πόσες ανισότητες (περιορισμοί) υπάρχουν στο πρόβλημα. Στην περίπτωση του παραδείγματος που εξετάζουμε ορίζουμε δύο μεταβλητές (μία για κάθε περιορισμό) ως εξής:

S_1 = Ώρες Ξυλουργείου (από τις διαθέσιμες) που δεν θα χρησιμοποιηθούν στην παραγωγή καρεκλών και τραπεζιών, και
S_2 = Ώρες Βαφείου που δεν θα χρησιμοποιηθούν.

Οι χαλαρές ή βοηθητικές μεταβλητές μπορούν να θεωρηθούν ως «φανταστικά» προϊόντα, σε αντίθεση με τα πραγματικά προϊόντα που δίνονται από το πρόβλημα (δηλαδή στο συγκεκριμένο παράδειγμα τα τραπέζια και οι καρέκλες). Για να παραχθεί κάθε μονάδα του «φανταστικού» προϊόντος, απαιτείται μία μόνο μονάδα παραγωγικής δυναμικότητας από τα άλλα τμήματα παραγωγής. Επιπλέον, κάθε ένα από τα «φανταστικά» προϊόντα αποφέρει μηδέν κέρδος. Δηλαδή δύο «φανταστικά» προϊόντα υποδηλώνουν αχρησιμοποίητη δυναμικότητα σε κάθε ένα από τα τμήματα.

Για παράδειγμα, αν παραχθούν 70 τραπέζια και 40 καρέκλες, δηλαδή για Χ = 70 και για Ψ = 40, οι ώρες ξυλουργείου που θα απαιτηθούν είναι: $8 \cdot 70 + 8 \cdot 40 = 880$. Σε αυτήν την περίπτωση η τιμή της μεταβλητής S_1 είναι 80 ώρες (960 διαθέσιμες – 880 χρησιμοποιηθείσες). Ο όρος μεταβλητές περιθωρίου έχει την έννοια ότι οι τιμές αυτών των μεταβλητών συμβολίζουν τη διαφορά μεταξύ της αριστερής πλευράς της ανισότητας (απαιτούμενη ποσότητα) και της αντίστοιχης δεξιάς πλευράς (διαθέσιμη ποσότητα). Στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται όλοι οι διαθέσιμοι πόροι ενός περιορισμού, τότε η αντίστοιχη μεταβλητή περιθωρίου ή βοηθητική μεταβλητή έχει την τιμή μηδέν.

Οι περιορισμοί του προβλήματος μετά την προσθήκη των βοηθητικών μεταβλητών μετατρέπονται στις εξής εξισώσεις:

Περιορισμός Ξυλουργείου:	$8X + 8\Psi + S_1 = 960$
Περιορισμός Βαφείου:	$4X + 2\Psi + S_2 = 400$

ή αν θέλουμε να συμπεριλάβουμε όλες τις μεταβλητές σε όλους τους περιορισμούς (σε όποιον περιορισμό δεν εμφανίζεται μία μεταβλητή ο αντίστοιχος συντελεστής της είναι μηδέν) έχουμε:

Περιορισμός Ξυλουργείου:	$8X + 8\Psi + 1S_1 + 0S_2 = 960$
Περιορισμός Βαφείου:	$4X + 2\Psi + 0S_1 + 1S_2 = 400$

Οι μεταβλητές περιθωρίου δεν συνεισφέρουν στο κέρδος της επιχείρησης, επομένως μπορούμε να τις συμπεριλάβουμε στην αντικειμενική συνάρτηση με αντίστοιχους συντελεστές κέρδους μηδέν. Επομένως η αντικειμενική συνάρτηση μετά την προσθήκη και των μεταβλητών περιθωρίου μετατρέπεται ως εξής:

max. K = 14.000X + 10.000Ψ + 0S_1 + 0S_2

όπου, $X \geq 0$, $Ψ \geq 0$,
$S_1 \geq 0$, $S_2 \geq 0$

Οι πραγματικές μεταβλητές X, Ψ αντιπροσωπεύουν ποσότητες παραγωγής των δύο προϊόντων, ενώ οι βοηθητικές μεταβλητές S_1, S_2 αντιπροσωπεύουν ώρες παραγωγής που δεν απορροφούνται στην παραγωγή των ποσοτήτων X, Ψ.

3.5.1 Αλγεβρικός Προσδιορισμός Λύσεων Γραμμικού Προγραμματισμού

Ας εξετάσουμε τους περιορισμούς του προβλήματος όπως διαμορφώθηκαν μετά την προσθήκη των βοηθητικών μεταβλητών. Έχουμε λοιπόν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με τέσσερεις μεταβλητές. Εφ' όσον ο αριθμός των εξισώσεων είναι μικρότερος από τον αριθμό των αγνώστων, υπάρχουν πολλές λύσεις του συστήματος. Ένας απλός τρόπος εύρεσης λύσεων είναι να θέσουμε δύο από τις μεταβλητές ίσες με μηδέν και να λύσουμε το αλγεβρικό σύστημα που προκύπτει των δύο άλλων μεταβλητών με δύο εξισώσεις για να προσδιορίσουμε τις τιμές τους.

Μια εύκολη λύση είναι να θέσουμε τις μεταβλητές X = 0, Ψ = 0. Η λύση που προκύπτει σε αυτή τη περίπτωση είναι $S_1 = 960$, $S_2 = 400$. Είναι ευνόητο ότι η λύση αυτή δεν είναι ιδιαίτερα ελκυστική διότι αντιπροσωπεύει την παραγωγή μηδέν τεμαχίων από καρέκλες και τραπέζια. Με μηδενική παραγωγή καμία από τις διαθέσιμες ώρες παραγωγής δεν χρησιμοποιείται. Γι' αυτό επομένως οι τιμές των βοηθητικών μεταβλητών είναι $S_1 = 960$ ώρες και $S_2 = 400$ ώρες ίσες δηλαδή με τις αρχικά διαθέσιμες ώρες παραγωγής.

Η μέθοδος Simplex, όπως προαναφέρθηκε, είναι μία επαναληπτική μέθοδος η οποία επαναλαμβάνει τα ίδια βήματα εώς ότου προσδιορίσουμε την βέλτιστη λύση. Σε κάθε βήμα της μεθόδου Simplex παίρνουμε μία νέα εφικτή λύση που είναι καλύτερη από την προηγούμενη (βελτιώνει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης). Σαν αρχική λύση της μεθόδου Simplex χρησιμοποιούμε την X = 0, Ψ = 0, $S_1 = 960$, $S_2 = 400$. Η συγκεκριμένη λύση είναι η λύση που μπορούμε να παράγουμε εύκολα για οποιοδήποτε πρόβλημα Γραμμικού

Προγραμματισμού. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στην αρχική αυτή λύση είναι προφανώς μηδέν.

Συνεπώς, αφού με την παραπάνω διαδικασία το συνολικό κέρδος που αποδίδεται είναι μηδέν, θα πρέπει να επιλεχθεί μια διαφορετική διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. Εξάλλου σκοπός είναι να βρεθεί η βέλτιστη λύση και όχι μια πρόχειρη λύση που δεν θα συμφέρει την εκάστοτε επιχείρηση, όπως η παραπάνω λύση. Θα μπορούσαμε λοιπόν να βελτιώσουμε την εν λόγο διαδικασία που ήδη αναλύσαμε, τροποποιώντας την. Έτσι θα πρέπει να σχεδιαστεί ένα νέο πρόγραμμα στο οποίο μία νέα μεταβλητή θα αντικαθιστά μία τουλάχιστον «αρχική» μεταβλητή, που ήδη υπήρχε στην προηγούμενη λύση. Δηλαδή η νέα μεταβλητή θα μπεί στην λύση από την οποία θα φύγει μία από τις ήδη υπάρχουσες. Ένα δεύτερο στοιχείο που θα μπορούσε να διαφοροποιήσει την προηγούμενη διαδικασία επίλυσης από την νέα βελτιωμένη διαδικασία είναι η εισαγωγή ενός πραγματικού προϊόντος, αφού πριν παράγονταν μόνο «φανταστικά» προϊόντα. Οι αντικαταστάσεις αυτές θα πρέπει να πραγματοποιούνται από μία κάθε φορά.

Βέβαια σ' αυτό το σημείο εύστοχα θα μπορούσε κανείς να θέσει τα εξής ερωτήματα:

- Ποιά θα είναι η νέα μεταβλητή που θα πρέπει να εισαχθεί στην διαδικασία επίλυσης του προβλήματος και να αντικαταστήσει την αρχική; Και επειδή η κάθε μεταβλητή ουσιαστικά αντιπροσωπεύει ένα προϊόν, η ερώτηση θα μπορούσε να διατυπωθεί διαφορετικά. Δηλαδή ποιό νέο προϊόν θα αρχίσει να παράγεται και σε ποιό ήδη υπάρχον θα διακοπεί η παραγωγή;
- Ποιά θα είναι η ποσότητα του νέου προϊόντος που θα αρχίσει να παράγεται;

Προκειμένου να γίνει η επιλογή του νέου προϊόντος, του οποίου θα ξεκινήσει τώρα η παραγωγή, θα πρέπει να εξετασθεί η συνεισφορά κέρδους κάθε προϊόντος. Τελικά θα επιλεγεί το προϊόν εκείνο που έχει το μεγαλύτερο κατά μονάδα ποσό κέρδους. Αν εξετάσουμε την αντικειμενική συνάρτηση, θα διαπιστώσουμε ότι το προϊόν που αντιπροσωπεύεται από την μεταβλητή X θα προτιμηθεί γιατί έχει τον μεγαλύτερο συντελεστή κέρδους 14.000 χ. μ. κατά μονάδα προϊόντος. Σε αυτό το σημείο η μεταβλητή X ονομάζεται ***κύρια μεταβλητή*** ή ***εισερχόμενη μεταβλητή***.

Όσον αφορά το δεύτερο ερώτημα, γνωρίζουμε ότι η συνεισφορά κέρδους του νέου προϊόντος είναι 14.000 χ. μ. Κατά μονάδα προϊόντος και επειδή η παραγωγή του προϊόντος αποφέρει το μεγαλύτερο κέρδος, θα συνεχιστεί η παραγωγή του προϊόντος μέχρι να διακοπεί η παραγωγή των ήδη υπάρχοντων προϊόντων. Έτσι η παραγωγή του χ θα σταματήσει μετά από κάποιο σημείο για δύο λόγους. Πρώτον, διότι οι διαθέσιμοι πόροι είναι περιορισμένοι, σύμφωνα με τους Νόμους της Οικονομικής και δεύτερον διότι αν δεν διακοπεί η παραγωγή, θα παραβιαστούν ορισμένοι περιορισμοί του προβλήματος, συγκεκριμένα εκείνοι που αναφέρονται στην μη αρνητικότητα.

Ο αρχικός πίνακας Simplex

Αν τοποθετήσουμε τους συντελεστές των μεταβλητών των δύο περιορισμών και της Αντικειμενικής Συνάρτησης σε ένα πίνακα, ο οποίος ουσιαστικά συγκεντρώνει όλες τις πληροφορίες και τα αριθμητικά στοιχεία του προβλήματος στην τρέχουσα κατάστασή του, θα έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

Στήλη Βασικών Μεταβλητών

Τρέχουσα Λύση

	X	**Ψ**	**S_1**	**S_2**	
S_1	8	8	1	0	960
S_2	4	2	0	1	400
	- 14.000	- 10.000	0	0	0

Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (η τρέχουσα λύση ως την τελική)

Ο παραπάνω πίνακας καλείται **Πίνακας Simplex.**

Κάθε πίνακας Simplex αντιστοιχεί σε μία εφικτή λύση του προβλήματος. Ο αρχικός πίνακας Simplex αντιστοιχεί στην λύση $S_1 = 960$ και $S_2 = 400$ και επομένως $X = 0$ και $\Psi = 0$. Όπως ο πίνακας Simplex εκτός των συντελεστών των μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς του προβλήματος, περιλαμβάνει και κάποιες άλλες πληροφορίες, όπως η πρώτη στήλη και η τελευταία γραμμή (σειρά). Οι επιπλέον αυτές πληροφορίες είναι απαραίτητες για την εφαρμογή της μεθόδου Simplex. Ας εξετάσουμε λοιπόν αναλυτικότερα τη δομή του πίνακα Simplex.

Βασικές και μη βασικές μεταβλητές

Σε ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού οι μεταβλητές που έχουν μη μηδενικές τιμές ονομάζονται ***βασικές μεταβλητές***, ενώ οι υπόλοιπες μη βασικές. Ο αριθμός των βασικών μεταβλητών σε κάθε πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού είναι ίσος με τον αριθμό των περιορισμών του προβλήματος. Στην πρώτη στήλη τοποθετούμε τις βασικές μεταβλητές (την S_1 και την S_2 για τον αρχικό πίνακα). Οι επόμενες στήλες αποτελούν κομμάτι του ***κυρίως πίνακα*** Simplex και τα στοιχεία του, αντιστοιχούν στους συντελεστές των μεταβλητών του προβλήματος. Ποιο συγκεκριμένα το κομμάτι αυτό αποτελεί την ***μήτρα των συντελεστών των μεταβλητών*** του προβλήματος. Ενώ τα στοιχεία της τελευταίας στήλης αντιστοιχούν στις τιμές των περιορισμών. Είναι τα στοιχεία εκείνα που αναφέρονται στον πίνακα ως η ***τρέχουσα λύση***. Η τρέχουσα λύση είναι ουσιαστικά οι τιμές των βασικών μεταβλητών. Δηλαδή η τιμή 960 αντιστοιχεί στην S_1 και η τιμή 400 στην S_2. Οι τιμές των μη βασικών μεταβλητών είναι μηδέν. Δηλαδή $X = 0$ και $\Psi = 0$. Η πρώτη γραμμή του πίνακα περιλαμβάνει τις βασικές κα μη βασικές μεταβλητές. Όσον αφορά την τελευταία γραμμή του πίνακα, προκειμένου να εξηγήσουμε την έννοια των τιμών της, πρέπει πρώτα να δώσουμε την οικονομική ερμηνεία των στοιχείων του πίνακα Simplex.

Οικονομική Ερμηνεία του πίνακα Simplex

Τα στοιχεία κάθε στήλης του πίνακα Simplex είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές των περιορισμών του προβλήματος. Για παράδειγμα η πρώτη στήλη του ***κυρίως πίνακα*** περιέχει τους συντελεστές του X στον πρώτο και δεύτερο περιορισμό αντίστοιχα. Ποιά όμως είναι η οικονομική ερμηνεία αυτών των συντελεστών;

Τα στοιχεία της στήλης X ονομάζονται συντελεστές ανταλλαγής μεταξύ της X και των βασικών μεταβλητών του πίνακα, δηλαδή των S_1 και S_2 και ερμηνεύονται ως εξής. Για να αυξήσουμε την τιμή της X κατά μία μονάδα (για να παράγουμε δηλαδή ένα τραπέζι) απαιτείται να μειώσουμε τις τιμές των S_1 και S_2 κατά 8 και 4 μονάδες αντίστοιχα (δηλαδή να ελαττώσουμε τις μη διαθέσιμες ώρες στο ξυλουργείο και το βαφείο κατά 8 και 4 αντίστοιχα). Η ερμηνεία αυτή είναι λογική αν σκεφτούμε ότι για την κατασκευή κάθε τραπεζιού απαιτούνται 8 ώρες στο ξυλουργείο και 4 ώρες στο βαφείο. Αντίστοιχη ερμηνεία μπορούμε να δώσουμε και για τα στοιχεία της στήλης Ψ. Ένα άλλο σημείο που πρέπει επίσης να παρατηρήσουμε είναι ότι για κάθε βασική μεταβλητή η αντίστοιχη στήλη περιέχει μόνο ένα 1 στη θέση που αντιστοιχεί στην συγκεκριμένη μεταβλητή, ενώ όλα τα άλλα στοιχεία της στήλης είναι μηδέν.

Για παράδειγμα η στήλη της S_1 *είναι* $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

ενώ η στήλη της S_2 *είναι* $\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

Η τελευταία γραμμή του πίνακα είναι η γραμμή που δείχνει την καθαρή επίπτωση στο συνολικό κέρδος (αύξηση κέρδους – μείωση κέρδους) στην περίπτωση που κάθε μία από τις μη βασικές μεταβλητές του προβλήματος αυξηθεί κατά μία βασική μονάδα. Πρέπει πάντα να προσέχουμε στην τελευταία γραμμή του αρχικού πίνακα οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης να γράφονται με το αντίθετο σημείο τους, δηλαδή με πρόσημο αντίθετο από αυτό που πραγματικά έχουν στην εξίσωση της αντικειμενικής συνάρτησης.

Κριτήριο Βελτιστοποίησης

Η τελευταία αυτή γραμμή του πίνακα Simplex καθορίζει και κατά πόσο η δεδομένη λύση του πίνακα Simplex είναι βέλτιστη ή όχι. Οι αρνητικές τιμές δηλώνουν ότι στην περίπτωση που η τιμή της αντίστοιχης μεταβλητής αυξηθεί, θα υπάρχει μείωση του κέρδους. Αντίθετα οι θετικές τιμές δηλώνουν ότι μπορεί να υπάρξει βελτίωση του κέρδους αν αυξηθεί η τιμή της συγκεκριμένης μεταβλητής με θετικό πρόσημο. Αν βέβαια όλες οι τιμές της τελευταίας γραμμής είναι αρνητικές ή μηδέν τότε η λύση που έχουμε είναι η βέλτιστη. Πιο συγκεκριμένα το κριτήριο βελτιστοποίησης μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Τα προβλήματα μεγιστοποίησης (max) θεωρούνται ότι έφτασαν στην βέλτιστη λύση, όταν όλα τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής του πίνακα Simplex είναι μη αρνητικά, δηλαδή θετικά ή μηδέν.

Τα προβλήματα ελαχιστοποίησης (min) θεωρούνται ότι έφτασαν στην βέλτιστη λύση, όταν όλα τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής του πίνακα Simplex είναι μη θετικά, δηλαδή αρνητικά ή μηδέν.

Στο πρόβλημα που εξετάζουμε, παρατηρούμε ότι δεν ικανοποιείται το κριτήριο της βελτιστοποίησης. Έτσι πρέπει να συνεχιστεί η διαδικασία επίλυσης με την μέθοδο Simplex, εώς ότου φτάσουμε στην βέλτιστη λύση.

Επαναληπτική Διαδικασία Simplex

Η μέθοδος Simplex είναι ένας επαναληπτικός αλγόριθμος. Βασίζεται δηλαδή σε μία σταθερή επαναλαμβανόμενη διαδικασία με την οποία από ένα δεδομένο πίνακα Simplex με κατάλληλους αριθμητικούς υπολογισμούς προχωρούμε στον επόμενο, ο οποίος αντιστοιχεί σε μία καλύτερη λύση κ. ο. κ. εώς ότου προσδιοριστεί η βέλτιστη λύση. Η επαναληπτική αυτή διαδικασία περιλαμβάνει τέσσερα βήματα, τα οποία αφού τα περιγράψουμε, θα δούμε κατόπιν την εφαρμογή τους στο συγκεκριμένο πρόβλημα του παραδείγματος της επιπλοποιίας.

Η βασική φιλοσοφία της μεθόδου Simplex είναι ότι σε κάθε βήμα αντικαθιστούμε μία από τις βασικές μεταβλητές σε μία μη βασική μεταβλητή, με στόχο να βελτιωθεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Βήμα 1° : Επιλέγουμε τη μεταβλητή που θα συμπεριληφθεί στις βασικές μεταβλητές. Η επιλογή γίνεται με βάση τη συνεισφορά κάθε μη βασικής μεταβλητής στο συνολικό κέρδος, η οποία φαίνεται στα στοιχεία της τελευταίας γραμμής του πίνακα. Δηλαδή, για να βρούμε ποιά από τις μη βασικές μεταβλητές θα γίνει βασική στη νέα λύση, επιλέγουμε από τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής, στην περίπτωση του προβλήματος μεγιστοποίησης, τον μεγαλύτερο απόλυτα από τους αρνητικούς αριθμούς μόνο και στην περίπτωση του προβλήματος ελαχιστοποίησης, τον μεγαλύτερο από τους θετικούς αριθμούς μόνο. Η στήλη που περιλαμβάνει αυτό το στοιχείο καλείται **Pivot στήλη**.

Βήμα 2° : Εφ' όσον μία από τις μη βασικές μεταβλητές «μπαίνει» στη βάση, μία από τις βασικές μεταβλητές θα πρέπει να «φύγει». Βρίσκουμε την μεταβλητή της βάσης η οποία θα αντικατασταθεί από τη νέα μεταβλητή που επιλέχθηκε στο 1° βήμα ως εξής: Διαιρούμε όλα τα στοιχεία της τελευταίας στήλης του πίνακα Simplex (ποσότητες) με τα αντίστοιχα θετικά στοιχεία (σε περίπτωση αρνητικής ή μηδενικής τιμής το αγνοούμε) της Pivot στήλης. Το μικρότερο θετικό κλάσμα αντιστοιχεί στην μεταβλητή που θα αντικατασταθεί. Τη γραμμή της μεταβλητής που θα αντικατασταθεί την αποκαλούμε **Pivot γραμμή**. Η τομή της Pivot γραμμής με την Pivot στήλη προσδιορίζει το **Pivot στοιχείο**. Το στοιχείο αυτό το χρειαζόμαστε για να το χρησιμοποιήσουμε σαν βασικό οδηγητή ή μεσάζοντα των υπολογιστικών διαδικασιών του μετασχηματισμού του παλαιού πίνακα σε έναν νέο, αφού υπάρχει μια καλύτερη λύση. Σε περίπτωση που υπάρχουν αρνητικές τιμές (αρνητικός συντελεστής) στα στοιχεία της Pivot στήλης, τότε αυτό σημαίνει ότι η εισαγωγή της εισερχόμενης μεταβλητής αυξάνει αντί να ελαττώνει το μέγεθος της εξερχόμενης μεταβλητής στην οποία αντιστοιχεί ο αρνητικός συντελεστής. Το ίδιο ισχύει και αν ο συντελεστής υποκατάστασης είναι μηδέν, γιατί τότε δεν θα υπάρχει κανένα ανώτατο περιοριστικό όριο.

Βήμα 3° : Υπολογισμός νέων τιμών για την Pivot γραμμή. Προκειμένου να βρεθούν οι νέες τιμές για την Pivot γραμμή, πρέπει να διαιρέσουμε όλα τα στοιχεία της με το Pivot στοιχείο.

Βήμα 4° : Υπολογισμός νέων τιμών για τις υπόλοιπες γραμμές του πίνακα Simplex. Οι νέες τιμές κάθε γραμμής, εκτός της Pivot γραμμής, υπολογίζονται ως εξής: Αφαιρούμε από τους αριθμούς της παλαιάς γραμμής (σε κάθε στήλη) το γινόμενο των αντίστοιχων αριθμών της Pivot γραμμής επί ένα αντίστοιχο για κάθε γραμμή **σταθερό συντελεστή**. Ο σταθερός αυτός συντελεστής βρίσκεται όταν διαιρέσουμε τον αντίστοιχο με τον Pivot αριθμό της παλαιάς γραμμής (δηλαδή στην Pivot στήλη) με το Pivot στοιχείο.

<u>Ο δεύτερος πίνακας Simplex</u>

Αφού αναπτύξαμε τα τέσσερα βήματα με τα οποία υπολογίζουμε τα στοιχεία του επόμενου πίνακα Simplex κάθε φορά, ας δούμε τώρα την εφαρμογή τους στο συγκεκριμένο παράδειγμα. Στόχος μας είναι να βρούμε μια νέα λύση η οποία θα μας δώσει μεγαλύτερο κέρδος. Ας θυμηθούμε ότι το κέρδος με την υπάρχουσα λύση του αρχικού πίνακα Simplex είναι μηδέν. Η αρχική λύση είναι: Χ = 0, Ψ = 0, S_1 =960, S_2 = 400.

Η επιλογή για το ποιά μεταβλητή θα είναι αυτή που θα συμπεριληφθεί στην βάση θα γίνει μεταξύ των Χ και Ψ διότι αυτές είναι οι μη βασικές μεταβλητές. Επιλέγουμε την μεταβλητή με την μεγαλύτερη απόλυτα αρνητική τιμή στην τελευταία γραμμή του πίνακα. Η μεταβλητή Χ έχει τιμή | - 14.000 | = 14.000, ενώ η Ψ έχει τιμή | - 10.000 | = 10.000. επομένως επιλέγουμε την Χ διότι για κάθε μονάδα από την Χ που θα παραχθεί το κέρδος θα αυξηθεί κατά 14.000. αντίθετα η επιλογή της Ψ θα οδηγούσε σε μικρότερη αύξηση, μόνο 10.000 χ. μ. Ανά μονάδα της Ψ. Συνεπώς η στήλη της Χ είναι η Pivot στήλη.

Μετά την επιλογή της Χ να συμπεριληφθεί στη νέα βάση, θα πρέπει να δούμε ποιά από τις ήδη βασικές μεταβλητές S_1 και S_2 θα αντικατασταθεί από την Χ. Αν υπολογίσουμε τους λόγους των ποσοτήτων της τελευταίας στήλης προς τους συντελεστές της Pivot στήλης έχουμε:

Για την S_1 : 960 ώρες ξυλουργείου / 8 ώρες ανά τραπέζι = 120 τραπέζια
Για την S_2 : 400 ώρες βαφείου / 4 ώρες ανά τραπέζι = 100 τραπέζια

Αυτό σημαίνει ότι η μεταβλητή S_2 που αντιστοιχεί στο μικρότερο κλάσμα θα αντικατασταθεί από τη Χ.

<u>1ος Πίνακας</u>

	Χ	Ψ	S_1	S_2		
S_1	8	8	1	0	960	(960/8=<u>120</u>)
S_2	4	2	0	1	400	(400/4=<u>100</u>)
	- 14.000	- 10.000	0	0	0	

<u>Οικονομική ερμηνεία της αντικατάστασης Βασικών Μεταβλητών</u>

Η μεταβλητή Χ επιλέγεται γιατί κάθε αύξηση της Χ κατά μία μονάδα (παραγωγή ενός τραπεζιού) αυξάνει το κέρδος κατά 14.000 χ. μ. Άρα λογικά θα επιθυμούσαμε να αυξήσουμε την τιμή Χ όσο το δυνατόν περισσότερο γίνεται. Επειδή όμως αύξηση της ποσότητας της Χ σημαίνει ανάλωση πόρων, είναι προφανές ότι η αύξηση της Χ είναι εφικτή μόνο εφ' όσον υπάρχουν διαθέσιμοι πόροι και περιορίζονται από ποσότητα των διαθέσιμων πόρων.

Για κάθε μονάδα της Χ που παράγεται πρέπει να μειώσουμε την S_1 κατά 8 μονάδες και εφ' όσον έχουμε μόνο 960 μονάδες της S_1 διαθέσιμες, η ανώτερη τιμή για την Χ είναι το 960 / 8 = 120. Ομοίως για κάθε μονάδα Χ πρέπει να μειώσουμε την S_2 κατά 4 μονάδες. Εφ' όσον έχουμε 400 μονάδες της S_2 διαθέσιμες, η μεγαλύτερη ποσότητα Χ που μπορεί να παραχθεί είναι 400 / 4 = 100 μονάδες. Άρα η αύξηση της Χ δεν μπορεί να υπερβεί τις 100 μονάδες. Αν θέσουμε Χ = 100, τότε θα χρησιμοποιηθεί όλη η ποσότητα των 400 ωρών της S_2 και επομένως η τιμή της S_2 θα είναι μηδέν και δεν θα είναι πλέον βασική μεταβλητή.

Αφού αποφασίσαμε πλέον ότι η μεταβλητή Χ θα αντικαταστήσει την S_2, θα πρέπει να υπολογίσουμε ξανά τις τιμές για το δεύτερο πίνακα Simplex. Κατ' αρχήν θα αντικαταστήσουμε την Pivot γραμμή. Το Pivot στοιχείο είναι το 4. Διαιρούμε επομένως όλα τα στοιχεία της Pivot γραμμής με το 4. Άρα η νέα Pivot γραμμή είναι:

4 / 4 = 1 2 / 4 = 1 / 2 0 / 4 = 0 1 / 4 = 1 / 4 400 / 4 = 100

<u>2ος Πίνακας</u>

	X	Ψ	S_1	S_2		
S_1	0	4	1	- 2	160	(160/4=<u>40</u>)
X	1	1/2	0	1/4	100	(100/½=<u>200</u>)
	0	- 3.000	0	3.500	1.400.000	

Οι πράξεις που έγιναν προκειμένου να κατασκευαστεί ο 2ος πίνακας Simplex είναι:

Pivot Γραμμή	**Γραμμή 1η**	**Γραμμή 3η**
	σταθερός συντελεστής: - 8/4 = 2	σταθερός συντελεστής: -14.000/4 = - 3.500
4/4 = 1	8 - 4 * 2 = 0	- 14.000 - 4 * (- 3.500) = 0
2/4 = 1/2	8 - 2 * 2 = 4	-10.000 - 2 * (- 3.500)= - 3.000
0/4 = 0	1 - 0 * 2 = 1	0 - 0 * (- 3.500) = 0
1/4 = 1/4	0 - 1 * 2 = - 2	0 - 1 * (- 3.500) = 3.500
400/4 = 100	960 - 400 * 2 = 160	0 - 400 * (- 3.500) = 1.400.000

Εφ' όσον η τελευταία γραμμή του πίνακα Simplex περιλαμβάνει και αρνητικές τιμές, η λύση που μας δίνει ο δεύτερος πίνακας δεν είναι η βέλτιστη λύση. Επομένως θα πρέπει να επαναλάβουμε τα βήματα του αλγόριθμου Simplex, έτσι ώστε να πάρουμε τον τρίτο κατά σειρά πίνακα.

Ο τρίτος πίνακας Simplex

Η μεταβλητή που θα συμπεριληφθεί στη βάση είναι η Ψ διότι είναι η μόνη με αρνητική τιμή - 3.000 στην τελευταία γραμμή. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε καρέκλα που θα αρχίσουμε να παράγουμε το κέρδος θα αυξάνεται κατά 3.000. Συνεπώς η στήλη Ψ είναι η Pivot στήλη. Μετά την επιλογή της Ψ για να συμπεριληφθεί στη βάση, θα πρέπει να δούμε ποιά από τις ήδη βασικές μεταβλητές S_1 και X θα αντικατασταθεί. Αν υπολογίσουμε τους λόγους των ποσοτήτων της τελευταίας στήλης προς τους συντελεστές της Pivot στήλης, ώστε να προσδιορίσουμε την μέγιστη ποσότητα καρεκλών που μπορεί να παραχθεί, έχουμε:

Για την S_1 : 160 ώρες ξυλουργείου / 4 ώρες ανά καρέκλα = 40 καρέκλες
Για την X : 100 τραπέζια / 1/2 τραπέζια ανά καρέκλα = 200 καρέκλες

Αυτό σημαίνει ότι η S_1 θα αντικατασταθεί από την Ψ. Η νέα Pivot γραμμή, Pivot στήλη και Pivot στοιχείο φαίνονται στον προηγούμενο πίνακα Simplex.

Αφού ορίσαμε λοιπόν ότι η μεταβλητή Ψ θα αντικαταστήσει την S_2, θα πρέπει να υπολογίσουμε ξανά τις τιμές για τον τρίτο πίνακα Simplex. Κατ' αρχήν θα αντικαταστήσουμε την Pivot γραμμή. Το Pivot στοιχείο είναι το 4. Διαιρούμε συνεπώς όλα τα στοιχεία της Pivot γραμμής με το 4. Άρα η νέα Pivot γραμμή είναι:

0 / 4 = 0   4 / 4 = 1   1 / 4 = 1 / 4   - 2 / 4 = - 1 / 2   160 / 4 = 40

Απομένει τώρα να υπολογίσουμε τις νέες τιμές των υπόλοιπων γραμμών του τρίτου πίνακα Simplex. Παρακάτω παρατίθονται οι πράξεις που έγιναν, προκειμένου να κατασκευαστεί ο τρίτος πίνακας του προβλήματος.

Pivot Γραμμή	**Γραμμή 2^η**	**Γραμμή 3^η**
	σταθερός συντελεστής: ½ / 4 = 1/8	σταθερός συντελεστής: - 3.000 / 4 = - 750
0/4 = 0 4/4 = 1 1/4 = 1/4 - 2/4 = -1/2 160/4 = 40	1 - 0 * 1/8 = 1 1/2 - 4 * 1/8 = 0 0 - 1 * 1/8 = - 1/8 1/4 - (- 2)* 1/8 = 2/4 100 - 160 * 1/8 = 80	0 - 0 * (- 750) = 0 - 3.000 - 4 * (- 750)= 0 0 - 1 * (- 750) = 750 3.500 - [- 2 * (- 750) = 2.000 1.400.000 - 160 * (- 750) = 1.520.000

Έτσι η τελική μορφή που θα πάρει ο πίνακας Simplex, είναι η εξής:

3ος Πίνακας

	X	Ψ	S_1	S_2	
Ψ	0	1	1/4	- 1/2	40
X	1	0	- 1/8	2/4	80
	0	0	750	2.000	1.520.000

↕

Βέλτιστη ή Άριστη λύση

Ο παραπάνω πίνακας Simplex είναι και ο τελικός πίνακας για το παράδειγμα που αναλύουμε. Παρατηρούμε ότι η τελευταία γραμμή δεν περιέχει αρνητικά στοιχεία, αλλά όλα τα στοιχεία της έχουν θετικές ή μηδενικές τιμές. Σύμφωνα με το κριτήριο βελτιστοποίησης φτάσαμε στην βέλτιστη ή άριστη λύση (max Κέρδος = 1.520.000). Πράγματι, αν θελήσουμε να κάνουμε επαλήθευση, αντικαθιστώντας τις τιμές της τελικής λύσης στην αντικειμενική συνάρτηση, θα διαπιστώσουμε το εξής:

$$\text{max. } K = 14.000X + 10.000\Psi + 0S_1 + 0S_2$$

$$\text{max. } K = 14.000 * 80 + 10.000 * 40 + 0 + 0$$

$$\text{max. } K = 1.520.000$$

Συγκεκριμένα οι βασικές μεταβλητές είναι η Χ και η Ψ και οι τιμές τους δίνονται στις αντίστοιχες θέσεις της τελευταίας στήλης. Οι τιμές των μη βασικών μεταβλητών είναι μηδέν. **Η βέλτιστη λύση είναι:**

X = 80 τραπέζια	S_1 = 0 ώρες διαθέσιμες στο ξυλουργείο
Ψ = 40 καρέκλες	S_2 = 0 ώρες διαθέσιμες στο βαφείο

Ο συνδυασμός αυτός της παραγωγής δίνει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος το οποίο ανέρχεται σε 1.520.000. Αν δούμε συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα από τους τρεις διαδοχικούς πίνακες Simplex, παρατηρούμε τα εξής:

Αρχικός Πίνακας Simplex:

Λύση → X = 0 τραπέζια,
Ψ = 0 καρέκλες,
S_1 = 960 διαθέσιμες ώρες ξυλουργείου (μη χρησιμοποιηθείσες),
S_2 = 400 διαθέσιμες ώρες βαφείου.

Κέρδος → 0

Δεύτερος Πίνακας Simplex:

Λύση → X = 100 τραπέζια,
Ψ = 0 καρέκλες,
S_1 = 160 διαθέσιμες ώρες ξυλουργείου (μη χρησιμοποιηθείσες),
S_2 = 0 διαθέσιμες ώρες βαφείου (έχουν χρησιμοποιηθεί όλες οι διαθέσιμες ώρες).

Κέρδος → 1.400.000

Τρίτος Πίνακας Simplex:

Λύση → X = 80 τραπέζια,
Ψ = 40 καρέκλες,
S_1 = 0 διαθέσιμες ώρες ξυλουργείου
S_2 = 0 διαθέσιμες ώρες βαφείου

Κέρδος → 1.520.000

Παρατηρούμε ότι σε κάθε επανάληψη του πίνακα Simplex παίρνουμε μία λύση, η οποία είναι καλύτερη ως προς την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (κέρδος) από την προηγούμενη.

3.5.2 Προβλήματα Ελαχιστοποίησης

Μια ειδική περίπτωση προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού είναι τα προβλήματα ελαχιστοποίησης. Στα προβλήματα αυτά η αντικειμενική συνάρτηση αφορά την ελαχιστοποίηση κόστους και όχι την μεγιστοποίηση κέρδους, όπως συναντήσαμε παραπάνω στο πρόβλημα της μεγιστοποίησης. Ένα από τα τυπικά προβλήματα ελαχιστοποίησης κόστους είναι το πρόβλημα της διαίτης, το οποίο θα περιγράψουμε μέσω του παραδείγματος που ακολουθεί παρακάτω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μία επιχείρηση που παράγει ζωοτροφές, έχει μια ειδική παραγγελία από έναν πελάτη της, για την παρασκευή 1.000 κιλών ζωοτροφής η οποία θα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 30% πρωτεΐνες και 40% υδατάνθρακες. Για την παραγωγή της συγκεκριμένης παρτίδας, ο υπεύθυνος παραγωγής της εταιρίας αποφάσισε να αναμίξει μια εισαγόμενη, πλούσια σε θρεπτικά υλικά τροφή, με ιχθυάλευρο και δημητριακά, ώστε αφ' ενός μεν να μειώσει το κόστος, ικανοποιώντας όμως τις ελάχιστες διαιτητικές απαιτήσεις του πελάτη σε περιεκτικότητα πρωτεϊνών και υδαταθρακών. Η εισαγόμενη τροφή έχει περιεκτικότητα 40% σε πρωτεΐνες, 40% σε υδατάνθρακες και κοστίζει 1.000 χ.μ. το κιλό. Το ιχθυάλευρο έχει περιεκτικότητα 25% πρωτεΐνες και 20% υδατάνθρακες και κοστίζει 700 χ.μ. το κιλό. Ενώ τα δημητριακά έχουν περιεκτικότητα 20% και 40% αντίστοιχα σε πρωτεΐνες και υδατάνθρακες και κοστίζουν 800 χ.μ. το κιλό. Τα παραπάνω δεδομένα συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

	Περιεκτικότητα σε πρωτεΐνες	Περιεκτικότητα σε υδατάνθρακες	Κόστος (χ.μ./κιλό)
Εισαγόμενη Τροφή	40%	40%	1.000
Ιχθυάλευρο	25%	20%	700
Δημητριακά	20%	40%	800

*Σε αυτό το σημείο τίθεται το εξής ερώτημα: **τί ποσότητες από κάθε υλικό θα πρέπει να αναμίξει ο υπεύθυνος παραγωγής ώστε να επιτύχει το μικρότερο δυνατό κόστος ικανοποιώντας ταυτόχρονα τις ελάχιστες απαιτήσεις του πελάτη σε θρεπτικά υλικά;***

Μεταβλητές του Προβλήματος

Ο υπεύθυνος παραγωγής επιθυμεί να προσδιορίσει τις ποσότητες από κάθε υλικό που θα πρέπει να αναμίξει. Έτσι θέτουμε ως:

Χ = ποσότητα (σε χιλιόγραμμα) εισαγόμενης τροφής

Ψ = ποσότητα (σε χιλιόγραμμα) ιχθυάλευρου

Ω = ποσότητα (σε χιλιόγραμμα) δημητριακών

Αντικειμενική Συνάρτηση

Στόχος του υπεύθυνου παραγωγής είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής των 1.000 κιλών ζωοτροφής. Εφ' όσον γνωρίζουμε τις τιμές ανά κιλό των ποσοτήτων Χ, Ψ, Ω, το συνολικό κόστος είναι 1000Χ + 700Ψ + 800Ω και επομένως η αντικειμενική συνάρτηση διατυπώνεται ως εξής:

Min. K = 1000X + 700Ψ + 800Ω

Περιορισμοί

1) Η συνολική παραγωγή της ζωοτροφής πρέπει να είναι 1.000 κιλά. Άρα: **Χ + Ψ + Ω = 1.000**

2) Ποσότητα πρωτεϊνών → σύμφωνα με τους περιορισμούς του προβλήματος η συνολική ποσότητα πρωτεϊνών θα πρέπει να είναι 30% της συνολικής ποσότητας της τροφής. Αφού λοιπόν θα παραχθούν 1.000 κιλά τροφής η ποσότητα των πρωτεϊνών θα πρέπει να είναι τουλάχιστον 300 κιλά. Κάθε κιλό εισαγόμενης τροφής περιέχει 40% πρωτεΐνες, επομένως τα Χ κιλά που θα χρησιμοποιηθούν περιέχουν 0,40Χ κιλά πρωτεϊνών. Ομοίως, αν λάβουμε υπόψην τις αντίστοιχες περιεκτικότητες σε πρωτεΐνες του ιχθυάλευρου και των δημητριακών, έχουμε:

→ πρωτεΐνες σε Ψ κιλά ιχθυάλευρου = 0,25Ψ

→ πρωτεΐνες σε Ω κιλά δημητριακών = 0,20Ω

Άρα η συνολική ποσότητα πρωτεϊνών στο μίγμα θα είναι:

0,40Χ + 0,25Ψ + 0,20Ω κιλά

Η ελάχιστη απαιτούμενη ποσότητα πρωτεϊνών είναι 300 κιλά. Συνεπώς η μαθηματική διατύπωση του περιορισμού είναι:

$$0{,}40X + 0{,}25\Psi + 0{,}20\Omega \geq 300$$ ή (πολλαπλασιάζοντας με το 100)

$40X + 25\Psi + 20\Omega \geq 30.000$ → περιορισμός πρωτεϊνών

3) Ποσότητα υδατανθρακών → με τον ίδιο τρόπο διατυπώνουμε και τον περιορισμό που αφορά την ελάχιστη ποσότητα υδατανθρακών που πρέπει να περιέχεται στα 1.000 κιλά τροφής:

$40X + 20\Psi + 40\Omega \geq 40.000$ → περιορισμός υδατανθρακών

Έτσι, η συνολική διατύπωση του προβλήματος έχει ως εξής:

Αντικειμενική συνάρτηση:	Min. $K = 1000X + 700\Psi + 800\Omega$
Υπό τους περιορισμούς:	$X + \Psi + \Omega = 1.000$
	$40X + 25\Psi + 20\Omega \geq 30.000$
	$40X + 20\Psi + 40\Omega \geq 40.000$
όπου:	$X \geq 0, \Psi \geq 0, \Omega \geq 0$

Οι δύο τελευταίοι περιορισμοί του προβλήματος δηλώνουν ότι οι περιεχόμενες ποσότητες πρωτεϊνών και υδατανθρακών στα 1.000 κιλά ζωοτροφής, θα πρέπει να είναι τουλάχιστον 300 και 400 κιλά αντίστοιχα. Δηλαδή θα μπορούσε να προκύψει ένα μίγμα, το οποίο θα περιείχε 400 ακριβώς κιλά υδατανθρακών και 350 κιλά πρωτεϊνών (50 κιλά περισσότερο από την ελάχιστη ποσότητα). Για την μετατροπή των δύο αυτών ανισοτήτων σε ισότητες, θα πρέπει να προβούμε στις εξής κινήσεις.

Έστω S_1 η ποσότητα πρωτεϊνών που περιέχεται στα 1000 κιλά της τροφής και είναι πάνω από το ελάχιστο όριο των 300 κιλών, δηλαδή η πλεονάζουσα ποσότητα από το ελάχιστο όριο του περιορισμού. Αν η ποσότητα αυτή αφαιρεθεί από το αριστερό μέλος της ανισότητας τότε θα έχουμε ακριβώς 300 κιλά πρωτεϊνών. Άρα με τη χρήση της μεταβλητής S_1, η οποία ονομάζεται ***μεταβλητή πλεονάσματος***, η δεύτερη ανισότητα μετατρέπεται σε:

$$40X + 25\Psi + 20\Omega - S_1 = 30.000$$

Ομοίως, αν S_2 η ποσότητα υδατανθράκων που περιέχεται στα 1000 κιλά της τροφής και είναι πάνω από το ελάχιστο όριο των 400 κιλών, ο τρίτος περιορισμός διαμορφώνεται ως εξής:

$$40X + 20\Psi + 40\Omega - S_2 = 40.000$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι οι μεταβλητές πλεονάσματος σε περιορισμούς που αφορούν την τήρηση ελάχιστων αποδεκτών ορίων, συμβολίζουν την ποσότητα υπέρβασης των ελάχιστων ορίων που υπάρχουν στη δεξιά πλευρά της ανισότητας.

Έτσι η διατύπωση του προβλήματος, μετά την χρήση των μεταβλητών του πλεονάσματος, έχει ως εξής:

Αντικειμενική συνάρτηση:	Min. $K = 1000X + 700\Psi + 800\Omega$
Υπό τους περιορισμούς:	$X + \Psi + \Omega = 1.000$
	$40X + 25\Psi + 20\Omega - S_1 = 30.000$
	$40X + 20\Psi + 40\Omega - S_2 = 40.000$
όπου:	$X \geq 0, \Psi \geq 0, \Omega \geq 0, S_1 \geq 0, S_2 \geq 0$

Τεχνητές (μη πραγματικές) Μεταβλητές

Η μεθοδολογία Simplex, όπου αναπτύξαμε προηγούμενα, βασίζεται σε μια επαναληπτική μέθοδο αναζήτησης της βέλτιστης λύσης μεταξύ όλων των εφικτών λύσεων. Ως αρχική λύση εκκίνησης της μεθόδου Simplex θεωρήσαμε την απλούστερη λύση που προέκυπτε όταν θέσαμε όλες τις αρχικές μεταβλητές (Χ, Ψ, Ω) ίσες με μηδέν. Αν ακολουθήσουμε και σε αυτό το πρόβλημα την ίδια προσέγγιση και θέσουμε $X = 0$, $\Psi = 0$, $\Omega = 0$, διαπιστώνουμε ότι προκύπτουν προβλήματα όπως;

- ✓ Κατ' αρχήν ο πρώτος περιορισμός είναι αδύνατο να ικανοποιηθεί διότι θα προκύψει το αποτέλεσμα $0 = 1.000$. Αυτό συμβαίνει διότι ο πρώτος περιορισμός στην αρχική του μορφή ήταν περιορισμός ισότητας και επομένως δεν χρησιμοποιήθηκε βοηθητική μεταβλητή.

- ✓ Στους δύο επόμενους περιορισμούς προκύπτουν οι λύσεις $S_1 = -300$ και $S_2 = -400$, οι οποίες δεν είναι αποδεκτές διότι έχουν αρνητικές τιμές.

Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα αυτό και να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Simplex, με τον ίδιο τρόπο που ακολουθήσαμε στο προηγούμενο πρόβλημα μεγιστοποίησης (όπου όλοι οι περιορισμοί ήταν του τύπου $\leq$), θα κάνουμε το εξής τέχνασμα. Για κάθε έναν περιορισμό ο οποίος είναι ισότητα ή ανισότητα (του τύπου $\geq$), ορίζουμε μια «τεχνητή» μεταβλητή. Για παράδειγμα ο πρώτος περιορισμός με την εισαγωγή μιας τεχνητής μεταβλητής θα πάρει την εξής μορφή:

$$X + \Psi + \Omega + \mu_1 = 1.000$$

Η μ_1 είναι μια τεχνητή μεταβλητή. Με τον όρο «τεχνητή» μεταβλητή εννοούμε ότι δεν υπάρχει φυσική ερμηνεία τής μεταβλητής αυτής, όπως για τις αρχικές μεταβλητές Χ, Ψ, κ.ο.κ. και για τις μεταβλητές περιθωρίου ή πλεονάσματος S_1, S_2, κ.ο.κ. Επιπλέον αφού η μ_1 δεν αντιπροσωπεύει καμιά φυσική ποσότητα η τιμή της θα πρέπει τελικά να είναι μηδέν. Πώς όμως θα μπορέσουμε να οδηγήσουμε μέσω της μεθόδου Simplex την τιμή της μ_1 να είναι τελικά μηδέν; Αυτό μπορεί να επιτευχθεί αν θεωρήσουμε ότι το κόστος κάθε μονάδας της μεταβλητής μ_1 είναι πάρα πολύ μεγάλο. Συνεπώς, εφ' όσον στόχος μας είναι η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης η μέθοδος Simplex θα οδηγήσει μέσω των επαναληπτικών βημάτων μείωσης του κόστους, την τιμή της μ_1 στο μηδέν.

Συμβολικά θα θεωρήσουμε ότι το κόστος κάθε μονάδας της τεχνητής μεταβλητής μ_1 (και γενικά κάθε τεχνητής μεταβλητής) είναι ίσο με **Μ** (όπου Μ ένας πολύ μεγάλος αριθμός).

Μετά την εισαγωγή των τεχνητών μεταβλητών στους περιορισμούς του προβλήματος και στην αντικειμενική συνάρτηση, η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος έχει ως εξής:

<u>Αντικειμενική συνάρτηση</u>:

$$\text{Min. } K = 1000X + 700\Psi + 800\Omega + 0S_1 + 0S_2 + M\mu_1 + M\mu_2 + M\mu_3$$

<u>Υπό τους περιορισμούς</u>:

$$X + \Psi + \Omega + \mu_1 = 1.000$$
$$40X + 25\Psi + 20\Omega - S_1 + \mu_2 = 30.000$$
$$40X + 20\Psi + 40\Omega - S_2 + \mu_3 = 40.000$$

<u>όπου</u>:

$$X \geq 0,\ \Psi \geq 0,\ \Omega \geq 0,\ S_1 \geq 0,\ S_2 \geq 0$$
$$\mu_1 \geq 0,\ \mu_2 \geq 0,\ \mu_3 \geq 0$$

Σε αυτό το σημείο θα λύσουμε τους τρεις παραπάνω περιορισμούς ως προς τις τεχνητές μεταβλητές μ_1, μ_2, μ_3:

$$\mu_1 = 1.000 - X - \Psi - \Omega$$
$$\mu_2 = 30.000 - 40X - 25\psi - 20\Omega + S_1$$
$$\mu_3 = 40.000 - 40X - 20\Psi - 40\Omega + S_2$$

Έτσι αν αντικαταστήσουμε τις τεχνητές μεταβλητές στην αντικειμενική συνάρτηση, τότε αυτή θα πάρει την εξής μορφή:

Min. $K = 1.000X + 700\Psi + 800\Omega + M(1.000 - X - \Psi - \Omega) + M(30.000 - 40X - 25\psi - 20\Omega + S_1) + M(40.000 - 40X - 20\Psi - 40\Omega + S_2)$ =>

Min. $\mathbf{K = (1.000 - 81M)X + (700 - 46M)\Psi + (800 - 61M)\Omega + MS_1 + MS_2 + 71.000M}$

Στην συνέχεια εφαρμόζεται ο αλγόριθμος Simplex. Έτσι ο πρώτος πίνακας για το πρόβλημα αυτό είναι ο εξής:

1ος Πίνακας

	X	Ψ	Ω	S_1	S_2	μ_1	μ_2	μ_3	
μ_1	1	1	1	0	0	1	0	0	1.000
μ_2	40	25	20	-1	0	0	1	0	30.000
μ_3	40	20	40	0	-1	0	0	1	40.000
	-1.000+81M	-700+46M	-800+61M	-M	-M	0	0	0	71.000M

Όπως διαπιστώνουμε στην τελευταία γραμμή του πίνακα οι τιμές των συντελεστών έχουν αντίθετα πρόσημα από αυτά που είχαν στην αντικειμενική συνάρτηση. Στη λύση θα εισέλθει η μεταβλητή με τον μεγαλύτερο θετικό συντελεστή του M (δηλαδή η X με 81-1.000) και θα εξέλθει η μεταβλητή με τον μικρότερο λόγο υποκατάστασης (δηλαδή η μ_2 με λόγο 750, αφού $30.000/40 = 750 \leq 1.000/1 = 1.000$ ή $40.000/40 = 1.000$). Ακολουθώντας την επαναληπτική διαδικασία της μεθόδου Simplex προκειμένου να φτάσουμε στη βέλτιστη λύση, προχωρούμε στην κατασκευή του δεύτερου πίνακα του προβλήματος. Με τον τρόπο που αναλύσαμε προηγουμένως στο πρόβλημα της μεγιστοποίησης θα κατασκευαστούν οι νέες γραμμές του δεύτερου πίνακα. Έτσι έχουμε:

2ος Πίνακας

Χ	Ψ	Ω	S1	S2	μ1	μ2	μ3	
0	3/8	1/2	1/40	0	1	-1/40	0	250
1	5/8	1/2	-1/40	0	0	1/40	0	750
0	- 5	20	1	-1	0	-1	1	10.000
0	-(37/8)M-75	(41/2)M-300	(41/40)M-25	-M	0	25-(81/40)M	0	10.250M+750.000

Αφού διαπιστώνουμε ότι η τελευταία γραμμή του δεύτερου πίνακα Simplex δεν ικανοποιεί το κριτήριο βελτιστοποίησης, επαναλαμβάνουμε την διαδικασία του αλγόριθμου, κατασκευάζοντας έναν τρίτο πίνακα.

3ος Πίνακας

Χ	Ψ	Ω	S1	S2	M1	μ2	μ3	
0	1/2	0	0	1/40	1	0	-1/40	0
1	3/4	0	-1/20	1/40	0	1/20	-1/40	500
0	-1/4	1	1/20	-1/20	0	-1/20	1/20	500
0	(1/2)M-150	0	-10	(1/40)M-15	0	10-M	15-(41/40)M	900.000

Όπως διαπιστώνουμε και πάλι δεν ικανοποιείται το κριτήριο της βελτιστοποίησης, συνεπώς θα πρέπει να προχωρήσουμε στην κατασκευή και τέταρτου πίνακα Simplex, προκειμένου να οδηγηθούμε στην άριστη λύση του προβλήματος.

4ος Πίνακας

	X	Ψ	Ω	S_1	S_2	μ_1	μ_2	μ_3	
Ψ	0	1	0	0	1/20	2	0	-1/20	0
X	1	0	0	-1/20	-1/80	-3/2	1/20	1/80	500
Ω	0	0	1	1/20	-3/80	1/2	-1/20	3/80	500
	0	0	0	-10	-15/2	300-M	10-M	-M+15/2	900.000

↕

Άριστη ή Βέλτιστη Λύση

Έτσι φτάσαμε στη βέλτιστη λύση του προβλήματος, αφού τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής του πίνακα είναι μη θετικά, δηλαδή αρνητικά ή μηδέν. Ας δούμε συνοπτικά την βέλτιστη λύση που προέκυψε από την διαδικασία Simplex, για το πρόβλημα της επιχείρησης ζωοτροφών, παρακάτω:

Ποσότητα Εισαγόμενης Τροφής (Χ) → 500 χιλιόγραμμα

Ποσότητα Ιχθυάλευρου (Ψ) → 0 χιλιόγραμμα

Ποσότητα Δημητριακών (Ω) → 500 χιλιόγραμμα

Συνολικό Κόστος → 500 * (1.000) + 500 * (800) = 900.000 χ. μ.

Επιπλέον Περιεκτικότητα σε πρωτεΐνες (S_1) → 0

Επιπλέον Περιεκτικότητα σε υδατάνθρακες (S_2) → 0

Δηλαδή για την παραγωγή των 1.000 κιλών της ζωοτροφής, ο υπεύθυνος της παραγωγής θα πρέπει να αναμίξει 500 κιλά εισαγόμενης τροφής με 500 κιλά δημητριακών. Ο συνδυασμός αυτός ικανοποιεί τις απαιτήσεις σε πρωτεΐνες και υδατάνθρακες και παράλληλα ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

3.5.3 Προβλήματα Με Μη Εφικτές Λύσεις

Μια άλλη ειδική κατηγορία είναι τα προβλήματα με μη εφικτές λύσεις. Δηλαδή σε μερικές περιπτώσεις για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού είναι δυνατόν να μην υπάρχουν εφικτές λύσεις ή αλλιώς το πρόβλημα να είναι αδύνατον να επιλυθεί. Αυτό μπορεί να οφείλεται σε δύο λόγους. Πρώτον, διότι πράγματι μπορεί να μην υπάρχει λύση στο πρόβλημα είτε λόγω των πολλών αντικρουόμενων περιορισμών του προβλήματος ή ακόμη και γιατί τα δεδομένα του προβλήματος είναι τέτοια που να μην επιδέχονται λύση. Δεύτερος λόγος που μπορεί να οδηγήσει σε πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού να μην έχει λύση είνα η κακή και λανθασμένη διατύπωση των περιορισμών του προβλήματος.

Σε κάθε περίπτωση πάντως ας δούμε τι ακριβώς συμβαίνει στα προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού που δεν έχουν λύση όταν εφαρμόζουμε την μέθοδο Simplex. Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι το παράδειγμα με την επιχείρηση παραγωγής ζωοτροφών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας υποθέσουμε ότι οι απαιτήσεις του πελάτη για πρωτεΐνες και υδατάνθρακες ήταν 30% και 50% αντίστοιχα. Αν θυμηθούμε τα δεδομένα του προβλήματος, οι τρεις τροφές που επρόκειτο να αναμιχθούν ήταν: εισαγόμενη τροφή με περιεκτικότητα 40% σε πρωτεΐνες και 40% σε υδατάνθρακες, ιχθυάλευρο με περιεκτικότητα 25% σε πρωτεΐνες και 20% σε υδατάνθρακες και δημητριακά με περιεκτικότητα 20% και 40% αντίστοιχα σε πρωτεΐνες και σε υδατάνθρακες.

Είναι προφανές ότι με οποιοδήποτε τρόπο και σε οποιαδήποτε ποσότητα αναμιχθούν οι τρεις αυτές τροφές, το μίγμα δεν είναι δυνατόν να έχει περιεκτικότητα 50% σε υδατάνθρακες αφού όλα τα συστατικά έχουν αντίστοιχη περιεκτικότητα το πολύ 40%. Επομένως το ζητούμενο είναι αδύνατο.

	Περιεκτικότητα σε πρωτεΐνες	Περιεκτικότητα σε υδατάνθρακες	Κόστος (χ.μ./κιλό)
Εισαγόμενη Τροφή	40%	40%	1.000
Ιχθυάλευρο	25%	20%	700
Δημητριακά	20%	40%	800
Μίγμα - Ελάχιστη Απαιτούμενη Περιεκτικότητα	30%	50%	Ελάχιστο

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού ως εξής:

Αντικειμενική συνάρτηση: Min. K = 1000X + 700Ψ + 800Ω

Υπό τους περιορισμούς:

1. Περιορισμός συνολικής ποσότητος → X + Ψ + Ω = 1.000

2. Περιορισμός πρωτεϊνών → 40X + 25Ψ + 20Ω ≥ 30.000

3. Περιορισμός υδατανθράκων → 40X + 20Ψ + 40Ω ≥ 50.000

όπου: X ≥ 0, Ψ ≥ 0, Ω ≥ 0

Αφού προσθέσουμε τις μεταβλητές περιθωρίου και τις τεχνητές μεταβλητές κατασκευάζουμε τον πρώτο πίνακα Simplex, ύστερα τον δεύτερο πίνακα και τέλος θα καταλήξουμε στον τρίτο και τελευταίο πίνακα που θα έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

3ος Πίνακας

	X	Ψ	Ω	S_1	S_2	μ_1	μ_2	μ_3	
Ω	0	6/8	1	2/40	0	1	0	0	500
X	1	2/8	0	-2/40	0	0	1	0	500
μ_3	0	-20	0	1	-1	0	0	1	20.000
	0	50-20M	0	-10	-M	0	0	0	—

Επομένως αφού στον τελικό πίνακα Simplex υπάρχει μία τουλάχιστον τιμή τεχνητής μεταβλητής που δεν είναι μηδέν, ο αλγόριθμος Simplex κατέληξε σε μία τελική λύση η οποία δεν είναι εφικτή. Με αυτό το τρόπο διαπιστώνουμε και μέσω της διαδικασίας Simplex ότι το αρχικό πρόβλημα δεν έχει λύση.

Γενικότερα, η μη ύπαρξη εφικτών λύσεων για ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού διαπιστώνεται όταν στον τελικό πίνακα της μεθόδου Simplex, υπάρχουν στη βάση τεχνητές μεταβλητές με μη μηδενική τιμή. Η μη ύπαρξη εφικτών λύσεων σημαίνει ότι είναι αδύνατον να ικανοποιηθούν κάποιοι από τους αρχικούς περιορισμούς του προβλήματος. Αυτό μπορεί να οφείλεται είτε σε πραγματικούς λόγους (για παράδειγμα πολλοί περιορισμοί ή μη εφικτά δεδομένα του προβλήματος) ή σε λάθος διατύπωση των συγκεκριμένων περιορισμών. Αυτό που έχει ιδιαίτερη σημασία είναι ότι οι περιορισμοί οι οποίοι είναι αδύνατον να ικανοποιηθούν εντοπίζονται από τις τεχνητές μεταβλητές που παραμένουν στη βάση.

Όσον αφορά το συγκεκριμένο παράδειγμα που αναλύσαμε, στον τελικό πίνακα Simplex του προβλήματος, στη βάση παρέμεινε η μεταβλητή $μ_3$. Η μεταβλητή αυτή αντιστοιχεί στον τρίτο περιορισμό, δηλαδή τον περιορισμό που ορίζει την ελάχιστη απαιτούμενη ποσότητα υδατανθράκων (50%). Όπως γνωρίζαμε και εκ των προτέρων ο περιορισμός αυτός ήταν αδύνατον να ικανοποιηθεί. Επιπλέον η τιμή της μεταβλητής $μ_3$ στον πίνακα Simplex, που είναι ίση με 10.000 μας δίνει το μέτρο της απόκλισης από τον στόχο του περιορισμού. Δηλαδή η ποσότητα των υδατανθράκων που περιέχεται στην λύση που αντιστοιχεί στον τελευταίο πίνακα Simplex ($X = 500$, $Ω = 500$) υπολείπεται κατά 100 κιλά (οι συντελεστές των περιορισμών είχαν πολλαπλασιασθεί επί 100, άρα η τιμή 10.000 αντιστοιχεί σε 100 κιλά) από την ελάχιστη ποσότητα των υδατανθράκων που είχε ορισθεί στα 500 κιλά.

Η περίπτωση μη εφικτών λύσεων σε ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού μπορεί να προκύψει μόνο σε προβλήματα στα οποία είναι αναγκαία η χρήση τεχνητών μεταβλητών. Ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης (όταν όλοι οι περιορισμοί του είναι του τύπου $\leq$ και το οποίο δεν έχει καμία τεχνητή μεταβλητή) έχει πάντα εφικτές λύσεις.

3.5.4 Προβλήματα Με Πολλαπλές Βέλτιστες Λύσεις

Μια επιπλέον ειδική κατηγορία είναι τα προβλήματα με πολλαπλές βέλτιστες λύσεις. Η βέλτιστη λύση σε ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού προσδιορίζεται από τις τιμές των μεταβλητών στο τελικό πίνακα Simplex. Στα προβλήματα που αναλύσαμε εώς τώρα ο τελικός πίνακας Simplex έδινε μία και μοναδική βέλτιστη λύση. Ενδέχεται όμως σε κάποια προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού να έχουμε περισσότερες από μία βέλτιστες λύσεις. Δηλαδή με διαφορετικές τιμές των μεταβλητών του προβλήματος να έχουμε την ίδια βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Έτσι θα εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να διαπιστώσουμε το γεγονός της μη μοναδικής βέλτιστης λύσης και τις συνθήκες που οδηγούν σε πολλαπλές βέλτιστες λύσεις. Ας εξετάσουμε το παράδειγμα της επιπλοποιίας που αναλύσαμε προηγουμένως, με μερικώς αλλαγμένα τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας υποθέσουμε ότι το κέρδος της επιπλοποιίας για τα τραπέζια και για τις καρέκλες που κατασκευάζει είναι 20.000 και 10.000 χ.μ. αντίστοιχα (αντί των αρχικών τιμών 14.000 και 10.000 χ.μ.). ας υποθέσουμε επίσης ότι οι συντελεστές παραγωγής παραμένουν ίδιοι. Δηλαδή κάθε τραπέζι απαιτεί 8 ώρες στο ξυλουργείο και 4 ώρες στο βαφείο, ενώ για κάθε καρέκλα οι ώρες που απαιτούνται είναι 8 στο ξυλουργείο και 2 στο βαφείο. Για τον επόμενο μήνα η επιπλοποιία έχει προσδιορίσει ότι οι διαθέσιμες ώρες παραγωγής στο ξυλουργείο ανέρχονται συνολικά σε 960, ενώ στο βαφείο είναι μόλις 400.

Η διατύπωση του προβλήματος σε μορφή Γραμμικού Προγραμματισμού έχει ως εξής:

Έστω Χ και Ψ ο αριθμός των τραπεζιών και καρεκλών που θα παραχθούν.

Αντικειμενική Συνάρτηση → max. K = 20.000Χ + 10.000Ψ

Υπό τους περιορισμούς → $8X + 8\Psi \leq 960$ (*περιορισμός ξυλουργείου*)
$4X + 2\Psi \leq 400$ (*περιορισμός βαφείου*)
$X \geq 0, \quad \Psi \geq 0$

Μετά την εισαγωγή των βοηθητικών μεταβλητών και αφού κατασκευάσουμε τον αρχικό πίνακα Simplex του προβλήματος, ο δεύτερος πίνακας θα μας δώσει την πρώτη βέλτιστη λύση ως εξής:

<u>2ος Πίνακας</u>

	X	Ψ	S1	S2	
S1	0	4	1	-2	160
X	1	1/2	0	1/4	100
	0	0	0	5000	2.000.000

Πρώτη Βέλτιστη Λύση

Για την παραγωγή 100 τραπεζιών (Χ = 100) και 0 καρεκλών (Ψ = 0 αφού δεν περιλαμβάνεται στη βάση), το κέρδος που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση είναι 2.000.000 χ.μ.

Σε κάθε πίνακα Simplex οι τιμές της τελευταίας γραμμής που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές είναι πάντα ίσες με μηδέν. Στον συγκεκριμένο τελικό πίνακα Simplex παρατηρούμε ότι υπάρχουν και μη βασικές μεταβλητές οι οποίες έχουν στην τελευταία γραμμή τιμή ίση με μηδέν. Για παράδειγμα η μεταβλητή Ψ.

Οι τιμές της τελευταίας γραμμής δηλώνουν την καθαρή μεταβολή στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης όταν η συγκεκριμένη μεταβλητή αυξηθεί κατά μία μονάδα. Στην προκειμένη περίπτωση αν η Ψ αυξηθεί κατά μία μονάδα η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα παραμείνει αμετάβλητη στα 2.000.000. δηλαδή θα έχουμε μία άλλη λύση η οποία θα δίνει την ίδια βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Σε αυτή την περίπτωση η μεταβλητή που θα αντικατασταθεί είναι η S_1, διότι έχει τον μικρότερο λόγο τιμών της τελευταίας στήλης προς την Pivot στήλη. Ο νέος πίνακας Simplex που προκύπτει με τη μεταβλητή Ψ στη βάση είναι ο εξής:

<u>"Νέος" Πίνακας Simplex</u>

	X	**Ψ**	**S_1**	**S_2**	
Ψ	0	1	1/4	-1/2	40
X	1	0	-1/8	1/2	80
	0	0	0	5000	2.000.000

Δεύτερη Βέλτιστη Λύση

Για την παραγωγή 80 τραπεζιών (Χ = 80) και 40 καρεκλών (Ψ = 40), το κέρδος που αντιστοιχεί στην νέα αυτή λύση είναι πάλι 2.000.000 χ.μ. Επομένως και αυτή η λύση είναι βέλτιστη.

Παρατηρούμε ότι η διαφορά μεταξύ των δύο λύσεων είναι ότι μειώθηκε η παραγωγή τραπεζιών κατά 20 μονάδες και αυξήθηκε αντίστοιχα η παραγωγή καρεκλών κατά 40 μονάδες. Δηλαδή για κάθε τραπέζι λιγότερο μπορούν να κατασκευαστούν δύο καρέκλες χωρίς καμία επίπτωση στο κέρδος (αφού παρέμεινε στα 2.000.000 χ.μ.).

Άλλες Βέλτιστες Λύσεις

Κάθε άλλος συνδυασμός τραπεζιών και καρεκλών μεταξύ των δύο βέλτιστων λύσεων, που προέκυψαν ύστερα από την εφαρμογή της μεθόδου Simplex, αποτελεί επίσης μία βέλτιστη λύση.
Οι υπόλοιποι συνδυασμοί προκύπτουν αντικαθιστώντας την παραγωγή ενός τραπεζιού με δύο καρέκλες. Αυτό άλλωστε προκύπτει και από τον "νέο" πίνακα (που παραθέσαμε παραπάνω), όπου ο συντελεστής ανταλλαγής καρεκλών (Ψ) προς τραπέζια (Χ) είναι 1/2. Τα όρια μέσα στα οποία μπορούμε να κινηθούμε είναι αυτά που προσδιορίζονται από τις δύο λύσεις που βρέθηκαν με την μέθοδο Simplex.

→ Χ = 100 και Ψ = 0 εώς Χ = 80 και Ψ = 40 ←

Για παράδειγμα η λύση Χ = 99 (τραπέζια) και Ψ = 2 (καρέκλες) δίνει την ίδια τιμή του βέλτιστου κέρδους, το ίδιο και η Χ = 90 και Ψ = 20, κ.ο.κ.

3.5.5 Οικονομική Ερμηνεία της Τελικής Λύσης

Η οικονομική ερμηνεία των τιμών του τελικού πίνακα Simplex, που μας δίνει και την βέλτιστη λύση του προβλήματος είναι πολύ σημαντική διότι παρέχει χρήσιμες πληροφορίες που βοηθούν στη λήψη αποφάσεων. Άλλωστε η μέθοδος Simplex δεν αποτελεί μόνο μία μεθοδολογία επίλυσης των προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού για την εύρεση της βέλτιστης λύσης. Ο τελικός πίνακας Simplex μας δίνει πολλές χρήσιμες πληροφορίες για την οικονομική ανάλυση του προβλήματος, πληροφορίες που δεν είναι δυνατόν να τις παράγουμε με κανέναν άλλο τρόπο.

Προκειμένου να γίνει κατανοητό το περιεχόμενο και η σημασία της οικονομικής ερμηνείας, θα γίνει χρήση ενός προβλήματος μίξης παραγωγής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η επιχείρηση ΑΓΡΟΤΙΝΗ αγροτικών μηχανημάτων, κατασκευάζει δύο αγροτικά μηχανήματα, τους καλλιεργητές και τα αλέτρια, τα οποία και διαθέτει σε όλη την Ελλάδα. Η διαδικασία παραγωγής και για τα δύο προϊόντα απαιτεί διαφορετικές ώρες εργασίας για το κάθε προϊόν στα τρία *τμήματα της επιχείρησης: το τμήμα κοπής μετάλλων, το τμήμα συναρμολόγησης και το βαφείο - συσκευαστήριο. Για την κατασκευή κάθε καλλιεργητή απαιτούνται 10 ώρες για την κοπή των μετάλλων, 5 ώρες συναρμολόγησης και 1 ώρα βαφής - συσκευασίας. Για κάθε αλέτρι οι αντίστοιχες ώρες που απαιτούνται είναι 6 για κοπή μετάλλων, 10 για συναρμολόγηση και 2 για βαφή - συσκευασία. Για τον επόμενο κύκλο παραγωγής η ΑΓΡΟΤΙΝΗ έχει προσδιορίσει ότι οι διαθέσιμες ώρες παραγωγής στο τμήμα κοπής μετάλλων είναι 2.500, στο τμήμα συναρμολόγησης 2.000 και στο συσκευαστήριο - βαφείο 500. Για κάθε καλλιεργητή το κέρδος της επιχείρησης είναι 23.000 χ.μ., ενώ για κάθε αλέτρι είναι 32.000 χ.μ.*

Η ΑΓΡΟΤΙΝΗ ενδιαφέρεται να αξιοποιήσει τις διαθέσιμες ώρες με τέτοιο τρόπο ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος της από τις πωλήσεις καλλιεργητών και αλετριών. Υποθέτουμε ότι οποιαδήποτε ποσότητα θα απορροφηθεί στην αγορά. Η διεύθυνση της επιχείρησης θα ήθελε επίσης να έχει επιπρόσθετες πληροφορίες που θα τη βοηθούσαν στον καλύτερο προγραμματισμό της παραγωγής. Τέτοιες πληροφορίες είναι για παράδειγμα οι εξής:

- Αν χρειάζεται να μετακινήσει προσωπικό από τμήμα σε τμήμα αυξομειώνοντας έτσι τις διαθέσιμες ώρες σε κάθε τμήμα, ώστε να γίνει μια πιο ορθολογική διαχείριση του εργατικού δυναμικού.

- Να γνωρίζει σε ποιά τμήματα θα μπορούσαν να προστεθούν ώρες παραγωγής και ποιο θα ήταν το οικονομικό κέρδος από την ανακατανομή του προσωπικού.

- Αν χρειασθεί υπερωριακή απασχόληση σε κάποιο ή κάποια τμήματα και αν το κόστος της υπερωριακής απασχόλησης δικαιολογείται από το οικονομικό αποτέλεσμα.

- Αν κάποιο από τα δύο προϊόντα παρουσιάζει μεγάλη ζήτηση και πρέπει να αυξηθεί η παραγωγή του, με ποιό τρόπο θα μπορούσε να γίνει αυτό με τον πλέον αποτελεσματικό τρόπο και τι επιπτώσεις θα είχε η αλλαγή αυτή στη παραγωγή του δεύτερου προϊόντος και στα τμήματα παραγωγής.

Ας διατυπώσουμε κατ' αρχήν τα δεδομένα του προβλήματος σε μορφή πίνακα:

	Απαιτούμενες ώρες για την παραγωγή 1 μανάδας		
Τμήμα παραγωγής	**Χ** (καλλιεργητής)	**Ψ** (αλέτρι)	**Διαθέσιμες ώρες**
Κοπή	10	6	2.500
Συναρμολόγηση	5	10	2.000
Συσκευασία	1	2	500
Κέρδος ανά μονάδα προϊόντος	23.000	32.000	

Έτσι μπορεί να διατυπωθεί ως πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού, ως εξής:

Αντικειμενική Συνάρτηση $\rightarrow$ max. $K = 23.000X + 32.000\Psi$

Υπό τους περιορισμούς $\rightarrow$ $10X + 6\Psi \leq 2.500$

$5X + 10\Psi \leq 2.000$

$1X + 2\Psi \leq 500$ όπου: $X \geq 0$, $\Psi \geq 0$

Μετά την εισαγωγή μεταβλητών περιθωρίου S_1, S_2, S_3 στους περιορισμούς κατασκευάζουμε τον πρώτο πίνακα Simplex του παραδείγματός μας. Έτσι έχουμε:

1ος Πίνακας

	X	Ψ	S_1	S_2	S_3	
S_1	10	6	1	0	0	2.500
S_2	5	10	0	1	0	2.000
S_3	1	2	0	0	1	500
	-23.000	-32.000	0	0	0	0

Αφού κατασκευάσουμε και τον δεύτερο πίνακα, προχωράμε κατευθείαν στην κατασκευή του τρίτου πίνακα που μας δίνει και την τελική βέλτιστη λύση.

3ος Πίνακας

	X	Ψ	S_1	S_2	S_3	
X	1	0	1/7	-6/70	0	1.300/7
Ψ	0	1	-1/14	1/7	0	750/7
S_3	0	0	0	-2/10	1	100
	0	0	1.000	2.600	0	7.700.000

↕

Άριστη ή βέλτιστη λύση

Οι μεταβλητές των προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού περιλαμβάνουν τόσο τις αρχικές μεταβλητές του προβλήματος όσο και τις μεταβλητές περιθωρίου. Οι τιμές των αρχικών μεταβλητών προσδιορίζουν την βέλτιστη λύση του προβλήματος. Οι τιμές των μεταβλητών περιθωρίου προσδιορίζουν το κατά πόσο οι περιορισμοί του προβλήματος έχουν εξαντληθεί ή υπάρχει περίσσευμα ή έλλειμμα (για περιορισμούς $\leq$ ή $\geq$ αντίστοιχα). Οι τιμές των βασικών μεταβλητών δίνονται στην τελευταία στήλη του τελικού πίνακα Simplex. Οι τιμές των υπόλοιπων μη βασικών μεταβλητών είναι μηδέν. Η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης δίνεται στην τελευταία γραμμή στη θέση της τελευταίας στήλης.

Έτσι στο συγκεκριμένο πρόβλημα η βέλτιστη λύση είναι:

Χ = 1300/7 ή (185 + 5/7) τεμάχια → κατασκευή καλλιεργητών

Ψ = 750/7 ή (107 + 1/7) τεμάχια → κατασκευή αλετριών

Μέγιστο κέρδος = 7.700.000 χ.μ.

Αν αντικαταστήσουμε στην αντικειμενική συνάρτησητις βέλτιστες τιμές των Χ και Ψ, θα επιβεβαιώσουμε την βέλτιστη τιμή του κέρδους:

$$23.000 * (1.300/7) + 32.000 * (750/7) = 7.700.000$$

Οι τιμές των μεταβλητών περιθωρίου μας δίνουν τις ώρες παραγωγής που έχουν περισσέψει (δηλαδή αυτές που δεν χρησιμοποιήθηκαν στη παραγωγή που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση) στα τρία τμήματα της παραγωγής. Συγκεκριμένα:

S_1 = 0 (μη βασική μεταβλητή) } συνεπώς στο τμήμα κοπής χρησιμοποιήθηκαν όλες οι ώρες που ήταν διαθέσιμες (2.500 ώρες)

S_2 = 0 (μη βασική μεταβλητή) } συνεπώς στο τμήμα συναρμολόγησης χρησιμοποιήθηκαν όλες οι ώρες που ήταν διαθέσιμες (2.000 ώρες)

S_3 = 100 ώρες } στο τμήμα συσκευασίας περισσεύουν 100 ώρες από τις 500 που ήταν διαθέσιμες. Χρησιμοποιήθηκαν μόνο οι 400 ώρες.

Ο πρώτος και ο δεύτερος περιορισμός καλούνται ***ενεργοί περιορισμοί*** διότι είναι αυτοί που περιορίζουν την βέλτιστη λύση. Αντίθετα ο τρίτος περιορισμός είναι μη ενεργός. Εφ'όσον όλες οι διαθέσιμες ώρες έχουν χρησιμοποιηθεί στα τμήματα κοπής ή συναρμολόγησης αν στα τμήματα αυτά είχαμε μία ώρα περισσότερο ή λιγότερο η βέλτιστη λύση θα άλλαζε (δηλαδή θα είχαμε αύξηση ή μείωση της παραγωγής αντίστοιχα). Αντίθετα η βέλτιστη λύση δεν θα άλλαζε αν είχαμε μία επιπλέον ώρα ή μία ώρα λιγότερη στο τμήμα συσκευασίας, διότι ήδη περισσεύουν 100 ώρες, οπότε αν είχαμε μία ώρα λιγότερη θα περίσσευαν 99 ώρες και αν είχαμε μία ώρα παραπάνω θα περίσσευαν 101 ώρες.

Δεν έχει λοιπόν έννοια από οικονομικής πλευράς να αυξήσουμε τις ώρες στο τμήμα συσκευασίας. Μάλιστα θα μπορούσαμε να τις ελαττώσουμε εώς και 100 ώρες λιγότερες χωρίς καμία επίπτωση στη βέλτιστη παραγωγή και στα κέρδη της επιχείρησης. Αντίθετα στα τμήματα κοπής και συναρμολόγησης κάθε αυξομείωση των διαθέσιμων ωρών παραγωγής θα οδηγήσει σε αλλαγές στις ποσότητες της βέλτιστης παραγωγής και φυσικά στο μέγιστο κέρδος.

Όπως έχει ήδη προαναφερθεί οι συντελεστές του πίνακα Simplex σε κάθε στήλη καλούνται ***συντελεστές ανταλλαγής***. Αν θέλουμε να δώσουμε την οικονομική τους ερμηνεία θα μπορούσαμε να πούμε ότι δείχνουν πόσες μονάδες από κάθε μία από τις βασικές μεταβλητές πρέπει να δωθούν για να αποκτήσουμε μία μονάδα από τη συγκεκριμένη μη βασική μεταβλητή. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα οι μη βασικές μεταβλητές είναι οι S_1 και η S_2. Ας δούμε παρακάτω την ερμηνεία των συντελεστών ανταλλαγής στο παράδειγμα της ΑΓΡΟΤΙΝΗΣ.

Τμήμα κοπής

Η S_1 συμβολίζει τις μη χρησιμοποιηθείσες ώρες στο τμήμα κοπής. Σύμφωνα με την παραπάνω ερμηνεία των συντελεστών ανταλλαγής στον τελικό πίνακα Simplex έχουμε:

Για να αυξηθεί η μεταβλητή S_1 κατά μία μονάδα θα πρέπει:
→ η Χ να μειωθεί κατά 1/7
→ η Ψ να αυξηθεί κατά 1/14 (διότι ο συντελεστής ανταλλαγής S_1 και Ψ είναι - 1/14)
→η S_3 να μείνει αμετάβλητη

Η αύξηση της S_1 κατά μία μονάδα σημαίνει μία περισσότερο μη χρησιμοποιημένη ώρα παραγωγής στο τμήμα κοπής ή αλλιώς μία ώρα κοπής λιγότερη. Άρα:

Αλλαγές στη βέλτιστη λύση από μία ώρα κοπής λιγότερο

	Από		**Σε**
Ώρες παραγωγής στο τμήμα κοπής	2.500 ώρες		2.499 ώρες
Παραγωγή καλλιεργητών	185 + 5/7	- 1/7	185 + 4/7
Παραγωγή αλετριών	107 + 1/7	+ 1/14	107 + 3/14
Κέρδος	7.700.000		7.699.000

Η μείωση του κέρδους που προκύπτει από τις αλλαγές στη βέλτιστη λύση:

Από καλλιεργητές → (- 1/7) * 23.000
Από αλέτρια → (1/14) * 32.000
Σύνολο→ (- 1/7) * 23.000 + (1/14) * 32.000 = - 1000

Αντιστρέφοντας το σκεπτικό μπορούμε να υπολογίσουμε τι θα γίνει με μία παραπάνω ώρα διαθέσιμη στο τμήμα κοπής.

Αλλαγές στη βέλτιστη λύση από μία επιπλέον ώρα κοπής

	Από		**Σε**
Ώρες παραγωγής στο τμήμα κοπής	2.500 ώρες		2.501 ώρες
Παραγωγή καλλιεργητών	185 + 5/7	+ 1/7	185 + 6/7
Παραγωγή αλετριών	107 + 1/7	- 1/14	107 + 1/14
Κέρδος	7.700.000		7.701.000

Η αύξηση του κέρδους που προκύπτει από τις αλλαγές στη βέλτιστη λύση:

Από καλλιεργητές → (1/7) * 23.000
Από αλέτρια → (- 1/14) * 32.000
Σύνολο→ (1/7) * 23.000 + (- 1/14) * 32.000 = 1000

Τμήμα συναρμολόγησης

Αντίστοιχη ανάλυση μπορούμε να κάνουμε και με την μεταβλητή S_2, η οποία συμβολίζει τις μη χρησιμοποιηθείσες ώρες στο τμήμα συναρμολόγησης. Οι συντελεστές μετατροπής στον τελικό πίνακα Simplex μεταξύ της S_2 και των βασικών μεταβλητών X, Ψ και S_3 δίνουν τα εξής αποτελέσματα:

Για να αυξηθεί η S_2 κατά μία μονάδαθα πρέπει:
→ η X να αυξηθεί κατά 6/70 (διότι ο αντίστοιχος συντελεστής ανταλλαγής είναι - 6/70)
→ η Ψ να μειωθεί κατά 1/7
→η S_3 να αυξηθεί κατά 2/10 ώρες

Η αύξηση της S_2 κατά μία μονάδα σημαίνει μία επιπλέον μη χρησιμοποιημένη ώρα παραγωγής στο τμήμα συναρμολόγησης ή αλλιώς μία ώρα παραγωγής λιγότερη. Άρα:

Αλλαγές στη βέλτιστη λύση από μία ώρα συναρμολόγησης λιγότερο			
	Από		**Σε**
Ώρες παραγωγής στο τμήμα συναρμολόγησης	2.000 ώρες		1.999 ώρες
Παραγωγή καλλιεργητών	185 + 5/7	+ 6/70	185 + 56/70
Παραγωγή αλετριών	107 + 1/7	- 1/7	107
Μη χρησιμοποιηθείσες ώρες συσκευασίας	100	+2/10	100
Κέρδος	7.700.000		7.697.400

Η μείωση του κέρδους που προκύπτει από τις αλλαγές στη βέλτιστη λύση:

Από καλλιεργητές → (6/70) * 23.000 = 13.800/7
Από αλέτρια → (- 1/7) * 32.000 = - 32.000/7
Σύνολο→ 13.800/7 - 32.000/7 = - 2.600

Η αύξηση των μη χρησιμοποιημένων ωρών παραγωγής στο τμήμα συσκευασίας (S_3) μπορεί να επαληθευθεί ως εξής:

Επιπλέον ώρες στη συσκευασία για καλλιεργητές λόγω αύξησης της παραγωγής κατά (6/70) → (6/70) * 1 = 6/70

Ώρες που απελευθερώνονται στη συσκευασία από τη μείωση της παραγωγής αλετριών κατά (1/7) → (1/7) * 2 = 20/70

Συνολική μείωση → 20/70 - 6/70 = 2/10

Αντιστρέφοντας το σκεπτικό μπορούμε να υπολογίσουμε τι θα γίνει με μία επιπλέον ώρα διαθέσιμη στο τμήμα συναρμολόγησης.

Αλλαγές στη βέλτιστη λύση από μία επιπλέον ώρα συναρμολόγησης			
	Από		**Σε**
Ώρες παραγωγής στο τμήμα συναρμολόγησης	2.000 ώρες		2001 ώρες
Παραγωγή καλλιεργητών	185 + 5/7	- 6/70	185 + 44/70
Παραγωγή αλετριών	107 + 1/7	+ 1/7	107 + 2/7
Μη χρησιμοποιηθείσες ώρες συσκευασίας	100	-2/10	99 + 8/10
Κέρδος	7.700.000		7.702.600

<u>Σκιώδεις Τιμές των Περιορισμών</u>

Όπως είδαμε στις προηγούμενες παραγράφους ο τελικός πίνακας Simplex περιέχει δεδομένα από τα οποία μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες σχετικά με τις μεταβολές στη βέλτιστη λύση που προκαλούνται εξαιτίας των αλλαγών στους περιορισμούς του προβλήματος (αυξομειώσεις των διαθέσιμων πόρων). Είμαστε επίσης σε θέση να καθορίσουμε και την επίδραση που οι αλλαγές αυτές θα έχουν στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (κέρδος ή κόστος).

Έτσι, για παράδειγμα, η αύξηση των ωρών στο τμήμα κοπής κατά μία ώρα θα έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση των κερδών κατά 1.000 χ.μ. Ομοίως αύξηση των ωρών συναρμολόγησης κατά μία ώρα θα έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση του κέρδους κατά 2.600 χ.μ. Αντίθετα το κέρδος δεν πρόκειται να μεταβληθεί αν αυξήσουμε τις ώρες συσκευασίας.

Αν παρατηρήσουμε τις τιμές της τελευταίας γραμμής του πίνακα που αντιστοιχούν στις μεταβλητές S_1, S_2, S_3 θα δούμε ότι αυτές είναι 1.000, 2.600 και 0 αντίστοιχα που δηλώνουν την αύξηση του κέρδους (ή τη μείωση όταν οι τιμές είναι αρνητικές) όταν οι μεταβλητές S_1, S_2, S_3 αυξηθούν κατά μία μονάδα.

Οι τιμές αυτές συμπίπτουν με αυτές που προσδιορίσαμε στην ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου και καλούνται ***σκιώδεις τιμές ή τεχνικές λογιστικές τιμές*** των περιορισμών του προβλήματος.

Δηλαδή η αξία μιας επιπλέον ώρας στο τμήμα κοπής είναι 1.000 χ.μ. Επομένως αν υποθέσουμε ότι ο διευθυντής παραγωγής είχε την δυνατότητα να αποκτήσει επιπλέον ώρες στο τμήμα κοπής (είτε ως υπερωριακή απασχόληση είτε ως πρόσθετη απασχόληση) η τιμή που θα ήταν διατεθιμένος να πληρώσει για κάθε μία επιπλέον ώρα θα ήταν 1.000 χ.μ. Η τιμή αυτή δικαιολογείται από την προηγούμενη ανάλυση διότι η αύξηση του κέρδους από μία επιπλέον ώρα στο τμήμα κοπής είναι 1.000 χ.μ.

Η σκιώδης τιμή για το τμήμα συναρμολόγησης είναι 2.600 χ.μ. και επομένως η αξία της κάθε επιπλέον ώρας (η οριακή αξία δηλαδή) στο τμήμα συναρμολόγησης είναι 2.600 χ.μ.

Αντιθέτως, η σκιώδης τιμή της S_3 των ωρών συσκευασίας είναι 0, δηλαδή η οριακή αξία των ωρών συσκευασίας είναι 0, και επομένως δεν έχει νόημα να χρησιμοποιήσουμε επιπλέον ώρες στο τμήμα αυτό. Το συμπέρασμα αυτό είναι προφανές αν αναλογισθούμε ότι ήδη περισσεύουν 100 ώρες στο τμήμα συσκευασίας και επομένως δεν υπάρχει κανένας λόγος απόκτησης επιπλέον ωρών.

3.5.6 Ανάλυση Ευαισθησίας

Η ανάλυση ευαισθησίας αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι όλων των αναλυτικών και ποσοτικών μεθοδολογιών για τη λήψη αποφάσεων. Με τον όρο «**ανάλυση ευαισθησίας**» εννοούμε τη μελέτη που ακολουθεί τη φάση εύρεσης της βέλτιστης λύσης, με σκοπό να προσδιορίσουμε το πόσο εύκολα μεταβάλεται (ή πόσο ευαίσθητη είναι η λύση στην οποία καταλήξαμε), η «βέλτιστη λύση» σε αλλαγές των τιμών των διαφόρων παραμέτρων του προβλήματος. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι οι παράμετροι και τα δεδομένα κάθε προβλήματος προκύπτουν από συγκεκριμένες εκτιμήσεις και μετρήσεις και οπωσδήποτε αφ'ενός μεν εμπεριέχουν την πιθανότητα λάθους εκτίμησης και αφ'ετέρου είναι πολύ πιθανόν να μεταβληθούν στο μέλλον. Όσο λιγότερο ευαίσθητη είναι μια προτεινόμενη λύση σε μεταβολές των παραμέτρων από τις οποίες εξαρτάται, τόσο πιο «σίγουροι» αισθανόμαστε για την υλοποίηση της συγκεκριμένης επιλογής. Αντίθετα αν με την ελάχιστη μεταβολή στην τιμή μιας παραμέτρου προκύπτει μια διαφορετική κάθε φορά «βέλτιστη λύση», τότε η απόφαση στην οποία καταλήξαμε παρουσιάζει εξαιρετική ευαισθησία και θα πρέπει πριν την υλοποίησή της να επανεξετάσουμε τις παραμέτρους και τις παραδοχές πάνω στις οποίες στηρίζεται.

Ας ξαναθυμηθούμε το παράδειγμα της ΑΓΡΟΤΙΝΗΣ στο οποίο καταλήξαμε στη βέλτιστη λύση. Ο υπεύθυνος παραγωγής της ΑΓΡΟΤΙΝΗΣ θα μπορούσε να αναρωτηθεί τι μεταβολές πιθανόν να προκύψουν στην «βέλτιστη λύση» όταν μια σειρά από παραμέτρους του προβλήματος είναι δυνατόν να αλλάξουν.

❖ Για παράδειγμα αν ο συντελεστής κέρδους για κάθε αλέτρι από 32.000 χ.μ. μειωθεί στις 30.000 χ.μ., συνεπάγεται αυτό και αλλαγή του αριθμού αλετριών και καλλιεργητών που πρέπει να κατασκευασθούν;
Αν η «βέλτιστη λύση» δεν αλλάζει για τόσο μικρές αλλαγές στο συντελεστή κέρδους, τότε ποιά είναι τα όρια των συντελεστών κέρδους μέσα στα οποία η βέλτιστη λύση παραμένει η ίδια; Προφανές είναι ότι αν ο συντελεστής κέρδους του ενός προϊόντος μειωθεί πολύ, τότε θα είναι πιο επικερδές να χρησιμοποιήσουμε τις διαθέσιμες ώρες παραγωγής για το δεύτερο προϊόν.

❖ Εξετάσαμε προηγουμένως τις αλλαγές που προκύπτουν στις παραγόμενες ποσότητες αλετριών και καλλιεργητών όταν αυξομειωθούν οι διαθέσιμες ώρες παραγωγής σε κάποιο από τα τμήματα παραγωγής. Έτσι καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι αν υπήρχε μία επιπλέον ώρα στο τμήμα κοπής, τότε η παραγωγή των καλλιεργητών θα αυξανόνταν κατά 1/7, η δε παραγωγή των αλετριών θα μειωνόνταν κατά 1/14. Αναλογικά αν θεωρήσουμε 14 επιπλέον ώρες στο τμήμα κοπής, τότε θα μπορούσαμε να παράγουμε 14 * 1/7 = 2 παραπάνω καλλιεργητές και 14 * 1/14 =1 λιγότερο αλέτρι. Μέχρι ποιού σημείου όμως κανείς μπορεί να εφαρμόσει αυτές τις αναλογίες;
Οπωσδήποτε υπάρχει κάποιο όριο πέρα από το οποίο δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τις αναλογικές αυτές σχέσεις, διότι η αύξηση της παραγωγής κάποιου προϊόντος απορροφά πόρους και από άλλους περιορισμούς οι οποίοι σε κάποιο σημείο θα εξαντληθούν. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η αύξηση της παραγωγής των καλλιεργητών γίνεται εις βάρος των αλετριών.

Η ανάλυση ευαισθησίας στα προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού είναι δυνατόν να γίνει σε τρία πεδία:
α) στους συντελεστές κέρδους (δηλαδή στους συντελεστές των Χ και Ψ της αντικειμενικής συνάρτησης)
β) στις διαθέσιμες ποσότητες των περιορισμών και
γ) στους τεχνολογικούς συντελεστές (τους συντελεστές των μεταβλητών σε κάθε περιορισμό).

Το αποτέλεσμα της ανάλυσης ευαισθησίας είναι να προσδιορίσουμε την ζώνη τιμών για κάθε μία από τις προηγούμενες κατηγορίες παραμέτρων μέσα στην οποία η βέλτιστη λύση του προβλήματος παραμένει αμετάβλητη.

<u>Μεταβολές των Συντελεστών Κέρδους</u>

Ας θεωρήσουμε το προηγούμενο παράδειγμα της ΑΓΡΟΤΙΝΗΣ. Ο τελικός πίνακας Simplex του προβλήματος είναι ο ακόλουθος:

	X	Ψ	S_1	S_2	S_3	
X	1	0	1/7	-6/70	0	1.300/7
Ψ	0	1	-1/14	1/7	0	750/7
S_3	0	0	0	-2/10	1	100
	0	0	1.000	2.600	0	7.700.000

Τί θα συμβεί στη βέλτιστη λύση του προβλήματος όταν αλλάξει ο συντελεστής κέρδους κάποιας μεταβλητής, έστω της Χ; Θα παραμένει η ίδια ή θα έχουμε μεταβολές στις ποσότητες των Χ και Ψ;

Επειδή η μεταβλητή Χ είναι βασική μεταβλητή, οποιαδήποτε αλλαγή στο συντελεστή κέρδους της, θα επηρεάσει όλες τις τιμές της τελευταίας γραμμής. Έστω λοιπόν ότι ο συντελεστής κέρδους της Χ (καλλιεργητών) μεταβάλεται κατά Ε χ.μ. και από 23.000 γίνεται 23.000+Ε ανά καλλιεργητή (αν η ποσότητα Ε είναι θετική αυξάνει αλλιώς ελαττώνεται). Ο τελικός πίνακας Simplex έχει τώρα ως εξής:

<u>Τελικός πίνακας με αλλαγές στο συντελεστή κέρδους της Χ</u>

	X	Ψ	S_1	S_2	S_3	
X	1	0	1/7	-6/70	0	1.300/7
Ψ	0	1	-1/14	1/7	0	750/7
S_3	0	0	0	-2/10	1	100
	0	0	1.000+Ε/7	2.600-6Ε/70	0	7.700.000+13.000Ε/7

Κάτω από ποιές συνθήκες ο παραπάνω πίνακας Simplex δεν θα είναι πλέον ο τελικός πίνακας Simplex που θα αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση; Για να πάψει η λύση αυτή να είναι η βέλτιστη θα πρέπει μία τουλάχιστον εκ των τιμών της τελευταίας γραμμής να είναι αρνητική. Αν όλες οι τιμές είναι θετικές ή μηδέν η λύση παραμένει βέλτιστη.

Επομένως η λύση Χ=185+5/7, Ψ=107+1/7 παραμένει βέλτιστη όταν:

$$1.000+E/7 \geq 0 \text{ και } 2.600-6E/70 \geq 0$$

Θεωρώντας την πρώτη εκ των δύο συνθηκών έχουμε:

$$1.000+E/7 \geq 0 \Rightarrow E/7 \geq -1.000 \Rightarrow \mathbf{E \geq -7.000}$$

Θεωρώντας την δεύτερη συνθήκη έχουμε:

$$2.600-6E/70 \geq 0 \Rightarrow 6E/70 \leq 2.600 \Rightarrow \mathbf{E \leq 30.333}$$

Συνεπώς η περιοχή τιμών της μεταβολής Ε του συντελεστή κέρδους των καλλιεργητών είναι:

$-7.000 \leq E \leq 30.333$

και επομένως ο συντελεστής κέρδους των καλλιεργητών (23.000 χ.μ.) μπορεί να κυμαίνεται μεταξύ των ορίων:

Χαμηλότερο όριο συντελεστή κέρδους : 23.000 - 7.000 = 16.000
Μεγαλύτερο όριο συντελεστή κέρδους : 23.000 + 30.333 = 53.333

Για οποιαδήποτε τιμή του συντελεστή κέρδους μεταξύ των δύο αυτών ορίων η βέλτιστη λύση δεν θα αλλάξει. Δηλαδή το μέγιστο κέρδος της επιχείρησης θα προκύπτει από την παραγωγή 185+5/7 καλλιεργητών (Χ) και 107+1/7 αλετριών (Ψ). Η τιμή βεβαίως του κέρδους θα αλλάζει αφού μεταβάλονται οι συντελεστές κέρδους.

Αν ο συντελεστής κέρδους των καλλιεργητών πέσει κάτω από το χαμηλότερο όριο των 16.000 χ.μ. ανά τεμάχιο, τότε η βέλτιστη λύση θα μεταβληθεί, προφανώς μειώνοντας τον αριθμό των παραγόμενων καλλιεργητών και αυξάνοντας τον αριθμό των αλετριών.

Η ίδια διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί και με τον συντελεστή κέρδους των αλετριών (Ψ). Υποθέτωντας ότι ο συντελεστής κέρδους των 32.000 χ.μ. ανά αλέτρι θα μεταβληθεί κατά Ε χρηματικές μονάδες, ο πίνακας Simplex που προκύπτει είναι ο παρακάτω:

Τελικός πίνακας με αλλαγές στο συντελεστή κέρδους της Ψ

	X	Ψ	S_1	S_2	S_3	
X	1	0	1/7	-6/70	0	1.300/7
Ψ	0	1	-1/14	1/7	0	750/7
S_3	0	0	0	-2/10	1	100
	0	0	1.000-E/14	2.600+E/7	0	7.700.000+750E/7

Επομένως οι συνθήκες για να παραμείνει η λύση βέλτιστη είναι:

$$1.000\text{-}E/14 \geq 0 \text{ και } 2.600+E/7 \geq 0$$

Θεωρώντας την πρώτη εκ των δύο συνθηκών έχουμε:

$$1.000\text{-}E/14 \geq 0 \;\Rightarrow\; E/14 \leq 1.000 \;\Rightarrow\; \mathbf{E \leq 14.000}$$

Θεωρώντας την δεύτερη συνθήκη έχουμε:

$$2.600+E/7 \geq 0 \;\Rightarrow\; E/7 \geq -2.600 \;\Rightarrow\; \mathbf{E \geq -18.200}$$

Συνεπώς η περιοχή τιμών της μεταβολής Ε του συντελεστή κέρδους των αλετριών είναι:

$$\boxed{-18.200 \leq E \leq 14.000}$$

και επομένως ο συντελεστής κέρδους των αλετριών (32.000 χ.μ.) μπορεί να κυμαίνεται μεταξύ των ορίων:

Χαμηλότερο όριο συντελεστή κέρδους : 32.000 - 18.200 = 13.800
Μεγαλύτερο όριο συντελεστή κέρδους : 32.000 + 14.000 = 46.000

χωρίς να υπάρξει καμία αλλαγή στη βέλτιστη λύση, δηλαδή στις ποσότητες των καλλιεργητών (Χ) και αλετριών (Ψ) που θα πρέπει να κατασκευασθούν για να επιτευχθεί μεγιστοποίηση του κέρδους.

Μεταβολές στις Ποσότητες των Περιορισμών

Ας χρησιμοποιήσουμε ξανά το παράδειγμα της ΑΓΡΟΤΙΝΗΣ. Όπως δείξαμε τυχόν αυξομειώσεις στις διαθέσιμες ώρες παραγωγής σε κάθε τμήμα επηρεάζουν τη βέλτιστη λύση του προβλήματος.

Ήδη προσδιορίσαμε την περιοχή τιμών για κάθε συντελεστή κέρδους, έτσι ώστε η βέλτιστη λύση να παραμένει βέλτιστη. Είδαμε δηλαδή ότι ακόμη και αν ένας συντελεστής κέρδους αλλάξει, εφ'όσον η μεταβολή είναι εντός κάποιων ορίων, η βέλτιστη λύση μπορεί να παραμείνει η ίδια. Αυτό δεν συμβαίνει όμως και με τις διαθέσιμες ποσότητες των περιορισμών. Αν για παράδειγμα έχουμε περισσότερες ώρες στο τμήμα κοπής, τότε η βέλτιστη λύση αλλάζει. Και αυτό είναι λογικό να συμβαίνει εφ'όσον υπάρχουν περισσότερες ώρες διαθέσιμες να αυξήσουμε την παραγωγή εκείνων των προϊόντων που μπορούν να αποδώσουν περισσότερο κέρδος.

Προηγούμενα αναλύσαμε τις επιπτώσεις στη βέλτιστη λύση από αλλαγές στις διαθέσιμες ποσότητες των περιορισμών. Ας επαναλάβουμε τα αποτελέσματα κατ' αρχήν για τον πρώτο περιορισμό, τις διαθέσιμες ώρες κοπής.

α) Περιορισμός ωρών κοπής

Τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προηγούμενες αναλύσεις, συνοψίζονται στον εξής πίνακα:

	Μεταβολή στις ώρες του τμήματος κοπής					
	Αύξηση ωρών			Μείωση ωρών		
	Από	Σε	Μεταβολή	Από	Σε	Μεταβολή
Ώρες παραγωγής στο τμήμα κοπής	2.500 ώρες	2.501 ώρες	+1	2.500 ώρες	2.499 ώρες	-1
Παραγωγή καλλιεργητών	185+5/7	185+6/7	+1/7	185+5/7	185+4/7	-1/7
Παραγωγή αλετριών	107+1/7	107+1/14	-1/14	107+1/7	107+3/14	+1/14
Κέρδος	7.700.000	7.701.000	1.000	7.700.000	7.699.000	-1.000

Έτσι βλέπουμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τη νέα βέλτιστη λύση που προκύπτει κάθε φορά που αυξάνουμε ή μειώνουμε τις ώρες του τμήματος κοπής κατά μία. Αναλογικά θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τη νέα βέλτιστη λύση όταν προσθέσουμε 2, 5, 10 ώρες στο τμήμα κοπής. Ποιος όμως είναι ο μέγιστος αριθμός των επιπλέον ωρών που μπορούν να απορροφηθούν από το τμήμα κοπής χωρίς να χρειασθεί να αλλάξουμε τη σύνθεση της παραγωγής (να συνεχίσουμε δηλαδή να παράγουμε και αλέτρια και καλλιεργητές).

Ο προηγούμενος πίνακας σε συνδυασμό με τον τελικό πίνακα Simplex του προβλήματος μας δίνει τις πληροφορίες που ζητούμε:

Αφού για κάθε ώρα που προσθέτουμε στο τμήμα κοπής μειώνουμε την παραγωγή αλετριών κατά 1/14 σε κάποιο σημείο θα φτάσουμε να παράγουμε 0 αλέτρια και επομένως από το σημείο αυτό και πέρα δεν μπορούμε να συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο. Όμως ποιό είναι αυτό το σημείο;

Ο συνολικός αριθμός αλετριών (Ψ) είναι 750/7 ή 107+1/7 αλέτρια. Άρα:

Ανώτατο όριο αύξησης ωρών για το τμήμα κοπής: (750/7) : (1/14) = 1.500 ώρες

Ομοίως αφού για κάθε μία ώρα που αφαιρούμε από το τμήμα κοπής μειώνουμε την παραγωγή καλλιεργητών κατά 1/7, και λαμβάνοντας υπ' όψην ότι ο συνολικός αριθμός καλλιεργητών (Χ) στη βέλτιστη λύση είναι 1.300/7 μπορούμε να προσδιορίσουμε το ανώτατο όριο μείωσης των ωρών στο τμήμα κοπής:

Ανώτατο όριο μείωσης ωρών για το τμήμα κοπής: (1.300/7) : (1/7) = 1.300 ώρες

Συνοψίζοντας επομένως τα προηγούμενα συμπεράσματα, οι υπολογισμοί του πίνακα (που δείχνει την μεταβολή στις ώρες του τμήματος κοπής) ισχύουν για ώρες στο τμήμα κοπής που κυμαίνονται μεταξύ του κατώτατου ορίου των 2.500-1.300 = 1.200 ωρών και του ανωτάτου ορίου των 2.500+1.500 = 4.000 ωρών.

Μεταξύ αυτών των ορίων μπορούμε να υπολογίσουμε ποια θα είναι η βέλτιστη λύση για οποιοδήποτε συγκεκριμένο αριθμό ωρών στο τμήμα κοπής συμφωνα με το παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε ότι διαθέτουμε 3.200 ώρες στο τμήμα κοπής. Τότε η βέλτιστη λύση θα έχει ως εξής:

Επιπλέον ώρες κοπής από τις αρχικές : 700

*Αριθμός καλλιεργητών : (185 + 5/7) + 700 * (1/7) = 285 + 5/7*

*Αριθμός αλετριών : (107 + 1/7) + 700 * (-1/14) = 57 + 1/7*

*Βέλτιστο κέρδος : (285 + 5/7) * 23.000 + (57 + 1/7) * 32.000 =8.400.000*

*ή αλλιώς 7.700.000 + 700 * 1.000 = 8.400.000*

όπου 7.700.000 χ.μ. είναι το βέλτιστο κέρδος με την υπάρχουσα λύση,
700 είναι οι επιπλέον ώρες στο τμήμα κοπής,
1.000 η σκιώδης τιμή του περιορισμού των ωρών κοπής.

β) Περιορισμός ωρών συναρμολόγησης

Την ίδια ανάλυση μπορούμε να επαναλάβουμε για το τμήμα συναρμολόγησης.

	Μεταβολή στις ώρες του τμήματος συναρμολόγησης					
	Αύξηση ωρών			Μείωση ωρών		
	Από	Σε	Μεταβολή	Από	Σε	Μεταβολή
Ώρες παραγωγής στο τμήμα συναρμολόγησης	2.000 ώρες	2.001 ώρες	+1	2.000 ώρες	1.999 ώρες	-1
Παραγωγή καλλιεργητών	185+5/7	185+44/70	-6/70	185+5/7	185+56/70	6/70
Παραγωγή αλετριών	107+1/7	107+2/7	1/7	107+1/7	107+3/14	-1/7
Μη χρησιμοπ. ώρες συσκευασίας	100	99+8/10	-2/10	100	100+2/10	2/10
Κέρδος	7.700.000	7.702.600	2.600	7.700.000	7.697.400	-2.600

Ποιός είναι ο μέγιστος αριθμός ωρών που μπορούν να απορροφηθούν στο τμήμα συναρμολόγησης χωρίς να χρειασθεί να αλλάξουμε τη σύνθεση της παραγωγής (να συνεχίσουμε δηλαδή να παράγουμε τόσο αλέτρια όσο και καλλιεργητές); Ο προηγούμενος πίνακας σε συνδυασμό με τον τελικό πίνακα Simplex του προβλήματος μας δίνει τις πληροφορίες που ζητούμε:

Ας υποθέσουμε ότι αυξάνουμε συνεχώς τις ώρες στο τμήμα συναρμολόγησης. Αφού για κάθε επιπλέον ώρα στο τμήμα συναρμολόγησης μειώνονται αφ' ενός μεν η παραγωγή καλλιεργητών κατά 60/70, αφ' ετέρου δε και οι ώρες που περισσεύουν στο τμήμα συσκευασίας κατά 2/10, σε κάποιο σημείο θα εξαντλήσουμε ή τη ποσότητα των καλλιεργητών (X = 1300/7) ή την ποσότητα των ωρών συσκευασίας που περισσεύουν (S_3 = 100) και επομένως από το σημείο αυτό και πέρα δεν μπορούμε να συνεχίσουμε αυξάνοντας τις ώρες συναρμολόγησης με τον ίδιο τρόπο. Ποιό έιναι όμως το σημείο αυτό;

Ο συνολικός αριθμός καλλιεργητών (X) είναι 1.300/7. Επομένως μέγιστη αύξηση των ωρών συναρμολόγησης που μπορεί να προκύπτει αν εξαντληθεί ολόκληρη η ποσότητα των καλλιεργητών:

$$(1.300/7) : (6/70) = 13.000/6 = 2.166 + 4/6$$

Ο συνολικός αριθμός διαθέσιμων ωρών συσκευασίας είναι (S_1) 100 ώρες. Επομένως μέγιστη αύξηση των ωρών συναρμολόγησης που προκύπτει αν εξαντληθούν όλες οι ώρες συσκευασίας που περισσεύουν:

$$(100) : (2/10) = 500$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, συμπεραίνουμε ότι η αύξηση των ωρών συναρμολόγησης μπορεί να γίνει μέχρι το όριο των επιπλέον 500 ωρών. Άρα:

Ανώτατο όριο αύξησης ωρών για το τμήμα συναρμολόγησης: 500 ώρες

Ομοίως αφού για κάθε μία ώρα που αφαιρούμε από τη συναρμολόγηση μειώνουμε την παραγωγή αλετριών κατά 1/7 και λαμβάνοντας υπ'όψη τον αριθμό αλετριών (Ψ) στη βέλτιστη λύση που είναι 750/7 μπορούμε να προσδιορίσουμε το ανώτατο όριο μείωσης των ωρών στο τμήμα συναρμολόγησης:

Ανώτατο όριο μείωσης ωρών για το τμήμα συναρμολόγησης: (750/7) : (1/7) = 750 ώρες

Συνοψίζοντας τα προηγούμενα συμπεράσματα, οι ώρες στο τμήμα συναρμολόγησης είναι δυνατόν να κυμαίνονται μεταξύ του κατώτατου ορίου των 2.000 – 750 = 1.250 ωρών και του ανώτατου ορίου των 2.000 + 1.000 = 3.000 ωρών. Μεταξύ αυτών των ορίων μπορούμε να υπολογίσουμε ποια θα είναι η βέλτιστη λύση για συγκεκριμένο αριθμό ωρών παραγωγής του τμήματος συναρμολόγησης ως εξής:

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε ότι διαθέτουμε 1.860 ώρες στο τμήμα συναρμολόγησης. Τότε η βέλτιστη λύση θα έχει ως εξής:

Λιγότερες ώρες συναρμολόγησης από τις αρχικές : 2.000 - 1.860 = 140

*Αριθμός καλλιεργητών : (185 + 5/7) + 140 * (6/70) = 195 + 5/7*

*Αριθμός αλετριών : (107 + 1/7) + 140 * (-1/7) = 87 + 1/7*

*Βέλτιστο κέρδος : (197 + 5/7) * 23.000 + (87 + 1/7) * 32.000 =7.336.000* *ή αλλιώς 7.700.000 - 140 * 2.600 = 7.336.000*

όπου 7.700.000 χ.μ. είναι το βέλτιστο κέρδος με την υπάρχουσα λύση,
140 είναι οι ώρες που μειώθηκαν στο τμήμα συναρμολόγησης,
2.600 η σκιώδης τιμή του περιορισμού των ωρών συναρμολόγησης.

γ) Περιορισμός ωρών συσκευασίας

Τέλος, για τις ώρες του τμήματος συσκευασίας τα συμπεράσματα είναι σχεδόν προφανή. Αφού περισσεύουν 100 ώρες συσκευασίας η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει όταν οι συνολικές διαθέσιμες ώρες συσκευασίας είναι περισσότερες από 400 (500 αρχικά διαθέσιμες - 100 που περισσεύουν).

3.6 Χρήση του Η/Υ για Προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού

Όπως διαπιστώθηκε από την παραπάνω ανάλυση, η μέθοδος Simplex είναι ένας αλγόριθμος αριστοποίησης, δηλαδή καταλήγει στην άριστη λύση του προβλήματος. Ακριβώς λόγω της επιτυχίας της, καθώς και του μεγάλου εύρους των εφαρμογών της, ο Γραμμικός Προγραμματισμός θεωρείται σαν ένα από τα πιο χρήσιμα εργαλεία για την λήψη αποφάσεων στις σημερινές επιχειρήσεις και οργανισμούς.

Η μέθοδος Simplex είναι αρκετά περίπλοκη και επίπονη στη χρήση της, ιδιαίτερα όταν πρόκειται για ρεαλιστικά προβλήματα που εμφανίζονται στην βιομηχανία, τις υπηρεσίες, την έρευνα, κ.λπ. Από την άλλη πλευρά, το γεγονός ότι η μέθοδος αυτή αποτελείται από επαναλαμβανόμενα βήματα καθιστά «εύκολη» και απαραίτητη την κωδικοποίησή της στον Ηλεκτρονικό Υπολογιστή. Για τους δύο αυτούς λόγους, η μεγαλύτερη χρήση του Γραμμικού Προγραμματισμού γίνεται σήμερα με βάση τον Ηλεκτρονικό Υπολογιστή. Εκτός από τα απλά παραδείγματα για επίδειξη και κατανόηση της μεθόδου Simplex και των αποτελεσμάτων της, όλα σχεδόν τα προβλήματα ρεαλιστικού μεγέθους απαιτούν την χρήση έτοιμων προγραμμάτων ή αλλιώς «πακέτων» Γραμμικού Προγραμματισμού. Τα πακέτα αυτά χρησιμοποιούν την μέθοδο Simplex ή κάποια παραλλαγή της σαν το κύριο κορμό του προγράμματος και εκεί εκτελούνται όλες οι λογικές διεργασίες και οι μαθηματικοί μετασχηματισμοί της μεθόδου. Τα πακέτα αυτά είναι εξοπλισμένα με ειδικές εντολές ή «ρουτίνες» εισόδου - εξόδου για την είσοδο των δεδομένων του κάθε προβλήματος από τον χρήστη, και για την παρουσίαση, εκτύπωση ή αποθήκευση των αποτελεσμάτων μετά τη λύση.

Σήμερα στην διεθνή αγορά υπάρχουν πολλά πακέτα κατασκευασμένα από κατασκευάστριες εταιρίες Ηλεκτρονικών Υπολογιστών (*όπως για παράδειγμα το* ***MPSX*** *της* ***IMB***) ή από εταιρίες ή ινστιτούτα λογισμικού (*όπως για παράδειγμα το* ***SAS / OR*** *του ινστιτούτου* ***SAS***). Προκειμένου να επιλέξει κανείς ποιο πακέτο θα χρησιμοποιήσει, θα μπορούσε να λάβει υπόψη του τα εξής κριτήρια:

- Το μέγεθος και τη δομή των προβλημάτων, που μπορεί να λύσει. Υπάρχουν πακέτα τα οποία είναι κύρια για εκπαιδευτικούς σκοπούς και έτσι μπορούν να λύσουν μόνο σχετικά μικρά προβλήματα. Αντίθετα, υπάρχουν πακέτα που μπορούν να λύσουν και προβλήματα με εκατοντάδες μεταβλητές και περιορισμούς. Επίσης υπάρχουν πακέτα τα οποία είναι κατάλληλα κύρια για ειδικές δομές προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού. *Για παράδειγμα, τα προβλήματα με πολλά μηδενικά στον πίνακα περιορισμών, όπως είναι τα προβλήματα Μεταφορών.*

- Η ευκολία εισόδου των δεδομένων και η ανάγνωση των αποτελεσμάτων. Υπάρχουν πακέτα στα οποία έχει δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στις εντολές εισόδου - εξόδου, ώστε να διευκολύνεται ο χρήστης στην είσοδο των δεδομένων και στην ανάγνωση και κατανόηση των αποτελεσμάτων.

- Η ταχύτητα λύσης του προβλήματος. Το χαρακτηριστικό αυτό εξαρτάται από τον συγκεκριμένο αλγόριθμο που χρησιμοποιήθηκε σαν κορμός του προγράμματος, την «ποιότητα» του προγράμματος, την ειδική δομή των δεδομένων ενός προβλήματος κ.ο.κ.

- Το λειτουργικό σύστημα στο οποίο «τρέχει» το πακέτο. Θα πρέπει να υπάρχει έκδοση του πακέτου για το λειτουργικό σύστημα του Ηλεκτρονικού Υπολογιστή, στον οποίο θα «τρέξει» το πακέτο.

- Η δυνατότητα «μεταφοράς» της εφαρμογής σε άλλο υπολογιστικό περιβάλλον (portability). Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό εάν πρόκειται να γίνει ανανέωση του εξοπλισμού (upgrading), ή εάν η εφαρμογή μπορεί να λειτουργήσει αποτελεσματικότερα σε άλλο περιβάλλον.

- Η δυνατότητα επικοινωνίας με άλλα πακέτα, ώστε να λειτουργούν σε ένα ενιαίο περιβάλλον. Αυτό εγγυάται κοινά αρχεία, ελαχιστοποίηση της εργασίας εισόδου στοιχείων (data entry), ευκολία στην εκμάθηση και χρήση από τους χρήστες. Επιπλέον, δυνατότητα εύκολων διασυνδέσεων (interfaces) με γνωστές βάσεις δεδομένων.

- Η δυνατότητα «διαλογικής» χρήσης του πακέτου. Στα περισσότερα πακέτα οι οδηγίες και οι εντολές εμφανίζονται διαλογικά στην οθόνη του Ηλεκτρονικού Υπολογιστή, οπότε και ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να κατευθύνει ανάλογα τις εργασίες που θα εκτελεσθούν.

Το σύστημα SAS

Το σύστημα SAS είναι ίσως το ισχυρότερο και πλέον διαδεδομένο σύστημα λογισμικού για διαχείριση και ανάλυση δεδομένων. Έχει κατασκευαστεί από το ινστιτούτο SAS των ΗΠΑ και παρέχει ένα ολοκληρωμένο και ενιαίο περιβάλλον για εισαγωγή, διαχείριση, ανάλυση και παρουσίαση δεδομένων.

Το σύστημα SAS αποτελείται από περίπου 20 «προϊόντα» (πακέτα, modules), το καθένα από τα οποία περιλαμβάνει ένα αριθμό από «διαδικασίες» (προγράμματα, procedures). Συνολικά, το SAS περιλαμβάνει μια πολύ ισχυρή γλώσσα 4ης γενιάς για εύκολη ανάπτυξη εφαρμογών, καθώς και πάνω από 140 διαδικασίες - προγράμματα, τα οποία μπορούν να λειτουργήσουν ανεξάρτητα ή σε συνδυασμό μεταξύ τους, ανάλογα με τις ανάγκες του χρήστη.

Τα προϊόντα – πακέτα, τα οποία αποτελούν το σύστημα SAS, χωρίζονται σε πέντε θεματικές κατηγορίες. Με τη σειρά τους το κάθε προϊόν αποτελείται από διάφορες διαδικασίες - προγράμματα του ιδίου θεματικού χώρου. Όλες οι διαδικασίες του συστήματος SAS λειτουργούν με παρόμοιο τρόπο (οθόνες, εντολές, κ.λπ.) μπορούν και επικοινωνούν μεταξύ τους, καθώς και με τα ίδια αρχεία και βάσεις δεδομένων στον Ηλεκτρονικό Υπολογιστή, και έτσι δημιουργούν ένα ολοκληρωμένο, ενιαίο, ευέλικτο και εύκολο στη χρήση του σύστημα.

3.7 Το Δυαδικό ή το Δυικό Πρόβλημα

Σύμφωνα με τη δυαδική θεωρία τα προβλήματα του γραμμικού προγραμματισμού υπάρχουν κατά ζεύγη. Στον γραμμικό προγραμματισμό με κάθε πρόβλημα μεγιστοποίησης συνδέεται ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης και, αντίθετα, με κάθε πρόβλημα ελαχιστοποίησης συνδέεται και ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης. Σε κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα άλλο πρόβλημα που καλείται δυαδικό ή δυικό. Το πρώτο πρόβλημα ονομάζεται *αρχικό* και το δεύτερο *δυαδικό*. Η βέλτιστη δυνατή λύση του ενός προβλήματος μας δίνει πληροφορίες για τη βέλτιστη δυνατή λύση του άλλου, έτσι για το λόγο αυτό δε χρειάζεται να λύσουμε και τα δύο προβλήματα.

Η συνάρτηση παραγωγής και η συνάρτηση κόστους αποτελούν παράδειγμα δυαδικού προβλήματος στον γραμμικό προγραμματισμό. Στην οικονομική επιχειρηματική κοινωνία αυτό εξηγείται σαν ότι 'όπου υπάρχει παραγωγή πρέπει να υπάρχει και κατανάλωση'.

Τα βασικά χαρακτηριστικά μεταξύ του αρχικού και του δυϊκού προβλήματος είναι τα εξής:

- Ο αριθμός των μεταβλητών στο δυϊκό είναι ίσος με τον αριθμό των περιορισμών στο αρχικό. Ο αριθμός των μεταβλητών στο αρχικό είναι ίσος με τον αριθμό των περιορισμών στο δυϊκό.
- Η τελευταία δεξιά στήλη του ενός προβλήματος είναι οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του άλλου.
- Μεγιστοποίηση έχουμε με $\leq$ περιορισμούς στο αρχικό και ελαχιστοποίηση έχουμε με $\geq$ περιορισμούς στο δυϊκό.
- Εάν η άριστη λύση του αρχικού προβλήματος είναι εφικτή τότε θα έχει και το δυικό πρόβλημα άριστη εφικτή λύση και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και των δύο προβλημάτων θα είναι η ίδια.

Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να αποδώσουμε θεωρητικά τη μέθοδο της δυαδικότητας. Έστω ότι η αντικειμενική συνάρτηση στο αρχικό πρόβλημα είναι η παρακάτω:

$$\text{Max } Z_X = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

Με περιορισμούς:

$$\alpha_{11}X_1+\alpha_{12}X_2+...+\alpha_{1n}X_n \le \beta_1$$
$$\alpha_{21}X_1+\alpha_{22}X_2+...+\alpha_{2n}X_n \le \beta_2$$
$$..$$
$$\alpha_{m1}X_1+\alpha_{m2}X_2+...+\alpha_{mn}X_n \le \beta_m$$

$$X_1\ge 0,\ X_2\ge 0,\ X_n\ge 0$$

Αυτό ήταν το αρχικό πρόβλημα και στη συνέχεια παραθέτουμε το δυαδικό:

$$MinZy=\beta_1 y_1+\beta_2 y_2+\ldots+\beta_m y_m$$

Με περιορισμούς:

$$\alpha_{11}y_1+\alpha_{12}y_2+\ldots+\alpha_{m1}y_n\ge c_1$$
$$\alpha_{12}y_1+\alpha_{22}y_2+\ldots+\alpha_{m2}y_n\ge c_2$$
$$..............................$$
$$\alpha_{1n}y_1+\alpha_{2n}y_2+...+\alpha_{mn}y_n\ge c_m$$

$$y_1\ge 0,\ y_2\ge 0,\ldots,\ y_n\ge 0$$

1^{O} ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν στο παρακάτω πρόβλημα η αντικειμενική συνάρτηση ($2X_1+X_2+X_3=B$) είναι max με περιορισμούς:

$$-X_1 - X_2 + X_3 \le 7$$
$$2X_1 + X_2- 3X_3 \le 10$$

$$\text{και } X_1,\ X_2,\ X_3 \ge 0$$

να βρεθεί το δυικό πρόβλημα.

Λύση:

Αρχικό
Max ($2X_1+X_2+X_3=B$)

$$-X_1-X_2+X_3 \leq 7$$
$$2X_1+X_2-3X_3 \leq 10$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Δυϊκό
Min $(7Y_1+10Y_2 = Z)$

Με περιορισμούς:

$$-Y_1+2Y_2 \geq 2$$
$$-Y_1+Y_2 \geq 1$$
$$Y_1-3Y_2 \geq 1$$

$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

	Y_1	Y_2	S_1	S_2	S_3	
S_1	-1	2	1	0	0	2
S_2	-1	1	0	1	0	1
S_3	1	-3	0	0	1	1
	7	10	0	0	0	

2^Ο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ομοίως να βρεθεί το δυϊκό πρόβλημα.

Λύση:

Αρχικό
Max $(X_1+1,5X_2)$

Με περιορισμούς:

$$2X_1+4X_2 \leq 12$$
$$3X_1+2X_2 \leq 10$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Δυϊκό
Min $(12Y_1+10Y_2)$

Με περιορισμούς:

$$2Y_1+3Y_2 \geq 1$$
$$4Y_1+2Y_2 \geq 1,5$$
$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

	Y_1	Y_2	S_1	S_2	
S_1	2	3	1	0	1
S_2	4	2	0	1	1.5
	12	10	0	0	

3.8 Μεταφορά

Από την εποχή της ανακάλυψης της μεθόδου Simplex μέχρι και σήμερα, διάφοροι ερευνητές έχουν τροποποιήσει την αρχική μέθοδο ή έχουν αναπτύξει παραλλαγές της. Έτσι εκτός από την κλασσική μέθοδο, την λεγόμενη primal Simplex, υπάρχουν αρκετοί άλλοι ειδικοί αλγόριθμοι για ειδικές μορφές προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού, όπως είναι το πρόβλημα των μεταφορών.

Υπάρχουν προβλήματα που αφορούν τη μεταφορά αγαθών από διαφορετικά σημεία παραγωγής ή κεντρικής αποθήκευσης (π.χ. εργαστάσια), σε κέντρα διανομής που είναι εγκατεστημένα σε άλλα γεωγραφικά σημεία. Τα προβλήματα αυτά αποτελούν μία ειδική κατηγορία προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού και αποκαλούνται **Προβλήματα Μεταφοράς**.

Το αντικείμενο των προβλημάτων μεταφοράς είναι ο καθορισμός των ποσοτήτων που θα μεταφερθούν από κάθε ένα εργοστάσιο σε κάθε κέντρο διανομής με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτυγχάνεται η ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μιά επιχείρηση παραγωγής πλακιδίων μπάνιου παράγει τα προϊόντα της σε τρία εργοστάσια που βρίσκονται στις πόλεις Πάτρα, Βόλο και Θεσσαλονίκη. Η διανομή των προϊόντων της επιχείρησης γίνεται μέσω τριών κέντρων διανομής που βρίσκονται στην Αθήνα, Λάρισα και Ιωάννινα. Ο μηνιαίος προγραμματισμός παραγωγής και πωλήσεων σε κάθε εργοστάσιο και σε κάθε κέντρο διανομής δίνεται στους παρακάτω πίνακες:

Εργοστάσιο	**Ποσότητα παραγωγής**
Πάτρα	100
Βόλος	300
Θεσσαλονίκη	300

Κέντρο διανομής	Ζήτηση
Ιωάννινα	300
Λάρισα	200
Αθήνα	200

Επειδή το κόστος παραγωγής είναι το ίδιο σε όλα τα εργοστάσια, στόχος της εταιρείας είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς των ποσοτήτων παραγωγής στα κέντρα διανομής. Το κόστος μεταφοράς από κάθε εργοστάσιο σε κάθε κέντρο διανομής φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

	Ιωάννινα	**Λάρισα**	**Αθήνα**	Παραγωγή εργοστασίων
Βόλος	8	4	3	300
Πάτρα	5	4	3	100
Θεσσαλονίκη	9	7	5	300
Ζήτηση κέντρων	300	200	200	700

Το πρόβλημα της επιχείρησης είναι να προσδιορισθούν οι ποσότητες που θα μεταφερθούν από κάθε εργοστάσιο σε κάθε κέντρο διανομής έτσι ώστε το συνολικό κόστος μεταφοράς να είναι το μικρότερο δυνατό και ταυτόχρονα να ικανοποιηθεί η ζήτηση των κέντρων διανομής.

Λύση:

Το πρώτο βήμα είναι η τοποθέτηση των στοιχείων που μας δίνεται από την εκφώνηση σε ένα πίνακα:

	Ιωάννινα	**Λάρισα**	**Αθήνα**	Παραγωγή εργοστασίων
Πάτρα	X_{11} $\boxed{5}$	X_{12} $\boxed{4}$	X_{13} $\boxed{3}$	100
Βόλος	X_{21} $\boxed{8}$	X_{22} $\boxed{4}$	X_{23} $\boxed{3}$	300
Θεσσαλονίκη	X_{31} $\boxed{9}$	X_{32} $\boxed{7}$	X_{33} $\boxed{5}$	300
Ζήτηση κέντρων	300	200	200	700

Η ελαχιστοποίση του κόστους μεταφοράς δίνεται από την εξίσωση:

$$5X_{11}+4X_{12}+3X_{13}+8X_{21}+4X_{22}+3X_{23}+9X_{31}+7X_{32}+5X_{33}$$

Επίσης οι περιορισμοί είναι οι πιο κάτω:

$$X_{11}+X_{12}+X_{13}=100$$

$$X_{21}+X_{22}+X_{23}=300$$

$$X_{31}+X_{32}+X_{33}=300$$

$$X_{11}+X_{21}+X_{31}=300$$

$$X_{12}+X_{22}+X_{32}=200$$

$$X_{13}+X_{23}+X_{33}=200$$

Η πιο απλή μέθοδος για την επίλυση προβλημάτων μεταφοράς είναι αυτό με τη μέθοδο τη βορειοδυτικής γωνίας.
Όπως γνωρίζουμε ξεκινάμε αυτή τη μέθοδο από το σημείο πάνω αριστερά.

	Ιωάννινα	**Λάρισα**	**Αθήνα**	Παραγωγή εργοστασίων
Πάτρα	$\boxed{5}$ X_{11}	$\boxed{4}$ X_{12}	$\boxed{3}$ X_{13}	100
Βόλος	$\boxed{8}$ X_{21}	$\boxed{4}$ X_{22}	$\boxed{3}$ X_{23}	300
Θεσσαλονίκη	$\boxed{9}$ X_{31}	$\boxed{7}$ X_{32}	$\boxed{5}$ X_{33}	300
Ζήτηση κέντρων	300	200	200	700

Άρα το πρώτο σημείο είναι το $\mathbf{X_{11}}$ όπου έχει περιορισμούς το (100,300). Το μικρότερο είναι το 100 άρα το $\mathbf{X_{11}}$ θα πάρει την τιμή 100. Επομένως το $\mathbf{X_{12}}$ και το $\mathbf{X_{13}}$ θα είναι 0.

Η ζήτηση στο κέντρο διανομής των Ιωαννίνων μειώθηκε από 300 σε 200 επειδή το 100 χρησιμοποιήθηκε στο **X_{11}**.

X_{21} $\boxed{8}$	X_{22} $\boxed{4}$	X_{23} $\boxed{3}$	300
X_{31} $\boxed{9}$	X_{32} $\boxed{7}$	X_{33} $\boxed{5}$	300
200	200	200	700

Το **X_{21}** έχει περιορισμούς (200,300) άρα θα πάρει την τιμή 200 αφού είναι και η μικρότερη. Επομένως το **X_{31}** θα είναι 0.

Η ζήτηση στο κέντρο διανομής μειώθηκε από 300 σε 100 αφού το **X_{21}** έγινε 200.

X_{22} $\boxed{4}$	X_{23} $\boxed{3}$	100
X_{32} $\boxed{7}$	X_{33} $\boxed{5}$	300
200	200	700

Το **X_{22}** θα γίνει 100 αφού οι περιορισμοί είναι (100,200) και εμάς μας ενδιαφέρει ο μικρότερος περιορισμός. Και το **X_{32}** θα πάρει την τιμή 200-100=100. Επίσης το **X_{23}** θα πάρει την τιμή 0 επειδή το 100 πήγε όλο στο **X_{22}**. Τέλος το **X_{33}** θα είναι 200 αφού και το **X_{13}** και το **X_{23}** πήραν την τιμή 0.

Η τελική μορφή του πίνακα είναι λοιπόν η παρακάτω:

	Ιωάννινα	**Λάρισα**	**Αθήνα**	Παραγωγή εργοστασίων
Πάτρα	100 $\boxed{5}$	0 $\boxed{4}$	0 $\boxed{3}$	100
Βόλος	200 $\boxed{8}$	100 $\boxed{4}$	0 $\boxed{3}$	300
Θεσσαλονίκη	0 $\boxed{9}$	100 $\boxed{7}$	200 $\boxed{5}$	300
Ζήτηση κέντρων	300	200	200	700

Επομένως το συνολικό κόστος για τη μεταφορά είναι:

$5\bullet 100+8\bullet 200+4\bullet 100+7\bullet 100+5\bullet 200=4200$

3.9 Βορειοδυτικό Άκρο

Με τη μέθοδο της βορειοδυτικής γωνίας αρχίζουμε με τον πρώτο σταθμό παραγωγής και στέλνουμε όση μπορούμε περισσότερη ποσότητα προϊόντος στους σταθμούς προορισμού διαδοχικά. Στη συνέχεια ακολουθεί ο δεύτερος, ο τρίτος σταθμός κ.λπ. Επειδή κάθε φορά προσδιορίζουμε την τιμή της μεταβλητής που είναι στο πάνω και αριστερά τετράγωνο, η μέθοδος αυτή λέγεται μέθοδος της **Βορειδυτικής Γωνίας.**

Πρώτο βήμα για αυτή τη μέθοδο είναι να κατασκευάσουμε ένα πίνακα που θα περιέχει όλα τα στοιχεία που θα αφορούν τα σημεία αναφοράς καθώς και τα σημεία που θέλουν να μεταφέρουν τα προϊόντα καθώς και τους περιορισμούς που αφορούν αυτά. Στη συνέχεια θα βρεθούν οι εφικτές λύσεις οι οποίες θα πρέπει να ικανοποιούν και τους περιορισμούς.

Η παραπάνω μέθοδος θα γίνει πιο κατανοητή με την ανάλυση ενός παραδείγματος που θα δούμε στη συνέχεια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μια εταιρεία κατασκευής τηλεοράσεων έχει εργαστάσια σε τρεις χώρες A1, A2, A3 που παράγουν αντίστοιχα 200, 260, 340 τηλεοράσεις την ημέρα. Η εταιρεία προμηθεύει τέσσερεις άλλες χώρες B1, B2, B3, B4 που οι ανάγκες τους κάθε μέρα είναι 300, 240, 160, 100 τηλεοράσεις αντίστοιχα. Το κόστος μεταφοράς για κάθε τηλεόραση σε κατάλληλες χρηματικές μονάδες δίδεται από τον παρακάτω πίνακα.

	B1	**B2**	**B3**	**B4**
A1	4	6	8	12
A2	2	5	7	4
A3	6	9	13	8

<u>Ζητούνται:</u>
Μας ζητείται να βρούμε την εφικτή λύση καθώς και το συνολικό κόστος μεταφοράς.

Λύση:

	B1	B2	B3	B4	
A1	X_{11} $\boxed{4}$	X_{12} $\boxed{6}$	X_{13} $\boxed{8}$	X_{14} $\boxed{12}$	200
A2	X_{21} $\boxed{2}$	X_{22} $\boxed{5}$	X_{23} $\boxed{7}$	X_{24} $\boxed{4}$	260
A3	X_{31} $\boxed{6}$	X_{32} $\boxed{9}$	X_{33} $\boxed{13}$	X_{34} $\boxed{8}$	340
	300	240	160	100	800

Για να βρούμε το $\mathbf{X_{11}}$ τότε θα πρέπει να του δώσουμε ένα νούμερο το οποίο θα πρέπει να ανταποκρίνεται στους περιορισμούς που έχουμε βάσει του πίνακα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι (200,300). Αυτό σημαίνει ότι το νούμερο που θα πάρει το $\mathbf{X_{11}}$ θα πρέπει να ανταποκρίνεται συγχρώνος και οριζόντια με το 200 και κάθετα με το 300. Άρα εδώ το $\mathbf{X_{11}}$ θα είναι το περισσότερο 200 γιατί αν του δωθεί αριθμός παραπάνω από 200 δεν θα αντοποκρίνεται στον περιορισμό που έχει η οριζόντια γραμμή του **A1**. Αυτό σημαίνει επίσης ότι το $\mathbf{X_{12}}$, το $\mathbf{X_{13}}$ και το $\mathbf{X_{14}}$ θα είναι όλα 0 αφού το άθροισμα της σειράς δε θα πρέπει να ξεπερνάει το 200. Επομένως αφού το $\mathbf{X_{11}}$ είναι 200 τα άλλα θα είναι 0.

Το στοιχείο $\mathbf{X_{21}}$ έχει περιορισμούς το 260 από την οριζόντια γραμμή **A2** καθώς και 300 από την κάθετη του **B1**. Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ο πραγματικός περιορισμός τώρα για το $\mathbf{X_{21}}$ θα είναι 300-200=100 αφού το 200 το βάλαμε στο $\mathbf{X_{11}}$. Άρα το $\mathbf{X_{21}}$ θα είναι 100. Ο άλλος περιορισμός είναι 260 αλλά εμείς παίρνουμε το μικρότερο από τους δύο περιορισμούς. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι το σημείο $\mathbf{X_{31}}$ θα είναι 0 αφού το $\mathbf{X_{11}}$ και το $\mathbf{X_{21}}$ έχουν συμπληρώσει το 300 που πρέπει να είναι το μέγιστο ποσό σύμφωνα με τον περιορισμό που βλέπουμε στη στήλη **B1**.

Στη συνέχεια φτιάχνουμε ένα πίνακα με τα στοιχεία που μας έχουν μείνει. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι οι περιορισμοί είναι ίδιοι, μόνο στην οριζόντια γραμμή A2 από 260 που ήταν ο περιορισμός τώρα βάλαμε 160 αφού τις 100 χρηματικές μονάδες τις χρησιμοποιήσαμε στο στοιχείο $\mathbf{X_{21}}$.

X_{22} [5]	X_{23} [7]	X_{24} [4]	160
X_{32} [9]	X_{33} [13]	X_{34} [8]	340
240	160	100	

Πάλι ξεκινάμε από το στοιχείο που βρίσκεται πάνω αριστερά στον πίνακα. Αυτό το στοιχείο είναι το **X_{22}**. Οι περιορισμοί είναι (160,240) εδώ θα βάλουμε στο στοιχείο **X_{22}** 160 αφού είναι μικρότερο από 240 και όπως είπαμε δεν πρέπει οι αριθμοί να περνάνε τους περιορισμούς. Άρα το **X_{23}** και το **X_{24}** θα είναι 0 αφού το άθροισμα και των τριών δεν θα πρέπει να ξεπερνά το 160.

Το **X_{32}** είναι 240 - 160 = 80. Επίσης αφού το **X_{23}** είναι ίσο με 0 άρα το **X_{33}** θα ισούται με 160. Ομοίως αφού το **X_{24}** είναι ίσο με 0 το **X_{34}** θα είναι ίσο με 100.

Συνοπτικά τα στοιχεία του πίνακα έχουν τις εξής τιμές:

X_{11}=200	**X_{12}=0**	**X_{13}=0**	**X_{14}=0**
X_{21}=100	**X_{22}=160**	**X_{23}=0**	**X_{24}=0**
X_{31}=0	**X_{32}=80**	**X_{33}=160**	**X_{34}=100**

Επομένως ο πίνακας θα διαμορφωθεί τώρα ως εξής:

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	200 [4]	0 [6]	0 [8]	0 [12]	200
A2	100 [2]	160 [5]	0 [7]	0 [4]	260
A3	0 [6]	80 [9]	160 [13]	100 [8]	340
	300	240	160	100	

Βλέπουμε ότι τα αθροίσματα και οριζόντια και κάθετα μας δίνουν αποτέλεσμα τα ποσά που βρίσκονται στη τελευταία στήλη του πίνακα και στη τελευταία γραμμή του πίνακα.

Με βάση τον πίνακα βγάζουμε το συμπέρασμα ότι το εργοστάσιο **Α1** θα στείλει 200 τηλεοράσεις στη χώρα **Β1**. Το εργοστάσιο **Α2** θα στείλει 100 τηλεοράσεις στη χώρα **Β1** και 160 στη χώρα **Β2**. Τέλος το εργοστάσιο **Α3** θα στείλει 80 τηλεοράσεις στη χώρα **Β2**, 160 στη χώρα **Β3** και 100 στη χώρα **Β4**.

Το συνολικό κόστος μεταφοράς είναι:
$K.M.=200\bullet 4+100\bullet 2+160\bullet 5+80\bullet 9+160\bullet 13+100\bullet 8 \Rightarrow$
K.M.= 5400 χρηματικές μονάδες

3.9.1 Μέθοδος ελάχιστου στοιχείου

Με τη μέθοδο του βορειοδυτικού άκρου βρίσκουμε μία βασική εφικτή λύση χωρίς όμως να ενδιαφερόμαστε για το συνολικό κόστος μεταφοράς. Επειδή αντικειμενικός στόχος μας είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς θα πρέπει να βρούμε μία άλλη λύση που να μειώνει το κόστος μεταφοράς. Η μέθοδος αυτή λέγεται μέθοδος του **ελάχιστου κόστους**. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο δε ξεκινάμε από το στοιχείο που βρίσκεται επάνω αριστερά αλλά από το στοιχείο Χ όπου έχει το αντίστοιχο πιο μικρό κόστος μεταφοράς.
Χρησιμοποιούμε το ίδιο παράδειγμα που είχαμε παραπάνω με τις τηλεοράσεις. Παραθέτουμε πάλι τον πίνακα:

Πίνακας 1

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	$\boxed{4}$ X_{11}	$\boxed{6}$ X_{12}	$\boxed{8}$ X_{13}	$\boxed{12}$ X_{14}	200
A2	$\boxed{2}$ X_{21}	$\boxed{5}$ X_{22}	$\boxed{7}$ X_{23}	$\boxed{4}$ X_{24}	260
A3	$\boxed{6}$ X_{31}	$\boxed{9}$ X_{32}	$\boxed{13}$ X_{33}	$\boxed{8}$ X_{34}	340
	300	240	160	100	800

Εδώ όμως δεν ξεκινάμε από το στοιχείο X_{11} αλλά από το στοιχείο X_{21} επειδή έχει το μικρότερο κόστος μεταφοράς (2).
Δουλεύουμε πάλι με τον ίδιο τρόπο όπως και στο βορειοδυτικό άκρο. Δηλαδή το X_{21} έχει περιορισμούς το (260,300) άρα εμείς θα του δώσουμε το μικρότερο από τα δύο το 260 ώστε να τηρεί τους περιορισμούς και

οριζόντια και κάθετα. Επομένως τα υπόλοιπα 3 στοιχεία της οριζόντιας γραμμής Α2 $\mathbf{X_{22}}$, $\mathbf{X_{23}}$, $\mathbf{X_{24}}$ θα είναι 0.

Πίνακας 2

X_{11} [4]	X_{12} [6]	X_{13} [8]	X_{14} [12]	200
X_{31} [6]	X_{32} [9]	X_{33} [13]	X_{34} [8]	340
40	240	160	100	

Σε αυτό τον πίνακα βλέπουμε ότι στην πρώτη στήλη ενώ οι ανάγκες του πρώτου εργοστασίου είναι 300 εμείς έχουμε βάλει 40. Αυτό έγινε γιατί τα υπόλοιπα 260 τα έχουμε χρησιμοποιήσει στο $\mathbf{X_{21}}$.
Στον πίνακα δύο θα ξεκινήσουμε πάλι με το στοιχείο εκείνο που έχει το μικρότερο κόστος μεταφοράς όπου είναι το $\mathbf{X_{11}}$ (αφού το 4 είναι μικρότερο από όλα τα άλλα). Το $\mathbf{X_{11}}$ έχει περιορισμούς (200,40) άρα θα πάρει το αριθμό 40. Επομένως το $\mathbf{X_{31}}$ θα είναι 0.

Πίνακας 3

X_{12} [6]	X_{13} [8]	X_{14} [12]	160
X_{32} [9]	X_{33} [13]	X_{34} [8]	340
240	160	100	

Στον πίνακα 3 το στοιχείο με το μικρότερο κόστος μεταφοράς είναι το $\mathbf{X_{12}}$. Το στοιχείο αυτό έχει περιορισμούς (160,240), άρα θα γίνει $\mathbf{X_{12}}$=160. Επομένως τα $\mathbf{X_{13}}$ και $\mathbf{X_{14}}$ θα είναι 0.

Πίνακας 4

X_{32} [9]	X_{33} [13]	X_{34} [8]	340
80	160	100	

Στον πίνακα 4 τα στοιχεία θα πάρουν τιμές όπως φαίνεται από τους περιορισμούς από κάτω. Άρα X_{32}=80, X_{33}=160 και X_{34}=100 τα οποία όλα μαζί μας κάνουν το άθροισμα 340.

Πίνακας 5

	B1	B2	B3	B4	
A1	40 $\boxed{4}$	160 $\boxed{6}$	0 $\boxed{8}$	0 $\boxed{12}$	200
A2	260 $\boxed{2}$	0 $\boxed{5}$	0 $\boxed{7}$	0 $\boxed{4}$	260
A3	0 $\boxed{6}$	80 $\boxed{9}$	160 $\boxed{13}$	100 $\boxed{8}$	340
	300	240	160	100	

Όπως βλέπουμε έχουμε τοποθετήσει όλες τις τιμές που βρήκαμε και τώρα θα υπολογίσουμε το κόστος μεταφοράς:

$$K.M=40\bullet4+160\bullet6+260\bullet2+80\bullet9+160\bullet13+100\bullet8=5240 \text{ χ.μ.}$$

3.10 Χαρακτηριστικά Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

Παρόλο που οι εφαρμογές του Γραμμικού Προγραμματισμού είναι ποικίλες, εν τούτοις όλα τα προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού έχουν μερικά **κοινά χαρακτηριστικά**. Πιο συγκεκριμένα:

- Όλα τα προβλήματα του Γραμμικού Προγραμματισμού αποβλέπουν στην μεγιστοποίηση του κέρδους ή στην ελαχιστοποίηση του κόστους, αντίστοιχα.

- Κάθε πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού περιλαμβάνει μια σειρά μεταβλητών, οι οποίες αντιπροσωπεύουν τις ποσότητες που πρέπει να προσδιορισθούν μέσω της επίλυσης του προβλήματος, ώστε να επιτευχθεί η μεγιστοποίηση ή η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης.

- Σε όλα τα προβλήματα του Γραμμικού Προγραμματισμού υπάρχουν περιορισμοί οι οποίοι περιορίζουν τη δυνατότητα της απεριόριστης αύξησης της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή του κέρδους. Όταν πρόκειται για ελαχιστοποίηση κόστους, οι περιορισμοί του προβλήματος περιορίζουν το βαθμό στον οποίο η ελάττωση του κόστους είναι εφικτή.

- Σε όλα τα προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού υπάρχουν εναλλακτικές λύσεις, εκ των οποίων θα επιλεγεί η βέλτιστη. *Για παράδειγμα, αν μια επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα θα μπορούσε να αφιερώσει όλο της το δυναμικό στην παραγωγή ενός προϊόντος ή να το μοιράσει μεταξύ δύο προϊόντων ή μεταξύ όλων. Αυτό θα μπορούσε να γίνει με διαφορετικές αναλογίες.* Άλλωστε βασικός σκοπός του Γραμμικού Προγραμματισμού είναι η επιλογή της βέλτιστης λύσεις.

Επιπρόσθετα, για την εφαρμογή της μεθοδολογίας του Γραμμικού Προγραμματισμού απαιτούνται ορισμένες παραδοχές. Δηλαδή πρέπει εξαρχής να γίνουν συγκεκριμένες υποθέσεις και να προσδιορισθούν ορισμένοι περιορισμοί, οι οποίοι θα βοηθήσουν στην λύση του προβλήματος. Τέτοιες **παραδοχές** θεωρούνται οι εξής:

- Κατ΄αρχήν θα πρέπει να υποθέσουμε ότι οι συντελεστές των περιορισμών (π.χ. ώρες που απαιτούνται για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος) καθώς και οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης (π.χ. κέρδη για κάθε μονάδα προϊόντος) είναι σταθεροί και δεν υπόκεινται σε τυχαίες διακυμάνσεις.

- Επιπλέον θα πρέπει να γίνει παραδεκτό ότι οι παραπάνω συντελεστές ισχύουν αναλογικά και αθροιστικά. *Για παράδειγμα, αν για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος απαιτούνται 3 ώρες εργασίας, οι 20 μονάδες προϊόντος απαιτούν 60 ώρες εργασίας. Επίσης αν για την παραγωγή μιας μονάδας ενός προϊόντος απαιτούνται 4 ώρες εργασίας και για μία μονάδα ενός άλλου προϊόντος απαιτούνται 3 ώρες, τότε για να παράγουμε μία μονάδα από κάθε προϊόν θα χρειασθούν συνολικά 7 ώρες εργασίας.* Δηλαδή οι περιορισμοί του προβλήματος είναι γραμμικοί.

- Υποθέτουμε επίσης ότι η παραγωγή είναι συνεχής. Δηλαδή είναι δυνατή η παραγωγή οποιασδήποτε ποσότητας ακέραιας ή κλασματικής.

3.11 Επεκτάσεις και Εφαρμογές του Γραμμικού Προγραμματισμού

Υπάρχουν πολλές παραλλαγές της μεθόδου Simplex. Μια σημαντική παραλλαγή της μεθόδου ιδιαίτερα για την επίλυση μεγάλων προβλημάτων, όπου πολύ συχνά ο αριθμός των μεταβλητών είναι πολύ μεγαλύτερος του αριθμού των περιορισμών και ο πίνακας των συντελεστών περιέχει μεγάλο αριθμό μηδενικών (ίσως και περισσότερο του 90% και τότε ο πίνακας λέγεται Sparse) είναι η **Τροποποιημένη μέθοδος Simplex** (Revised Simplex Method). Μεγάλα προβλήματα μπορούν να διαιρεθούν σε μικρότερα για να απλοποιηθεί η λύση χρησιμοποιώντας μεθόδους αποσύνθεσης (decomposition). Άλλες παραλλαγές όπως η **Δυϊκή μέθοδος Simplex** (Dual Simplex Method) και η **Αυτοδυϊκή μέθοδος Simplex** (Self Dual Simplex Method) κάνουν δυνατή την ταχεία εξέταση μικρών αλλαγών, στους συντελεστές κόστους ή στα στοιχεία των περιορισμών. Αυτό είναι το αντικείμενο του **παραμετρικού γραμμικού προγραμματισμού** (Parametric Linear Programming). Για μερικά προβλήματα, οι μεταβλητές έχουν νόημα εάν παίρνουν ακέραιες τιμές ή τιμές 0 ή 1. *Για παράδειγμα, αν θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το συνολικό χρόνο για να βρούμε με τι σειρά θα κατασκευάσουμε διάφορα προϊόντα, ορίζουμε μεταβλητές* X_{ij}, *όπου* $X_{ij} = 1$ *εάν το i προϊόν κατασκευάζεται στην j θέση της ακολουθίας και* $X_{ij} = 0$ *διαφορετικά. Εάν έχουμε μία τέτοια μεταβλητή σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού η λύση μπορεί να ερμηνευθεί αν τα* X_{ij} *παίρνουν τιμές 0 ή 1.* Τέτοια προβλήματα είναι προβλήματα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού και είναι πολύ πιο δύσκολο να λυθούν από ότι τα συνηθισμένα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού του ίδιου μεγέθους.

Σε μερικά προβλήματα, οι περιορισμοί ή η αντικειμενική συνάρτηση ή και τα δύο μπορεί να είναι **μη-γραμμικά**. Μια άλλη περίπτωση είναι όταν η αντικειμενική συνάρτηση είναι δευτεροβάθμια συνάρτηση των μεταβλητών και όπου οι περιορισμοί είναι γραμμικοί στις μεταβλητές. Αυτό είναι το πρόβλημα **τετραγωνικού προγραμματισμού** (quadratic programming) και συμβαίνει όταν για παράδειγμα οι τιμές των προϊόντων είναι μεταβλητές και οι πωλήσεις είναι φθίνουσες συναρτήσεις των τιμών. Η συνολική αξία των πωλήσεων είναι τότε δευτεροβάθμια συνάρτηση των τιμών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

4

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

4.1 Εισαγωγή

Η θεωρία του Γραμμικού Προγραμματισμού είναι μία θεωρία που μπορεί να εφαρμοστεί στα καθημερινά προβλήματα που ταλαιπωρούν τις μικρές ή μικρομεσαίες επιχειρήσεις, τις μεγάλες βιομηχανίες, τους οργανισμούς, διάφορους επαγγελματίες, την πολιτεία με τους πολίτες της κ.ο.κ. Δηλαδή, όλες αυτές οι μέθοδοι που αναλύθηκαν παραπάνω, είναι δυνατόν να βοηθήσουν στην επίλυση διαφόρων ειδών προβλημάτων και να δώσουν την βέλτιστη λύση σε εκείνον που τις χρησιμοποιεί.

Ήδη διαπιστώθηκε πόσο χρήσιμες είναι οι μέθοδοι του Γραμμικού Προγραμματισμού κατά την επίλυση προβλημάτων που παρουσιάστηκαν στην βιομηχανία επίπλων, στο πρόβλημα μίξης παραγωγής της ΑΓΡΟΤΙΝΗΣ, στο πρόβλημα διαίτης που αντιμετώπιζε η επιχείρηση ζωοτροφών κ.ο.κ. Βέβαια υπάρχουν και πιο σύνηθες προβλήματα, που κινούνται μέσα σε ρεαλιστικά πλαίσια, με πραγματικά δεδομένα και τα οποία μπορούν να βρούν την λύση τους από κάποια μέθοδο του Γραμμικού Προγραμματισμού. Τέτοια προβλήματα είναι τα προβλήματα που ακολουθούν.

4.2 Προγραμματισμός Ανθρώπινου Δυναμικού

Μια αεροπορική εταιρία έχει 30 πιλότους, 24 βοηθούς πιλότων, 12 πλοηγούς και 132 άτομα προσωπικό καμπίνας. Έχει δύο τύπους αεροπλάνων: 19 τύπου 717 με μεταφορική ικανότητα 180 επιβατών και 14 τύπου 1110 με μεταφορική ικανότητα 340 επιβατών. Ένα αεροπλάνο τύπου 717 χρειάζεται ένα πιλότο, ένα βοηθό πιλότου και 4 άτομα για προσωπικό καμπίνας, ενώ ένα τύπου 1110 χρειάζεται ένα πιλότο, ένα βοηθό πιλότου, ένα πλοηγό και 7 άτομα για προσωπικό καμπίνας. Οι πιλότοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν και σαν βοηθοί πιλότοι εάν είναι αναγκαίο. Ποιός είναι ο μέγιστος αριθμός επιβατών που η εταιρία μπορεί να μεταφέρει ταυτόχρονα;

Απάντηση:

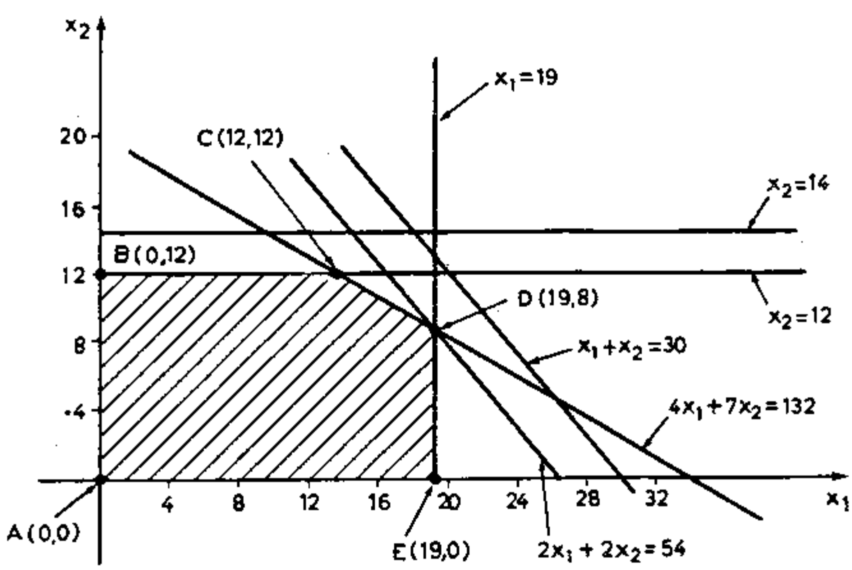
Αν θέσουμε για X_1 τον αριθμό αεροπλάνων τύπου 717 και για X_2 τον αριθμό αεροπλάνων τύπου 1110 που χρησιμοποιούνται, τότε το πρόβλημα μπορεί να πάρει την εξής μορφή:

$$\max.\ K = 180X_1 + 340X_2$$

με περιορισμούς :

$$
\begin{gathered}
X_1 \leq 19 \\
X_2 \leq 14 \\
X_1 + X_2 \leq 30 \\
2X_1 + 2X_2 \leq 54 \\
X_2 \leq 12 \\
4X_1 + 7X_2 \leq 132 \\
X_1, X_2 \geq 0
\end{gathered}
$$

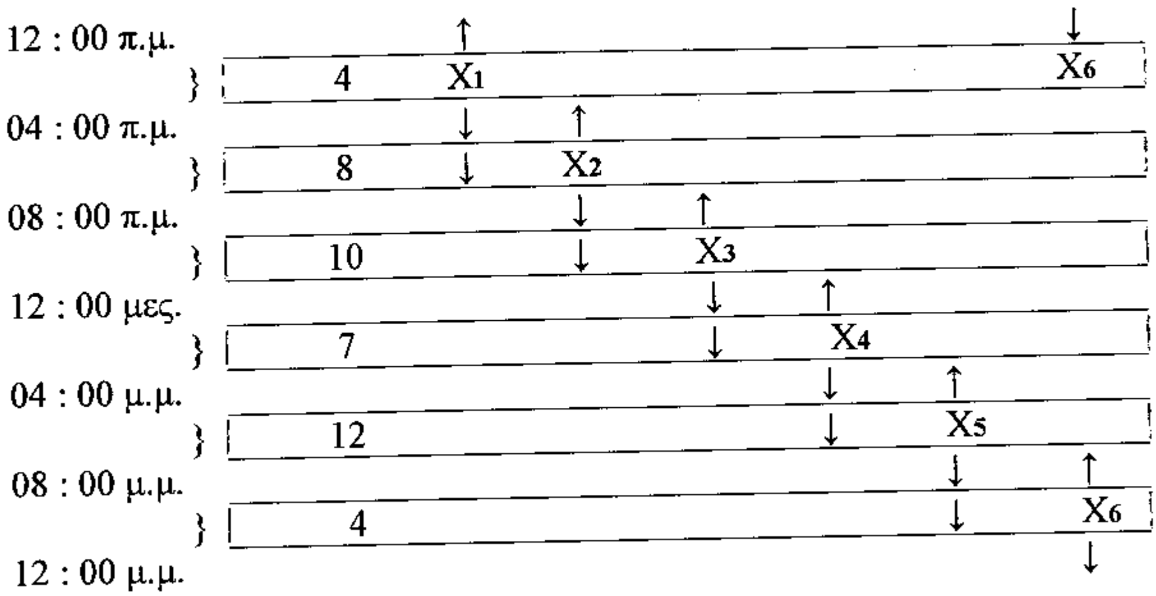
Η εφικτή περιοχή δίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Οι κορυφές είναι A(0,0), B(0,12), C(12,12), D(19,8) και E(19,0) και η αντικειμενική συνάρτηση σε κάθε κορυφή παίρνει τιμή 4080, 6240, 6140 και 3420 αντίστοιχα. Άρα η εταιρία μπορεί να μεταφέρει το πολύ 6240 επιβάτες με 12 αεροπλάνα τύπου 717 και 12 αεροπλάνα τύπου 1110.



4.3 Προγραμματισμός Λεωφορείων

Η πόλη Α μελετά τη βελτίωση των συγκοινωνιών της. Ο ελάχιστος αριθμός λεωφορείων που χρειάζεται για την ικανοποίηση των αναγκών της πόλης δίνεται στον πίνακα που ακολουθεί:

Ώρα λεωφ.



Δηλαδή μεταξύ 12:00 και 04:00 π.μ. χρειάζονται τουλάχιστον 4 λεωφορεία, μεταξύ 04:00 π.μ. και 08:00 μ.μ. χρειάζονται τουλάχιστον 8 λεωφορεία κ.ο.κ. Κάθε λεωφορείο λειτουργεί για οκτώ συνεχείς ώρες (βάρδια). Να βρεθεί ο αριθμός των λεωφορείων που πρέπει να λειτουργεί σε κάθε βάρδια έτσι ώστε να ικανοποιείται η ζήτηση, αλλά και να ελαχιστοποιείται ο συνολικός αριθμός των λεωφορείων που λειτουργούν την ημέρα.

Απάντηση:

Εάν ακολουθήσουμε τις συνηθισμένες βάρδιες (8:01 π.μ. - 04:00 μ.μ., 04:01 μ.μ. - 12:00 μεσάνυχτα, 12:01 π.μ. - 08:00 π.μ.) και υποθέσουμε ότι X_1, X_2 και X_3 είναι ο αριθμός των λεωφορείων που αρχίζουν την πρώτη, δεύτερη και τρίτη βάρδια, τότε από τον πιο πάνω πίνακα έχουμε ότι $X_1 \geq 10$, $X_2 \geq 12$, $X_3 \geq 8$ και η ελάχιστη τιμή του $X_1+X_2+X_3$ είναι 30, δηλαδή χρειάζονται τουλάχιστον 30 οδηγοί λεωφορείων την ημέρα που θα εργαστούν σε οκτάωρες βάρδιες.

Αυτή η λύση είναι δεκτή όταν οι βάρδιες των λεωφορείων πρέπει να συμπίπτουν με τις τρεις γνωστές βάρδιες. Ας υποθέσουμε όμως ότι οι βάρδιες των λεωφορείων μπορούν να αρχίζουν κάθε 4 ώρες, δηλαδή στις

12:01 π.μ., 4:01 π.μ., 8:01 π.μ., 12:01 μ.μ., 4:01 μ.μ. και 8:01 μ.μ. και ότι κάθε λεωφορείο λειτουργεί για οκτώ συνεχείς ώρες. Ορίζουμε τις μεταβλητές:

X_1 = αριθμός λεωφορείων που αρχίζουν στις 12:01 π.μ.

X_2 = αριθμός λεωφορείων που αρχίζουν στις 4:01 π.μ.

X_3 = αριθμός λεωφορείων που αρχίζουν στις 8:01 π.μ.

X_4 = αριθμός λεωφορείων που αρχίζουν στις 12:01 μ.μ.

X_5 = αριθμός λεωφορείων που αρχίζουν στις 4:01 μ.μ.

X_6 = αριθμός λεωφορείων που αρχίζουν στις 8:01 μ.μ.

τότε το πρόβλημα διατυπώνεται:

min. $Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$

με περιορισμούς:

$X_1 + X_6 \geq 4$ (12:01 π.μ. - 4:00 π.μ.)
$X_1 + X_2 \geq 8$ (4:01 π.μ. - 8:00 π.μ.)
$X_2 + X_3 \geq 10$ (8:01 π.μ. - 12:00 μεσ.)
$X_3 + X_4 \geq 7$ (12:01 μ.μ. - 4:00 μ.μ.)
$X_4 + X_5 \geq 12$ (4:01 μ.μ. - 8:00 μ.μ.)
$X_5 + X_6 \geq 4$ (8:01 μ.μ. - 12:00 π.μ.)
$X_j \geq 0$ ακέραιοι $j = 1, 2, 3, \ldots, 6$

Η βέλτιστη λύση σε αυτό το πρόγραμμα είναι να λειτουργούν 26 λεωφορεία. Να αρχίζουν 10 λεωφορεία στις 4:01 π.μ. (X_2), 12 στις 12:01 π.μ. (X_4) και 4 στις 8:01 μ.μ. (X_6). Έτσι επιτρέποντας στο πρόβλημα να επιλέξει το χρόνο που ξεκινούν τα λεωφορεία, ο ελάχιστος αριθμός των οδηγών λεωφορείων που θα εργαστούν σε οκτάωρες βάρδιες ο καθένας, είναι τουλάχιστον 26 σε σύγκριση με 30 προηγούμενα.

4.4 Διαφήμιση

Τα μοντέλα του γραμμικού προγραμματισμού χρησιμοποιούνται στο πεδίο της διαφήμισης ως εργαλεία υποστήριξης αποφάσεων για τον καθορισμό μιας αποτελεσματικής διαφημιστικής πολιτικής μέσω της επιλογής ενός συνδυασμού διαφόρων διαφημιστικών μέσων. Μία σωστή διαφημιστική εκστρατεία μπορεί να γίνει με δύο προσεγγίσεις. Η πρώτη αφορά την κατανομή ενός σταθερού ή περιορισμένου προϋπολογισμού σε διάφορα διαφημιστικά μέσα όπως ράδιο, τηλεόραση περιοδικά κ.λπ. στόχος σε αυτή την περίπτωση είναι η μεγιστοποίηση της διαφημιστικής κάλυψης. Ενώ η δεύτερη προσέγγιση αφορά την ελαχιστοποίηση του κόστους της διαφήμισης.

Παράδειγμα Μεγιστοποίησης:

Η διαφημιστική εταιρεία Α ανέλαβε τη διαφήμιση των ξενοδοχείων στην Κεντρική Γερμανία. Η ένωση των ξενοδόχων της περιοχής διαθέτει έναν προϋπολογισμό 80.000.000 ανά εβδομάδα για διαφήμιση. Ο προϋπολογισμός θα καλύψει διαφήμιση στην τηλεόραση, σε εφημερίδες και σε δύο ζώνες ακρόασης στο ραδιόφωνο. Στόχος της Α είναι να έχει τη μεγαλύτερη δυνατή διαφημιστική κάλυψη χρησιμοποιώντας όλα τα διαφημιστικά μέσα.

Ο παρακάτω πίνακας περιλαμβάνει τον αριθμό των οικογενειών που θα λάβει το διαφημιστικό μήνυμα από κάθε μέσο διαφήμισης. ο ίδιος πίνακας περιλαμβάνει το κόστος κάθε αγγελίας και το μέγιστο αριθμό διαφημιστικών καταχωρήσων ανά εβδομάδα σε κάθε μέσο.

Διαφηστικό μέσο	**Διαφημιστική κάλυψη ανά καταχώρηση**	**Κόστος ανά καταχώρηση**	**Μέγιστος αριθμός καταχωρήσεων ανά εβδομάδα**
Τηλεοπτικά σποτ	5.000	4.000.000	20
Ημερήσιες εφημερίδες	8.500	3.000.000	5
Ραδιοφωνικά σποτ 30"- υψηλή ζώνη τηλεθέασης	2.400	1.000.000	30
Ραδιοφωνικά σποτ 60"- χαμηλή ζώνη τηλεθέασης	2.800	1.200.000	20

Προηγούμενες συμφωνίες της Α επιβάλλουν τη χρήση τουλάχιστον 30 ραδιοφωνικών σποτ την εβδομάδα. Από την άλλη μεριά επειδή η κάλυψη του ραδιοφώνου είναι εκ της φύσεως της περιορισμένη γεωγραφικά η Α δεν επιθυμεί να δαπανήσει περισσότερο από 18.000.000 σε διαφημίσεις ραδιοφώνου την εβδομάδα.

Λύση:

Η διατύπωση του παραπάνω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι η εξής:

Μεταβλητές:

X_1 = αριθμός των τηλεοπτικών σποτ

X_2 = αριθμός διαφημιστικών καταχωρήσεων σε εφημερίδες

X_3 = αριθμός ραδιοφωνικών διαφημίσεων 30'' σε ώρες υψηλής ακροαματικότητας

X_4 = αριθμός ραδιοφωνικών διαφημίσεων 60'' σε ώρες χαμηλής ακροαματικότητας

Όλες οι μεταβλητές δηλώνουν ποσότητες ανά εβδομάδα.

Αντικειμενική συνάρτηση:

Στόχος εδώ είναι η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης. Εφόσον γνωρίζουμε τη διαφημιστική κάλυψη για κάθε είδος διαφήμισης η αντικειμενική συνάρτηση διαμορφώνεται ως εξής:

Μεγιστοποίηση διαφημιστικής κάλυψης: $5000X_1+8500X_2+2400X_3+2800X_4$

Περιορισμοί:

$X_1 \leq 20$	μέγιστος αριθμός τηλεοπτικών σποτ
$X_2 \leq 5$	μέγιστος αριθμός διαφημίσεων σε εφημερίδες
$X_3 \leq 30$	μέγιστος αριθμός ραδιοφωνικών σποτ 30''
$X_4 \leq 20$	μέγιστος αριθμός ραδιοφωνικών σποτ 60''

$4X_1+3X_2+X_3+1{,}2X_4 \leq 80$ εβδομαδιαίος προϋπολογισμός (εκατ. χ.μ.)

$X_3+X_4 \geq 30$ ελάχιστος αριθμός ραδιοφωνικών σποτ

$X_3+1{,}2X_4 \leq 18$ όριο δαπανών για διαφημίσεις στο ραδιόφωνο σε εκατ. χ.μ.

$X_1,X_2,X_3,X_4 \geq 0$

Παράδειγμα Ελαχιστοποίησης:

Ένα νέο κατάστημα γνωστής αλυσίδας καταστημάτων που άνοιξε στη πόλη της Λάρισας ήθελε να διαφημισθεί μέσω του ραδιοφώνου και των τοπικών εφημερίδων, τόσο στην πόλη της Λάρισας, όσο και στα περίχωρα. Με βάση την εμπειρία του από το άνοιγμα καταστημάτων της ίδιας αλυσίδας σε άλλες πόλεις, ο υπεύθυνος μάρκετινγκ του καταστήματος ήθελε να επιτύχει επίπεδα διαφημιστικής κάλυψης τουλάχιστον 60% μέσα στην πόλη και 40% στη γύρω περιοχή. Κάθε διαφήμιση στον τοπικό ραδιοσταθμό έχει ακροαματικότητα 3% μέσα στην πόλη και 5% στα περίχωρα. Αντίθετα, οι διαφημιστικές καταχωρήσεις στον τοπικό σταθμό έχουν διαφημιστική κάλυψη 8% στην πόλη και 4% στα περίχωρα.

Το κόστος κάθε διαφημιστικού σποτ στο ράδιο είναι 30.000 χ.μ. ενώ η κάθε καταχώρηση στις εφημερίδες στοιχίζει 40.000 χ.μ. Στόχος του υπεύθυνου μάρκετινγκ είναι να πετύχει τη διαφημιστική κάλυψη που επιθυμεί με όσο το δυνατόν μικρότερη δαπάνη.

Λύση:

Μεταβλητές:

Έστω λοιπόν:

X_1 = αριθμός των ραδιοφωνικών σπότ ανά εβδομάδα

X_2 = αριθμός διαφημιστικών καταχωρήσεων σε εφημερίδες ανά βδομάδα

Αντικειμενική συνάρτηση:

Η αντικειμενική συνάρτηση αφορά την ελαχιστοποίηση του κόστους διαφήμισης, το οποίο εξαρτάται από τον αριθμό των διαφημίσεων στο ραδιόφωνο (X_1) και στις εφημερίδες (X_2).

Ελαχιστοποίηση κόστους διαφήμισης → $30.000X_1+40.000X_2$

Υπο τους περιορισμούς:

$0,03X_1+0,08X_2 \geq 0,60$ διαφημιστική κάλυψη στην πόλη

$0,05X_1+0,04X_2 \geq 0,40$ διαφημιστική κάλυψη σε περίχωρα

4.5 Επενδύσεις

Το πρόβλημα της επιλογής της καλύτερης επένδυσης ενός κεφαλαίου συνήθως αντιμετωπίζεται υπολογίζοντας την παρούσα αξία κάθε επένδυσης και επιλέγοντας στη συνέχεια εκείνη την επένδυση που έχει τη μεγαλύτερη παρούσα αξία. Μία τέτοια όμως μεθοδολογία δεν οδηγεί στο βέλτιστο κέρδος επειδή δε λαμβάνεται υπ'όψη η δυνατότητα επένδυσης του κεφαλαίου σε δύο ή περισσότερα επενδυτικά προγράμματα. Τέτοια δυνατότητα έχει ο γραμμικός προγραμματισμός.

Παράδειγμα:

Μία επιχείρηση θέλει να επενδύσει για μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο 250 εκατ. χ.μ. Το οικονομικό τμήμα της επιχείρησης μετά από έρευνα της αγοράς κατέληξε σε αξιόπιστες προβλέψεις για την απόδοση κοινών και προνομιούχων μετοχών συγκεκριμένων εταιρειών του χρηματιστηρίου Αθηνών, σε σύγκριση με την απόδοση διαφόρων άλλων εναλλακτικών λύσεων, όπως τίτλων του δημοσίου πιστοποιητικών κατάθεσης και ομολόγων κρατικών επιχειρήσεων. Τα δεδομένα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Τύπος επένδυσης	Αναμενόμενη απόδοση (%)
Κοινές μετοχές	16
Προνομιούχες μετοχές	18
Ομόλογα κρατικών επιχειρήσεων	20
Κρατικά ομόλογα	15
Πιστοποιητικά καταθέσεων	16

Το οικονομικό τμήμα της επιχείρησης πιστεύει ότι δεν θα υπάρξουν σημαντικές αυξομειώσεις στις παραπάνω αποδόσεις στο χρονικό διάστημα του προγραμματισμού και επομένως θεωρούνται σταθερές.

Η διεύθυνση της επιχείρησης έχει θέσει και ορισμένους κανόνες, που αφορούν την καλύτερη κατανομή του επενδεδυμένου κεφαλαίου σε όλες τις μορφές της επένδυσης:

- Επειδή οι επενδύσεις σε κοινές και προνομιούχες μετοχές παρουσιάζουν μεγαλύτερο κίνδυνο από τους άλλους τύπους επενδύσεων το συνολικό ποσό που θα επενδυθεί σε κοινές και προνομιούχες μετοχές δεν θα πρέπει να ξεπερνά το 305 της συνολικής επένδυσης.
- Το ποσό που θα επενδυθεί σε κρατικά ομόλογα θα πρέπει να μην είναι μικρότερο του ποσού που θα επενδυθεί σε πιστοποιητικά καταθέσεων.
- Το συνολικό ποσό που θα επενδυθεί σε ομόλογα δεν θα πρέπει να ξεπερνάει το 50% του συνολικού ποσού της επένδυσης.
- Το επενδεδυμένο ποσό σε προνομιούχες μετοχές δε θα πρέπει να ξεπερνά το 50% της συνολικής επένδυσης σε μετοχές.

Λύση:

<u>Μεταβλητές:</u>

X_1 = το ποσό που θα επενδυθεί σε κοινές μετοχές

X_2 = το ποσό που θα επενδυθεί σε προνομιούχες μετοχές

X_3 = το ποσό που θα επενδυθεί σε ομόλογα κρατικών επιχειρήσεων

X_4 = το ποσό που θα επενδυθεί σε κρατικά ομόλογα

X_5 = το ποσό που θα επενδυθεί σε πιστοποιητικά καταθέσεων

Εφόσον είναι γνωστό το ποσό της απόδοσης κάθε επένδυσης, το ποσό X_1 που θα επενδυθεί σε κοινές μετοχές θα έχει συνολική απόδοση σε χ.μ. $0,16X_1$, το ποσό X_2 επενδεδυμένο σε προνομιούχες μετοχές θα αποδόσει $0,18X_2$ χ.μ. κ.ο.κ.

Αντικειμενική συνάρτηση:

Μεγιστοποίηση απόδοσης : $0,16X_1+0,18X_2+0,20X_3+0,15X_4+0,16X_5$

Υπό τους περιορισμούς:

$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5 \leq 250$

$X_1+X_2 \leq 0,30(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5)$

$X_4 \geq X_5$ ή $X_4 - X_5 \geq 0$

$X_3+X_4 \leq 0,40(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5)$

$X_2 \leq 0,50(X_1+X_2)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Η ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΧΝΙΔΙΩΝ ΚΑΙ Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

5.1 Η Θεωρία Παιχνιδιών

Στα προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού επιζητείται η βελτιστοποίηση μιας αντικειμενικής συνάρτησης που εκφράζει το στόχο της επιχείρησης ή του οργανισμού. Ο στόχος αυτός έχει καθοριστεί από ένα άτομο υπεύθυνο για τη λήψη της σχετικής απόφασης ή από μία ομάδα ατόμων που είναι συνυπεύθυνα και έχουν κοινό στόχο.

Στη θεωρία παιχνιδιών αντιμετωπίζονται περιπτώσεις όπου περισσότερα από ένα άτομα (ή ομάδα ατόμων) που έχουν διαφορετικούς ή και αντίθετους στόχους, παίρνουν αποφάσεις ταυτόχρονα. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για το ένα άτομο εξαρτάται όχι μόνο από τις δικές του ενέργειες, αλλά και από τις ενέργειες των άλλων (αντιπάλων).

Η θεωρία παιχνιδιών στόχο έχει τη δημιουργία μαθηματικών υποδειγμάτων συγκρούσεων και συνεργασίας. Η θεμελίωσή της αποδίδεται στον John von Neumann. Θεωρείται ότι έγινε στις εργασίες του, που δημοσιεύθηκαν το 1928 και 1937, ενώ οι αρχικές προτάσεις της θεωρίας παιχνιδιών είχαν αναπτυχθεί τον 18^{o} αιώνα. Η θεωρία παιχνιδιών έγινε γνωστή με τη δημοσίευση του βιβλίου «Theory of Games and Economic Behavior» των John von Neumann και Oskar Morgenstern το 1944. Ενώ η θεωρία πιθανοτήτων εξετάζει παιχνίδια με τυχαία φαινόμενα, η θεωρία παιχνιδιών δίνει έμφαση στις στρατηγικές που έχουν στη διάθεσή τους οι παίκτες, δηλαδή επεκτείνεται περαιτέρω από τη θεωρία πιθανοτήτων εξετάζοντας παιχνίδια όπου οι παίκτες έχουν και δυνατότητα επιλογής σε σημεία αποφάσεως που συναντούν.

Τα άτομα ή ομάδες ατόμων αναφέρονται σαν **παίκτες**. Κάθε παίκτης μπορεί να ενεργήσει με διάφορους τρόπους που λέγονται **στρατηγικές** και είναι γνωστές σε όλους τους παίκτες. Τα αποτελέσματα του παιχνιδιού είναι συναρτήσεις των στρατηγικών. Παιχνίδια με δύο παίκτες όπου το κέρδος του ένα παίκτη είναι ίσο με τη ζημιά του άλλου λέγονται **παιχνίδια με δύο παίκτες και άθροισμα κερδών μηδέν**.

Επειδή σε αυτά τα παιχνίδια τα ενδιαφέροντα των δύο πλευρών είναι εκ διαμέτρου αντίθετα, μπορεί να θεωρηθεί ότι τα παιχνίδια αυτά παριστούν εμπόλεμες καταστάσεις μεταξύ δύο κρατών. Για αυτό το λόγο και πολλά παραδείγματα εφαρμογής αυτής της θεωρίας προέρχονται από το στρατιωτικό χώρο. Τα προβλήματα των επιχειρήσεων επίσης, που ανταγωνίζονται μεταξύ τους στην ίδια αγορά μπορούν σε μερικές περιπτώσεις να παρασταθούν σαν παιχνίδια με δύο παίκτες και άθροισμα κερδών μηδέν.

Νομίζει έτσι κανείς ότι οι εφαρμογές της θεωρίας παιχνιδιών είναι αναρίθμητες. Στη πράξη τα προβλήματα είναι τόσο πολύπλοκα που μόνο για μερικές απλές περιπτώσεις με αντίθετους στόχους υπάρχει αναλυτική θεωρία.

5.1.1 Η Σχέση του Γραμμικού Προγραμματισμού με τη Θεωρία Παιχνιδιών

Η θεωρία παιχνιδιών συνδέεται με τον Γραμμικό Προγραμματισμό επειδή κάθε παιχνίδι με δύο παίκτες και άθροισμα κερδών μηδέν, μπορεί να εκφραστεί σαν ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού και αντίστροφα ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση της μικτής στρατηγικής, ανεξάρτητα από τον αριθμό των στρατηγικών.

Στη συνέχεια θα ακολουθήσει ένα παράδειγμα προκειμένου να δούμε πως ένα παιχνίδι μπορεί να πάρει την μορφή προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω το πιο κάτω παιχνίδι μεταξύ των παικτών Α και Β με άθροισμα κερδών μηδέν. Ο παίκτης Α έχει στη διάθεσή του τις στρατηγικές S_1 και S_2, ο Β τις στρατηγικές G_1, G_2 και G_3. Ο πίνακας κερδών Α, που μπορεί κανείς να υποθέσει ότι είναι χρήματα, είναι:

		B		
		G_1	G_2	G_3
	S_1	6	3	4
A	S_2	1	2	7

Επειδή ο Α θέλει να μεγιστοποιήσει το κέρδος του, καλείται ο ***παίκτης που μεγιστοποιεί****. Παρόμοια ο Β καλείται ο* ***παίκτης που ελαχιστοποιεί****, επειδή θέλει να ελαχιστοποιήσει τη ζημιά του. Είναι εύκολο να αντιστρέψουμε τους ρόλους των δύο παικτών πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα με - 1. Παρατηρούμε ότι εάν ο Β ακολουθήσει την στρατηγική G_3 η* *ζημιά του είναι μεγαλύτερη από ότι θα ήταν αν είχε ακολουθήσει την G_2. Συνεπώς ο B δεν πρέπει να παίξει την G_3. Σε αυτές τις περιπτώσεις λέμε ότι η G_3* ***επικαλύπτεται*** *από την G_2 και μπορούμε να την αγνοήσουμε. Έτσι ο πίνακας απλοποιείται και γίνεται:*

		B	
		G_1	**G_2**
	S_1	6	3
A	**S_2**	1	2

Παρατηρούμε ότι το στοιχείο 3 είναι το ελάχιστο της γραμμής του και το μέγιστο της στήλης του. Έτσι ο παίκτης A μειώνει το κέρδος του με το να αλλάξει από την S_1 στην S_2 όταν ο B ακολουθεί την G_2. Όμοια και ο B αυξάνει την ζημιά του αλλάζοντας από την G_2 στην G_1 όταν ο A ακολουθεί την S_1.

Στην πραγματικότητα βέβαια ένα παιχνίδι μπορεί να έχει πολλές μεταβλητές καθώς και πολλούς παίκτες, οι οποίοι να επιλέξουν να ενεργούν με πολλές στρατηγικές. Έτσι, ύστερα από μαθηματική διατύπωση των προβλημάτων αυτών, τα οποία θα έχουν και πραγματικά δεδομένα, θα είναι εφικτό να διατυπωθούν ως προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού. Άλλωστε, όπως ήδη διαπιστώθηκε, το ζητούμενο και στα δύο είδη προβλημάτων είναι το ίδιο. Δηλαδή η ελαχιστοποίηση του κόστους ή η μεγιστοποίηση του κέρδους.

5.2 Θεωρία Αποφάσεων

Ένα από τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν επιχειρήσεις, οργανισμοί αλλά και μεμονωμένα άτομα είναι το πρόβλημα της λήψης αποφάσεων. Το πρόβλημα αυτό θα μπορούσε να ορισθεί ως η επιλογή της άριστης λύσης από ένα σύνολο εφικτών εναλλακτικών λύσεων με βάση κάποιο ή κάποια προκαθορισμένα κριτήρια.

Για να είναι δυνατή η επιλογή της καλύτερης λύσεως μεταξύ των εφικτών εναλλακτικών λύσεων πρέπει να μπορεί να μετρηθεί η απόδοση κάθε μίας εναλλακτικής λύσεως σύμφωνα με ένα ορισμένο και μετρήσιμο κριτήριο. Συνήθως για να ληφθεί μία απόφαση βλέπουμε ότι βασίζεται σε περισσότερα από ένα κριτήρια, όπως π.χ. οικονομικά κριτήρια, κριτήρια απόδοσης, κοινωνικά κριτήρια κ.α. τα οποία δεν είναι καθόλου εύκολο να συνδυαστούν.

Για να γίνουν τα παραπάνω πιο κατανοητά μπορούμε να αναφέρουμε ένα παράδειγμα. Αν λοιπόν κάποια επιχείρηση θέλει να επιλέξει τεχνολογικό εξοπλισμό τότε θα πρέπει οπωσδήποτε να λάβει υπόψη της:

α) το κόστος αγοράς του μηχανήματος,
β) το κόστος λειτουργίας του μηχανήματος,
γ) την αξιοπιστία του μηχανήματος καθώς και
δ) την υποστήριξη συντήρησης.

Αν υπάρχει κάποιο μηχάνημα που πληρεί όλες αυτές τις προϋποθέσεις τότε η επιλογή είναι εύκολη. Συνήθως όμως επειδή τα μηχανήματα είναι οικονομικότερα δεν βρίσκονται και στην άριστη κατάσταση. Επομένως, όταν κάποιος επιλέγει να αγοράσει κάποιο προϊόν θα πρέπει να καταφέρει να συνδυάσει τα κριτήρια που φαίνονται ανομοιογενή ή να επιλέξει τα κριτήρια εκείνα που του φαίνονται πιο σημαντικά.

Τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά που αφορούν τη λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων είναι αρχικά η αβεβαιότητα. Η λήψη αποφάσεων είναι μια διαδικασία που αφορά το μέλλον. Το γεγονός ότι υπάρχει αβεβαιότητα μέσα στο περιβάλλον που λαμβάνεται η απόφαση επηρεάζει τα αποτελέσματα που θα προκύψουν από τις επιλογές που θα γίνουν και έτσι η διαδικασία είναι πιο δύσκολη και πολύπλοκη. Ένα άλλο στοιχείο που χαρακτηρίζει τη λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων είναι η έλλειψη δεδομένων. Για να είναι δυνατή η σύγκριση εναλλακτικών λύσεων απαιτείται η ανάλυση συγκεκριμένων δεδομένων. Η ανάλυση των δεδομένων είναι χρήσιμη και απαραίτητη ώστε να υπολογισθούν τα αποτελέσματα που θα προέκυπταν από την τυχόν υιοθέτηση της κάθε μίας από τις υπό εξέταση επιλογές. Πολλές φορές όταν παίρνουμε μία απόφαση την κρίνουμε από το αποτέλεσμά της, το οποίο όμως φαίνεται εκ των υστέρων. Το αποτέλεσμα αυτό είναι δυνατό να εξαρτάται από συγκυρίες που δεν μπορούσαν να προβλεφθούν και να εκτιμηθούν με πλήρη βεβαιότητα την στιγμή που πάρθηκε η απόφαση.

Υπάρχουν ορισμένες μεθοδολογίες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη συστηματική αξιολόγηση των εναλλακτικών λύσεων σε προβλήματα λήψης αποφάσεων.

1. Ανάλυση εναλλακτικών αποφάσεων με πολλαπλά κριτήρια αξιολόγησης

Σε πολλές περιπτώσεις για να παρθεί μία απόφαση υπήρχαν διάφορα κριτήρια τα οποία ήταν τελείως διαφορετικά μεταξύ τους. Ένα βασικό σημείο το οποίο πρέπει να τονίσουμε είναι ότι θα πρέπει να διευκρινησθεί και να καθορισθεί εκ των προτέρων ο τρόπος μέτρησης κάθε εναλλακτικής λύσεως σε σχέση με τα προκαθορισμένα κριτήρια επιλογής. Σε τέτοιες περιπτώσεις βλέπουμε ότι δεν υπάρχει εναλλακτική λύση που να υπερέχει όλων των άλλων σε όλα τα κριτήρια. Είναι προφανές ότι αυτό που χρειαζόμαστε στην περίπτωση των πολλαπλών κριτηρίων αξιολόγησης είναι ο συνδυασμός όλων των κριτηρίων και ο ορισμός ενός μεγέθους αξιολόγησης, που να συνδυάζει και να εκφράζει όλα τα κριτήρια. Παρακάτω βλέπουμε μεθοδολογίες που εφαρμόζονται σε περιπτώσεις πολλαπλών κριτηρίων.

Μέθοδος σταθμισμένου κόστους

Χρησιμοποιούμε την παραπάνω μεθοδολογία όταν κάποια από τα κριτήρια που μελετάμε είναι κοστολογικά ενώ κάποια άλλα είναι ποιοτικά. Η φιλοσοφία της μεθοδολογίας αυτής έχει να κάνει με το γεγονός ότι τα ποιοτικά κριτήρια έχουν μία βαθμολογία από το 0-100% ενώ τα κοστολογικά συγκρίνονται με τη βαθμολογία που προέκυψε και επιλέγεται αυτό που προέχει ή απορρίπτεται αυτό που υστερεί.

Μείωση υποκειμενικότητας κριτηρίων

Σε αυτή τη μεθοδολογία το σημαντικό στοιχείο είναι η υποκειμενικότητα σε ότι αφορά τον τρόπο βαθμολογίας κάθε κριτηρίου και το αντίστοιχο βάρος σημαντικότητας του κριτηρίου. Οι κανόνες που πρέπει να ακολουθούνται για τη μείωση της υποκειμενικότητας των κριτηρίων είναι οι ακόλουθοι:

- Ο τρόπος βαθμολογίας των κριτηρίων πρέπει να καθορίζεται εκ των προτέρων
- Το βάρος σημαντικότητας πρέπει επίσης να καθορίζεται εκ των προτέρων
- Η βαθμολογία είναι υποκειμενική. Για να μειωθεί η υποκειμενικότητα, η κάθε εναλλακτική λύση θα μπορούσε να βαθμολογηθεί με ανεξάρτητους συντελεστές και να ληφθεί ο μέσος όρος.

Μέθοδος σταθμισμένης βαθμολογίας

Βασίζεται στη βαθμολόγηση συγκεκριμένων κριτηρίων για κάθε εναλλακτική λύση και στην εξαγωγή ενός σταθμικού μέσου με βάση το βάρος ή τη σημαντικότητα κάθε κριτηρίου. Η μέθοδος της σταθμισμένης βαθμολογίας εφαρμόζεται όταν δεν υπάρχουν στοιχεία κόστους.

Βελτιστοποίηση ως προς ένα κριτήριο σε συνδυασμό ελαχίστων ορίων ως προς τα άλλα

Μία διαφορετική προσέγγιση στην επιλογή της βέλτιστης μεταξύ εναλλατκικών λύσεων είναι ο διαχωρισμός των κριτηρίων σε δύο ομάδες:

- ✓ Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει ορισμένα κριτήρια για τα οποία έχουμε θέσει ένα ελάχιστο όριο αποδοχής για κάθε εναλλακτική λύση. Αν έστω ένα από τα κριτήρια είναι κάτω από το όριο τότε η λύση αυτή αποκλείεται.
- ✓ Ενώ η δεύτερη ομάδα κριτηρίων χρησιμοποιείται όπως προηγουμένως για την επιλογή της λύσης που συγκεντρώνει την καλύτερη βαθμολογία ή το μικρότερο κόστος από αυτές που ικανοποιούν την πρώτη ομάδα κριτηρίων.

2. Ανάλυση εναλλακτικών αποφάσεων σε συνθήκες αβεβαιότητας

Η αβεβαιότητα που πάντα υπάρχει σε κάθε επιχειρησιακό περιβάλλον προσθέτει ακόμα μία διάσταση πολυπλοκότητας στην ανάπτυξη μεθοδολογιών επιλογής της βέλτιστης απόφασης μεταξύ διαφορετικών εναλλακτικών λύσεων. Για να επιλέξουμε μία απόφαση που θα θεωρούσαμε βέλτιστη πρέπει να αξιολογήσουμε την κάθε μία από τις εφικτές εναλλακτικές αποφάσεις ως προς τα αποτελέσματα που θα προέκυπταν από την επιλογή και υλοποίησή της.

Αν μπορούσαμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα, θα βλέπαμε ποιά από τις εναλλακτικές λύσεις είναι οι πιο συμφέρουσες. Τα αποτελέσματα όμως αυτά επηρεάζονται και από αβέβαιους παράγοντες οι οποίοι δεν μπορούν να εκτιμηθούν με βεβαιότητα. Οι αβέβαιοι αυτοί παράγοντες επηρεάζουν τα αποτελέσματα που θα προέκυπταν από την επιλογή κάθε εναλλακτικής λύσης και καθιστούν κάθε συγκεκριμένη επιλογή λιγότερο ή περισσότερο επιθυμητή.

Τα βασικά χαρακτηριστικά των προβλημάτων λήψης αποφάσεων είναι:

- Οι εναλλακτικές λύσεις που έχει η επιχείρηση ως προς την ποσότητα του προϊόντος που θα παράγει σε ένα χρονικό διάστημα.
- Πιθανές καταστάσεις - σενάρια που μπορεί να συμβούν και τα οποία βρίσκονται έξω από τον έλεγχο του ατόμου.
- Ο πίνακας κερδών παρουσιάζει συνοπτικά το οικονομικό αποτέλεσμα που προκύπτει από κάθε εφικτή εναλλακτική

λύση. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι το ζητούμενο είναι η επιλογή της βέλτιστης οικονομικά λύσης.

3. Ανάλυση εναλλακτικών αποφάσεων με χρήση πιθανοτήτων

Όταν μελετάμε τα πιθανά σενάρια για να πάρουμε μία απόφαση γνωρίζουμε ότι όλες οι λύσεις είναι εξίσου πιθανές. Αν δεν ίσχυε αυτό και ξέραμε ότι ένα σενάριο είναι καλύτερο από ένα άλλο τότε αυτή η πληροφορία θα μας βοηθούσε για να επιλέξουμε λύση. Η εκτίμηση των πιθανοτήτων μπορεί να είναι ποιοτική ή ποσοτική. Ο ποιοτικός προσδιορισμός των πιθανοτήτων απορρέει από πληροφορίες και γνώση στοιχείων και δεδομένων που δεν είναι δυνατό να ποσοτικοποιηθούν ώστε να είναι δυνατή η επεξεργασία τους με στατιστικές μεθόδους. Ο ποσοτικός προσδιορισμός των πιθανοτήτων βασίζεται σε συγκεκριμένη επεξεργασία στατιστικών στοιχείων. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούνται κυρίως ιστορικά δεδομένα ή στοιχεία που προκύπτουν από σχετική έρευνα της αγοράς ή άλλες αναλύσεις.

4. Δένδρα αποφάσεων

Σε πολλές περιπτώσεις όταν θέλουμε να πάρουμε μία απόφαση αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα επιλογής εκείνης της απόφασης που, πολλές φορές με τη σειρά της, επηρεάζει τις επιλογές που ακολουθούν. Σε αυτές τις περιπτώσεις η πιο κατάλληλη απεικόνιση των πληροφοριών και των δεδομένων είναι αυτή της δενδροειδούς μορφής. Μέσω αυτής της μορφής γίνεται εύκολη η ανάλυση των στοιχείων που έχουμε στα χέρια μας. Στο χώρο της επιχειρησιακής έρευνας η απεικόνιση της δενδροειδούς μορφής αποκαλείται **'δένδρο αποφάσεων'.**

ΕΠΙΛΟΓΟΣ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συμπερασματικά, η θεωρία του Γραμμικού Προγραμματισμού, η οποία υπάγεται στη επιστήμη της Επιχειρησιακής Έρευνας, χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων της σύγχρονης διοίκησης. Το δυνατό σημείο της θεωρίας αυτής είναι ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε επιχείρηση, οποιουδήποτε μεγέθους, δηλαδή σε μεγάλες βιομηχανίες, σε μικρομεσαίες επιχειρήσεις, καθώς και σε μικρότερες βιοτεχνίες ή εταιρίες ή οργανισμούς που παραγάγουν όχι μόνο προϊόντα, αλλά και υπηρεσίες. Μέσω αυτής της θεωρίας μπορεί μια επιχείρηση να ελαχιστοποιήσει το κόστος της, να μεγιστοποιήσει το κέρδος της και γενικότερα να δώσει την βέλτιστη λύση στα προβλήματά της.

Ειδικότερα σήμερα όπου η επιστήμη της πληροφορικής έχει σημειώσει πολύ μεγάλη εξέλιξη, οι μέθοδοι του Γραμμικού Προγραμματισμού εύκολα μπορούν να εφαρμοστούν από τα διοικητικά στελέχη των επιχειρήσεων. Βέβαια θα μπορούσε κανείς να αναρωτηθεί: σε ποιούς τομείς μπορούν να εφαρμοστούν οι μέθοδοι αυτοί και σε πόσο μεγάλα προβλήματα μπορούν να δώσουν λύση, ιδιαίτερα στην σημερινή εποχή, όπου λόγω του μεγάλου ανταγωνισμού αλλά και της οικονομικής κρίσης που μαστίζει τις αναπτυσσόμενες χώρες σαν την Ελλάδα, οι επιχειρήσεις αντιμετωπίζουν σοβαρά προβλήματα. Πράγματι, ο Γραμμικός Προγραμματισμός μέσω των μεθόδων του, είναι δυνατόν να επιλύσει τέτοιου είδους προβλήματα, σε όποιον τομέα κι αν εμφανιστούν.

Πιο συγκεκριμένα, ο Γραμμικός Προγραμματισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον καθορισμό ενός προγράμματος παραγωγής σε μία βιομηχανία, ώστε να επιτευχθεί η πιο αποτελεσματική χρήση εξοπλισμού και προσωπικού για την μεγιστοποίηση των κερδών της. Επίσης θα μπορούσε να καθορίσει ένα χρονικό πρόγραμμα παραγωγής, το οποίο θα ικανοποιήσει τη μελλοντική ζήτηση για ένα συγκεκριμένο προϊόν, ενώ συγχρόνως θα ελαχιστοποιήσει το κόστος παραγωγής και αποθήκευσης. Επιπλέον, θα μπορούσε να συντελέσει θετικά στην ανάπτυξη ενός συστήματος διανομής, το οποίο θα ελαχιστοποιήσει το κόστος μεταφοράς και ταυτόχρονα θα ικανοποιήσει τη ζήτηση στα κέντρα διανομής.

Ακόμη και στον τομέα της διαφήμισης, η θεωρία του Γραμμικού Προγραμματισμού θα βοηθούσε στην διεξαγωγή μιας σωστής κατανομής ενός δεδομένου προϋπολογισμού διαφήμισης στα διάφορα μέσα διαφήμισης (π.χ. ράδιο, τηλεόραση, εφημερίδες, περιοδικά κ.λπ.), ώστε να μεγιστοποιηθεί η αποδοτικότητα της διαφημιστικής καμπάνιας. Αλλά και στον τομέα των επενδύσεων, θα μπορούσε να φανεί πολύ χρήσιμη η εν λόγο θεωρία προσδιορίζοντας τον καλύτερο συνδυασμό εναλλακτικών επενδυτικών επιλογών με σκοπό την αύξηση της απόδοσης των επενδεδυμένων κεφαλαίων και την ταυτόχρονη μείωση του επενδυτικού ρίσκου. Επιπρόσθετα, ύστερα από χρήση της μεθόδου Simplex, θα μπορούσε να γίνει επιλογή ενός προγράμματος διατροφής σε νοσοκομεία και άλλα ιδρύματα, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ημερήσιες απαιτήσεις των διατρεφόμενων σε βασικά συστατικά (βιταμίνες, πρωτεΐνες, ασβέστιο κ.ο.κ.) με ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση του κόστους ζήτησης.

Έτσι διαπιστώνουμε σε πόσους πολλούς τομείς μπορεί να βρεί την εφαρμογή της η θεωρία του Γραμμικού Προγραμματισμού και να φανεί χρήσιμη στη διοίκηση μιας επιχείρησης δίνοντας την βέλτιστη λύση στα προβλήματά της. Ένα άλλο θετικό στοιχείο που θα μπορούσαμε να αναγνωρίσουμε στην θεωρία του Γραμμικού Προγραμματισμού είναι η ποσότητα των μεθόδων της, αφού η κάθε μέθοδος μπορεί να δώσει λύση σε διαφορετικό είδος προβλημάτων. Για παράδειγμα τα προβλήματα διατροφής - διαίτης βρίσκουν κατά κόρων την επίλυσή τους στην μέθοδο Simplex (κατηγορία προβλημάτων ελαχιστοποίησης). Βέβαια ένα πρόβλημα μπορεί να λυθεί με παραπάνω από μία μεθόδους, δηλαδή και με την μέθοδο Simplex αλλά και με την Γραφική Λύση.

Μειονέκτημα του Γραμμικού Προγραμματισμού θα μπορούσε ενδεχομένως να θεωρηθεί η πολυπλοκότητα που διαδέχεται η διαδικασία της επίλυσης των διαφόρων προβλημάτων μετά τη χρήση των μεθόδων. Όμως, προκειμένου να αποφευχθούν ενδεχόμενα λάθη από το πλήθος των πράξεων ή και το κόστος του χρόνου που δημιουργείται, θα μπορούσε κάλλιστα να γίνει χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή, όπου μέσω συγκεκριμένων προγραμμάτων ή βάσεων δεδομένων να δίνεται κατ'ευθείαν η τελική λύση.

Σε ένα περιβάλλον με γρήγορους ρυθμούς εξελίξεων στην τεχνολογία, στην οικονομία και στις διεθνείς ανακατατάξεις, οι επιχειρήσεις κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις και λαμβάνοντας υπόψη συγκεκριμένες παραμέτρους, θα είναι ικανές να επιβιώσουν και να εξελιχθούν σε ένα υγειές ανταγωνιστικό περιβάλλον. Εξάλλου η εφαρμογή και χρήση της θεωρίας του Γραμμικού Προγραμματισμού, καθώς και άλλων θεωριών ή μεθόδων της Διοικητικής Επιστήμης, μόνο θετικά μπορούν να συνδράμουν στον κλάδο των επιχειρήσεων δίνοντάς τους ώθηση για παραπέρα ανάπτυξη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Α. ΒΙΒΛΙΑ

1. Δερβιτσιώτης Κωνσταντίνος, **Συστήματα Παραγωγής** (Τόμος Α΄), Εκδόσεις Σταμούλης Α., Πειραιάς 1989.

2. Ζευγαρίδης Σπύρος, Παππάς Νικόλαος, Ξηροτύρη - Κουφίδη Στυλιανή, **Οργάνωση και Διοίκηση - Πραγματικές Εφαρμογές από την Κλασική Διοίκηση στην Αυτοδιαχείριση**, Εκδοτικός Οίκος Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη 1985.

3. Κιόχος Πέτρος, **Ιδιωτική Οικονομική**, Εκδόσεις Σταμούλης Α., Αθήνα 1996.

4. Κουνιάς Σ., Φακίνος Δ., **Γραμμικός Προγραμματισμός (θεωρία και ασκήσεις)**, Β΄έκδοση, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1993.

5. Λιαρμακόπουλος Λογοθέτης, **Διοίκηση Παραγωγής**, Αθήνα - Πάτρα 1998.

6. Λουκάκης Μανώλης, **Επιχειρησιακή Έρευνα**, (Τόμος Α΄), Γ΄έκδοση, Εκδοτικό Κέντρο Βόρειας Ελλάδας Ε.Π.Ε, Θεσσαλονίκη 1990.

7. Πάππης Κώστας, **Προγραμματισμός Παραγωγής**, Εκδόσεις Σταμούλης Α., Αθήνα - Πειραιάς 1995.

8. Σαπουντζής Κωνσταντίνος, **Τεχνικές Επιχειρησιακής Έρευνας**, Β΄ έκδοση, Εκδόσεις Σταμούλης Α., Πειραιάς 1992.

9. Υψηλάντης Παντελής, **Επιχειρησιακή Έρευνα - Λήψη Επιχειρηματικών Αποφάσεων**, Β΄ έκδοση, Εκδόσεις "Έλλην" 1998.

Β. ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Θεοδωράτος Ευάγγελος, **Οργάνωση και Διοίκηση Επιχειρήσεων Ι**, Πάτρα 1994.

2. Καναβός Νικόλαος, **Οικονομικός Προγραμματισμός - Επιχειρησιακή Έρευνα Ι**, Πάτρα.