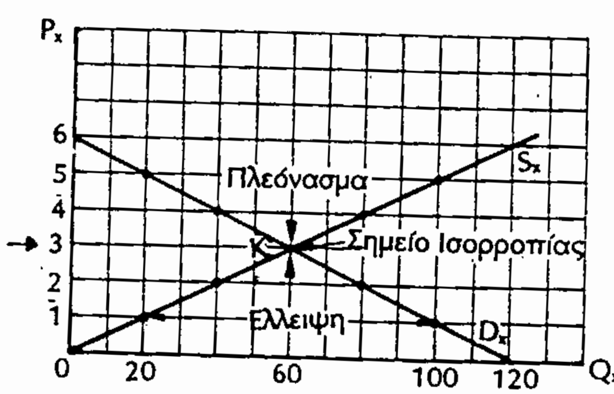
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ Κ' ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΜΑ : "ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ"



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ- ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ
ΚΩΣΤΟΠΟΥΛΟΥ ΙΩΑΝΝΑ

ΕΠΙΒΛΕΨΗ
Δ. ΓΕΩΡΓΙΟΥ

ΠΑΤΡΑ 1994

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην πτυχιακή αυτή εργασία ασχοληθήκαμε με τις εφαρμογές των Γενικών Μαθηματικών σε προβλήματα οικονομίας.

Η εργασία αυτή αποτελείται από τρία κεφάλαια :

i) Στο κεφάλαιο Ι αναφέρονται απλές εφαρμογές των γενικών μαθηματικών σε προβλήματα οικονομίας .

ii) Στο κεφάλαιο ΙΙ αναφέρονται βασικές οικονομικές συναρτήσεις και εφαρμογές αυτών στο διαφορικό λογισμό.

iii) Στο κεφάλαιο ΙΙΙ αναφέρονται βασικές οκονομικές εφαρμογές ολοκληρωμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΑΠΛΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό αναφέρουμε απλά παραδείγματα εφαρμογής των γενικών μαθηματικών σε προβλήματα οικονομίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

1. Ο μέσος όρος των ημερησίων πωλήσεων ενός αυτόματου πωλητή αναψυκτικών με μορφή πίνακα είναι:

	Πρωϊνές πωλήσεις			Απογευμ. Πωλήσεις		
Κόστος κουτιού σε δρχ	100	80	60	100	80	60
Πρώτη μηχανή	11	20	30	8	8	15
Δεύτερη μηχανή	15	8	6	13	9	10

Ονομάζουμε Μ του πίνακα των πρωϊνών πωλήσεων και Ν του πίνακα των απογευματινών. Να βρείτε τον πίνακα Μ+Ν και να εξηγήσετε τις πληροφορίες που μας δίνει.

Λύση :

είναι $M = \begin{bmatrix} 11 & 20 & 30 \\ 15 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ και N $\begin{bmatrix} 8 & 8 & 15 \\ 13 & 9 & 10 \end{bmatrix}$

άρα $M+N = \begin{bmatrix} 11 & 20 & 30 \\ 15 & 8 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 8 & 15 \\ 13 & 9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 28 & 45 \\ 28 & 17 & 16 \end{bmatrix}$

Ο πίνακας Μ+Ν μας πληροφορεί ποιες είναι οι συνολικές ημερήσιες πωλήσεις αναψυκτικών και για τις δύο μηχανές. Επίσης μπορούμε να βρούμε και το συνολικό κόστος σε δρχ των αναψυκτικών που πουλήθηκαν απο τις μηχανές.

Το κόστος για το α' είδος αναψυκτικού είναι (19+28).100, για το β' είδος είναι (28+17).80 και για το γ' είδος είναι (45+16).60. Το συνολικό κόστοςείναι :

(19+28).100+(28+17)80+(45+16).60 =47.100+45.80+61.60 = 11.960

2. Μια βιομηχανία που κατασκευάζει τηλεοράσεις, βίντεο κάμερες έχει δύο εργοστάσια παραγωγής Π_1 και Π_2. Το κόστος παραγωγής ανά συσκευή δίνεται (σε χιλιάδες δρχ.) στους παρακάτω πίνακες.

$$\Pi_1 = \begin{array}{ccc} \text{τηλ.} & \text{βίντ.} & \text{καμ.} \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 30 & 28 & 40 \\ 25 & 32 & 36 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Υλικά} \\ \text{Εργασία} \end{array}$$

$$\Pi_2 = \begin{array}{ccc} \text{τηλ.} & \text{βίντ.} & \text{καμ.} \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 38 & 30 & 42 \\ 23 & 28 & 38 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Υλικά} \\ \text{Εργασία} \end{array}$$

Να βρείτε τον πίνακα 1/2 ($\Pi_1\Pi_2$) και να εξηγήσετε τι εκφράζει.

Λύση :

$$\Pi_1+\Pi_2 = \begin{bmatrix} 30 & 28 & 40 \\ 25 & 32 & 36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 38 & 30 & 42 \\ 23 & 28 & 38 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{cccc} \text{τηλ.} & \text{βίντ.} & \text{καμ.} & \\ \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 68 & 58 & 82 \\ 48 & 60 & 74 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Υλικά} \\ \text{Εργασία} \end{array}$$

οπότε 1/2 ($\Pi_1+\Pi_2$)=

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 68 & 58 & 82 \\ 48 & 60 & 74 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{τηλ.} & \text{βίντ.} & \text{καμ.} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 34 & 29 & 41 \\ 24 & 30 & 37 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Υλικά} \\ \text{Εργασία} \end{array}$$

Ο τελευταίος πίνακας δίνει το μέσο κόστος κάθε συσκευής και στα δύο εργοστάσια.

3. Μια βιομηχανία έχει τέσσερα εργοστάσια παραγωγής Π_1, Π_2, Π_3 και Π_4, καθένα απο τα οποία παράγει δύο προϊόντα E_1 και E_2. Το ημερήσιο επίπεδο παραγωγής σε μονάδες προϊόντων δίνεται στον επόμενο πίνακα:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 200 & 180 & 140 & 60 \\ 80 & 40 & 120 & 120 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \end{array}$$

i) Να βρείτε το ημερήσιο επίπεδο παραγωγής, αυτή αυξηθεί κατά 10%

ii) Να βρείτε το σύνολο της παραγωγής ανα προϊόν σε 5 μήνες αν υποτεθεί ότι τα εργοστάσια δούλεψαν 2 μήνες με το προηγούμενο επίπεδο και 3 μήνες με το νέο επιπεδο παραγωγής

(1 μήνας = 30 ημέρες)

Λύση :

i) Αν η παραγωγή αυξηθεί κατά 10% τότε, το ημερήσιο επίπεδο παραγωγής θα δίνεται από τον πίνακαΑ

$$B=1,1.A = 1,1 \begin{bmatrix} 200 & 180 & 140 & 60 \\ 80 & 40 & 120 & 120 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1,1 . 200 & 1,1 . 180 & 1,1 . 140 & 1,1 . 60 \\ 1,1 . 80 & 1,1 . 40 & 1,1 . 120 & 1,1 . 120 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 220 & 198 & 154 & 66 \\ 88 & 44 & 132 & 132 \end{bmatrix}$$

ii) Αφού το ημερήσιο επίπεδο παραγωγής για το αρχικό επίπεδο παραγωγής δίνεται από τον πίνακα Α, το μηνιαίο επίπεδο παραγωγής δίνεται από τον πίνακα 30.Α. Για τους δύο πρώτους μήνες το επίπεδο παραγωγής θα δίνεται από τον πίνακα 2.(30.Α).

Για τους άλλους τρείς μήνες που τα εργοστάσια δούλεψαν με το νέο επίπεδο παραγωγής, το μηνιαίο επίπεδο παραγώγης δίνεται από τον πίνακα 30. Β και για τους τρεις μήνες δίνεται από τον πίνακα 3(30.Β)=90*Β.

Ετσι το σύνολο της παραγωγής ανα προιόν για τους 5 μήνες θα δίνεται από τον πίνακα 60Α+90Β=

$$= 60. \begin{bmatrix} 200 & 180 & 140 & 60 \\ 80 & 40 & 120 & 120 \end{bmatrix} +90 \begin{bmatrix} 220 & 198 & 154 & 66 \\ 88 & 44 & 132 & 132 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 60.200 & 60.180 & 60.140 & 60.60 \\ 60.80 & 60.40 & 60.120 & 60.120 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 90.220 & 9.1980 & 90.154 & 90.66 \\ 90.88 & 90.44 & 60.132 & 90.132 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 12.000 & 10.800 & 8.400 & 3600 \\ 4.800 & 2.400 & 7.200 & 7200 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 19.800 & 17.820 & 13.860 & 5.940 \\ 7920 & 3.960 & 11.880 & 11.880 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 31.800 & 28.620 & 22.080 & 9.540 \\ 12.720 & 6.360 & 19.080 & 19.080 \end{bmatrix}$$

4. Τέσσερις βιομηχανίες παραγωγής αυτοκινήτων Α, Β, Γ, Δ δίνουν ως προς πέντε τεχνικά χαρακτηριστικά των μοντέλων τους, τις εξής πληροφορίες:

Βιομηχανία Α: Ισχύς 107 DIN, επιτάχυνση (0-100km) 12,9, τελική ταχύτητα 172km, κατανάλωση στην πόλη ανά 100 km 10 lit, φορολογήσιμοι ίπποι 11.

Βιομηχανία Β: Ισχύς 112 DIN, επιτάχυνση (0-100km) 11,6, τελική ταχύτητα 196 km, κατανάλωση στην πόλη ανά 100 km 12,3 lit, φορολογήσιμοι ίπποι 14.

Βιομηχανία Γ: Ισχύς 100 DIN, επιτάχυνσή (0-100km) 12,9, τελική ταχύτητα 191 km, κατανάλωση στην πόλη ανά 100 km 10,1 lit φορολογήσιμοι ίπποι 11.

Βιομηχανία Δ: Ισχύς 75 DIN, επιτάχυνση (0-100km) 11,0, τελική ταχύτητα 170 km, κατανάλωση στην πόλη ανά 100 km 7.5 lit, φορολογήσιμοι ίπποι 9.

Να διαμορφωθούν τα παραπάνω στοιχεία σε μορφή πίνακα.

ΛΥΣΗ :

Τα αριθμητικά δεδομένα της ορθογώνιας αυτής διευθέτησης, κλεισμένα μέσα σε αγκύλες είναι:

Τεχνικά χαρακτηριστικά	ισχύς σε Din	Επιτάχυνση 0-100 Km/h	Τελική Ταχύτητα	Κατανάλωση στην πόλη lit ανά 100Km	Φορολογίσιμοι Ίπποι
Βιομηχανία					
Α	107	12,9	172	10	11
Β	112	11,6	196	12,3	14
Γ	100	12,9	191	10,1	11
Δ	75	11,0	170	7,5	9

Τα αριθμητικά δεδομένα της ορθογώνιας αυτής, διευθέτησης, κλεισμένα μέσα σε αγγύλες, είναι :

$$\begin{bmatrix} 107 & 12,9 & 172 & 10 & 11 \\ 112 & 11,6 & 196 & 12,3 & 14 \\ 100 & 12,9 & 191 & 10,1 & 11 \\ 75 & 11,0 & 170 & 7,5 & 9 \end{bmatrix}$$

Επομένως σχηματίζουν έναν πίνακα με 4 γραμμές και 5 στήλες δηλαδή έναν πίνακα τύπου 4x5, και το διαβάζουμε 4 επί 5 πίνακα.

5. Μια εταιρεία πουλάει υπολογιστές, εκτυπώτες και δισκέτες σε Αθήνα, Θεσσαλονίκη, Πάτρα, και Ηράκλειο. Οι πωλήσεις τους μήνες Σεπτέμβριο και Οκτώβριο παρουσίασαν την εξής κίνηση:

	Σεπτέμβριος Αθήνα	Θεσ/κη	Πάτρα	Ηράκλειο	Οκτώβριος Αθήνα	Θεσ/κη	Πάτρα	Ηράκλειο
PC Υπολογιστές	20	15	10	10	30	21	12	13
Εκτυπωτές	27	13	9	11	25	17	10	10
Δισκέτες	120	90	70	70	150	100	80	75

Για τους δύο αυτούς μήνες οι συνολικές πωλήσεις της εταιρείας ήταν οι εξής:

	Αθήνα	Θεσ/κη	Πάτρα	Ηράκλειο
PC Υπολογιστές	(20+30)	(15+21)	(10+12)	(10+13)
Εκτυπωτές	(27+25)	(13+170	(9+10)	(11+10)
Δισκέτες	(120+150)	(90+100)	(70+80)	(70+75)

Να βρεθούν οι συνολίκες πωλήσεις για τους μήνες Σεπτέμβριο και Οκτώβριο.

ΛΥΣΗ:

Αν τώρα θεωρήσουμε τους πίνακες των παραπάνω πωλήσεων έχουμε:

Για το Σεπτέμβριο $A=\begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 & 10 \\ 27 & 13 & 9 & 11 \\ 120 & 90 & 70 & 70 \end{bmatrix}$

Για το Οκτώβριο $B=\begin{bmatrix} 30 & 21 & 12 & 13 \\ 25 & 17 & 10 & 10 \\ 150 & 100 & 80 & 75 \end{bmatrix}$

και για τις συνολικές πωλήσεις

$$\Gamma=\begin{bmatrix} 20+30 & 15+21 & 10+12 & 10+13 \\ 27+25 & 13+17 & 9+10 & 11+10 \\ 120+150 & 90+100 & 70+80 & 70+75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 36 & 22 & 23 \\ 52 & 30 & 19 & 21 \\ 270 & 190 & 150 & 145 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Γ λέγεται άθροισμα των πινάκων αυτών και συμβολίζεται με Α+Β, δηλαδή Γ=Α+Β.

6. Έστω Α ο 2x3 πίνακας που περιγράφει τις τιμές πώλησης τριών ηλεκτρικών ειδών μιας βιομηχανίας σε δύο υποκαταστήματα:

$$\begin{array}{cccc} & \text{Κουζίνες} & \text{Ψυγεία} & \text{Τηλεοράσεις} \\ A= & \left[\begin{array}{c} 80.000 \\ 75.000 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 120.000 \\ 110.000 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 140.000 \\ 120.000 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \text{1ο υποκατάστημα} \\ \text{2ο υποκατάστημα} \end{array}$$

Κατά την περίοδο των εκπτώσεων, ο βιομήχανος προτίθεται να κάνει έκπτωση 10% στα προϊόντα του. Να βρείτε τις νέες τιμές πώλησης των προιόντων.

ΛΥΣΗ:
Οι νέες τιμές πρέπει να διαμορφώθουν στο 90% των προηγούμενων. Οι νέες τιμές πώλησης θα προκύψουν, αν πολλαπλασιάσουμε τις παλιές τιμές με 0.9,

$$B=\begin{bmatrix} 0{,}9 \,.\, 80.000 & 0{,}9 \,.\, 120.000 & 0{,}9 \,.\, 140.000 \\ 0{,}9 \,.\, 75.000 & 0{,}9 \,.\, 110.00 & 0{,}9.\, 120.000 \end{bmatrix}$$

ή

$$B=\begin{bmatrix} 72.000 & 108.000 & 126.000 \\ 67.500 & 99.000 & 108.000 \end{bmatrix}$$

7. Για τη κατασκευή δύο ειδών κέικ, K_1 και K_2 χρειαζόμαστε τα εξής υλικά σε Kg. Όπως δίνεται στο παρακάτω 2Χ3 πίνακα :

$$A= \begin{array}{cccc} \text{Αλεύρι} & \text{Ζάχαρη} & \text{Μαργαρίνη} & \\ \end{array}$$
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,2 \\ 1,5 & 0,7 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} K_1 \\ K_2 \end{array}$$

Έστω επίσης ότι το κόστος σε δρχ. των υλικών αυτών ανά κιλό, για τα έτη 1991 και 1992 είναι όπως δίχνει ο παρακάτω 2χ3 πίνακας:

$$\begin{array}{cc} 1991 & 1992 \end{array}$$
$$B=\begin{bmatrix} 130 & 150 \\ 170 & 200 \\ 600 & 750 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Αλεύρι} \\ \text{Ζάχαρη} \\ \text{Μαργαρίνη} \end{array}$$

Να βρείτε το κόστος σε δρχ.

Λύση:

Για να βρούμε το κόστος σε δραχμές των υλικών του κέικ, K_1, πολλαπλασιάζουμε τις ποσότητες των υλικών με τις αντίστοιχες τιμές και προσθέτουμε τα γινόμενα αυτά. Δηλαδή το κόστος K_1 το 1991 ήταν 1.130+0,5.170+0,2.600=335.

Η παραπάνω διαδικασία περιγράφεται με τη βοήθεια των πινάκων ως εξής:

$$A= \quad [1 \quad 0,5 \quad 0,2] . \begin{bmatrix} 130 \\ 170 \\ 600 \end{bmatrix} = [335]$$

Ο 1x1 πίνακας λέγεται γινόμενο της πρώτης γραμμής του Α επί την πρώτη στήλη του Β. Αναλόγως, το κόστος του K_1 το 1992 ήταν 1.150 +0,5+0,2.750=400.

Δηλαδή παριστάνεται με το γινόμενο της πρώτης γραμμής του Α επί την δεύτερη στήλη του Β.

$$B= \quad [1 \quad 0,5 \quad 0,2] . \begin{bmatrix} 150 \\ 200 \\ 750 \end{bmatrix} = [400]$$

Ομοίως για το κόστος του K_2 έχουμε :
Κόστος του K_2 το 1991
1,5 . 130 . 0,7 . 170 +0,4 .600 = 554 ή

$$[1 \quad 0,7 \quad 0,4] . \begin{bmatrix} 130 \\ 170 \\ 600 \end{bmatrix} = [554]$$

και το κόστος του K_2 το 1992

1,5 . 150 . 0,7 . 200 +0,4 .750 = 665 ή

$$[1 \quad 0,7 \quad 0,4] . \begin{bmatrix} 150 \\ 200 \\ 750 \end{bmatrix} = [665]$$

Ο πίνακας Γ =335 400 δείχνει το κόστος των δύο κέικ, κατά τα έτη 1991 και 1992. Ο πίνακας Γ που προκύπτει με τον πιο πάνω τρόπο λέγεται γινόμενο, του πίνακα Α με τον πίνακα Β και συμβολίζεται με Α.Β ή ΑΒ, δηλαδή :

$$Γ= \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,2 \\ 1,5 & 0,7 & 0,4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 130 & 150 \\ 170 & 200 \\ 600 & 750 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 335 & 400 \\ 554 & 665 \end{bmatrix}$$

8. Τα στοιχεία για τις αμοιβές και τον αριθμό των εργατών σε δύο οικοδομικές εταιρίες Α και Β έχουν με μορφή πινάκων ως εξής :

$$\begin{array}{ccc} & \text{Αριθμός εργατών} & \\ & \text{Ειδικευμένοι} & \text{Ανειδίκευτοι} \\ A & \left[\begin{matrix} 60 \\ 30 \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} 75 \\ 60 \end{matrix}\right] \\ B & & \end{array} \qquad \begin{array}{lc} \text{Εβδομαδιαίες αποδοχές} & \\ \text{σε χιλ. δραχμές} & \\ \text{Ειδικευμένοι} & \begin{bmatrix} 50 \\ 40 \end{bmatrix} \\ \text{Ανειδίκευτοι} & \end{array}$$

Με τη βοήθεια του πολλαπλασιασμού των πινάκων να υπολογίσετε το σύνολο των αμοιβών των εργατών στις δύο εταιρίες.

Λύση :

Το σύνολο των αμοιβών των εργατών στις δύο εταιρίες είναι :

$$\text{Αν } K= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Ειδικ.} & \text{Ανειδ.} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 60 & 75 \\ 30 & 60 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \quad \text{και } Λ \begin{array}{c} \text{Αποδοχ.} \\ \begin{bmatrix} 50 \\ 40 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Ειδ.} \\ \text{Ανειδ.} \end{array}$$

$$\text{τότε } K.Λ \quad \begin{bmatrix} 60 & 75 \\ 30 & 60 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 50 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60.50 + 75.40 \\ 30.50 + 60.40 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \text{Σύνολο αποδ.} \\ \begin{bmatrix} 6000 \\ 3900 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A \\ B \end{array}$$

9. Μια βιομηχανία επίπλων κουζίνας έχει δύο εργοστάσια Ε1 και Ε2. Οι πίνακες Μ και Ν δίνουν τις ώρες εργασίας που απαιτούνται για την κατασκευή κάθε επίπλου και τις ωριαίες αμοιβές του προσωπικού σε δραχμές αντιστοίχως.

$$M= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Κατασκευή} & \text{βαψιμο} & \text{Συσκευασία} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,6 & 0,6 & 0,2 \\ 1 & 0,9 & 0,3 \\ 1,5 & 1,2 & 0,4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Πάγκος} \\ \text{Καρέκλα,} \\ \text{Τραπέζι} \end{array} \qquad N= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 500 & 550 \\ 600 & 700 \\ 350 & 400 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Κατασκευή} \\ \text{Βάψιμο} \\ \text{Συσκευασία} \end{array}$$

i) Να βρείτε τον πίνακα Μ.Ν και να εξηγήσετε τι εκφράζει.

ii) Ποιο είναι το κόστος εργασίας για τη παραγωγή μιας καρέκλας στο εργαστάσιο Ε1 και ενός πάγκου στο εργοστάσιο E_2;

Λύση :

$$\text{Είναι } M.N = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,6 & 0,2 \\ 1 & 0,9 & 0,3 \\ 1,5 & 1,2 & 0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 500 & 550 \\ 600 & 700 \\ 350 & 400 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,6.500 + 0,6.600 + 0,2.350 & 0,6.550 + 0,6.700 + 0,2.400 \\ 1.500 + 0,9.600 + 0,3.350 & 1.550 + 0,9.700 + 0,3.400 \\ 1,5.500 + 1,2.600 + 0,4.350 & 1,5.550 + 1,2.700 + 0,4.400 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array}$$
$$= \begin{bmatrix} 730 & 830 \\ 1145 & 1300 \\ 1610 & 1825 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{κόστος πάγκου} \\ \text{κόστος καρέκλας} \\ \text{κόστος τραπεζιού} \end{array}$$

Ο πίνακας M.N εκφράζει το συνολικό κόστος παραγωγής για κάθε ένα από τα τρία είδη παραγωγής και στα δύο εργοστάσια.

ii) Το κόστος εργασίας για τη παραγωγή μιας καρέκλας στο εργοστάσιο E_1 είναι 1145 δρχ και το κόστος παραγωγής ενός πάγκου στο εργοστάσιο E_2 είναι 830 δρχ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Ένα χάρτινο κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου έχει βάση τετράγωνο πλευράς χ cm και όγκο $324cm^3$. Το υλικό της βάσης κοστίζει δύο δραχμές ανά cm^2, ενώ το υλικό των άλλων 5 εδρών κοστίζει μία δραχμή ανά cm^2. Να εκφράσετε το συνολικό κόστος ως συνάρτηση του χ.

Λύση

Αν h cm είναι το ύψος παρ/δου, τότε $\chi^2 h=324$. Άρα $h=324/x^2$. Το εμβαδόν της βάσης

είναι $x^2 cm^2$, οπότε το κόστος της σε δραχμές είναι $K\beta(x)=2x^2$. Το εμβαδόν των υπολοίπων

εδρών είναι $(4hx+x^2)$ cm^2, οπότε το κόστος τους σε δραχμές είναι $K\varepsilon(\chi)=(4hx+x^2).1=\frac{1296}{x}+x^2$

Το συνολικό κόστος του κουτιού είναι $K(\chi)=K\beta(x)+K\varepsilon(\chi)=2x^2+\frac{1296}{x}+x^2=3x^2+\frac{1296}{x}$.

2. Η ημερήσια παραγωγή 20 πηγαδιών άντλησης πετρελαίου είναι 4000 βαρέλια. Για κάθε νέο πηγάδι που ανοίγεται η ημερήσια παραγωγή κάθε πηγαδιού μειώνεται κατά 5 βαρέλια. Να εκφράσετε την ολική παραγωγή ως συνάρτηση του αριθμού χ των νέων πηγαδιών. Να βρείτε τον αριθμό των νέων πηγαδιών, ώστε να έχουμε τη μέγιστη ημερήσια παραγωγή.

Λύση

Η ημερήσια παραγωγή του κάθε πηγαδιού είναι $\frac{4.000}{20}$ =200 βαρέλια. Αν ανοιχτούν χ νέα πηγάδια τότε η ημερήσια παραγωγή για κάθε πηγάδι γίνεται 200-5χ βαρέλια. Επειδή όλα τα πηγάδια θα είναι 20+χ, η συνολική ημερήσια παραγωγή είναι:

$\Pi(x) = (20+\chi).(200-5\chi)=5.(-\chi^2+20x+800)$.

Εξάλλου, $\Pi(\chi)=5.[900-(\chi^2-20x+100)]=4500-5(x-10)^2 \leq 4500$, που σημαίνει ότι η μέγιστη ημερήσια παραγωγή είναι 4500 βαρέλια, και επιτυγχάνεται αν ανοιχτούν 10 νέα πηγάδια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

1.Μια βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης Π(x) κάθε μονάδας ενός προϊόντος συνάρτησης του πλήθους χ μονάδων παραγωγής σύμγωνα με τον τύπο Π(χ)=40.000-6χ. Το κόστος παραγωγής μιας μονάδας 1 είναι 4.000 δρχ. Αν η βιομηχανία πληρώνει φόρο 1200 δρχ. ∀ μονάδα προϊόντος, να βρεθεί πόσες μονάδες προϊόντος, πρέπει να παράγει η βιομηχανία, ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Η είσπραξη απο την πώληση χ μονάδων παραγωγής είναι :

$E(x) = x\,\Pi(x)=x(40.000 - 6x) = - 6x^2+40.000x$

Το κόστος από την παραγωγή χ μονάδων είναι :

$K(x) =4.000x$.

Το ολικό κόστος μετά την πληρωμή του φόρου είναι :

$K o\lambda(x)=4.000x + 1.200x = 5.200x$

Επομένως το κερδος της βιομηχανίας είναι :

$P(x) = F(x) - K o\lambda(x)$
$\quad = -6x^2 + 40.000x - 5.200x$
$\quad = -6x^2 + 34.800x$

Έχουμε $P'(x)=-12x+34.800$ οπότε $P'(x)=0 \Leftrightarrow x=2.900$. Η μονοτονία αυτή και τα ακρότατα του P στο $(0,+\infty)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

X	O	2.900		+∞
P'(X)	+	O	-	
P(X)	↗	50.460 χιλιαδες ΜΕΓΙΣΤΟ	↘	

Επομένως το μέγιστο κέρδος παρουσιάζεται όταν η βιομηχανία παράγει 2.900 μονάδες από το προϊόν αυτό και είναι ίσο με 50.460 χιλιάδες δρχ.

2.Σε πολεοδομικές μελέτες είναι συχνά χρήσιμο να γνωρίζουμε τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται ο πληθυσμός μιας κοινωνίας. Υποθέτουμε ότι μια νέα συνοικία μιας πόλης θα έχει πληθυσμό $P(t) =\sqrt{t}$ χιλιάδες.

Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής (αύξηση) του πληθυσμού ύστερα απο 16 χρόνια.

<u>ΛΥΣΗ :</u>

Ο ρυθμός μεταβολής μετά t έτη $\frac{dp(t)}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ οπότε με τά απο 16 έτη ο πληθυσμός θα αυξάνεται μέ ρυθμό

$$\left.\frac{dp}{dt}\right|_{t=16} = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8}$$ χιλ. κάτοικοι ανά έτος = 125 άτομα ανα έτος.

3. Αν το συνολικό κόστος παραγωγής χ μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι K(x) και η συνολική είσπραξη απο την πώλησή τους E(x), τότε P(x) = E(x) - K(x) είναι το συνολικό κέρδος και Kμ(x)´=K(x)/x είναι το μέσο κόστος.

i) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους μηδενίζεται όταν ο ρυθμός μεταβολης του κόστους και ο ρυθμός μεταβολή της είσπραξης είναι ίσοι .

ii) Να αποδειξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους μηδενίζεται όταν το μέσο κόστος είναι ίσο με το οριακό κόστος.

<u>ΛΥΣΗ :</u>

Ο ρυθμος μεταβολής του κέρδους είναι :

P' (x) = E' (x) - K' (x)

Επομένως

P' (x)=0 ⇔ E' (x) - K' (x) =0 ⇔ E' (x) = K' (x)

Ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους είναι :

$$\mathbf{K'\mu\ (x)} = \frac{K'(x).x-K(x)}{x^2}$$

Επομένως **K'μ (x) = 0 ⇔ K' (x) .μ - K (x)=0**
⇔ K' (x) = K(x)/x
⇔ K' (x) = Kμ(x)

4. Το κόστος της ημερησίας παραγωγής x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι K(x) =1/3 - 20x²+600x+1000 χιλ. δρχ., 0≤ x ≤ 105. Η είσπραξη από την πώληση των x μονάδων είναι E (x) = 420x -2x² χιλ. δρχ. Να βρεθεί η ημερήσια παραγωγή του εργοστασιου για την οποία το κέρδος γίνεται μέγιστο.

<u>ΛΥΣΗ :</u>

Το κέρδος του εργοστασίου είναι :

$P(x)=E(x)-K(x)= 420x-2x^2-1/3x^2 +20x - 600x -1000=$
$=-1/3\ x^3 + 18x^2 - 180x -1000,\ x\in[0,105]$

Για κάθε $x \in [0,105]$ ισχύει $P'(x)= - x^2+36x-180$ οπότε $P'(x)=0 \Leftrightarrow x=6$ ή $x=30$
Το πρόσημο της P' η μονοτονία και τα ακρότατα της P φαίνονται στον πατακάτω πίνακα.

x	0		6		30		105
P'(x)		-	0	+	0	-	
P(x)	$\boxed{-1000}$ T.M.	↘	T.E	↗	$\boxed{800}$	↘	T.E

Επομένως το εργοστάσιο παρουσιάζει μέγιστο κέρδος όταν έχει ημερήσια παραγωγή 30 μονάδες.

5. Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενος βιομηχανικού προϊόντος είναι $K(x) = 1/3\ x^3 - 20x^2 + 600x + 1000$ σε χιλιάδες δρχ., $0 \leq x \leq 105$. Η είσπραξη απο την πώληση των x μονάδων είναι $\Pi(x) = 420x - 2x^2$ σε χιλιάδες δρχ. Να βρεθεί η ημερήσια παραγωγή χ του εργοστασίου για την οποία το κέρδος γίνεται μέγιστο.

ΛΥΣΗ :

Το κέρδος του εργοστασίου δίνεται απο τη συνάρτηση $f(x) = \Pi(x) - K(x) = 1/3\ x^3 + 18x^2 - 180\chi - 1000$, $\chi \geq 0$ είναι $f(x) = -x^2 + 36x - 180$ οπότε $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$ ή $x = 30$.
Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f' φαίνονται στον πίνακα

x	0		6		30		105
f'		-	0	+	0	-	
f		↘	T.E.	↗	T.M.	↘	

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f :

α. στο σημείο $x_1 = 6$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο
β. στο σημείο $x_2 = 30$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(30) = 800$
Εξάλλου στο άκρο O, είναι $f((O) = -1000 < f(30)$, οπότε, όπως φαίνεται από τη μονοτονία της f, το f(30) είναι μέγιστο.
Αυτό σημαίνει ότι το εργοστάσιο επιτυχαίνει το μέγιστο κέρδος με παραγωγή 30 μονάδων την ημέρα.

6. Μια βιομηχανία μπορεί να παράγει μηνιαίως 55.000 παγωτά. Αν η τιμή του παγωτού είναι 100 δρχ. ο μέσος ρυθμός πωλήσεων είναι 27.000. Αν η τιμή του παγωτού ελαττωθεί στις 80 δρχ. ο μέσος ρυθμός πωλήσεων είναι 33.000.

α. Να βρεθεί η τιμή πώλησης P ενός παγωτού η συνάρτηση του αριθμού x των πωλήσεων, αν γνωρίζουμε ότι είναι της μορφής $P(x) = \alpha x + \beta$

β. Να βρεθεί η τιμή πώλησης ενός παγωτού η οποία μεγιστοποιεί τις εισπράξεις της βιομηχανίας.

γ. Αν ο ρυθμός μεταβολής του κόστους είναι :

$$K'(x) = x^2 - \frac{1}{150}x + 190 - 28.000x - 29.000.000$$

Να βρείτε την παραγωγή που δίνει το μέγιστο κέρδος και να τη συγκρίνετε με την παραγωγή που δίνει τις μέγιστες εισπράξεις.

ΛΥΣΗ :

α. Απο τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε :

$$\begin{cases} P(27.000) = 100 \\ P(33.000) = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27.000\ \alpha + \beta = 100 \\ 33.000\ \alpha + \beta = 80 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{300} \\ \beta = 190 \end{cases}$$

Αρα η τιμή πώλησης του παγωτού, ως συνάρτηση του αριθμού x των πωλήσεων είναι :

$$P(x) = -\frac{1}{300}x + 190 \quad (1)$$

β. Εστω ω=p(x) η ζητούμενη τιμή πώλησης ενός του παγωτού, δηλαδή η τιμή πώλησης που μεγιστοποιεί τις εισπράξεις. Τότε οι εισπράξεις είναι:

$E(\omega)=\omega \cdot x$ με $\omega = -\dfrac{1}{300}x + 190$, οπότε

$E\omega)=57.000\omega - 300\,\omega^2$ αφού $x=57.000 - 300\omega$ έχουμε $E'(\omega) = -600\omega + 57.000$ οπότε

$E'(\omega)=0 \Leftrightarrow \omega=95$

Το πρόσημο της E' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα απο τον οποίο προσδιορίζουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα της E.

ω	0		95		
E'(ω)		+	0	-	
E'(ω)		$\nearrow$	$\boxed{2707500}$ max	$\searrow$	

Δηλαδή, η E παρουσιάζει στο ω=95 μέγιστο το E(95) = 2707500.
Αρα οι εισπράξεις μεγιστοποιούνται όταν η τιμή πώλησης του παγωτού είναι 95 δρχ.

γ. Αν E(x) είναι οι εισπράξεις και P(x) ειναι το κέρδος απο x μονάδες πώλησης τότε :

$E(x)=x\,.\,P(x) = x\left(-\dfrac{1}{300}x + 190\right) = -\dfrac{1}{300}x^2 + 190x$ και

$P(x)=E(x) - K(x)$ $\quad$ (K(x) =κόστος παραγωγής)

Για κάθε $\chi \in (0, 55.000)$ είναι:

$$P'(x) = E'(x) - K'(x) = -\frac{1}{150}x + 190 - x^2 + \frac{1}{150}x - 190 + 28.000x + 29.000.000 =$$

$$= -x^2 + 28.000x + 29.000.000 \text{ οπότε}$$

$P'(\chi) = 0 \Leftrightarrow \chi=29.000 \quad \chi \geq 0$

Το πρόσημό της P' φαίνεται στον παρακατω πίνακα :

x	O		29.000		55.000
P΄(x)		+	0	−	
p (x)		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Δηλαδή, η P παρουσιάζει στο x=29.000 μέγιστο το P(29.000) Αρα το κέρδος μεγιστοποιείται όταν η παραγωγή ειναι 29.000 μονάδες μηνιαίως. Η παραγωγή που μεγιστοποιεί τις εισπράξεις είναι E(95):95=28.000 που όπως βλέπουμε είναι μικρότερη από την παραγωγή που μεγιστοποιεί το κέρδος.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1. Ο πληθυσμός P(t) , $0\leq t \leq 20$,, μιας πόλη που προέκυψε απο συγχώνευση 10 κοινοτήτων, αυξάνει με ρυθμό (σε άτομα ανά έτος) που δίνεται από τον τυπο $P'(t)=te^{t/10}$, $0\leq t\leq 20$, οπου t είναι ο ρυθμός των ετών μετά την σγχώνευση. Να βρεθεί ο πληθυσμός P(t) της πόλης, t χρόνια μετά τη συγχώνευση, αν γνωρίζουμε ότι ο πληθυσμός ήταν 10.000 κάτοικοι, κατα τη στιγμή της συγχώνευσης.

Λύση :

Έχουμε :

$$\int P'(t)dt=\int te^{t/10}dt$$
$$=10\int(e^{t/10})'tdt=10e^{t/10}t-10\int e^{t/10}dt$$

$$=10e^{t/10}.\ t -10e^{t/10}+C.$$

οπότε:

$P(t)=10e^{t/10}t-100e^{t/10}+C$, για κάποιο $C\in R$

Όταν t=0 ο πληθυσμός είναι 10.000 δηλαδή $P(o)=10.000 \Leftrightarrow 10e^{o}+C=10.000 \Leftrightarrow c=10.100$.

Επομένως ο πληθυσμός της πόλη, t χρόνια μετά τη συγχώνευση είναι:

$P(t)=10te^{t/10}-100e^{t/10} + 10.000$.

2. Η θερμοκρασία T ενός σώματος, που περιβάλλεται απο ένα ψυκτικό υγρό, ελαττώνεται με ρυθμό $-Kae^{kt}$, όπου α,K είναι θετικές σταθερές και t ο χρόνος. Η αρχική θερμοκρασία T(o) του σώματος είναι Tota, όπου με κατάλληλο μηχάνημα διατηρείται σταθερή. Να βρείτε τη θερμοκρασία του σώματος τη χρονική στιγμή t.

Λύση :

Επειδή $T'(t)= -Kae^{kt}$, έχουμε διαδοχικά
$$\int T'(t)dt=T(t) + C$$
$$\int -Kae^{-kt}dt = T(t)+C$$
$$a\int (e^{-kt})'dt=T(t)+C,$$
οπότε $T=ae^{-kt}-C$

Επειδή T(o)=Tota και $T(o)=ae^{-ko}-C=a-C$, έχουμε:

Tota=α - C ⇔ C= -To

Επομένως $T(t)-ae^{kt}$ + To

3. Ένας βιομήχανος ο οποίος επενδύει χ χιλιάδες δρχ. στη βελτίωση της παραγωγής του εργοστασίου του, αναμένει να έχει κέρδος P(x) χιλιάδες δρχ από αυτή την επένδυση. Μια ανάλυση της παραγωγής έδειξε ότι ο ρυθμός μεταβολής τους κέρδους P(χ), που οφείλεται στην επένδυση αυτή, δίνεται από τον τύπο $P'(s)=5,8e^{-x/2000}$.
Να βρείτε το συνολικό κέρδος που οφείλεται σε αύξηση της επένδυσης από 4.000.000 σε 6.000.000 δρχ.

Λύση :

Έχουμε διαδοχικά
$$\int P'(x)dx=P(x) + C$$
$$\int 5,8e^{-x/2000}dx=P(x) + C$$
$5,8.(-2000)\int (e^{-x/2000})'dx=P(x)+C$ οπότε

$P(x)=-11.600e^{-x/2000}C$

Το συνολικό κέρδος που οφείλεται στην αύξηση της επένδυσης από 4.000.000 σε 6.000.000 είναι :

$P(6.000)-P(4.000)= -11.600e^{6000/2000}- C+11.600\ e^{4000/2000}+C$

$=11.600\ (e^{-2}-e^{-3}) =11.600\ (\frac{e^{1}}{e^{3}})$

$=11.600\ .\ 0,086 = 997.600$ χιλιάδες δρχ.

4. Μια βιομηχανία διαπιστώνει ότι για εβδομαδιαία παραγωγή χ εξαρτημάτων έχει οριακό κόστος x^2+5x σε χιλιάδες δρχ. Να βρείτε τη συνάρτηση κόστους της εβδομαδιαίας παραγωγής, αν είναι γνωστό ότι τα σταθερά εβδομαδιαία έξοδα της βιομηχανίας όταν δεν παράγει κανένα εξάρτημα είναι 100.000 δρχ.

Λύση :

Αν $K(x)$ το κόστος σε χιλιάδες της εβδομαδιαίας παραγωγής χ τότε $K'(x)=x^2+5x$, οπότε έχουμε

$\int K'(x)dx=K(x) + C$
ή $\int(x^2+5x)dx = K(x) + C$,

οπότε $K(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-C$
Απο τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε $K(o) =100$, οπότε $-C=100$ ή $C=-100$

Επομένως η συναρτηση κόστους της εβδομαδιαίας παραγωγής είναι :

$$K(x)=x\frac{3}{3}+\frac{5x^2}{2} + 100.$$

5. Μια νέα γεώτρηση εξώρυξης πετρελαίου έχει ρυθμό άντλησης που δίνεται από τον τύπο

$R'(t)=20+\frac{5}{2}t\ -\frac{3}{4}t^2$, όπου $R(t)$ είναι ο αριθμός των βαρελιών (σε χιλιάδες) που αντλήθηκαν στους t πρώτους μήνες λειτουργίας της. Να βρείτε όσα βαρέλια θα έχουν αντληθεί τους 8 πρώτους μήνες λειτουργίας της .

Λύση :

Έχουμε :

$\int R'(t)dt=R(t)+C$ ή $\int(20+\frac{5}{2}t\ -\frac{3}{4}t^2)dt = R(t)+C$ οπότε $R(t) =20t +5t^2-1/4\ t^3 -C$

Προφανώς $R(o)=0$, οπότε $C=0$ και άρα $R(t)=20t+5t^2-1/4\ t^3$

Επομένως τα βαρέλια που θα αντληθούν στους πρώτους 8 μήνες είναι :
$R(8)=20.8+5.8^2-1/4\ 8^3 = 160+5.8^2-2.8 = 352$ χιλιάδες

6. Από την πώληση ενός νέου προϊόντος μιας εταιρείας διαπιστώθηκε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους $K(t)$, σε χιλιάδες δρχ, ελαττώνεται συμφωνα με τον τύπο $K'(t)=800-0,6t$ χιλιάδες δρχ. την ημέρα, ενώ ο ρυθμός μεταβολής της είσπραξης $E(t)$ στο τέλος των t ημερών αυξάνει σύμφωνα με τον τύπο $E'(t)=1.000+0,3t$ χιλιάδες δρχ. την ημέρα. Να βρείτε το συνολικό κέρδος της εταιρείας από την τρίτη έως και την έκτη ημέρα παραγωγής.

Λύση :

Έστω P(t) το κέρδος της εταιρείας στις πρώτες t ημέρες. Τότε P(t) =E(t) - K(t) . οπότε

$$P'(t) = E'(t) - K'(t) = 1.000 + 0,3t - 800 + 0,6t \,.\, 200 + 0,9t$$

Έχουμε διαδοχικά

$$\int P'(t)dt = P(t)tC$$

$$\int (200+0,9t)dt = P(t) + C$$

$$Pt = 200t + 0,9t + 0,9t^2/2 + C,$$

Το συνολικό κέρδος της εταιρείας από την 2η έως την 6η ημέρα είναι:

$$P(6) - P(2) = 200.6 + 0,9\ 6^2 + C_1 - 200.2 - 0,4\ 2^2/2\ C_1$$
$$= 1216,2 - 401,8 = 814.400 \text{ δρχ.}$$

7. Μια βιομηχανία παραγωγής υπολογιστών αρχίζει την παραγωγή ενός νέου υπολογιστή. Ο ρυθμός παραγωγής, t εβδομάδες μετά την έναρξη της παραγωγής είναι :

$$\frac{dx}{dt} = 500 \,.\, 1 - \frac{100}{(Ct\ 10)^2}$$ υπολογιστές την εβδομάδα.

Να βρείτε τον αριθμό των υπολογιστών που παράγονται την 2η και 3η εβδομάδα μαζί. (Να υποθέσετε ότι t μεταβάλλεται σε διάστημα)

Λύση :

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα ο αριθμός των υπολογιστών που ζητάμε είναι

$$\chi(3) - \chi(1) = \int_1^3 \frac{dx}{dt}dt = \int_1^3 5.000\left(1 - \frac{100}{(Ct+10)^2}\right)dt =$$

$$= 5.000(3-1) - 500.000\int_1^3 (t+10)^{-2}dt$$

$$= 10.000 - 500.000\left[\frac{-1}{t+10}\right]_1^3 =$$

$$= 10.000 + 500.000\left[\frac{1}{13} - \frac{1}{11}\right] \approx 3006$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΥΤΩΝ ΣΤΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ

1. ΓΕΝΙΚΑ

Με τον όρο οικονομικές συναρτήσεις (economic functions) εννοούμε τις συναρτήσεις εκείνες που οι αναξάρτητες και εξαρτημένες μεταβλητές τους εκφράζουν οικονομικά μεγέθη, όπως κόστος, έσοδα, τιμές, παραγωγή, κατανάλωση, κέρδη, επενδύσεις, κ.α.

Διευκρινίζουμε ότι στις οικονομικές συναρτήσεις πολλές φορές δεν είναι πάντοτε εύκολος ο διαχωρισμός των ρόλων ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής αφού η Οικονομική, σε αντίθεση με τις Φυσικές Επιστήμες, δεν μπορεί να παρουσιάσει σταθερούς τύπους στις συναρτήσεις της (και ιδίως με περισσότερες απο μία μεταβλητές). Έτσι π.χ. σε συναρτήσεις που συνδέουν τιμές p με ποσότητες q προϊόντων ή αγαθών, αν μελετάμε προβλήματα Θεωρίας του καταναλωτή (comsumer's theory) και η συνάρτηση έχει τη μορφή *q=f(p)*, ενώ αν μελετάμε προβλήματα θεωρίας του παραγωγού (producer's theory) τότε ελέγχουμε το ύψος της παραγωγής (δηλ. η τιμή πωλήσεως από τους παραγωγούς εξαρτάται από την ποσότητα που αυτοί παράγουν) και η συνάρτηση έχει τη μορφή *P=φ(q)*.

Επισημαίνεται ότι τα πεδία ορισμού και τιμών των συναρτήσεων αυτών είναι γνήσια υποσύνολα του R, δεδομένου ότι τα οικονομικά μεγέθη βρίσκονται ή προσφέρονται σε περιορισμένες ποσότητες και γενικά δεν μπορούμε να παράγουμε και να καταναλώνουμε απεριόριστες ποσότητες.

Ειδικότερα, επειδή και η ανεξάρτητη και η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνει συνήθως και μη αρνητικές τιμές, η γραφική παράσταση των οικομικών συναρτήσεων αυτών εντοπίζεται μόνο στην πρώτη γωνία των ορθογωνίων αξόνων. Στην περίπτωση που οι προς μελέτη οικονομικές συναρτήσεις έχουν δύο ανεξάρτητες μεταβλητές τότε, επειδή οι μεταβλητές αυτές όπως και η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνουν συνήθως μόνο μη αρνητικές τιμές, το πεδίο ορισμού τους περιορίζεται σε υποσύνολο του στην πρώτη γωνία των αξόνων μέρους του οριζόντιου (xy) επιπέδου, ενώ η γραφική παράστασή τους εντοπίζεται μόνο στην πρώτη γωνία των τρισορθογώνιων αξόνων του τρισδιάστατου χώρου.

Ακόμα πρέπει να τονιστεί ότι η μαθηματική μορφή και οι ιδιότητες των συναρτήσεων που εκφράζουν οικονομικές σχέσεις θα πρέπει να προσδιορίζονται έτσι που να ερμηνεύουν τις οικονομικές συνθήκες του υπο μελέτη προβλήματος. Δηλ. με απλά λόγια, ο τύπος των συναρτήσεων αυτών πρέπει να περιλαμβάνει όλες τις υποθέσεις του οικονομικού προβλήματος που μελετάται, γιατί αλλιώς υπάρχει ο κίνδυνος, αν δε ληφθεί υπόψη και η μικρότερη οικονομική υπόθεση, η συνάρτηση που θα προκύψει ν' αναφέρεται σε άλλο οικονομικό πρόβλημα.

Έτσι προκύπτει η ανάγκη ελέγχου της οικονομικής λειτουργικότητας των διάφορων υποθέσεων που συνοδεύουν τους μαθηματικούς μετασχηματισμούς.

Εμείς θ' ασχοληθούμε κυρίως με προβλήματα οριακής οικονομικής ανάλυσης (marginala economic analysis) που θεμελιώνεται στην υπόθεση της ορθολογικής οικονομικής συμπεριφοράς (rational economic analysis behavour) και η οποία με απλά λόγια διατυπώνεται ως εξής :

Η διάθεση περιορισμένων οικονομικών πόρων στην επέκταση μιας δραστηριότητας είναι δικαιολογημένη αν και μόνο αν η ανίστοιχη καθαρή απόδοση είναι θετική.

Έτσι λοιπόν καταλαβαίνουμε ότι στη βάση της οριακής οικονομικής ανάλυσης ο προσδιορισμός των τιμών των ανεξάρτητωνοικονομικώνμεταβλητών που μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν εξαρτημένες μεταβλητές οικονομικών στόχων όπως π.χ. η μεγιστοποίηση κέρδους ή η ελάχιστοποίηση κόστους. Αυτή η αριστικοποίηση (optimization) των οικονομικών συναρτήσεων λέγεται οικονομικός προγραμματισμός (economic programming) και είναι μία από τις πιο βασικές και ενδιαφέρουσες περιοχές των οικονομικών επιστημών.

Τέλος, για την καλύτερη κατανόηση των όσων στη συνέχεια αναπτύξουμε, θα παραθέσουμε ικανοποιητικό αριθμό αντιπροσωπευτικών παραδειγμάτων.

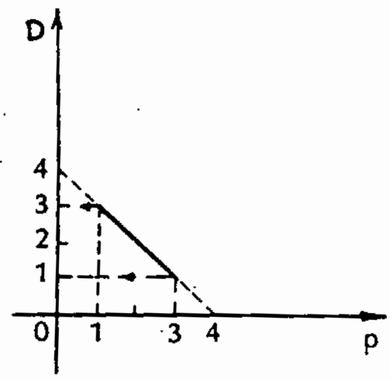
2. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΖΗΤΗΣΕΩΣ

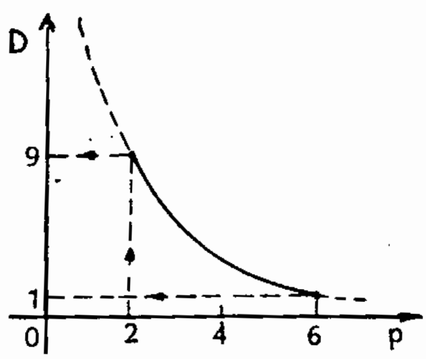
Από την Οικονομική θεωρία (Economic theory) είναι γνωστό ότι η ποσότητα (quantity) q ενός προϊόντος ή ενός αγαθού που οι καταναλωτές επιθυμούν (ή καλύτερα επιζητούν) ν' αγοράσουν σε μια ορισμένη χρονική περίοδο είναι συνάρτηση (εξαρτάται) όχι μόνο της τιμής (price) πωλήσεως της μονάδας του αλλά και άλλων παραγόντων, όπως το εισόδημα και οι προτιμήσεις των καταναλωτών, οι τιμές των άλλων ανταγωνιστικών ή συμπληρωματικών προϊόντων, κ.ά.

Αν όμως υποτεθεί ότι η ζήτηση (demand) της υπόψη ποσότητας εξαρτάται μόνο απο την τιμή τους προϊόντος, ενώ οι άλλοι αναφερόμενοι παράγοντες παραμένουν σταθεροί, τότε έχουμε τη συνάρτηση ζητήσεως (demand function) $q_D = f(p) \mid A$ (1) ή πιο απλά $D=f(p) \mid A$, όπου το A είναι ένα διάστημα μεταβολής των (δυνατών) τιμών του p π.χ. $A=[p_1,p_2]$.

Επειδή γνωρίζουμε ότι όσο χαμηλότερη είναι η τιμή ενός προϊόντος, τόσο μεγαλύτερη είναι η ποσότητα αυτού που οι καταναλωτές γενικά ζητούν ν' αγοράσουν, γι' αυτό η Οικονομική διδάσκει ότι, η μεν συνάρτηση ζητήσεως είναι συνήθως φθίνουσα, η δε καμπύλη ζητήσεως (demand curve) (δηλ. η γραφική παράσταση της συναρτήσεως ζητήσεως) έχει αρνητική κλίση με αποτέλεσμα σχεδόν πάντοτε να κλίνει προς τα κάτω, δείχνοντας έτσι και τον νόμο της ζητήσεως (law of demand) που λέει ότι, καθώς η τιμή ενός προϊόντος πέφτει, αγοράζεται μεγαλύτερη ποσότητα απ' αυτο.

Επειδή όμως στην Οικονομική καθιερώθηκε, απο τον Marshall*, γενικά η τιμή να μετριέται στον κατακόρυφο άξονα και η ποσότητα στον οριζόντιο άξονα, γι' αυτό έχουμε τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις (Σχ. 10-5) και (ΣΧ. 10-7).



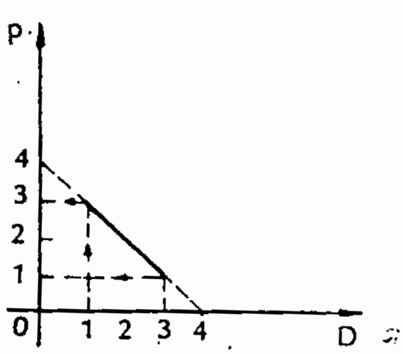


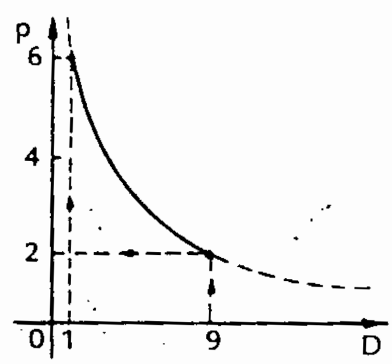
Σχ. 10-5 Σχ. 10-7

με αντίστοιχες συναρτήσεις. $D = 4-p \mid [1,3]$ και $D = 36/p^2 \mid [2,6]$

τότε θα λάβουμε τις τελικές συναρτήσεις ζητήσεως.

$p=4-D \mid [1,3]$ και $p=\dfrac{6}{\sqrt{D}} \mid [1,9]$ με γραφικές παραστάσεις αντίστοιχα στα Σχ.10-7 και Σχ.10-8.





ΣΧ.10-7 Σχ. 10-8

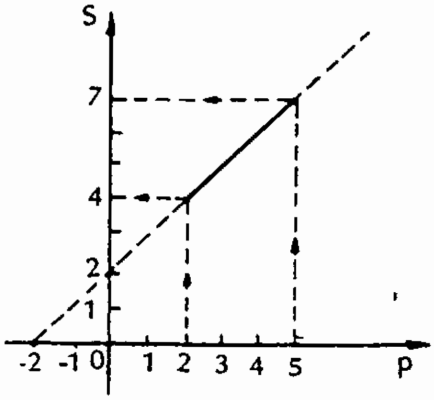
Αν τώρα το πεδίο ορισμού A=[1,3] της πρώτης, δηλ. της p=4 χρηματικές μονάδες που είναι η μεγαλύτερη τιμή στην οποία μπορεί να πωληθεί το προϊόν. Απ' αυτό καταλαβαίνουμε ότι για να υπάρχει ζήτηση του προϊόντος στην αγορά, θα πρέπει τούτο να πωληθεί σε τιμή μικρότερη των 4 χρηματ. μονάδων όπως άλλωστε φαίνεται και στα Σχήματα 10-5 και 10-7.

3. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΡΟΣΦΟΡΑΣ

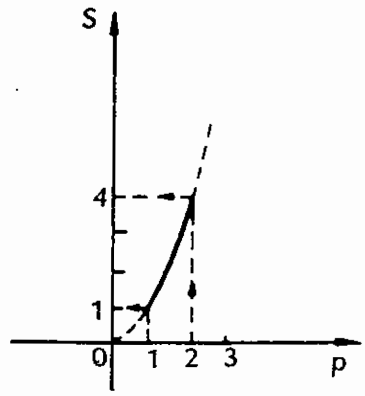
Είναι γνωστό ότι η ποσότητα q ενός προϊόντος ή αγαθού που οι παραγωγοί ή κάτοχοι επιθυμούν (ή καλύτερα προσφέρουν) να πωλήσουν σε μια ορισμένη χρονική περίοδο είναι συνάρτηση (εξαρτάται) όχι μόνο της τιμής πωλήσεως της μονάδας του, αλλά και άλλων παραγόντων που επηρεάζουν το κόστος παραγωγής του, όπως π.χ. η τεχνολογία, οι προσφορές των εισροών που είναι απαραίτητες για την παραγωγή αυτού του προϊόντος και - προκειμένου π.χ. για αγροτικό προϊόν - το κλίμα και οι καιρικές συνθήκες.

Αν όμως υποτεθεί ότι η **προσφορά** (supply) της υπόψη ποσότητας εξαρτάται μόνο από την τιμή του προϊόντος, ενώ οι άλλοι αναφερόμενοι παράγοντες παραμένουν σταθεροί, τότε έχουμε τη συνάρτηση προσφοράς (supply function) $q_s=\varphi(p) \mid A$ (2) ή πιο απλά $S= \varphi(p) \mid A$, όπου πάλι για το A είναι, όπως και στη συνάρτηση ζητήσεως, $A=[p_1,p_2]$.

Επειδή γνωρίζουμε ότι όσο χαμηλότερη (ψηλότερη) είναι η τιμή νεός προϊόντος, τόσο μικρότερη (μεγαλύτερη) είναι η ποσότητα αυτού που οι παραγωγοί γενικά προσφέρουν να πουλήσουν, γι' αυτό η Οικονομική διδάσκει ότι, η μεν συνάρτηση προσφοράς είναι συνήθως αύξουσα, η δε **καμπύλη προσφοράς** (supply curve) (δηλ. η γραφική παράσταση της συναρτήσεως προσφοράς) έχει συνήθως θετική κλίση, αλλά σε εξαιρετικές όμως περιπτώσεις, μπορεί να έχει και κλίση μηδενική, άπειρη ή και αρνητική.

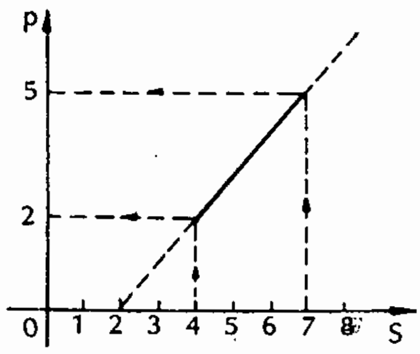


Σχ. 10-13

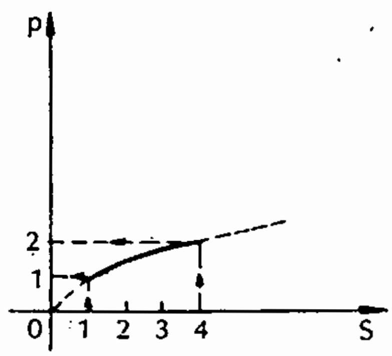


Σχ. 10-14

Έτσι αν έχουμε τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις (Σχ. 10-13) και (Σχ. 10-14) με αντίστοιχες συναρτήσεις προσφοράς $S= 2 +p \mid [2,5]$ και $S= p^2 \mid [1,2]$, τότε θα λάβουμε τις τελικές συναρτήσεις προσφοράς $p = S-2 \mid [4,7]$ $p = \sqrt{S} \mid [1,4]$ γραφικές παραστάσεις αντίστοιχα τις απεικονιζόμενες στα Σχ. 10-15 και Σχ. 10-16.



Σχ. 10-15



Σχ. 10-16

3.1 Ισορροπία στην αγορά

Θεωρείται γνωστό ότι με τον όρο γενικά **αγορά** (market) εννοούμε ένα μέρος όπου οι **αγοραστές** (buyers) και **πωλητές** (sellers) αγοράζουν και πωλούν αγαθά, υπηρεσίες και παραγωγικούς πόρους. Έτσι, δηλ. για κάθε αγαθό, υπηρεσία ή παραγωγικό πόρο που αγοράζεται ή πωλείται στην οικονομία έχουμε μια αγορά.

Η **ισορροπία** (the equilibrium) αναφέρεται σε μια κατάσταση της αγοράς που, αν πραγματοποιηθεί, τείνει να διατηρηθεί. Είναι, με άλλα λόγια, το αποτέλεσμα της αντισταθμίσεως των δυνάμεων της αγοράς και, στην οικονομική, αυτό συμβαίνει όταν η ποσότητα ενός προϊόντος που ζητιέται στην αγορά ανά μονάδα χρόνου (δηλ. σε μία ορισμένη χρονική περίοδο) είναι ίση με την ποσότητα του ίδιου προϊόντος που προσφέρονται στην αγορά την ίδια χρονική περίοδο.

Γεωμετρικά η ισορροπία στν αγορά πραγματοποιείται στην τομή της καμπύλης ζητήσεως και της καμπύλης προσφοράς για το υπόψη προϊόν. Έτσι, πιο αναλυτικά, αν $D = f(p) \mid A_1$ και $S = \varphi(p) \mid A_2$ είναι αντίστοιχα οι συναρτήσεις ζητησεως και προσφοράς του ίδιου προϊόντος, τότε η εξίσωση "ζήτηση = προσφορά" δηλ. η $D=S$ ή καλύτερα η $f(p)=\varphi(p)$ λέγεται **εξίσωση ισορροπίας** (equilibrium equation) της αγοράς.

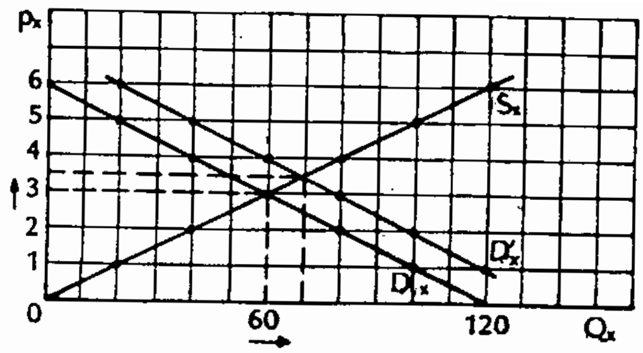
Αν τώρα η εξίσωση ισορροπίας της αγοράς έχει (θετική) ρίζα p_o , όπου $p_o \in A=A_1 \cap A_2$, τότε από κάθε τέτοια ρίζα ορίζεται ένα σημείο $K(q_o,p_o)$ με $q_o = f(p_o) = \varphi(p_o)$ που λέγεται σημείο ισορροπίας (equilibrium point)

στην αγορά του υπόψη προϊόντος και προφανώς (στο σημηείο αυτό) η ζητούμενη από τον και η προσφερόμενη στον καταναλωτή **ποσότητα** είναι η ίδια q_o για ορισμένη τιμή μονάδας p_o , που λέγεται αντίστοιχα **ποσότητα ισορροπίας** (equilibrium quantity) και **τιμή ισορροπίας** (equilibrium price). Γενικά τα είδη ισορροπίας στην αγορά για κάθε προϊόν είναι τα ακόλουθα τρία.

1) ***Ευσταθής*** (Stable) λέγεται η κατάσταση ισορροπίας που μια διαταραχή της θέτει σε λειτουργία δυνάμεις της αγοράς που τείνουν ν' αποκαταστήσουν την προηγούμενη κατάσταση ισορροπίας. Επισημαίνεται ότι για να έχουμε ευσταθή ισορροπία πρέπει η καμπύλη προσφοράς ή να έχει θετική κλίση (που συνήθως συμβαίνει) ή να έχει αρνητική κλίση και να είναι περισσότερο απότομη από την καμπύλη ζητήσεως (που οπωσδήποτε έχει αρνητική κλίση). Δηλ. με απλά λόγια θα πρέπει η καμπύλη προσφοράς να έχει μεγαλύτερη κλίση από την καμπύλη ζητήσεως (Σχ. 10-27 και Σχ. 10-28).

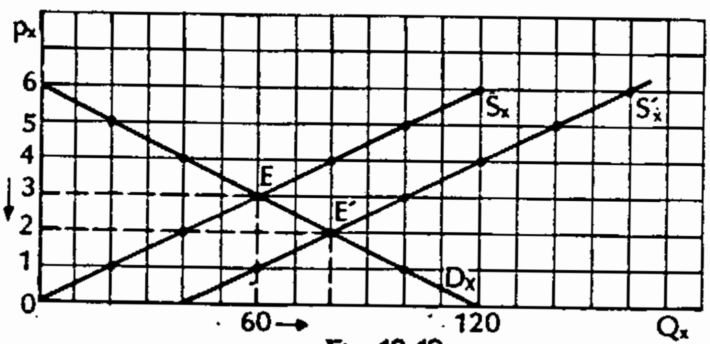
2) ***Ασταθής*** (Unstable) λέγεται η κατάσταση ισορροπίας που μια μικρή διαταραχή της έχει σαν αποτέλεσμα μια μεγαλύτερη απομάκρυνση από την ισορροπία. Επισημαίνεται ότι για να έχουμε ασταθή ισορροπία πρέπει η καμπύλη προσφοράς να έχει αρνητική κλίση και να είναι λιγότερο απότομη από την καμπύλη ζητήσεως (που έχει οπωσδήποτε αρνητική κλίση). Δηλ. με απλά λόγια θα πρέπει η καμπύλη προσφοράς να έχει μικρότερη κλίση από την καμπύλη ζητήσεως (Σχ. 10-29).

3) ***Ουδέτερη*** ή ***μετασταθής*** (Metastable) λέγεται η κατάσταση ισορροπίας που, έχουμε τη σπάνια περίπτωση, η καμπύλη ζητήσεως και η καμπύλη προσφοράς συμπίπτουν. Αν αυτό συμβεί, τότε μια διατάραξη από το σημείο ισορροπίας δεν προκαλεί αυτόματα καμιά δύναμη που θα επιβάλλει μεγαλύτερη απομάκρυνση από την προηγούμενη κατάσταση ισορροπίας ή κίνηση προς αυτή (την ισορροπία).



Σχ. 10-18

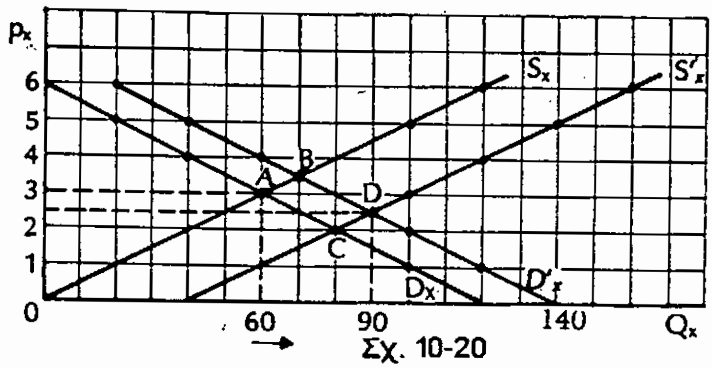
Πολλές φορές, για διάφορους λόγους, παρουσιάζεται η περίπτωση που, για κάποιο αγαθό ή προϊόν Χ, η καμπύλη ζητήσεως ή προσφοράς ή και οι δύο μετατοπίζονται (αλλάζουν). Προφανές είναι, στην περίπτωση αυτή, ότι και το σημείο ισορροπίας θ' αλλάξει. Έτσι π.χ. μια αύξηση στα εισοδήματα των καταναλωτών, επειδή θα επιφέρει μια αύξηση στη ζήτηση (δηλ. μια μετατόπιση της καμπύλης ζητήσεως προς τα πάνω), θα προκαλέσει μια αύξηση της τιμής ισορροπίας και της ποσότητας ισορροπίας (Σχ. 10-18).



Σχ. 10-19

Αν όμως η ζήτηση (της αγοράς) θεωρηθεί δοσμένη (σταθερή) τότε, π.χ. μια βελτίωση στην τεχνολογία παραγωγής του υπόψη αγαθού ή προϊόντος, θα επιφέρει μια αύξηση στην προσφορά (δηλ. μια μετατόπιση της καμπύλης προσφοράς προς τα κάτω), θα προκαλέσει μια μείωση της τιμής ισορροπίας αλλά μια αύξηση της ποσότητας ισορροπίας (Σχ.10-19).

Ακριβώς το αντίθετο συμβαίνει όταν έχουμε μια μείωση στη ζήτηση ή την προσφορά.

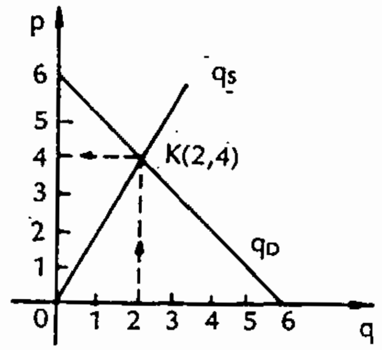


Σχ. 10-20

Αν τέλος και η ζήτηση και η προσφορά αύξηθούν, δηλ. αν και τα εισοδήματα των καταναλωτών αυξηθούν και συγχρόνως η βελτίωση στην τεχνολογία παραγωγής υπάρξει, τότε σίγουρα η ποσότητα ισορροπίας θ' αυξηθεί (Σχ. 10-20), ενώ η τιμή ισορροπίας μπορεί ν' αυξηθεί, να μειωθεί ή να μείνει και αμετάβλητη.

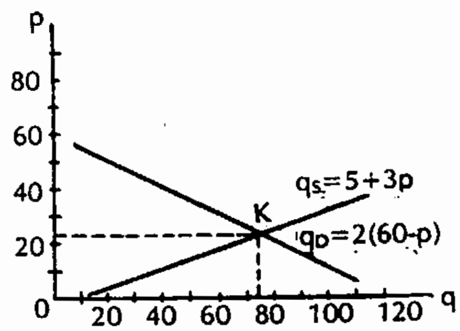
Για την καλύτερη τώρα κατανόηση των παραπάνω αναγραφομένων θ' αναφέρουμε τ' ακόλουθα παραδείγματα:

1) Αν έχουμε τις συναρτήσεις ζητήσεως και προσφοράς ενός προϊόντος ή αγαθού $q_D = 6-p$ *και* $q_S = p/2$, αντίστοιχα, τότε η εξίσωση ισορροπίας θα είναι $6-p=p/2$ από την οποία βρίσκουμε (Σχ. 10-21) σημείο ισορροπίας το K(2,4) με ποσότητα ισορροπίας $q_O=2$ και τιμή ισορροπίας $p_O=4$.



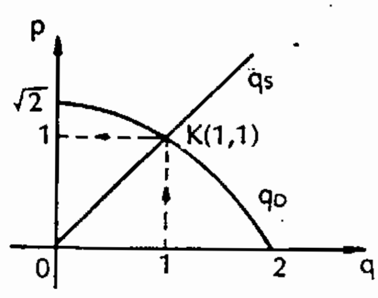
Σχ. 10-21

2) Αν έχουμε πάλι τις ευθύγραμμες συναρτήσεις ζητήσεως και προσφοράς $q_D=2(60-p)$ και $q_S=5+3p$ αντίστοιχα, τότε βρίσκουμε (Σχ. 10-22) σημείο ισορροπίας το K(74,23) με ποσότητα ισορροπίας $q_O=74$ και τιμή ισορροπίας $p_O=23$.



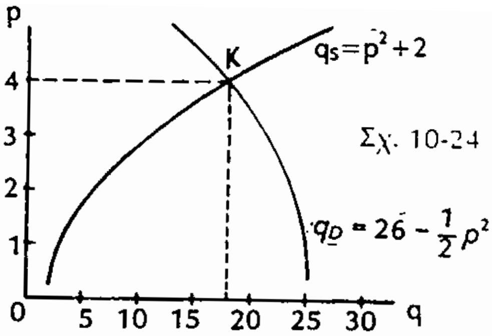
Σχ. 10-22

3) Αν έχουμε την τετραγωνική συνάρτηση ζητήσεως $q_D = 2 - p^2$ και την ευθύγραμμη συνάρτηση προσφοράς $q_S=p$, τότε (επειδή οι αρνητικές ρίζες απορρίπτονται) βρίσκουμε (Σχ. 10-23) σημείο ισορροπίας το K(1,1) με ποσότητα ισορροπίας $q_O=1$ και τιμή ισορροπίας $p_O=1$.



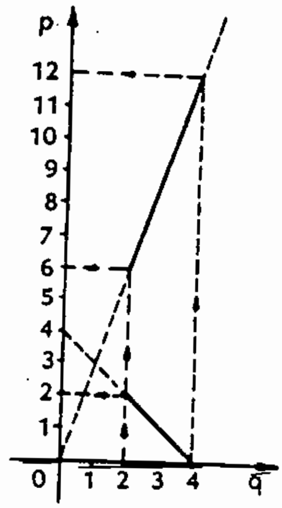
Σχ. 10-23

4) Αν έχουμε τώρα τις καμπυλόγραμμες (τετραγωνικές) συναρτήσεις ζητήσεως και προσφοράς ενός προϊόντος ή αγαθού $q_D=26-p^2/2$ και $q_S=p^2+2$ αντίστοιχα, τότε (επειδή οι αρνητικές ρίζες απορρίπτονται) βρίσκουμε (Σχ. 10-24) σημείο ισορροπίας το K(18,4) με ποσότητα ισορροπίας $q_O=18$ και τιμή ισορροπίας $p_O=4$.



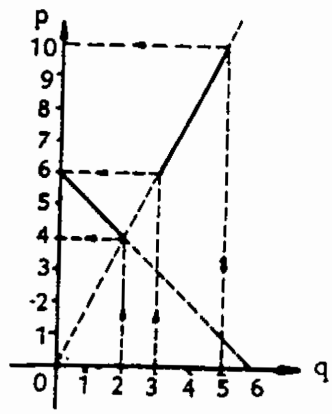
Σχ. 10-24

5)Αν έχουμε τις συναρτήσεις ζητήσεως και προσφοράς με πεπερασμένα πεδία ορισμού $q_D=4-p|[0,2]$ και $q_S=p/3|[6,12]$ αντίστοιχα, τότε, επειδή βρίσκουμε $p=4-q|[2,4]$ και $p=3q|[2,4]$ παρατηρούμε (ΣΧ. 10-25) ότι η έννοια της ισορροπίας δεν υπάρχει (αφού δεν τέμνονται για τιμές της q στο κοινό πεδίο ορισμού [2,4]).



Σχ. 10-25

6) Αν έχουμε πάλι τις ευθύγραμμες συναρτήσεις ζητήσεως και προσφοράς με πεπερασμένα πεδία ορισμού $q_D=6-p|[4,6]$ $q_S=\frac{p}{2}|[6,10]$ αντίστοιχα, τότε επειδή βρίσκουμε $p=6-q|[0,2]$ και $p=2q|[3,5]$, παρατηρούμε (Σχ.10-26) ότι η έννοια της ισορροπίας δεν υπάρχει (αφού οι ευθείες δεν τέμνονται επειδή $[0,2]\cap[3,5]=\varnothing$)

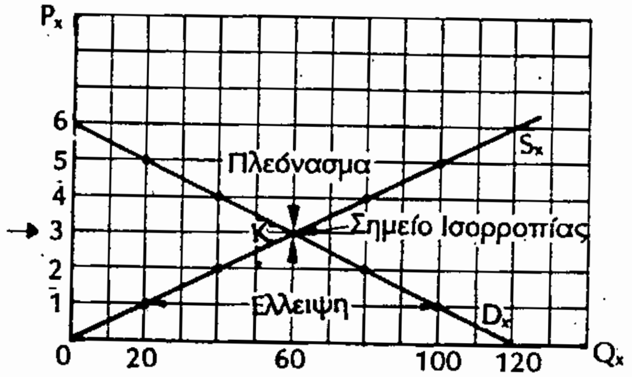


Σχ. 10-26

ΣΗΜΕΙΩΣΗ :

Από τα δύο τελευταία παραδείγματα προκύπτει ότι αν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων ζητήσεως και προσφοράς (ή τουλάχιστον της μιας εξ' αυτών) είναι πεπερασμένα, ενδέχεται τότε η έννοια της ισορροπίας να μην υπάρχει.

7) Αν έχουμε τις συναρτήσεις ζητήσεως και προσφοράς για ένα αγαθό ή προϊόν Χ, τις $D_X=20(6-p)$ και $S_X=20p$ αντίστοιχα, τότε η εξίσωση ισορροπίας θα είναι $20(6-p) = 20p$ απ' όπου βρίσκουμε (Σχ. 10-27) σημείο ισορροπίας το $K(60,3)$ με ποσότητα ισορροπίας $Q_X=60$ και τιμή ισορροπίας $P_X=3$.



Σχ. 10-27

Προκειμένου τώρα να μελετήσουμε το είδος ισορροπίας με τη βοήθεια του σχήματος φτιάχνουμε τον Πίνακα 1 και εργαζόμαστε ως εξής: Επειδή για τιμές μεγαλύτερες από την τιμή ισορροπίας, ή ποσότητα που προσφέρεται είναι μεγαλύτερη από την ποσότητα που ζητείται

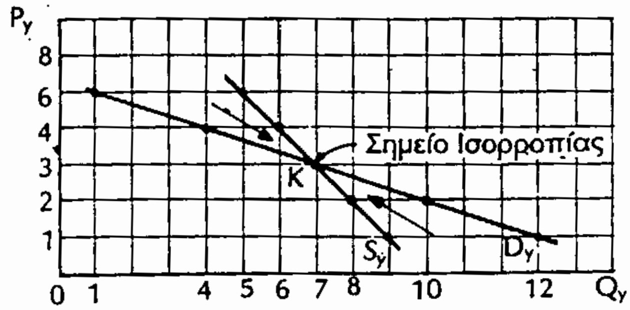
Πίνακας1			
Px	QDx	QSX	Πίεση στη τιμή
6	0	120	προς τα κάτω
5	20	100	προς τα κάτω
4	40	80	προς τα κάτω
3	60	60	ισορροπία
2	80	40	προς τα πάνω
1	100	20	προς τα πάνω
0	120	0	προς τα πάνω

συμπεραίνουμε ότι προκύπτει ένα πλεόνασμα (surplus) που αναγκάζει την τιμή να πέσει (μειωθεί) και να επανέλθει στην τιμή ισορροπίας. Επειδή τώρα για τιμές μικρότερες από την τιμή ισορροπίας, η ποσότητα που ζητιέται είναι μεγαλύτερη από την ποσότητα που προσφέρεται, συμπεραίνουμε ότι προκύπτει μία έλλειψη (lack) του αγαθού που αναγκάζει την τιμή ν' ανέβει (αυξηθεί) και να επανέλθει στην τιμή ισορροπίας.

Μετά τα παραπάνω εύκολα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η κατάσταση ισορροπίας είναι ευσταθής, όπως άλλωστε αναμενόταν, αφού η κλίση της καμπύλης προσφοράς είναι θετική.

8) Αν τώρα έχουμε τις συναρτήσεις ζητήσεως και προσφοράς για ένα αγαθό ή προϊόν Υ, τις $D_Y=16-3p$ και $S_Y=10-p$ αντίστοιχα, τότε βρίσκουμε (Σχ. 10-28) σημείο ισορροπίας το $K(7,3)$ με ποσότητα ισορροπίας $Q_Y=7$ και τιμή ισορροπίας $p_Y=3$. Προκειμένου τώρα να μελετήσουμε το είδος ισορροπίας φτιάχνουμε, με τη βοήθεια του σχήματος, τον Πίνακα 2

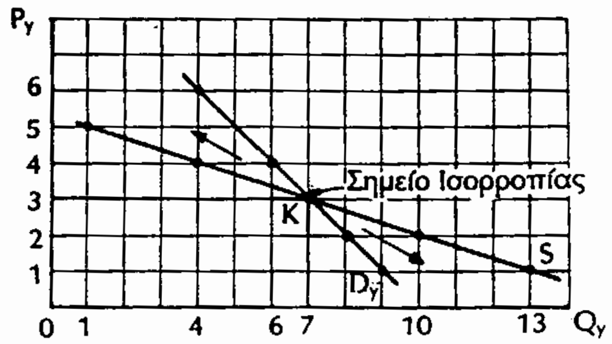
και, αφού εργαστούμε κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο με το προηγούμενο παράδειγμα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η κατάσταση ισορροπίας είναι και εδώ ευσταθής. Αυτό όμως ήταν αναμενόμενο αφού η καμπύλη προσφοράς έχει αρνητική κλίση και είναι πιο απότομη από την καμπύλη ζητήσεως.



Σχ. 10-28

Πίνακας2			
pY	QDY	QSY	Πίεση στη τιμή pY
5	1	5	προς τα κάτω
4	4	6	προς τα κάτω
3	7	7	ισορροπία
2	10	8	προς τα πάνω
1	13	9	προς τα πάνω

9) Τέλος αν αντιστρέψουμε τους ρόλους των συναρτήσεων του προηγούμενου παραδείγματος, δηλ. αν πάρουμε, για το αγαθό Υ, ως συναρτήσεις ζητήσεως και προσφοράς αντίστοιχα τις D_Y= 10-p και S_Y=16-3p τότε βρίσκουμε (Σχ. 10-29) το ίδιο σημείο ισορροπίας Κ(7,3).



Σχ. 10-29

Προκειμένου τώρα να μελετήσουμε το **είδος ισορροπίας** φτιάχνουμε, με τη βοήθεια του σχήματος, τον Πίνακα 3 και εργαζόμαστε ως εξής :

Πίνακας3			
pY	QDY	QSY	Πίεση στη τιμή pY
5	5	1	προς τα πάνω
4	6	4	προς τα πάνω
3	7	7	ισορροπία
2	8	10	προς τα κάτω
1	9	13	προς τα κάτω

Αν για κάποιο λόγο η τιμή του Υ αυξηθεί, π.χ. πάει στις * χρημ. μονάδες, τότε η ποσότητα που ζητιέται (6 μον.) θα υπερβεί την ποσότητα που προσφέρεται (4 μον.) δημιουργώντας έτσι μια έλλειψη (2μον.)

Η έλλειψη αυτή θ' αυξήσει την τιμή του Υ ακόμα περισσότερο, δηλ. θα έχουμε κίνηση προς τα πάνω, ακόμα πιο μακριά από το σημείο ισορροπίας.

Αν τώρα η διατάραξη της ισορροπίας μειώσει την τιμή του Υ κάτω από την τιμή ισορροπίας, αν π.χ. πάει στις 2 χρημ. μονάδες, τότε η προσφερόμενη ποσότητα (10 μον.) θα υπερβαίνει την ποσότητα που ζητείται (8 μον.) δημιουργώντας έτσι ένα πλεόνασμα (2 μον.). Το πλεόνασμα όμως αυτό θα μειώσει ακόμα περισσότερο την τιμή του Υ, δηλ. θα έχουμε απομάκρυνση προς τα κάτω.

4. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΕΣΟΔΩΝ

Αν με R συμβολίσουμε το χρηματικό ποσό που θα εισπράξουμε από την πώληση ενός προϊόντος ή αγαθού, τότε αυτό το ποσό λέγεται **ολικό έσοδο** (total revenue) και, όπως εύκολα καταλαβαίνουμε, θα εξαρτάται και από την τιμή πωλήσεως p της μονάδας του υπόψη προϊόντος και από την ποσότητα q που θα πωληθεί.

Γενικά, στη συνάρτηση που εκφράζει τη σχέση ολικών εσόδων R και της ποσότητας του πωλούμενου προϊόντος q, ξεχωρίζουμε δύο καταστάσεις:

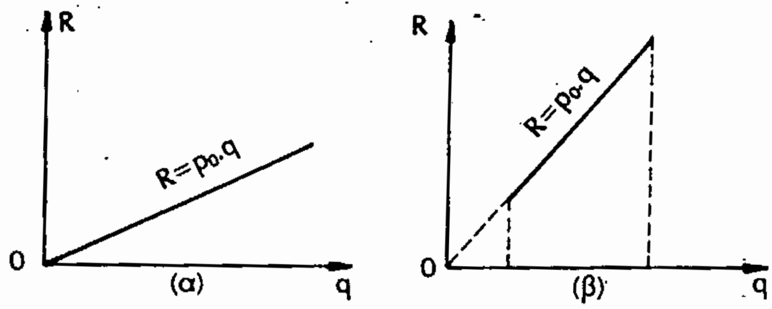
α) Όπου μια επιχείρηση λειτουργεί κάτω από συνθήκες **πλήρους ανταγωνισμού** (perfect competion) δηλ. τις συνθήκες όπου η ποσότητα του προσφερόμενου (από την επιχείρηση) στην αγορά προϊόντος δεν μπορεί να επηρεάσει την **αγοραία τιμή** (market price) αυτού, αλλ' ούτε και οι τιμές των χρησιμοποιούμενων συντελεστών παραγωγής μεταβάλλονται και

β) την κατάσταση όπου στην αγορά επικρατεί **ατελής ανταγωνισμός** (imperfect competion) για το συγκεκριμένο προϊόν. Δηλ., στην περίπτωση αυτη, η μεταβαλλόμενη τιμή ανά μονάδα προσφερόμενου από την επιχείρηση προϊόντος αντανακλά στη ζητησή του από τους καταναλωτές και κατ' ακολουθία στα ολικά έσοδα της υπόψη επιχειρήσεως.

Εμείς στη συνέχεια θ' ασχοληθούμε μόνο με την α΄ περίπτωση. Έτσι λοιπόν θα έχουμε τη **συνάρτηση ολικών εσόδων** (total revenue function)

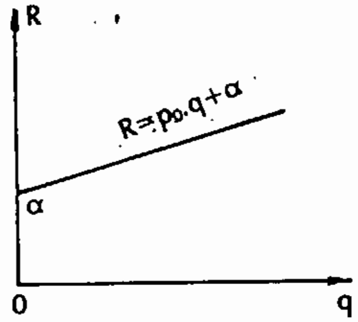
$TR = f(p,q)$ ή πιο απλά $R = p.q$ (1)

Αν τώρα στην (1) η τιμή πωλήσεως είναι σταθερή, δηλ. $p=p_o$, τότε προκύπτει η γραμμική συνάρτηση ολικών εσόδων $R = p_o q \mid A$(2), όπου A το διάστημα των (δυνατών) ποσοτήτων της πωλήσεως του προϊόντος αυτού.



Σχ. 10-30

Ευνόητο είναι ότι η γραφική παράσταση της (2) είναι ευθ. τμήμα που αρχίζει ή η προέκτασή του διέρχεται από την αρχή των ορθογωνίων αξόνων OqR (Σχ. 10-30) (α) και (β), ανάλογα με τα άκρα του A.

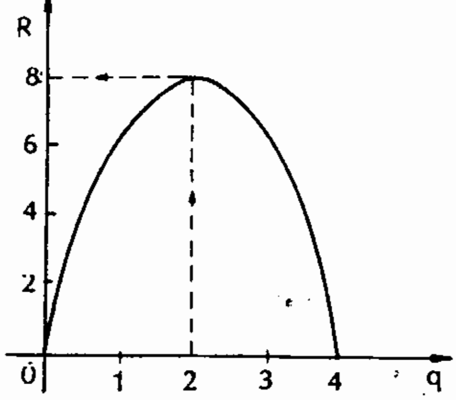


Σχ. 10-31

Είναι πιθανό ακόμα σε ειδικές περιπτώσεις η συνάρτηση (2) να λάβει τη μορφή $R=p_oq+\alpha$(3) όπου η παράμετρος α φανερώνει το **σταθερό (ή πάγιο) έσοδο** (fixed revenue) Ro στην πώληση του συγκεκριμένου προϊόντος. Δηλ. είναι α=Ro όταν q=0 και γεωμετρικά ισούται με την τεταγμένη επί την αρχή της ευθείας (3), όπως φαίνεται στο Σχ. 10-31.

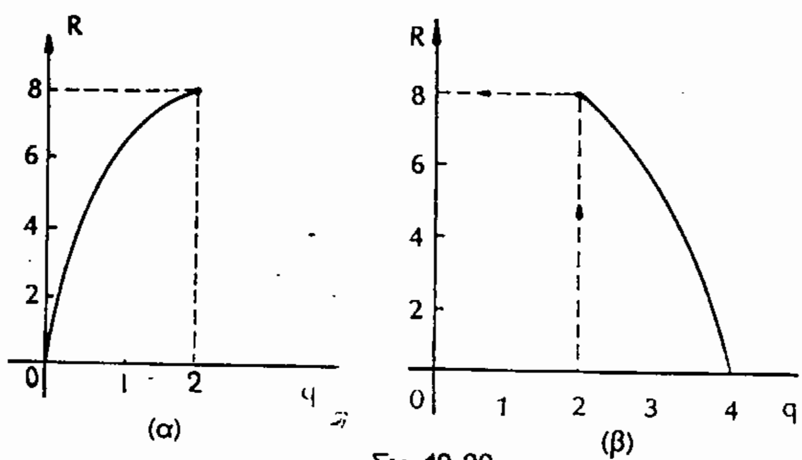
Πολλές φορές όμως στην πραγματικότητα η τιμή ενός προϊόντος δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται από την πωλούμενη ποσότητα, δηλ. είναι p=p(q), όπως συμβαίνει στην συνάρτηση ζητήσεως. Τότε η συνάρτηση ολικών εσόδων γίνεται R=p(q) q=f(q)|A, που σημαίνει τελικά ότι τα (ολικά) έσοδα είναι συνάρτηση της ποσότητας που πωλήται.

Έτσι αν η συνάρτηση ζητήσεως για ένα προϊόν είναι q=4-p/2 οπότε p=8-2q θα έχουμε για τη συνάρτηση ολικών εσόδων γραφική παράσταση την του Σχ. 10-32.



Σχ. 10-32

Αν όμως περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της R=f(q) στο [0,2] ή [2,4] τότε προκύπτει πάλι $R=8q-2q^2$ με γραφική παράσταση αντίστοιχα στο Σχ. 10-33 (α) και (β).



Σχ. 10-33

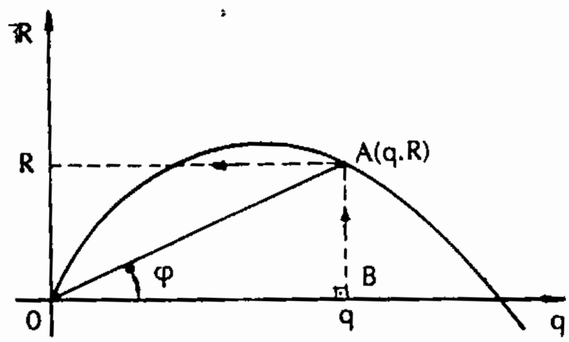
Εκτός όμως από τη συνάρτηση των ολικών εσόδων έχουμε και τις συναρτήσεις μέσων εσόδων και οριακών εσόδων.

*Επειδή λεγοντας **μέσο έσοδο** (average revenue) ενός προϊόντος εννοούμε το κατά* μονάδα ποσότητας έσοδο του προϊόντος αυτού, γι' αυτό, για να βρούμε τη **συνάρτηση μέσων εσόδων** (average revenue function), διαιρούμε τη συνάρτηση ολικών εσόδων δια της *ποσότητας που πουλήσαμε. Έτσι θα έχουμε*

$$AR= TR/q \;|q \neq 0 \quad \text{ή πιο απλά} \quad \bar{R}=R/q \;|q \neq 0 \qquad (4).$$

Επειδή όμως, όταν η συνάρτηση ολικών εσόδων έχει τη μορφή $R=pq$ με p σταθερό, βρίσκουμε $R=pq/q = p$, συμπεραίνουμε τότε, ότι η συνάρτηση μέσων εσόδων συμπίπτει με *την τιμή του προϊόντος*.

Πρίν όμως συνεχίσουμε με τη συνάρτηση οριακών εσόδων, θ' αναφέρουμε τις ακόλουθες δύο προτάσεις που ερμηνεύουν γεωμετρικά την τιμή των μέσων και ολικών *εσόδων:*

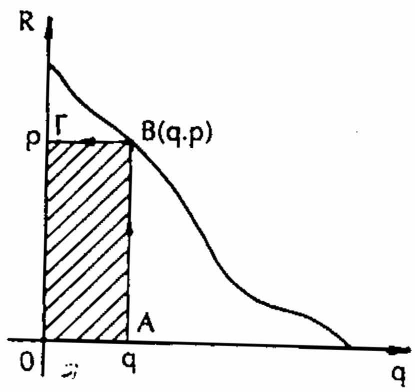


Σχ. 10-34

1) Αν $A(q,R)$ είναι ένα σημείο της καμπύλης της συναρτήσεως ολικών εσόδων (ΣΧ. 10-34), τότε η αντίστοιχη τιμή των μέσων εσόδων ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας φ που σχηματίζεται από το ευθ. τμήμα ΟΑ και τον οριζόντιο άξονα των q.

Η απόδειξη είναι προφανής αφού το ορθογ. τρίγωνο ΟΑΒ προκύπτει αμέσως $\varepsilon\varphi\varphi=BA/OB = R/q = pq/q = \bar{R}$ και μάλιστα $\bar{R}=p$.

2) Αν $B(q,p)$ είναι ένα σημείο της καμπύλης της συναρτήσεως μέσων εσόδων (Σχ. 10-35), τότε η αντίστοιχη τιμή των ολικών εσόδων ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΑΒΓ με διαστάσεις ΟΑ=q, ΟΓ=p δηλ. τις συντεταγμένες του σημείου B.



Σχ. 10-35

Η απόδειξη κι εδώ είναι προφανής αφού $(OAB\Gamma)=q.p = R$

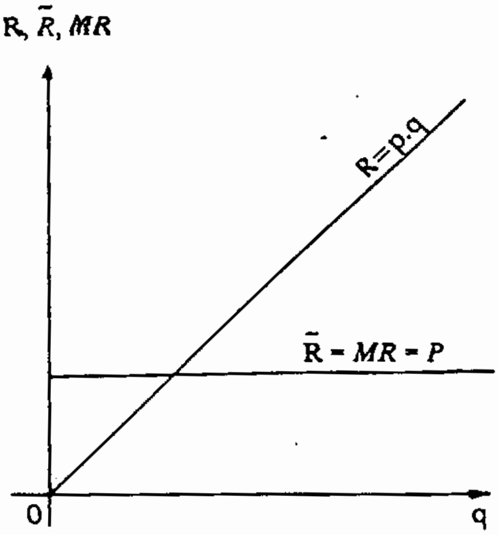
Για να ορίσουμε τώρα τη **συνάρτηση οριακών εσόδων** (marginal revenue function) θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την οριακή διαδικασία.

Έτσι λοιπόν ως ***οριακό έσοδο*** *(marginal revenue) ενός προϊόντος ορίζεται* η παράγωγος της συναρτήσεως ολικών εσόδων ως προς την ποσότητα του πωλούμενου προϊόντος. Δηλ. είναι

$$MR=\frac{dR(q)}{dq}=R'(q) \qquad (5)$$

και, κατά τα γνωστά από την παραγώγιση, τα οριακά αυτά έσοδα εκφράζουν το (χρηματικό) ποσό που εισπράττεται από την πώληση μιας επί πλέον μονάδας του υπόψη προϊόντος, πράγμα που φαίνεται πιο καθαρά αν λάβουμε R=pq (με p=σταθερό) οπότε

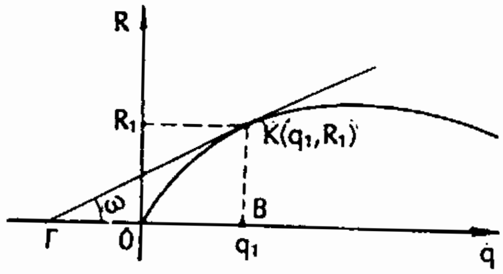
$$MR=\frac{dR(q)}{dq}=R'(q)=(pq)'=p$$



Σχ. 10-36

Έτσι τελικά, για p=σταθερό, οι γραμμές ολικών ή απλά εσόδων (R), μέσων εσόδων (AR ή $\bar{R}$) και οριακών εσόδων (MR) απεικονίζονται γραφικά και επί του ίδιου συστήματος ορθογωνίων αξόνων, OqR για την πρώτη και Oq$\bar{R}$, OqMR για τις δύο άλλες περιπτώσεις, στο Σχ. 10-36.

Από τον ορισμό της συναρτήσεως οριακών εσόδων και τη γνωστή γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου (4.1.2) προκύπτουν οι ακόλουθες προτάσεις.



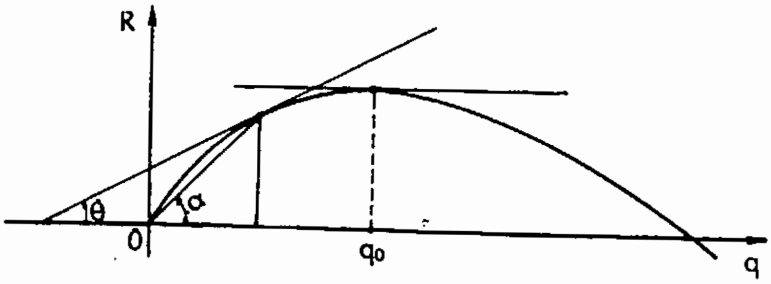
Σχ. 10-37

α) Αν K(q1,R1) είναι ένα σημείο της καμπύλης ολικών εσόδων, τότε η αντίστοιχη τιμή της συναρτήσεως των οριακών εσόδων, ισούται με την εφαπτόμενη της γωνίας ω

(Σχ. 10-37) που σχηματίζεται από την ευθεία που εφάπτεται της καμπύλης ολικών εσόδων στο δοσμένο σημείο Κ και τον οριζόντιο άξονα των q.

Η αλήθεια της προτάσεως αυτής είναι προφανής, αφού όντως ισχύει

$R'(q1)=dR/dq\ (q_1) =$ εφω .



Σχ. 10-38

β) Για την ίδια ποσότητα q η τιμή των οριακών εσόδων είναι πάντοτε, μικρότερη από την τιμή των μέσων εσόδων.

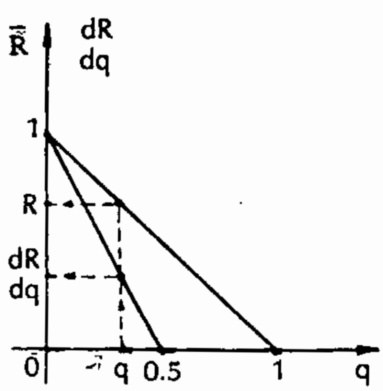
Πράγματι, αν q_0 είναι η ποσότητα για την οποία είναι $\frac{dR}{dR}(q_0)=0$ τότε (Σχ. 10-38) $\forall$

$q>q_0$ θα είναι $\frac{dR}{dq}<0$, οπότε (αφού R,q >0 και άρα $\frac{R}{q}>0$) θα ισχύει $\frac{dR}{dq}<\frac{R}{q}$.

Ακόμα $\forall$ q <qo θα είναι 0<θ<α<π/2 , οπότε εφθ< εφα και άρα (κατά τα γνωστά) $\frac{dR}{dq}<\frac{R}{q}$.

Παράδειγμα :

Αν $R=q - q^2$ / [0,1] είναι η συνάρτηση ολικών εσόδων, τότε οι $R=\frac{R}{q}$=1-q και $\frac{dR}{dq}$=1-2q είναι αντίστοιχα οι συναρτήσεις μέσων και οριακών εσόδων που έχουν γραφική παράσταση που φαίνεται στο Σχ. 10-39 και απ' όπου επαληθεύεται και η ανισότητα $\frac{dR}{dq}<\frac{R}{q}$



Σχ. 10-39

5. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΟΣΤΟΥΣ

Αν με C συμβολίζουμε τη χρηματική δαπάνη που απαιτείται (χρειάζεται) για την απόκτηση ή παραγωγή ενός προϊόντος ή αγαθού, τότε η δαπάνη αυτή λέγεται ολικό κόστος (total cost) και, όπως εύκολα καταλαβαίνουμε, με σταθερές συνθήκες παραγωγής *θα εξαρτάται και από τον αριθμό (ποσότητα) των μονάδων που παράγονται και από την* τιμή κόστους p της κάθε μονάδας που θα παραχθεί.

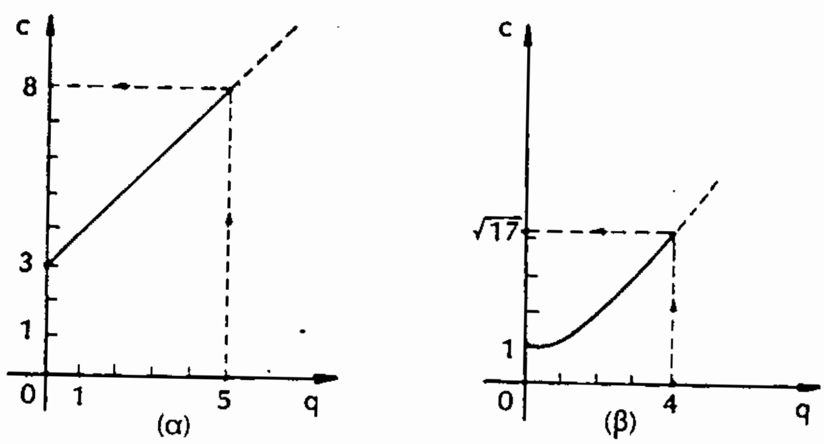
Έτσι λοιπόν θα έχουμε τη συνάρτηση ολικού κόστους (total cost function) TC =f(q,p) ή *πιο απλά συνάρτηση κόστους (cost funciton) C =f(p,q).*

Η συνάρτηση αυτή, επειδή συνήθως η τιμή κόστους p της κάθε μονάδας είναι σταθερή ή εξαρτάται από τον αριθμό q των μονάδων που παράγονται, γράφεται TC=f(q) ή πιο απλά C=f(q) (1).

Άρα τελικά μπορούμε να πούμε ότι η συνάρτηση ολικού κόστους ή, όπως απλά λέμε, η συνάρτηση κόστους είναι της γενικής μορφής (1) και παριστάνει τη σχέση του κόστους παραγωγής προς το παραγόμενο προϊόν.

Όταν όμως δεν παράγεται προϊόν, δηλαδή όταν q=0, τότε η αντίστοιχη τιμή του κόστους f(o) = C_0 αντιπροσωπεύει **το σταθερό** (ή **πάγιο**) **κόστος** (fixed cost) της παραγωγής. Στην πραγματικότητα όμως η συνάρτηση (ολικού) κόστους είναι η *C=f(g(z))=φ(z) εκφράζει το (ολικό) κόστος C ως συνάρτηση της χρησιμοποιούμενης* ποσότητας z ενός συντελεστή παραγωγής μέσω της συναρτήσεως παραγωγής (10.2.6.1.) q=f(z). Δηλ. εδώ, που εξετάζουμε τις λεγόμενες **βραχυπρόθεσμες συναρτήσεις** ***κόστους*** *(short-term cost functions), θα πρέπει να σημειωθεί ότι με τη σύνθετη συνάρτηση* C =f(g(z))=φ(z) εκφράζεται η έμμεση εξάρτηση του κόστους από την ποσότητα του χρησιμοποιούμενου συντελεστή παραγωγής, ενώ από τη συνάρτηση C=f(q) εκφράζεται η *άμεση εξάρτησή του από την ποσότητα της παραγόμενης ποσότητας.*

Η οικονομική αλλά και η εμπειρία, διδάσκει ότι η συνάρτηση (ολικού) κόστους είναι αύξουσα. Τούτο άλλωστε επαληθεύεται και από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων (ολικού) κόστους c=q+3 | [0,5] και $C=\sqrt{1+q^2}$ | [0,4] που απεικονίζονται αντίστοιχα στο ΣΧ. 10-41 (α και β)



Σχ. 10-41

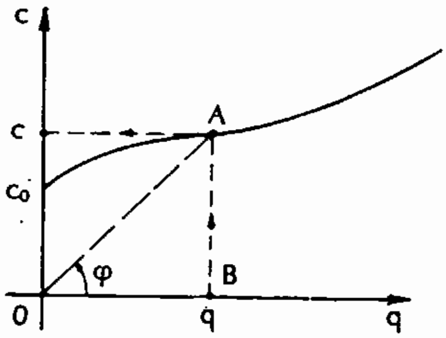
Εκτός όμως από τη συνάρτηση ολικού κόστους έχουμε και τις συναρτήσεις μέσου κόστους και οριακού κόστους.

Επειδή λέγοντας μέσο κόστος (average cost) ενός προϊόντος εννοούμε γενικά το κατά μονάδα ποσότητας κόστος του προϊόντος αυτού, γι' αυτό για να βρούμε τη *συνάρτηση μέσου κόστους (average cost function), διαιρούμε τη συνάρτηση υλικού κόστους* δια της ποσότητας που αποκτήσαμε ή παραγάγουμε. Έτσι θα έχουμε AC=TC/q | q≠0 ή πιο απλά και εξ' αιτίας της (1)

$$\bar{C}=\frac{C}{q}=\frac{f(q)}{q}\Big| q \quad \neq 0 \qquad (2)$$

Επειδή όμως, και μόνο όταν η συνάρτηση ολικού κόστους έχει τη μορφή C(q) = pq με p σταθερό βρίσκουμε $\bar{C}$=C/q=pq/q=p , συμπεραίνουμε τότε, ότι πράγματι η συνάρτηση μέσου κόστους συμπίπτει με το κατά μονάδα ποσότητας κόστος του προϊόντος, όπως και στον πιο κάτω ορισμό του μέσου κόστους αναφέρεται.

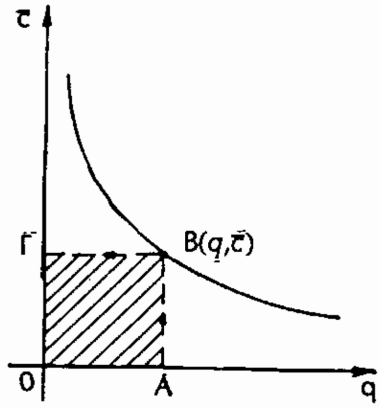
Πρίν όμως συνεχίσουμε με τη συνάρτηση οριακού κόστους, θ' αναφέρουμε τις ακόλουθες τρεις προτάσεις που ερμηνεύουν γεωμετρικά την τιμή του μέσου και ολικού κόστους καθώς και την ελάχιστη τιμή του μέσου κόστους :



Σχ. 10-42

1) Αν A(q,c) είναι ένα σημείο της καμπύλης της συναρτήσεως ολικού κόστους (Σχ. 10-42), *τότε η αντίστοιχη τιμή του μέσου κόστους, ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας φ* που σχηματίζεται από το ευθ. τμήμα OA και τον οριζόντιο άξονα των q.

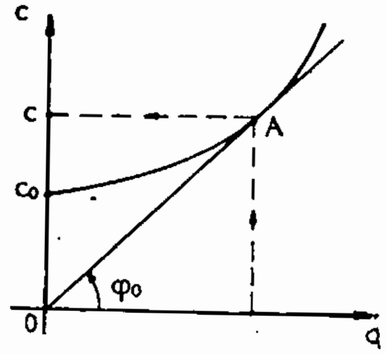
Η απόδειξη είναι προφανής αφού από το ορθ. τρίγωνο OAB προκύπτει εφφ=BA/OB = *C/q*.



Σχ. 10-43

2) Αν β (q,C) είναι ένα σημείο της καμπύλης της συναρτήσεως μέσου κόστους (Σχ. 10-43), τότε η αντίστοιχη τιμή των ολικών κόστους ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου *OABΓ* με διαστάσεις *OA*=q, *OΓ*=$\bar{C}$ δηλ. τις συντεταγμένες του σημείου *B*.

Η απόδειξη κι εδώ είναι προφανής αφού (ΟΑΒΓ)= q.$\overline{C}$ = q.C/q= C



Σχ. 10-44

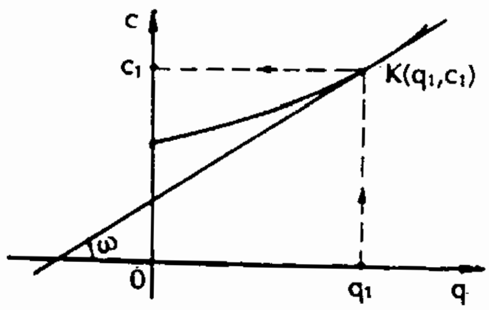
3) Το μέσο κόστος γίνεται ελάχιστο για την τιμή q, για την οποία το ευθ. τμήμα ΟΑ εφάπτεται της καμπύλης της συναρτήσεως ολικού κόστους στο σημείο Α με τετμημένη q *(Σχ. 10-44)*.

Επειδή πράγματι όταν το ΟΑ εφάπτεται της καμπύλης της συναρτήσεως ολικού κόστους, τότε η αντίστοιχη γωνία φ_0 είναι μικρότερη κάθε άλλης γωνίας φ, γι' αυτό - *σύμφωνα με την πρώτη πρόταση - είναι αληθινή η πρόταση.*

Για να ορίσουμε τώρα τη **συνάρτηση οριακού κόστους** (marginal cost function) θα πρέπει (όπως και στη συνάρτηση οριακών εσόδων) να χρησιμοποιήσουμε την οριακή *διαδικασία. Έτσι λοιπόν ως* ***οριακό κόστος*** *(marginal cost) ενός προϊόντος ορίζεται η* παράγωγος της συναρτήσεως ολικού κόστους ως προς την ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος. Δηλ. είναι MC = dC(q)/dq=C(q) (3) και, κατά τα γνωστά από την παραγώγιση, το οριακό αυτό κόστος εκφράζει τη (χρηματική) δαπάνη που απαιτείται για την απόκτηση ή παραγωγή μιας επι πλέον μονάδας του υπόψη προϊόντος, όπως ενδεικτικά φαίνεται αν λάβουμε C=pq (με p=σταθερό) οπότε

$$MC=\frac{dC(q)}{dq} = C'(q)=(pq)' =p$$

Από τον ορισμό της συναρτήσεως οριακού κόστους και τη γνωστή γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου προκύπτουν οι ακόλουθες προτάσεις.



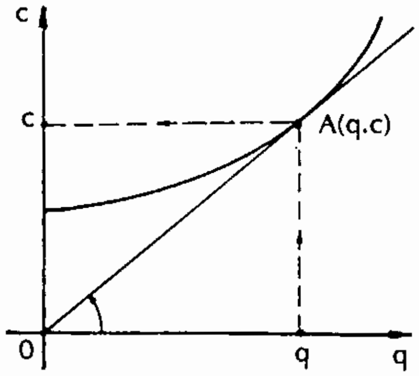
Σχ. 10-45

α) Αν $K(q_1,C_1)$ είναι ένα σημείο της καμπύλης ολικού κόστους, τότε η αντίστοιχη τιμή της συναρτήσεως του οριακού κόστους ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ω (Σχ. 10-45) που σχηματίζεται από την ευθεία που εφάπτεται της καμπύλης ολικού κόστους στο δοσμένο σημείο Κ και τον οριζόντιο άξονα των q.

Η αλήθεια της προτάσεως αυτής, είναι προφανής, αφού όντως ισχύει

$$C'(q1)=\frac{dC}{dq}(q_1)=\varepsilon\varphi\omega.$$

β) Η τιμή του οριακού κόστους ισούται με την τιμή του μέσου κόστους στην ίδια θέση q, όταν το ευθ. τμήμα ΟΑ εφάπτεται της καμπύλης της συναρτήσεως κόστους στο σημείο Α με τετμημένη q (Σχ. 10-46).



Σχ. 10-46

Πράγματι η πρόταση είναι αληθεινή, αφού τότε είναι dC/dq = C/q.

γ) Το μέσο κόστος γίνεται ελάχιστο για την ποσότητα q για την οποία ισχύει dC/dq = C/q δηλ. $C'(q)=\overline{C}(q)$.

Για την αλήθεια της προτάσεως αυτής, που εποτελεί εν μέρει συνέπεια της προηγούμενης προτάσεως, σκεφτόμαστε απλά ως εξής : Αν $\overline{C}=C/q$ είναι η συνάρτηση του μέσου κόστους θα έχουμε $C= C'q-C/q^2$ και επειδή, για να υπάρχει ελάχιστο της $\overline{C}$, πρέπει $\overline{C}'=0$ *θα έχουμε*

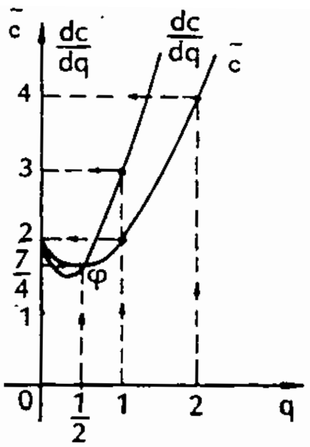
$$C'q-C=0 \Leftrightarrow C'=C/q=\overline{C}.$$

Παρατηρήσεις - Συμπληρώσεις :

τη) *Σημείο φυγής* (scuttle point) λέγεται το σημείο που τέμνονται οι καμπύλες μέσου και οριακού κόστους ή, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, το σημείο όπου το μέσο κόστος γίνεται ελάχιστο.

Έτσι π.χ. αν έχουμε τη συνάρτηση ολικού κόστους $C=q^3-q^2+2q$, τότε επειδή AC ή $C=C/q = q^2- q+2$ και MC ή $C'=dC/dq = 3q^2 - 2q +2$, για να βρούμε το σημείο φυγής λύνουμε *την εξίσωση $q^2-q+2=3q^2-2q+2$ απ' όπου βρίσκουμε (αφού πρέπει $q>0$) $q=1/2$. Τότε όμως*

επειδή $\overline{C}\left(\frac{1}{2}\right)=C'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}$, συμπεραίνουμε ότι το σημείο φυγής είναι (Σχ. 10-470) το $\Phi\left(\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right)$.

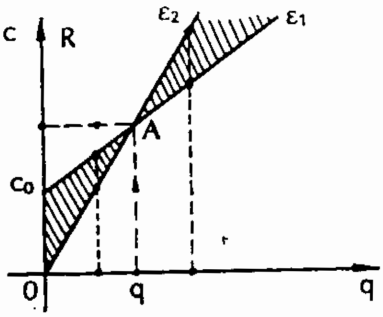


Σχ. 10-47

2η) *Εξίσωση κόστους και εσόδων.* **Νεκρό σημείο** : Αν για ένα προϊόν έχουμε σταθερή τιμή πωλήσεως $p=p_o$ και η συνάρτηση ολικού κόστους είναι η

$C(q) = \alpha q + C_o$,

όπου $\alpha, C_o > 0$ και C_o είναι το σταθερό (πάγιο) κόστος, τότε το διάγραμμα της μεν συναρτησεως ολικού κόστους είναι (Σχ. 10-48) η ημιευθεία ε1, της δε συναρτήσεως ολικών εσόδων $R(q)=p_o q$ που θα προκύψει από την πώληση q μονάδων αυτού, η ημιευθεία ε_2.



Σχ. 10-48

Από την εξίσωση C(q)=R(q) έχουμε αναλυτικά $\alpha q+C_o=p_o q \Leftrightarrow (p_o-a)q=C_o$ και, αν

$p_o>\alpha$, βρίσκουμε $q=\dfrac{C_o}{p_o-\alpha}$ (4) οπότε

$$C = R = \frac{C_o p_o}{p_o-\alpha} \qquad (5).$$

Από τις (4) και (5) συμπεραίνουμε ότι οι ημιευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο

$A\left(\dfrac{C_o}{p_o-\alpha}, \dfrac{C_o p_o}{p_o-\alpha}\right)$ το οποίο, επειδή ισχύει η ισότητα κόστους και εσόδων και άρα δεν έχουμε ούτε κέρδος ούτε ζημία, λέγεται **νεκρό σημείο** (*break even point*).

Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι για **κάθε** ποσότητα $0<q<\dfrac{C_o}{p_o-\alpha}$ (αντίστοιχα $q>\dfrac{C_o}{p_o-\alpha}$) προκύπτει R(q)<C(q) [αντίστοιχα R(q)>C(q)] δηλ. έχουμε **ζημία** (loss) [αντίστοιχα **κέρδος** (profit)], γι' αυτό γενικά και τα αντίστοιχα διαστήματα μεταβολής της ποσότητας q ονομάζονται ζημιοφόρες και **κερδοφόρες περιοχές** (losses and profits regions).

Σημείωση :

Η μεγιστοποίηση *των κερδών είναι από τα βασικότερα προβλήματα κάθε οικονομικής* δραστηριότητας και για να το αντιμετωπίσουμε γενικότερα, ας υποθέσουμε ότι το ολικό κόστος TC και τα ολικά έσοδα TR είναι συναρτήσεις μόνο της παραγόμενης και διατιθέμενης *(στην αγορά) ποσότητας q, οπότε είναι TC=C(q) και TR=R(q).*

Η διαφορά τότε μεταξύ των συναρτήσεων R(q) και C(q) ορίζει τη συάρτηση ολικών κερδών (total profit functon) TP=P(q). Έτσι έχουμε TP=P(q)=TR-TC=R(q)-(q) (6)

Πολλές οικονομικές αναλύσεις συνδέονται από την υπόθεση ότι κάθε επιχείρηση επιδιώκει τη μεγιστοποίηση των ολικών κερδών. Γενικά όμως ο προσδιορισμός της ποσότητας έστω $q=q^*$ που μεγιστοποιεί την *P(q)* είναι βασικό πρόβλημα οικονομικής επιλογής. Για τον προσδιορισμό τώρα της q έχουμε :

$$\frac{d(TP_1)}{dq} = p'(q)=R'(q)-C'(q)=0 \Leftrightarrow R'(q)=C'(q).$$

Έτσι η **αναγκαία συνθήκη για μεγιστοποίηση της συναρτήσεως ολικών κερδών** TPr **απαιτεί την εξίσωση της συναρτήσεως των οριακών εσόδων** MR=R'(q) **με τη συνάρτηση του οριακού κόστους** *MC=C'(q).*

Οι ικανές τώρα συνθήκες για μέγιστο της Tp1 απαιτούν η δεύτερη παράγωγος της (6) να είναι αρνητική στα σημεία q^* που ικανοποιούν την

$$R'(q)-C'(q^*)=0 \Leftrightarrow R'(q^*)=C'(q^*).$$

Έχουμε δηλαδή :

$$\frac{d^2(TP_r)}{dq^2} = P''(q^*) = C''(q^*) - C''(q^*) < 0 \Leftrightarrow R''(q^*) < C''(q^*).$$

Τότε λοιπόν προκύπτει ότι η **P(q) γίνεται μέγιστη στα σημεία** q^* **που είναι** $C'(q^*)=R'(q^*)$ **και που η συνάρτηση οριακού κόστους αυξάνει γρηγορότερα από τη συνάρτηση οριακών εσόδων**, δηλ. $C''(q^*)>R''(q^*)$.

Οι ποσότητες qi, που ικανοποιούν την *R(qi)=C(qi)* δηλ. είναι ρίζες της εξισώσεως P(q)=0 , ονομάζονται (όπως και πιο πάνω είδαμε) **νεκρά σημεία** (reak even points) και σ' αυτά η επιχείρηση δεν έχει ούτε κέρδη ούτε ζημίες. Τα διαστήματα τώρα Δi και Δi του πεδίου ορισμού της *P(q)=R(q)-C(q)* για τα οποία είναι *R(q)>C(q)* ∀ q ∈*Di* και *R(q)<C(q)* ∀ q∈ Dj ονομάζονται (όπως προείπαμε) κερδοφόρες και ζημιοφόρες περιοχές της P(q) αντίστοιχα.

Από τη φύση τους τα νεκρά σημεία είναι προφανές ότι έχουν ιδιαίτερη σημασία στον **προγραμματισμό δράσεως των επιχειρήσεων** και αποτελούν ειδική περιοχή έρευνας στην οικονομική των επιχειρήσεων.

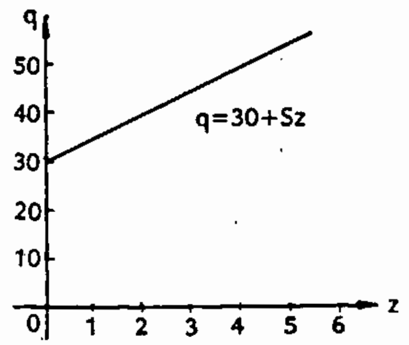
3η) *Συνάρτηση ισοκέρδους* : Πολλές φορές, προκειμένου να πραγματοποιήσουμε ορισμένο κέρδος, αναζητούμε τη σχέση που πρέπει να πληρούται μεταξύ της ποστότητας του παραγόμενου προϊόντος και του χρησιμοποιούμενου (για την παραγωγή του προϊόντος αυτού) συντελεστή παραγωγής (*10.26.1.).* Έτσι ορίζεται η λεγόμενη **συνάρτηση ισοκέρδους** (isoprofit function) η οποία εκφράζει την πιο πάνω (αναζητούμενη) σχέση και πιο συγκεκριμένα αναφέρεται σ' οποιοσδήποτε συνδυασμό παραγόμενης ποσότητας *προϊόντος q και χρησιμοποιούμενης ποσότητας συντελεστή παραγωγής Z έτσι, ώστε να* προκύπτει πάντοτε το ίδιο ολικό κέρδος TP_1 .

Έτσι επειδή από την (6) είναι TPr=R-C και R=pq.q1, C=pZ.Z (όπου p_q=τιμή ανά μονάδα του προϊόντος, pz=τιμή ανά μονάδα του συντελεστή παραγωγής, q=ποσότητα του παραγόμενου - πωλούμενου προϊόντος και z=ποσότητα του χρησιμοποιούμενου συντελεστή παραγωγής) θα έχουμε $TPr=p_q.q-p_z.Z$ από την οποία παίρνουμε τελικά την

$$q=\frac{TP_r}{p_q}+\frac{P_z}{p_q}.z$$

που λέγεται ***συνάρτηση ισοκέρδους****, αφού, με δεδομένα τα* TP_r,p_q *και* p_z, *ο οποιοσδήποτε* συνδυασμός των q και z δίνει το ίδιο (ολικό) κέρδος.

Αν τώρα, π.χ. το κέρδος επιχειρήσεως είναι ορισμένο και ίσο με 300 χρ. μον., η τιμή ανά μονάδα προϊόντος pq=10 χρ. μον. και η τιμή ανά μονάδα συντελεστή παραγωγής pz=50 χρ. μον. τότε η συνάρτηση ισοκέρδους θα είναι $q=\frac{300}{10}+\frac{50}{10}$ z δηλ. η q=30 +5z, που απεικονίζεται γραφικά στο Σχ. 10-49.



Σχ. 10-49

4η) *Καμπύλες βραχυχρόνιου συνολικού κόστους* : Οι καμπύλες κόστους δίνουν, όπως είναι γνωστό, το ελάχιστο κόστος παραγωγής σε διάφορα επίπεδα προϊόντος. Θα πρέπει εδώ βέβαια ν' αναφέρουμε ότι στο κόστος παραγωγής περιλαμβάνεται και το **φανερό** και το **αφανές** κόστος παραγωγής. Διευκρινίζουμε ότι το λεγόμενο **φανερό κόστος** (explicit cost) αναφέρεται στις πραγματικές δαπάνες με τις οποίες η επιχείρηση αγοράζει ή *προσλαμβάνει του συντελεστές παραγωγής που χρειάζεται, ενώ το* ***αφανές κόστος*** (implicit cost) αναφέρεται στην αξία των συντελεστών παραγωγής που ανήκουν στην επιχείρηση (δηλ. είναι κτήμα της) και χρησιμοποιούνται απ' αυτή για την παραγωγή του *προϊόντος της. Γνωρίζουμε ότι στη λεγόμενη* ***βραχυχρόνια περίοδο*** *ένας ή περισσότεροι* (αλλά όλοι) από τους συντελεστές παραγωγής είναι ποσοτικά σταθεροί.

Το **συνολικό σταθερό κόστος** (total fixed cost) TFC αναφέρεται στις συνολικές δαπάνες της επιχειρήσεως ανά μονάδα χρόνου για όλους τους **σταθερούς συντελεστές παραγωγής** και άρα παραμένει αμετάβλητο (σταθερό) σ' οποιοδήποτε επίπεδο παραγωγής, ενώ το **συνολικό μεταβλητό κόστος** (total variable cost) TVC αναφέρται στις *συνολικές δαπάνες της επιχειρήσεως ανά μονάδα χρόνου για όλους τους* ***μεταβλητούς συντελεστές παραγωγής*** και άρα αυξάνει με την αύξηση των μονάδων του παραγόμενου προϊόντος. Εδώ θα μπορούσαμε ν' αναφέρουμε ότι στο TFC ανήκουν όλα τα λεγόμενα ***γενικά και βιομηχανικά έξοδα*** *(όπως αποσβέσεις, έξοδα πρώτης εγκαταστάσεως κ.α.),* ενώ στο TVC ανήκουν οι πρώτες ύλες, τα άμεσα εργατικά κ.α.

Το **συνολικό κόστος** (total cost) ή **ολικό κόστος** TC ή (σπάνια) κόστος C είναι ίσο με *το άθροισμα του TFC και του TVC Δηλ. είναι :*

$$\boxed{TC=TFC+TVC}$$

Επειδή όμως το TFC και το TVC το γράφουμε απλά FC και VC γι' αυτό αντίστοιχα έχουμε

$$\boxed{TC=FC+VC}$$

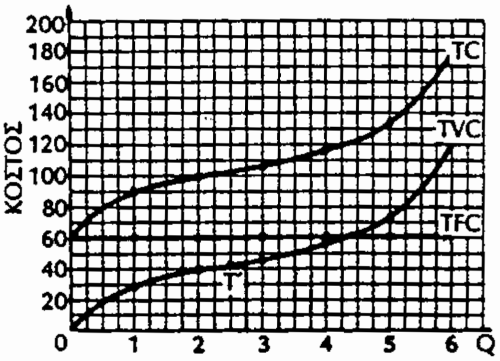
Στο Σχ. 10-50 απεικονίζονται οι καμπύλες TFC, TC και TVC TFC=60 χρ. μον. και όπου παρατηρούμε ότι η TFC είναι παράλληλη προς τον (οριζόντιο) άξονα των ποσοτήτων, *η TVC είναι μηδέν όταν η παραγωγή είναι μηδέν και η TC έχει το ίδιο σχήμα με την TVC* από την οποία προκύπτει με μετατόπιση προς τα πάνω κατά 60 χρημ. μονάδες.

Πιο συγκεκριμένα οι καμπύλες του Σχ. 10-50 προκύπτουν από τις υποθετικές *κλίμακες TfC, TVc και TC που δίνονται στον Πίνακα 4., ενώ στο Σχ. 10-51 απεικονίζονται* οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων σταθερού κόστους FC=15, μεταβλητού κόστους

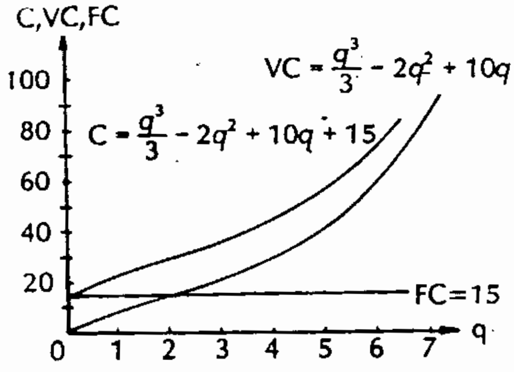
$VC=\frac{q^3}{3}-2q^2+10q$ και ολικού κόστους $C=\frac{q^3}{3}-2q^2+10q+15$.

Πίνακας 4

Q	TFC	TVC	TC
0	60	0	60
1	60	30	90
2	60	40	100
3	60	45	105
4	60	55	115
5	60	75	135
6	60	120	180



Σχ. 10-50



Σχ. 10-51

5η) *Καμπύλες βραχυχρόνιου μέσου κόστους* : Αν και οι καμπύλες συνολικού κόστους είναι πολύ σημαντικές, οι καμπύλες κόστους ανά μονάδα προϊόντος είναι ακόμα πιο σημαντικές στη **βραχυχρόνια ανάλυση** μιας επιχειρήσεως. Εμείς θα εξετάσουμε τις καμπύλες βραχυχρόνιου κόστους ανά μονάδα προϊόντος που αναφέρονται στο ***μέσο σταθερό κόστος*** *(average fixed cost)* AFC, το ***μέσο μεταβλητό κόστος*** *(average variable* cost) AVC, το **μέσο ολικό κόστος** (average total cost) ATC ή απλά (το γνωστό μας) **μέσο**

κόστος AC, το **οριακό μεταβλητό κόστος** (marginal variable cost) MVC και ατο (γνωστό μας) ***οριακό κόστος*** MC. *Πιο συγκεκριμένα έχουμε:*

$$AFC= \frac{TFC}{q} \quad \text{ή πιο απλά} \quad AFC = \frac{FC}{q}.$$

$$AVC= \frac{TVC}{q} \quad \text{ή πιο απλά} \quad AVC = \frac{VC}{q}.$$

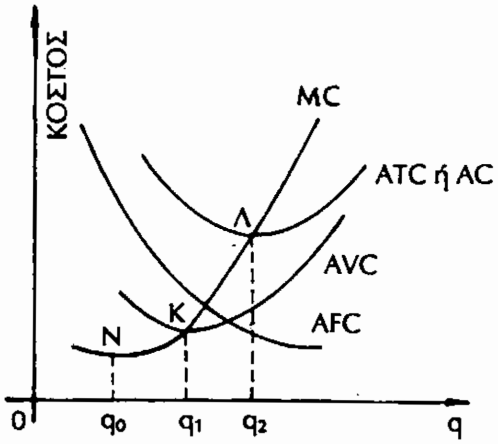
$$ATC=\frac{TC}{q} \quad \text{ή πιο απλά } AC =\frac{TC}{q} \text{ ή (σπάνια) } AC=\frac{C}{q}.$$

Επειδή TC=TFC+TVC ή πιο απλά TC=FC+VC συμπεραίνουμε ότι ATC=AFC + AVC ή *πιο απλά* AC=AFC+AVC.

Τέλος, επειδή το MVC (αντιστ. MC) ισούται με τη μεταβολή του TVC (αντίστ. TC) ανά μονάδα μεταβολής της ποσότητας του προϊόντος θα είναι:

$$MVC=\frac{d(TVC)}{dq} \quad \text{και} \quad MC =\frac{d(TC)}{dq}.$$

Από τις δύο τελευταίες ισότητες-ορισμούς προκύπτει οι συναρτήσεις του MVC και του MC είναι ταυτόσιμες (δηλ. συμπίπτουν) αφού, από την TVC=TC - TFC, έχουμε (TVC)' =(TC)'-(TFC)' $\Leftrightarrow$ (TVC)' =(TC)' και ακόμα προκύπτει ότι το οριακό κόστος (MC) είναι ανεξάρτητο του σταθερό κόστους (FC) και επηρεάζεται μόνο από τις μεταβολές του μεταβλητού κόστους (VC).



Σχ. 10-52

Στο ΣΧ. 10-52 απεικονίζονται οι καμπύλες AFC, AVC, ATC (ήAC) και MC απ' όπου προκύπτουν οι ακόλουθες παρατηρήσεις:

α) Το AFC ελαττώνεται συνέχεια με την αύξηση που παραγόμενου προϊόντος, αφού η ποσότητα του TFC διαιρείται με συνεχώς αυξανόμενες μονάδες του παραγόμενου προϊόντος. Η ταχεία μείωση στο AFC προκαλεί μια αρχική μείωση στο ATC.

β) Το AVC και ATC (ή AC) στην αρχή (για $q<q_1$, $q<q_2$) μειώνονται, αλλά στη συνέχεια *και συγκεκριμένα πέρα απο το σημείο Κ($q>q_1$) για το AVC και το σημείο Λ($q>q_2$) για το* ATC, αρχίζει η μοναδική πορεία τους. Εύκολα αντιλαμβανόμαστε ότι στα σημεία Κ και Λ το

AVC και ATC αντίστοιχα παίρνει την ελάχιστη τιμή του και μάλιστα επειδή $q_1<q_2$ η καμπύλη AVC έχει το ελάχιστό της σε χαμηλότερο επίπεδο παραγωγής απ' ό,τι η AC.

γ) Επειδή, όπως προηγούμενα βρήκαμε, το MC επηρεάζεται μόνο από τη μεταβολή του VC παρατηρούμε ότι : Όταν είναι MC<0 (αντίστ. MC>0) που σημαίνει ότι το TC και *κατ' επέκταση το ATC (ή AC) και άρα και το AVC μειώνεται (αντίστ. αυξάνουν) τότε το* MC<AVC και κατά μείζονα λόγο MC<AC [αντίστ. MC>Ac και κατά μείζονα λόγο MC>AVC].

δ) Τέλος στο σημείο N($q=q_0$) η καμπύλη MC έχει το ελάχιστό της και επειδή $q_0<q_1<q_2$, *το ελάχιστο της MC βρίσκεται σε χαμηλότερο επίπεδο της παραγωγής* απ' ό,τι οι καμπύλες AVC και AC, που έχουν το ελάχιστό τους (όπως βρήκαμε) στα σημεία Κ και Λ που τις τέμνει αντίστοιχα το ανερχόμενο τμήμα της καμπύλης MC.

6. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Η συνάρτηση παραγωγής (production function) *ή* **συνάρτηση ολικού** προϊόντος (*total* product function) εκφράζει τον κανόνα με τον οποίο μετασχηματίζονται ποσότητες **συντελεστού** (ή συντελεστών) **παραγωγής** (factor of production) σε ποσότητες έτοιμου *προϊόντος. Απλά δηλ. η συνάρτηση παραγωγής εκφράζει τη σχέση μεταξύ παραγόμενου* προϊόντος και συντελεστών παραγωγής (όπως κεφάλαιο, εργασία, έδαφος κ.α.) που χρησιμοποιήθηκαν για να παραχθεί αυτό το προϊόν.

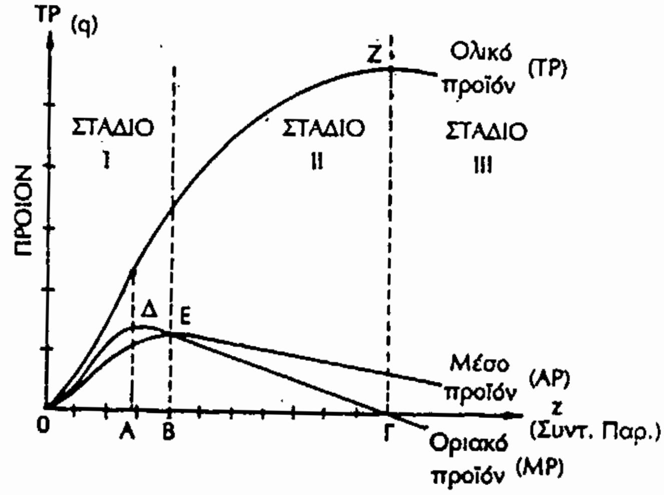
Αν για την παραγωγή ενός προϊόντος χρησιμοποιηθεί μόνο μια **εισροή** (input) από το πλήθος των εναλλακτικών εισροών (συντελεστών παραγωγής), ενώ οι υπόλοιποι *συντελεστές παραγωγής (υποθέσουμε ότι) παραμένουν σταθεροί, τότε λέμε ότι* αναφερόμαστε σε **βραχυχρόνιες συναρτήσεις παραγωγής** (short-term production functions). Έτσι π.χ. μπορούμε να πάρουμε μια απλή συνάρτηση παραγωγής για ένα αγροτικό προϊόν, αν χρησιμοποιήσουμε διάφορες εναλλακτικές ποσότητες εργασίας ανά μονάδα χρόνου για την καλλιέργεια μιας ορισμένης εκτάσεως γης (σταθερός συντελεστής παραγωγής) και καταγράψουμε τις διάφορες ποσότητες προϊόντος που παίρνουμε ανά μονάδα χρόνου.

Γενικότερα μια συνάρτηση ολικού προϊόντος έχει τη μορφή **TP=f(z)** *ή πιο απλά q=f(z)* και εκφράζει (όπως προείπαμε) μια παραγωγική δραστηριότητα με την οποία z μονάδες ενός συντελεστή παραγωγής μετασχηματίζονται σε q μονάδες ενός προϊόντος.

Από τη συνάρτηση q=f(z) του ολικού προϊόντος προκύπτουν (κατά τα γνωστά) οι συναρτήσεις AP= $\frac{f(z)}{z}$ ή πιο απλά $\bar{q}=\frac{f(z)}{z}$ του μέσου προϊόντος (average product) και MP=f'(z) του οριακού προϊόντος (marginal product).

Ειδικότερα το μέσο προϊόν προκύπτει με τη διαίρεση του ολικού παραγόμενου προϊόντος *δια του συνολικού αριθμού των μονάδων του συντελεστή παραγωγής που* χρησιμοποιήθηκαν, ενώ το οριακό προϊόν εκφράζει τη μεταβολή στο ολικό προϊόν ανα μονάδα συντελεστή παραγωγής και υπολογίζεται με τη χρήση παραγώγου.

Προκειμένου τώρα να προσδιορίσουμε με μορφή των καμπύλων AP *και* MP, *θα πρέπει* να προσδιορίσουμε πρώτα την TP, να εφαρμόσουμε τις βασικές σχέσεις και προτάσεις της 10.2.11.6. στις συναρτήσεις ολικού, μέσου και οριακού προϊόντος και να λάβουμε υπόψη μας *και το λεγόμενο* **νόμο του φθίνοντος οριακού προϊόντος** (*law of diminishing marginal* product). Σύμφωνα με το νόμο αυτό, κατά την παραγωγή ενός (π.χ. γεωργικού) προϊόντος η επί πλέον αύξηση του εισρεόμενου αγαθού - συντελεστή παραγωγής (π.χ. λιπάσματος) ανά μονάδα (σταθερού) συντελεστή (π.χ. καλλιεργούμενου εδάφους) συμβάλλει λιγότερο στην παραγωγή του συνολικού προϊόντος και μάλιστα, από ένα σημείο και μετά (σημείο Γ *στο ΣΧ. 10-54*) η παραγόμενη ποσότητα του υπόψη προϊόντος ελαττώνεται.



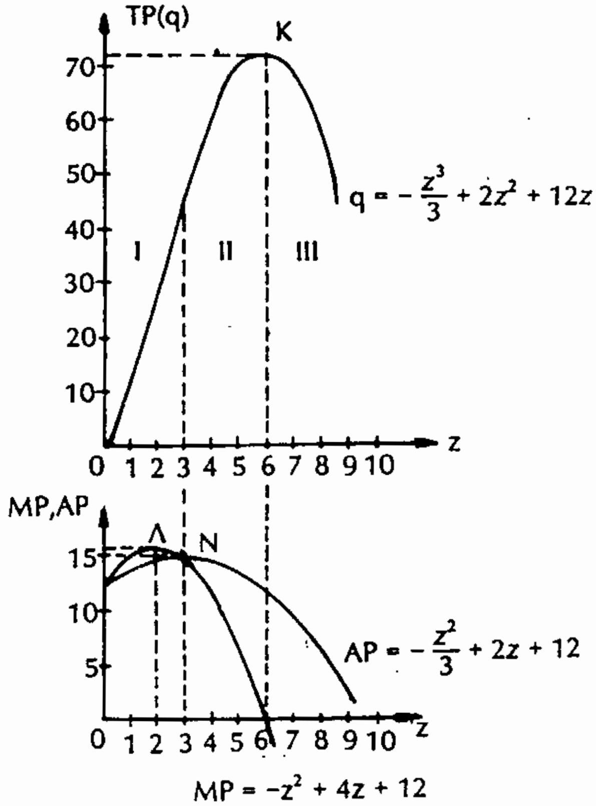
Σχ.10-54

Βασικές συμπληρώσεις :

1η Επίπεδα παραγωγής: Τα σημεία Β και Γ χωρίζουν τη καμπύλη ολικού προϊόντος σε τρεις περιοχές, δηλ. την παραγωγή σε τρία στάδια (stages). Συγκεκριμένα το στάδιο I αρχίζει από την αρχή των αξόνων και φθάνει μέχρι το σημείο όπου το AP είναι μέγιστο *(σημείο Β), στο στάδιο II αρχίζει από το σημείο Β και φθάνει μέχρι το σημείο όπου το MP* είναι αρνητικό. Αποδεικνύεται ότι για ένα λογικό παράγωγο μόνο το το στάδιο II προσφέρεται για **ορθολογική παραγωγή** (rational production), αφού άλλωστε εκεί το AP και το MP (παρόλο που φθίνουν) είναι θετικά, έχουμε τη σχέση MP<AP και για την ελαστικότητα του ολικού προϊόντος (ή ελαστικότητα παραγωγής) ισχύει η σχέση $0<E_{TP}<1$.

Παράδειγμα: Στο Σχ. 10-55 απεικονίζονται γραφικά η συνάρτηση παραγωγής ή (όπως αλλιώς λέμε) η συνάρτηση ολικού προϊόντος $q=-\frac{z^3}{3}+2Z^2+12z$, η συνάρτηση μέσου προϊόντος $AP=-\frac{z^2}{3}+2z+12$, και η συνάρτηση οριακού προϊόντος $MP=-z^2+4z+12$. Όπως εύκολα διαπιστώνεται, με τη χρησιμοποίηση 3 μονάδων του συντελεστή παραγωγής Ζ έχουμε AP=MP, ενώ το TP γίνεται μέγιστο και το MP μηδενίζεται με 6 μονάδες του Ζ (όπως και αλγεβρικά επαληθεύεται).

Αλλά τα σημεία ακροατών των παραπάνω καμπυλών προϊόντος επαληθεύονται και με χρήση των γνωστών συνθηκών. Έτσι το ολικό προϊόν (TP) η πιο απλά q παίρνει ακρότατη τιμή στο σημείο όπου $\frac{dq}{dz}=0 \Leftrightarrow -Z^2+4z+12=0 \Leftrightarrow Z=6$. Επειδή για Z=6 είναι: $\frac{d^2q}{d^2z}=0 \Leftrightarrow -2z+4=-2.6=-8<0$ και $q(z=6)=-\frac{6^3}{3}+2.6^2+12.6=72$ συμπεραίνουμε ότι το σημείο K(6,72) είναι μέγιστο του (ολικού) προϊόντος (Σχ. 10-55) και μάλιστα στη θέση αυτή (z=6) έχουμε MP=0, αφού όντως είναι $MP(z=6)=-6^2+4.6+12=0$.



Σχ. 10-55

Η καμπύλη του μέσου προϊόντος (MP) έχει ακρότατη τιμή στο σημείο όπου $\frac{d}{dz}(MP)=0$ $\Leftrightarrow -2z+4=0 \Leftrightarrow z=2$

Επειδή όμως για z=2 είναι $\frac{d^2(MP)}{dz^2}$ *= -2<0 ∀ z (άρα και για z=2) και MP(z=2)=* $-2^2+4.2+12=16$ συμπαιρένουμε ότι το σημείο Λ(2,16) είναι το μέγιστο του MP (σχημ. 10-55).

Τέλος το μέσο προϊόν (AP) έχει ακρότατη τιμή στο σημείο όπου $\frac{d}{dz}(AP)=0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}z+2=0 \Leftrightarrow z=3$. Επειδή όμως για z=3 είναι $\frac{d^2(AP)}{dz^2}=-\frac{2}{3}<0$ ∀ z (άρα και για z=3) και $AP(z=3)=-\frac{3^2}{3}+2.3+12=15$ συμπεραίνουμε ότι το σημείο N(3,15) είναι το μέγιστο του AP (Σχ. 10-55). Επισημαίνουμε ότι η τιμή z=3 στην οποία μεγιστοποιείται το AP, επαληθεύεται και από την εξίσωση AP=MP.

2η *Σχέση καμπυλών κόστους και παραγωγής:* Πριν προχωρήσουμε στην άμεση σχέση καμπυλών κόστους και παραγωγής και έχοντας υπόψη όσα αναφέραμε στην 5η (γ,δ) συμπλήρωση της αγγύλης 10.2.5.1, επισημαίνουμε τα εξής:

Η σχέση μεταξύ MC και AC είναι ακριβώς η ίδια που ισχύει μεταξύ MP και AP στη συνάρτηση παραγωγής. Δηλαδή, αν το MC είναι κάτω (μικρότερο) του AC, τότε το AC ελαττώνεται, *ενώ αν το MC είναι πάνω (μεγαλύτερο) του AC, το AC αυξάνει (Σχ. 10-52).* Ακόμα το AC και το MC αυξάνουν απο ορισμένο επίπεδο παραγωγής σαν αποτέλεσμα της φθίνουσας οριακής αποδόσεως (of diminishing marginal return) του χρησιμοποιούμενου *συντελεστή παραγωγής και μάλιστα το AC γίνεται ελάχιστο όταν ισούται με το MC* (σημείο Λ).

Η καμπύλη τώρα του AVC παραγωγής σχετίζεται άμεσα με την καμπύλη AP του χρησιμοποιούμενου συντελεστή παραγωγής, αφού AVC=VC/q και VC=pz.z, όπου q= μονάδες παραγόμενου προϊόντος pz=τιμή μονάδας συντελεστή παραγωγής και z=ποσότητα

συνετελεστή που χρησιμοποιήσαμε. Επειδή τώρα προκύπτει ότι AVC= $\frac{p_z . z}{q}$ ή AVC= $\frac{p_z}{\frac{q}{z}}$

τελικά, επειδή $\frac{q}{z}$=AP, θα έχουμε AVC= $\frac{p_z}{AP}$ ισότητα που εκφράζει την αντίστροφη σχέση που συνδέει το AVC και το AP. Δηλ., όταν το AP αυξάνει το AVC ελαττώνεται και αντίστροφα ή, αλλιώς, όταν το AP είναι μέγιστο, το AVC είναι ελάχιστο. Αλλά και καμπύ*λη του MC σχετίζεται με την καμπύλη του MP, όπως και το AVC με το AP. Πράγματι, το* MC επειδή εκφράζει τη μεταβολή του κόστους ως προς η μεταβολή του παραγόμενου προϊόντος, μπορεί να γραφεί

$$\boxed{MC = \frac{\text{Μεταβολή κόστους}}{\text{Μεταβολή προϊόντος}} \quad \frac{dC}{dq}.}$$

Επειδή όμως dC=pz.dz, όπου pz=τιμή μονάδας συντελεστή παραγωγής και dz=μεταβολή

στην ποσότητα του συντελεστή παραγωγής, θα έχουμε MC= $\frac{p_z . dz}{dq}$ ή MC= $\frac{p_z}{\frac{dq}{dz}}$ και τελικά,

αφού $\frac{dq}{dz}$ =MP (μεταβολή στην ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος ως προς τη μεταβολή

στην ποσότητα του χρησιμοποιούμενου συντελεστή παραγωγής) βρίσκουμε MC= $\frac{p_z}{MP}$. Η ισότητα αυτή εκφράζει την αντίστροφη σχέση μεταξύ MC και MP. Δηλ. όταν το MP αυξάνει το MC ελαττώνεται και αντίστροφα ή, άλλως, το MC ελαχιστοποιείται όταν το MP γίνεται μέγιστο.

7. Ο ΟΡΙΑΚΟΣ ΛΟΓΟΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΥΠΟΤΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ

Ο οριακός λόγος τεχνικής υποκαταστάσεως (marginal rate of technical substitution) **ή οριακή σχέση τεχνικής υποκαταστάσεως (marginal relation of technical substitution) του συντελεστή παραγωγής K από το συντελεστή παραγωγής L** *συμβολίζεται* **$MRTS_{LK}$** *και εκφράζει την ποσότητα του K που μια επιχείρηση πρέπει να* δώσει, αν αυξήσει το L κατά μία μονάδα, για να παραμείνει στην ίδια καμπύλη ισοπαραγωγής. Πιο απλά ο $MRTS_{LK}$ εκφράζει το βαθμό κατά τον οποίο ο συντελεστής L *μπορεί να υποκαταστήσει το συντελεστή K σε οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης* ισοπαραγωγής και υπολογίζεται με την α' παράγωγο της συναρτήσεως ισοπαραγωγής ως εξής:

Επειδή απο την Q=f(x,y) βρίσκουμε (7.3) $dQ=\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy$ απο την οποία για Q=C

(σταθερό) έχουμε $dQ= \frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy=0$, συμπεραίνουμε τελικά ότι

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}=-\frac{fx}{fy} \text{ για } fy\neq 0.$$

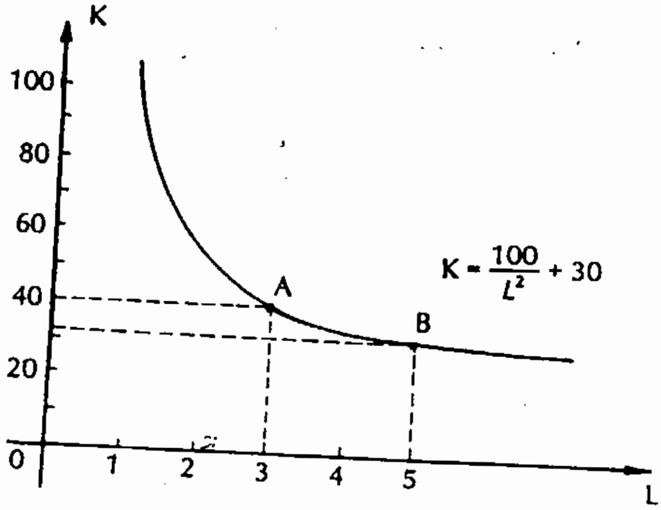
Λόγω αυτής και επειδή για κάθε σταθερή τιμή της Q είναι τελικά f(L,K)=0, συμπεραίνουμε (7.5) ότι

$$\frac{dK}{dL}=-\frac{fL}{fk}=-\frac{MP_L}{MP_K}=-\frac{\text{οριακό προϊόν του } L}{\text{οριακό προϊόν του } K}$$

Από την τελευταία μάλιστα σχέση προκύπτει ότι, καθώς μια επιχείρηση κινείται *προς τα κάτω κατά μήκος μιας καμπύλης ισοπαραγωγής, ο $MRTS_{LK}$ απολύτως μικραίνει.*

Παράδειγμα:

Αν έχουμε τη (για ορισμένη τιμή του παραγόμενου προϊόντος Q) συνάρτηση παραγωγής, ο $f(L,K)=K-100/L^2-30=0$ ή στην πιο απλή μορφή της $K=\varphi(L)=100/L^2+30$ (Σχ. *10-57), τότε ο MRTS του K από το L δηλ. ο $MRTS_{LK}$ θα δίνεται απο την ισότητα*



Σχ. 10-57

$$MRTS_{LK} = \frac{dK}{dL} = -\frac{200}{L^3}$$

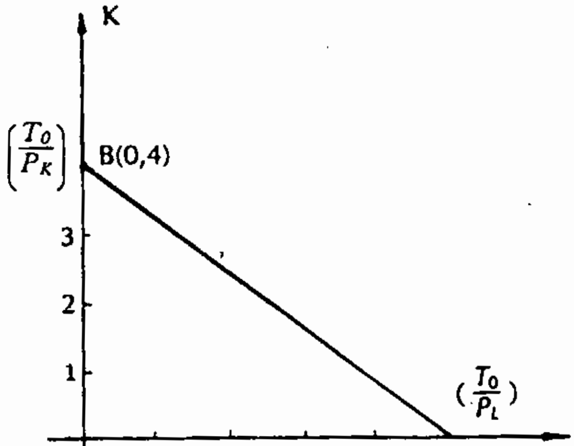
Ετσι, απο το σημείο *B* που συνδυάζονται *5* μονάδες του συντελεστή L (εργασία) και 34 μονάδες του K (κεφαλαίου), ο οριακός λόγος τεχνικής υποκαταστάσεως είναι $MRTS_{LK}$ = -200/5³ =1,6 που σημαίνει ότι μια μονάδα του συντελεστή εργασίας μπορεί να *υποκαταστήσει 1,6 μονάδες του συντελεστή κεφάλαιο, χωρίς να μεταβληθεί το επίπεδο* παραγωγής.

Ακόμα επειδή ο $MRTS_{LK}$ στο A είναι -200/3³ = -200/27 = -7,4 και στο B (όπως βρήκαμε) είναι -1,6 συμπεραίνουμε ότι όντως όσο κινείται η επιχείρηση προς τα κάτω στην καμπύλη σιπαραγωγής, ο MRTS απολύτως μικραίνει αφού είναι |-7,4|>|-1,6|.

8.ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΙΣΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ.

Συνάρτηση ισοκόστους *(isocost function) είναι η συνάρτηση που εκφράζει τη* συνδυασμένη χρησιμοποίηση δύο συντελεστών παραγωγής, με δεδομένη (γνωστή και σταθερή) ποσότητα **συνολικής δαπάνης** (total ouatlay) για την παραγωγή ενός προϊόντος. *Πιο απλά και συγκεκριμένα μια* ***καμπύλη ίσου κόστους*** *(isocost curve) δίνει όλους τους* διαφορετικούς συνδυασμούς εργασίας (L) και κεφαλαίου (K) που μια επιχείρηση μπορεί ν' αγοράσει με δεδομένα το **συνολικό προϋπολογισμό** (total budget) ή τη συνολική δαπάνη (total outlay) T.O. της επιχειρήσεως και τις τιμές PL και PK των υπόψη συντελεστών παραγωγής.

Έτσι, αν μια επιχείρηση ξόδευε όλο το ποσό που διαθέτει για ν' αγοράσει κεφάλαιο (αντίστ. εργασία), θα μπορούσε ν' αγοράσει $T.O/P_K$ (αντίστ. To/PL) μονάδες κεφαλαίου *(αντίστ. εργασίας)*.



Σχ. 10-58

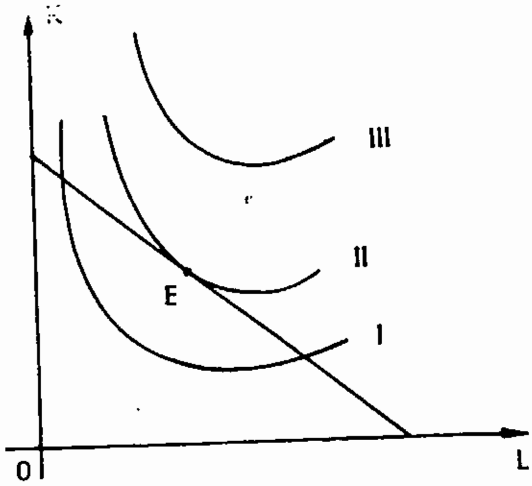
Αν τώρα, σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων OLK (Σχ. 10-58), συνδέσουμε τα δύο αυτα σημεία με την ευθεία γραμμή AB θα πάρουμε την καμπύλη ίσου κόστους αυτής της επιχειρήσεως. Ευνόητο λοιπόν είναι ότι η επιχείρηση μπορεί ν' αγοράσει οποιοδήποτε συνδυασμό κεφαλαίου και εργασίας που καθορίζεται από ένα σημείο της καμπύλης ίσου κόστους και ακόμα ότι η κλίση της καμπύλης αυτής είναι

$$-\frac{\frac{TO}{P_K}}{\frac{TO}{P_L}} = -\frac{TO.P_L}{TO.P_K} = -\frac{P_L}{P_K}$$

Δηλ. αν είναι $P_L=4$, $P_K=5$ και Τ.Ο=20 χρημ. μονάδες, τότε *η καμπύλη ίσου κόστους* θα είναι η ευθεία ΑΒ (Σχ. 10-58) όπου Α(5,0), Β(0,4) και θα έχει κλίση - P_L/P_K = -4/5.

9. ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΤΟΥ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Ονομάζουμε **ισορροπία του παραγωγού** (producer equilibrium) ή καλύτερα θα λέμε ότι **ένας παραγωγός βρίσκεται σε ισορροπία**, όταν, με δεδομένο τον προϋπολογισμό *του και τις τιμές των χρησιμοποιούμενων συντελεστών παραγωγής, μεγιστοποιεί* το προϊόν του (την παραγωγή του). Πιο συγκεκριμένα, ένας παραγωγός βρίσκεται σε ισορροπία, όταν, με δεδομένη την καμπύλη ίσου κόστους, φθάνει την ψηλότερη καμπύλη *ίσου προϊόντος που είναι δυνατόν.*



Σχ. 10-59

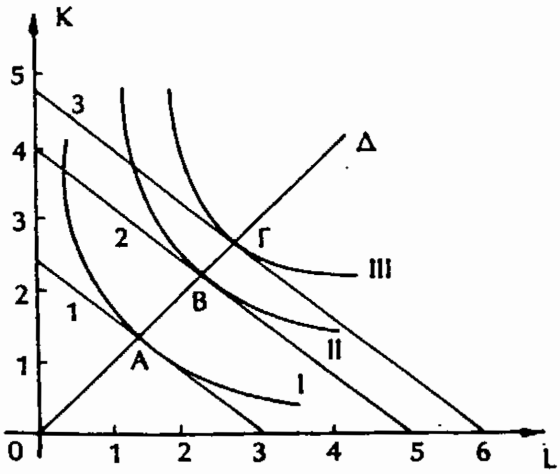
*Σχεδιάζοντας στο ίδιο σύστημα αξόνων καμπύλες ίσου προϊόντος ή παραγωγής (Σχ. 10-*56) και την καμπύλη ίσου κόστους μιας επιχειρήσεως (Σχ. 10-58), μπορούμε να προσδιορίσουμε ότι το σημείο ισορροπίας του παραγωγού (δηλ. εδώ της επιχειρήσεως) *είναι εκείνο, όπου οι απόλυτες τιμές των κλίσεων της καμπύλης ίσου προϊόντος και της* καμπύλης ίσου κόστους είναι ίσες και αυτό συμβαίνει μόνο στο κοινό σημείο επαφής τους, δηλ. το Ε (Σχ. 10-59). Συνδυάζοντας τώρα την πρότασηαυτή με τον αναφερόμενο στην *αγγύλη 10.2.6.3 οριακό λόγο τεχνικής υποκαταστάσεως ($MTRS_{LK}$) προκύπτει η σχέση* $MTRS_{LK}$ =- P_L/P_K . Επειδή όμως (10.2.6.3) έχουμε ότι $MTRS_{LK}$ =-MP_L/MP_K συμπεραίνουμε ότι η συνθήκη ισορροπίας του παραγωγού εκφράζεται με τη σχέση

$$\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{P_L}{P_K} <=> \frac{MP_L}{P_L} = \frac{MP_K}{P_K}$$ *που σημαίνει ότι στην ισορροπία το οριακό προϊόν (MP) της* τελευταίας χρηματικής μονάδας που ξοδεύτηκε για εργασία είναι το ίδιο με το MP της τελευταίας χρηματ. μονάδας που ξοδεύτηκε για κεφάλαιο.

Αν υποθέσουμε ότι η επιχείρηση λειτουργούσε πάνω στην καμπύλη ισοπαραγωγής I, δε θα είχε μεγιστοποιήσει το προϊόν της (την παραγωγή της). Γι' αυτό λέμε ότι η καμπύλη *ισοπαραγωγής II είναι η ψηλότερη καμπύλη ισοπαραγωγής που μπορεί να φθάσει* η επιχείρηση με την καμπύλη ίσου κόστους που εχει (διαθέτει).

10. Η ΚΑΜΠΥΛΗ ΕΠΕΚΤΑΣΕΩΣ

Αν *μια επιχείρηση αλλάξει τον προϋπολογισμό της, δηλ. μεταβάλλει τη συνολική* δαπάνη Τ.Ο. που διαθέτει για να αγοράσει του συντελεστές παραγωγής, ενώ οι τιμές της εργασίας και του κεφαλαίου παραμένουν σταθερές, τότε η καμπύλη ίσου κόστους της υπόψη επιχειρήσεως μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό της και συγκεκριμένα προς τα πάνω, αν η Τ.Ο. αυξάνεται ή προς τα κάτω, αν η Τ.Ο. μειώνεται.



Σχ. 10-60

Όπως είναι ευνόητο, αυτές οι διαφορετικές καμπύλες ίσου κόστους θα εφάπτονται *σε διαφορετικές καμπύλες ίσου προϊόντος και επομένως θα ορίζουν διαφορετικά σημεία* ισορροπίας του παραγωγού. Αν τώρα συνδέσουμε αυτά τα διαφορετικά σημεία ισορροπίας θα πάρουμε μια καμπύλη που λέγεται **καμπύλη επεκτάσεως** (expansion curve) της επιχειρήσεως. Σηλ. θα μπορούσαμε να πούμε ότι *η καμπύλη επεκτάσεως ενός παραγωγού* (μιας επιχειρήσεως) είναι ο (γεωμετρικός) τόπος των σημείων ισορροπίας του παραγωγού που προκύπτουν όταν μεταβάλλεται μόνο προϋπολογισμός του.

Έτσι αν οι καμπύλες ίσου προϊόντος της επιχειρήσεως είναι οι 1,2,3 του Σχ. 10-60 με σταθερές τιμές P_L=4, P_K=5 και Τ.Ο. αυξηθεί από 12 σε 20 και μετά σε 24 νομ. μονάδες για κάθε χρονική περίοδο, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε την καμπύλη επεκτάσεως της υπόψη επιχειρήσεως. Πράγματι, επειδή ο λόγος P_L /P_K παραμένει σταθερός (ίσος με 4/5), οι καμπύλες ίσου κόστους, 1,2 και 3 είναι παράλληλες. Ακόμα όταν Τ.Ο.=12 ν.μ. η επιχείρηση φθάνει στο σημείο ισορροπίας Β της καμπύλης ίσου προϊόντος II και τέλος όταν Τ.Ο.=24 ν.μ. η επιχείρηση φθάνει στο σημείο ισορροπίας Γ της καμπύλης ίσου προϊόντος III. Προφανώς η καμπύλη ΟΔ που συνδέει την αρχή των αξόνων με τα σημεία ισορροπίας του παραγωγού Α, Β και Γ είναι η καμπύλη επεκτάσεως της υπόψη επιχειρήσεως.

Αξίζει *να παρατηρήσουμε* ότι, *ειδικότερα στην περίπτωση που* εξετάζουμε, η καμπύλη επεκτάσεως είναι μια ευθεία γραμμή (η ΟΖ) που περνάει από την αρχή των αξόνων. Αυτό σημαίνει, ότι καθώς το προϊόν αυξάνεται, ο λόγος K/L (δηλ. η κλίση της καμπύλης επεκτάσεως) παραμένει σταθερός.

Επισημαίνεται εδώ ότι, όταν η καμπύλη επεκτάσεως είναι μια ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων, οι **διαχωριστές γραμμές** είναι κι αυτές που περνάνε από την αρχή των αξόνων και άρα δεν είναι όπως έχουν σχεδιαστεί στο Σχ. 10-56.

11. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Η ***συνάρτηση χρησιμότητας*** *(utility function) ή* ***ωφελιμότητας*** *U=f(x) εκφράζει* τη σχέση μεταξύ της ικανοποιήσεως (ευχαριστήσεως) που αισθάνεται ένα άτομο με την απόκτηση ή (καλύτερα) με την κατανάλωση ενός αγαθού και της ποσότητας του αγαθού *αυτού.*

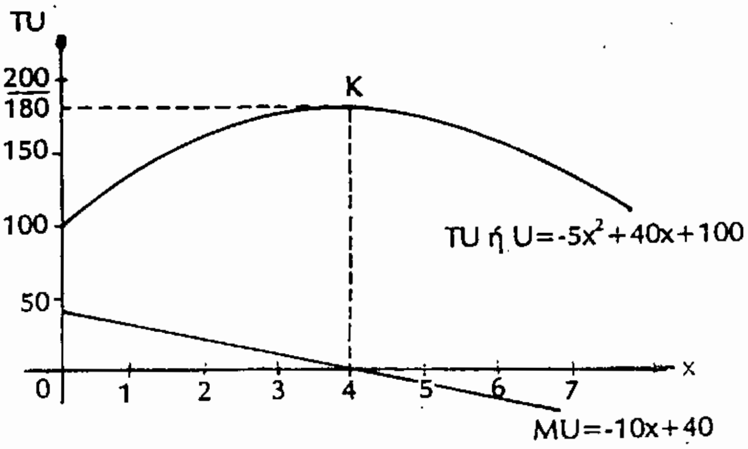
Αντιλαμβανόμαστε έτσι ότι η έννοια της χρησιμότητας υποθέτει τη δυνατότητα μετρήσεως και εκφράσεως του βαθμού ικανοποιήσεως σε αριθμητικές μονάδες, τις *λεγόμενες* ***"μονάδες χρησιμότητας"*** *(utility units) και που σύντομα τις λέμε μονάδες "util".*

Παρατηρείται ότι μέχρι ενός σημείου, όσες περισσότερες μονάδες (ποσότητες) ενός αγαθού καταναλώνει ένα άτομο ανάμονάδα χρόνου, τόσοι μεγαλύτερη είναι η χρησιμότητα ή (καλύτερα) η **συνολική χρησιμότητα** (total utility). Παρά το γεγονός όμως ότι η συνολική χρησιμότητα αυξάνεται, η **οριακή χρησιμότητα** (marginal utility) συνήθως μειώνεται. Η οριακή χρησιμότητα ισούται (όπως όλα τα οριακά μεγέθη) με την πρώτη παράγωγο της συναρτήσεως χρησιμότητας και εκφράζει την επί πλέον *χρησιμότητα* ή *ικανοποίηση* (satisfaction) που αισθάνεται ο καταναλωτής από την κατανάλωση μιας επί πλέον μονάδας του υπόψη αγαθού.

Αποδεικνύεται ότι, σε κάποιο επίπεδο καταναλώσεως, η συνολική χρησιμότητα (TU_X) από την κατανάλωση του αγαθού X φθάνει ένα μέγιστο και (τότε) η οριακή χρησιμότητα (MU_X) μηδενίζεται. Το σημείο αυτό είναι το λεγόμενο **σημείο κορεσμού** *(saturation point) και πρόσθετες μονάδες του υπόψη αγαθού (πέρα από το σημείο* κορεσμού) προκαλούν πτώση της TU και κάνουν αρνητική την MU, αφού δημιουργούν προβλήματα αποθηκεύσεως ή καταστροφής του αγαθού.

Παράδειγμα μεγιστοποιήσεως χρησιμότητας:

Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση χρησιμότητας ενός καταναλωτή από την *κατανάλωση ενός αγαθού είναι* $U=-5x^2+40x+100$, *όπου U=υποθετικές μονάδες* χρησιμότητας (οι λεγόμενες utils) και χ=μονάδες (ποσότητας) του αγαθού, τότε ο καταναλωτής θα μεγιστοποιήσει τη (συνολική) χρησιμότητά του στο σημείο για το οποίο *είναι* $MU=0$ *και* $d/dx(MU)<0$.



ΣΧ. 10-61

Έτσι για τη συγκεκριμένη περίπτωση θα έχουμε $MU= dU/dx = -10x + 40$ απ' όπου βρίσκουμε ότι MU=0 όταν χ=4 μονάδες του αγαθού.

Ακόμα, επειδή είναι $(MU)d/dx = -10<0$ για κάθε τιμή του χ, άρα και για χ=4, συμπεραίνουμε η (ολική) συνάρτηση χρησιμότητας μεγιστοποιείται στη θέση χ=4. Τέλος επειδή $U(4)=-5.4^2+40.4+100=180$ μονάδες χρησιμότητας (utils) εύκολα καταλαβαίνουμε ότι το σημείο K(4,180) είναι σημείο κορεσμού (Σχ. 10-61).

12. Ο ΟΡΙΑΚΟΣ ΛΟΓΟΣ ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ

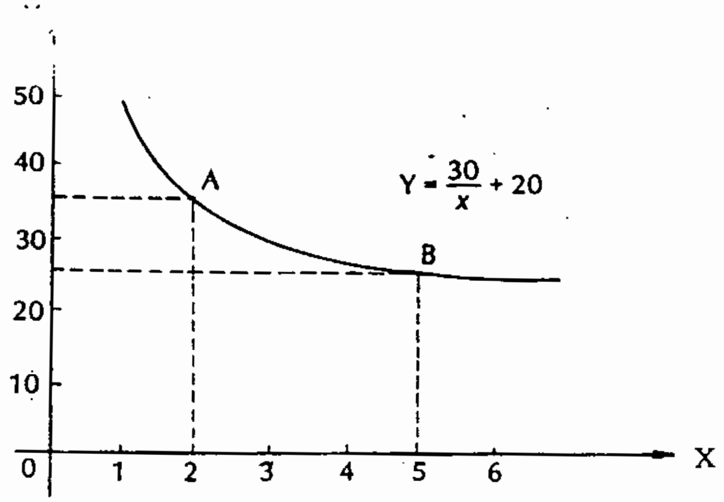
Ο οριακός λόγος υποκαταστάσεως (marginal rate of substitution) ή ***οριακή σχέση*** **υποκαταστάσεως** (marginal relation of substitution) **του αγαθού Υ από το αγαθό Χ συμβολίζεται MRSXY** και εκφράζει την ποσότητα του Υ που ένας καταναλωτής είναι *διατεθειμένος να δώσει για να πάρει μία ακόμα μονάδα του Χ και (φυσικά) να παραμείνει* στην ίδια καμπύλη αδιαφορίας. Πιο απλά ο MRSXY , ενός αγαθόυ Υ με άλλο Χ, μετράει τον αριθμό των μονάδων του Υ που πρέπει να θυσιαστούν κατά αποκτούμενη μονάδα του Χ, *έτσι ώστε να διατηρηθεί σταθερό το συνολικό επίπεδο χρησιμότητας του καταναλωτή.* Καλύτερα ίσως θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο MRSXY εκφράζει το βαθμό κατά τον οποίο το αγαθό Χ μπορεί να υποκαταστήσει το αγαθό Υ σε οποιδήποτε σημείο της καμπύλης αδιαφορίας.

Ο MRSXY υπολογίζεται (ή καλύτερα μετριέται) με την α' παράγωγο (όπως και MRSLM στην αγγύλη 10.2.6.3.) της συναρτήσεως χρησιμότητας και άρα εκφράζει την κλίση της καμπύλης αδιαφορίας σε συγκεκριμένο σημείο της. Τέλος αποδεικνύεται κι εδώ, ότι καθώς ένας καταναλωτής κινείται προς τα κάτω κατά μήκος μιας καμπύλης αδιαφορίας ο MRSXY απολύτως μικραίνει.

Παράδειγμα :

Αν έχουμε τη (για ορισμένη τιμή της συνολικής χρησιμότητας U) συνάρτηση αδιαφορίας f(x,y)=Y-30/x -20 = 0 ή στην πιο απλή μορφή της Y=φ(χ)=30/χ +20 (Σχ. 10-66), τότε ο MRS του Υ από το Χ δηλ. ο MRSXY θα δίνεται από την ισότητα, MRSXY $\frac{dy}{dx} = -\frac{30}{x^2}$

Έτσι στο σημείο Β που συνδυάζονται 5 μονάδες του αγαθού Χ με 26 μονάδες του Υ, ο οριακός λόγος υποκαταστάσεως είναι MRSXY$=-\frac{30}{5^2} = -\frac{30}{25}=-1{,}2$ που σημαίνει ότι μια μονάδα του αγαθού Χ μπορεί να υποκαταστήσει 1,2 μονάδες του αγαθού Υ, έτσι ώστε το επίπεδο χρησιμότητας του καταναλωτή να παραμείνει αμετάβλητο. Ακόμα επειδή ο MRSXY στο Α είναι $-\frac{30}{2^2} = -\frac{30}{4} = -7{,}5$ και στο Β (όπως βρήκαμε είναι -1,2 συμπεραίνουμε ότι, όντως *όσο κινείται ο καταναλωτής προς τα κάτω στην καμπύλη αδιαφορίας, ο MRS απολύτως* μικραίνει αφού είναι $|-7{,}5| > |-1{,}2|$.



Σχ. 10-66

13. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΙΚΗΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ.

*Η **συνάρτηση καταναλωτικής δυνατότητας** (budget function) παριστάνει τη σχέση* μεταξύ της ποσότητας καταναλώσεως δύο αγαθών, έτσι ώστε η συνολική δαπάνη για την απόκτηση των αγαθών αυτών να είναι ορισμένη. Πιο συγκεκριμένα η λεγόμενη ***εισοδηματική γραμμή καταναλωτικών δυνατοτήτων*** *ή (όπως αλλιώς λεγεται)* ***γραμμή*** **προϋπολογισμού** (budget line) δίνει τους διαφορετικούς συνδυασμούς δύο αγαθών που ένας καταναλωτής μπορεί ν' αγοράσει με δεδομένα (γνωστά και σταθερά) το εισόδημά *του και τις τιμές των υπόψη αγαθών.*

Έτσι, αν q_1, q_2 είναι οι άγνωστες ποσότητες των αγαθών X,Y και p_1,p_2 αντίστοιχα οι γνωστές τιμές τους, τότε, με δεδομένο το εισόδημα (το ίδιο πάντοτε) *M* του καταναλωτή θα έχουμε : $p_1q_1 + p_2q_2=M$ απ' όπου προκυπτουν οι εξισώσεις:

$$q_2= \frac{p_1}{p_2} q_{1+} \frac{M}{p_2} (1) \Leftrightarrow q1=- \frac{p_2}{p_1} q_2 + \frac{M}{p_1} \quad (1α)$$

Αν τώρα με q_1',q_2' παραστήσουμε τις ποσότητες του αγαθού X,Y που μπορεί ν' αγοράσει ο υπόψη καταναλωτής αν αντίστοιχα ξοδέψει όλο το εισόδημά του γι' αγορά μόνο από το προϊόν X,Y θα έχουμε

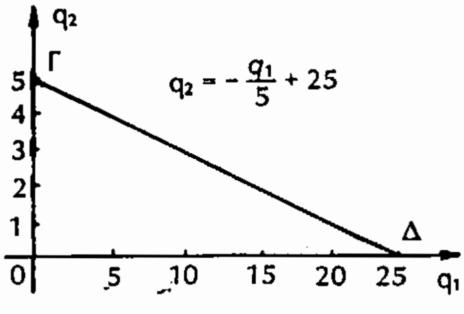
$$q_1'= \frac{M}{p_1}, q_{2'}= \frac{M}{p_2}$$ *και οι (1), (1α) θα γίνουν :*

$$q_2 = - \frac{p_1}{p_2} q_{1+}q_2 \quad (2) \Leftrightarrow q_1=- \frac{p_2}{p_1} q_2 + q_1 \quad (2α)$$

Επειδή η εξίσωση (2) παριστάνει, σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων Oq_1q_2, εθυεία με κλίση $-p_1/p_2$ και τεταγμένη επί την αρχή q_2', γι' αυτό λέγεται εξίσωση της ευθείας της ίσης δαπάνης (of equal outlay) ή της ευθείας του προϋπολογισμού (of budget).

Παράδειγμα: Αν ο προϋπολογισμός ενός καταναλωτή για την αγορά q_1,q_2 ποσοτήτων των δύο αγαθών είναι ορισμένος και ίσος με 500 χρημ. μονάδες και οι τιμές *των αγαθών αυτών είναι αντίστοιχα p_1=20, p_2 = 100 χρημ. μον. , τότε η εισοδηματική* γραμμή θα είναι η ΓΔ (Σχ. 10-67) και η ευθεία ίσης δαπάνης η

$$q_2=-\frac{20}{100} q_1 + \frac{500}{100} \Leftrightarrow q_2=-\frac{q_1}{5} + 5$$



Σχ. 10-67

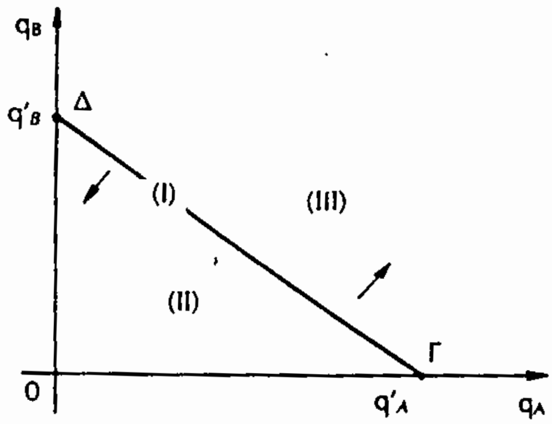
14.ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣΤΙΚΗΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ ΧΡΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΟΣΟΥ.

Γενικά αν υποθέσουμε, σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση, ότι *έχουμε* το διαθέσιμο (σταθερό) εισόδημα Y, τις ποσότητες των δυο αγαθών q_A,q_B και τις τιμές τωναγαθών αυτών p_A,p_B,τότε θα μπορούν να συμβούν τα εξής:

α) Αν $Y=p_A.q_A + p_B.q_B$ (1) τότε το εισόδημα φθάνει ακριβώς για τις αγοραζόμενες (επιθυμητές) ποσότητες από τα δυο αγαθά Α, Β.

Β) Αν $Y<p_A.q_A + p_B.q_B$ (2) τότε το εισόδημα δε φθάνει για τις αγοραζόμενες ποσότητες των Α, Β.

γ) Αν $Y>p_A.q_A + p_B.q_B$ (3), τότε το εισόδημα φθάνει και περισσεύει για τις αγοραζόμενες ποσότητες.



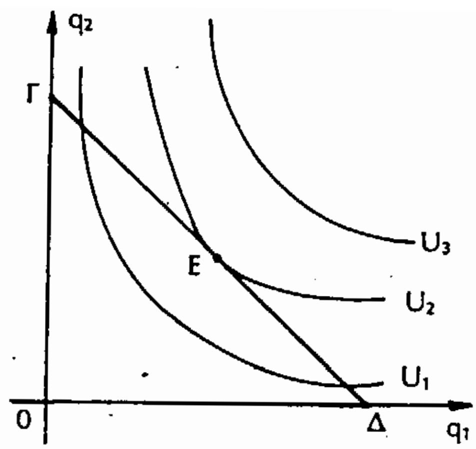
Σχ. 10-68

Επειδή απο την (1) για $q_\bullet=0$ βρίσκουμε $Y=p_\bullet.q_\bullet'$ και για $q_\bullet=0$ βρίσκουμε $Y=p_\bullet.q_\bullet'$, συμπεραίνουμε (Σχ. 10-680 ότι η ευθεία της ίσης δαπάνης (προϋπολογισμού) είναι η ΓΔ και *οποιοδήποτε συνδυασμός ποσοτήτων ($q_\bullet$,$q_\bullet$) που ικανοποιεί τη σχέση (1) βρίσκεται πάνω* στην ευθεία ΓΔ, δηλ στο χώρο (I). Οποιοσδήποτε συνδυασμός ποσοτήτων ($q_\bullet$, $q_\bullet$) που ικανοποιεί τη σχέση (2) βρίσκεται στο χώρο (II) και οποιοσδήποτε συνδυασμός που *ικανοποιεί τη σχέση (3) βρίσκεται στο χώρο (III).*

Αν τώρα οι τιμές $p_\bullet$, $p_\bullet$ αυξηθούν, τούτο θα έχει σαν επακόλουθο την μετακίνηση της ευθείας ΓΔ προς τα κάτω δηλ. προς την κατεύθυνση της αρχής των αξόνων, που αυτό ισοδυναμεί με μείωση των αγοραζόμενων (επιθυμητών) ποσοτήτων. Αυτό όμως το τελευταίο ισοδυναμεί με μείωση της αγοραστικής ικανότητας (of buiyng capacity) του (διαθέσιμου) εισοδήματος Y.

15. ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΤΟΥ ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΗ.

Ονομάζουμε ισορροπία του καταναλωτή (consumer equilibrium) ή καλύτερα θα λέμε ότι ένας καταναλωτής βρίσκεται σε ισορροπία, όταν, με δεδομένα το εισόδημά του και τις τιμές των αγαθών, μεγιστοποιεί τη συνολικη χρησιμότητα (ή ικανοποίηση) από τις δαπάνες του. *Πιο συγκεκριμένα, ένας καταναλωτής βρίσκεται σε ισορροπία, όταν,* με δεδομένη την εισοδηματική του γραμμή, φθάνει την ψηλότερη κάμπύλη αδιαφορίας που είναι δυνατόν.



Σχ. 10-69

Σχεδιάζοντας στο ίδιο σύστημα αξόνων τις καμπύλες αδιαφορίας ενός καταναλωτή (Σχ. 10-62) και την εισοδηματική γραμμή του (Σχ. 10-67), μπορούμε να προσδιορίσουμε ότι το σημείο ισορροπίας του υπόψη καταναλωτή είναι εκείνο, όπου οι κλίσεις της καμπύλης *αδιαφορίας και της εισοδηματικής γραμμής είναι ίσες κι αυτό συμβαίνει μόνο στο κοινό* σημείο επαφής τους, δηλ. το Ε (Σχ. 10-69). Επειδή άλλωστε το πεδίο των καμπυλών αδιαφορίας ή ο **χάρτης αδιαφορίας** (indifference map) είναι **πυκνός**, υπάρχει πάντα ένα *τέτοιο σημείο επαφής (δηλ. ένα σημείο ισορροπίας).*

Αποδεικνύεται τέλος ότι, η συνθήκη ισορροπίας ενός καταναλωτή που κατανάλωσε δύο αγαθά X,Y με αντίστοιχες τιμές Px,Py και διαθέτει σταθερό εισόδημα M, εκφράζεται

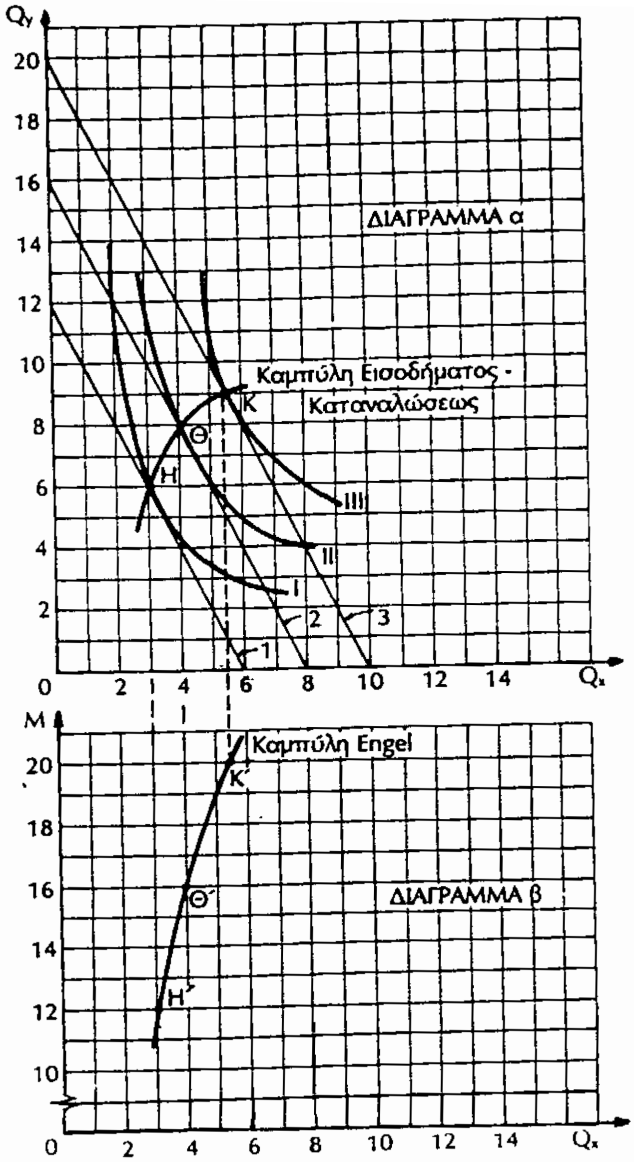
με τη σχέση $\dfrac{MU_X}{P_X} = \dfrac{MU_Y}{P_Y}$, όπου όμως $P_x q_x + P_Y q_Y = M$.

16 Η ΚΑΜΠΥΛΗ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ - ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΕΩΣ ΚΑΙ Η ΚΑΜΠΥΛΗ ENGEL.

*Αν μεταβληθεί το **χρηματικό εισόδημα** (money income) ενός καταναλωτή, αλλά* διατηρηθούν σταθερές οι προτιμήσεις του και οι τιμές των (αγαθών) X και Y, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε την **καμπύλη εισοδήματος** - καταναλώσεως (income - *consaption curve) και τη λεγόμενη καμπύλη Engel* (Engel curve) του υποψη καταναλωτή.* Πιο συγκεκριμένα η **καμπύλη εισοδήματος - καταναλώσεως** είναι ο (γεωμετρικός) τόπος των σημείων ισορροπίας του καταναλωτή που προκύπτουν όταν μεταβάλλεται μόνο το εισόδημά του.

Η καμπύλη Engel δίνει τις διάφορες ποσότητες ενός αγαθού που αγοράζει ο καταναλωτής ανά μονάδα χρόνου σε διάφορα επίπεδα εισοδήματος.

Έτσι, αν οι προτιμήσεις του καταναλωτή δίνονται, από τις καμπύλες αδιαφορίας *II* και III (και παραμένουν αμετάβλητες για την περίοδο που εξετάζουμε), οι τιμές των (αγαθών) X και Y είναι σταθερές (και ίσες αντίστοιχα με 2 και 1 χρ. μον.) και το χρηματ. *εισόδημα του καταναλωτή αυξάνεται από 12 σε 16 και μετά σε 20 χρ. μον. ανά μονάδα* χρόνου, τότε, για να προσδιορίσουμε την καμπύλη εισοδήματος - καταναλώσεως και την καμπύλη Engel για τον καταναλωτή αυτό, εργαζόμαστε ως εξής:



Σχ. 10-70

Στο διάγραμμα α του Σχ. 10-70 παρατηρούμε ότι οι εισοδηματικές γραμμές 1,2 και 3 είναι παράλληλες μεταξύ τους επειδή ο λόγος PX/PY είναι σταθερός (ίσος με 2). Ακόμα όταν το εισόδηματου καταναλωτή είναι 12χρ. μον. ανά μονάδα χρόνου, ο καταναλωτής φθάνει στο σημείο ισορροπίας Θ της ΙΙ και όταν γίνει 20χρ. μον. φθάνει στο σημείο Κ της *ΙΙΙ*.

Προφανώς η γραμμή ΗΘΚ, που σχηματίζεται από τα σημεία ισορροπίας του καταναλωτή στα διάφορα επίπεδα εισοδήματος, είναι ένα τμήμα της καμπύλης ***εισοδήματος - καταναλώσεως*** *για τον καταναλωτή αυτό.*

Σημειώνουμε ότι σημεία Η,Θ και Κ του διαγράμματος α έχουμε

$MRS_{XY}=\dfrac{MU_X}{MU_Y}=\dfrac{P_X}{P_Y}=\dfrac{2}{1}=2.$ Έτσι, καθώς κινούμαστε από ένα σημείο ισορροπίας του *καταναλωτή προς ένα άλλο, και η MUx και η MU_Y μπορούν να αυξηθούν, να μειωθούν ή να* παραμείνουν αμετάβλητες. Το μονο όμως που απιτείται για να επιτευχθεί ισορροπία είναι να μείνει σταθερός ο λόγος MUx/MUY και μάλιστα ίσος με MRS_{XY} και Px/PY . Δηλ. πρέπει

$$\frac{MU_X}{MU_Y} = MRS_{XY} = \frac{P_X}{P_Y}.$$

Στο διάγραμμα β του Σχ. 10-70 η γραμμή Η'Θ'Κ' είναι ένα τμήμα της καμπύλης Engel αυτού του καταναλωτή για το αγαθό Χ. Συγκεκριμένα δείχνει ότι σε επίπεδο εισοδήματος 12 χρ. μον. ανά μονάδα χρόνου ο καταναλωτής αγοράζει 3 μον. του Χ, σε επίπεδο *εισοδήματος 16 χρον. μον. αγοράζει 4 μον. του Χ και σε επίπεδο εισοδήματος 20 χρ. μον.* αγοράζει 5,5 μον. του Χ. Επειδή τέλος η καμπύλη του Engel για το συγκεκριμένο αγαθό Χ έχει θετική κλίση, συμπεραίνουμε ότι η εισοδηματική ελαστικότητα ζητήσεως (10.2.11.4) *είναι θετική (εΜ>0) και το αγαθό Χ είναι (10.2.11.4)* ***κανονικό.***

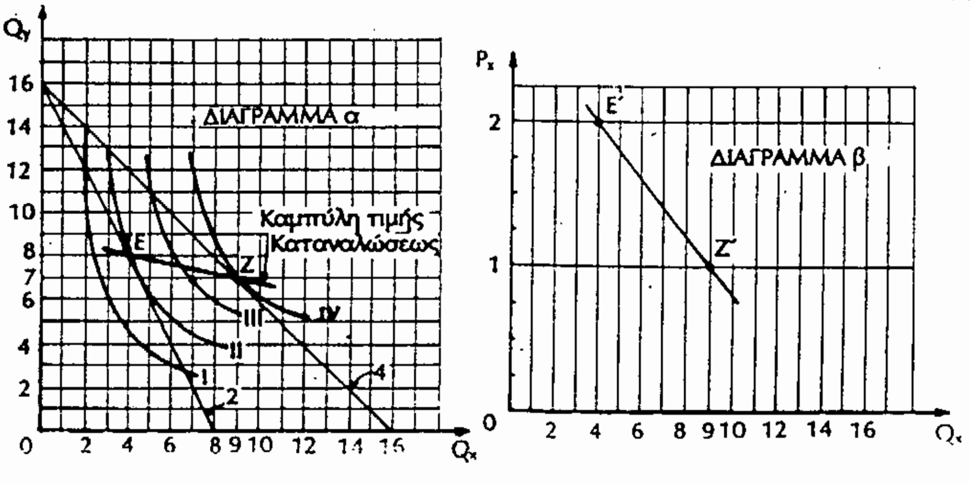
Συμπληρωματικά αναφέρουμε ότι αν η καμπύλη Engel έχει αρνητική κλίση, έχουμε $\varepsilon_M<0$ και το αγαθό είναι **κατώτερο** (υποδεέστερα), ανώ όταν η εφαπτομένη της καμπύλη Engle σ' οτισμένο σημείο έχει θετική κίση και τέμνει τον άξονα του εισοδήματος (αντίστ. των ποσοτήτων) έχουμε $\varepsilon_M>1$ (αντίστ. $0<\varepsilon_M<1$) και το **αγαθό πολυτέλειας** (αντίστ. **πρώτης ανάγκης**).

17. Η ΚΑΜΠΥΛΗ ΤΙΜΗΣ-ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΕΩΣ ΚΑΙ Η ΚΑΜΠΥΛΗ ΖΗΤΗΣΕΩΣ ΤΟΥ ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΗ.

Αν μεταβληθεί η τιμή του (αγοθού) Χ, αλλά διατηρηθούν σταθερές η τιμή του (άλλου) αγαθού, Υ οι προτιμήσεις του καταναλωτή και το χρηματικό εισόδημά του, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε την **καμπύλη τιμής - καταναλώσεως** (price - consumption curve) τόπος των σημείων ισορροπίας του καταναλωτή που προκύπτουν όταν μεταβάλλεται μόνο η τιμή του Χ.

Η καμπύλη ζητήσεως του καταναλωτή για το αγαθό Χ δίνει την ποσότητα του χ που αγοράζει ο καταναλωτής για διάφορες τιμές (του Χ).

Έτσι, αν στο διάγραμμα α του Σχήματος 10.71 υποθέσουμε τις καμπύλες *αδιαφορίας Ι,ΙΙ,ΙΙΙ,ΙV η τιμή του αγαθού Χ είναι 2 χρ. μον., του Υ 1 χρον. μον. και το* εισόδημα του καταναλωτή είναι 16 χρ. μον., τότε (προφανώς) θα έχουμε σημείο ισορροπίας το Ε που ανήκει στην καμπύλη αδιαφορίας ΙΙ και την εισοδηματική γραμμή 2.



Σχ. 10-71

Όταν όμως η τιμή του Χ μειώνεται (πέφτει) από 2 χρ. μον. σε 1 χρ. μοπν., τότε *παίρνουμε την εισοδηματική γραμμή 4 και ένα νέο σημείο ισορροπίας του καταναλωτή* (το σημείο Ζ τη καμπύλης αδιαφορίας ΙV).

Συνδέοντας τα σημεία ισορροπίας Ε και Ζ παίρνουμε ένα τμήμα της καμπύλης **τιμής - καταναλώσεως** του υπόψη καταναλωτή για το αγαθό Χ. Σημειώνουμε ότι ενώ το σημείο

ισορροπίας Ε του διαγράμματος α έχουμε $MRS_{XY}=\frac{MU_X}{MU_Y}=\frac{2}{1}=2$, στο σημείο ισορροπίας Ζ

έχουμε $MRS_{XY}=\frac{MU_X}{MU_Y}=\frac{1}{1}=1$. Έτσι, καθώς κινούμαστε από το σημείο Ε στο σημείο Ζ, ο *λόγος MRS_{XY} και ο λόγος MU_X/MU_Y πέφτουν. Η μείωση όμως του λόγου MU_X/MU_Y* δε σημαίνει ότι οπωσδήποτε η MU_X και η MU_Y πέφτουν. Π.χ. μπορεί να μειώνεται ο λόγος MU_X/MU_Y και ταυτόχρονα ν' αυξάνονται η MU_X και MU_Y αρκεί η MU_Y ν' αυξάνεται ταχύτερα *(γρηγορότερα) από την MU_X.*

Άρα, μια μείωση του λόγου MRS_{XY} δε σημαίνει αναγκαστικά ότι η MU_X και η MU_Y πέφτουν.

Στο διάγραμμα β του σχήματος 10-71 η γραμμή Ε'Ζ' είναι ένα τμήμα της καμπύλης ζητήσεως αυτού του καταναλωτή για το αγαθό Χ. Συγκεκριμένα δείχνει ότι σε (σταθερό) επίπεδο εισοδήματος 16 χρ. μον. ανά μονάδα χρόνου και με σταθερή την τιμή του αγαθού Υ (PY=1 χρ. μον.), ο καταναλωτής αγοράζει από το αγαθό Χ ποσότητα Q=4 μον. αν είναι PX =2 χρ. μον. και Qx = 9 μον. αν Px=1 χρ. μον. Δηλ. παρατηρούμε ότι όταν η τιμή του Χ πέφτει από 2 χρ. μον. σε 1 χρ. μον. ο καταναλωτής αυξάνει το ποσό που ξοδεύει στο Χ (απο *4.2=8* χρ. μον. σε *9.1 =9* χρ. μον.).

Επειδή τέλος η καμπύλη τιμής - καταναλώς για το σηγκεκριμένο αγαθό Χ έχει αρνητική κλίση, συμπεραίνουμε ότι η καμπύλη ζητήσεως έχει ελαστικότητα (ζητήσεως) ως προς την τιμή μεγαλύτερη της μονάδας ($\varepsilon_{D(P)}>1$) και άρα η ζήτηση (του αγαθού Χ) στο

τόξο Ε'Ζ' είναι ελαστική. (Εδώ μάλιστα είναι $\varepsilon_{D(P)}=-\frac{9-4}{1-2}.\frac{2+1}{4+9}=-\frac{5}{-1}.\frac{3}{13}=\frac{15}{13}\approx 1{,}15>1$).

Συμπληρωματικά αναφέρουμε ότι αν η καμπύλη τιμής - καταναλώσεως έχει θετική κλίση, η καμπύλη ζητήσεως έχει $\varepsilon_{D(P)}<1$ και η ζήτηση είναι ανελαστική και τέλος αν η κλίση της καμπύλης τιμής - καταναλώσεως είναι μηδέν, η καμπύλη ζητήσεως έχει $\varepsilon_{D(P)}=1$ και η ζήτηση είναι μοναδιαίας ελαστικότητας (*10.2.11.2.*).

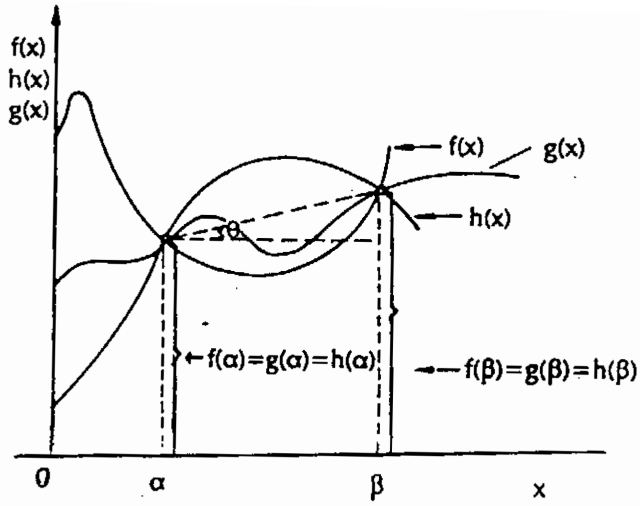
18.ΟΡΙΑΚΟΣ ΚΑΙ ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΟΣ ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ.

Πριν ορίσουμε την **ελαστικότητα** (elasticity) μιας συναρτήσεως θα πρέπει να αποσαφηνίσουμε τον **οριακό ή στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής** (marginal or instantaneous rate of change) και τον **ποσοστιαίο ρυθμό μεταβολής** (percentage rate of change) ή **ρυθμό ανάπτυξης** (rate of growth) μιας συναρτήσεως.

Για να καταδείξουμε με απλό τόπο την αξία του οριακού σε σχέση με το **μέσο ρυθμό μεταβολής** (average rate of change) εφαρμόζουμε το εξής:

Αν έχουμε τις συναρτήσεις f(x), g(x) και h(x) (Σχ. 10-72) βλέπουμε ότι, αν και τελείως διαφορετικές μεταξύ τους στο διαστημα [α,β], έχουν το ίδιο μέσο ρυθμό μεταβολής

που είναι ίσος με κλίση της $\Theta=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}$



Σχ. 10-72

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο μέσος ρυθμός μεταβολής μιας συναρτήσεως σ' ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της δε μας δίνει καμιά πληροφορία σχετικα με τη μορφή και τη συμπεριφορά της στο διάστημα αυτό.

Αντίθετα όμως, όπως γνωρίζουμε (4.1.1), η *παράγωγος συνάρτηση* μας δίνει τον οριακό ρυθμό μεταβολής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της δίνοντας έτσι μια πλήρη εικόνα της μορφής και συμπεριφοράς της. Αυτός άλλωστε είναι και ο λόγος που η παράγωγος συνάρτηση είναι το βασικό εργαλείο μελέτης των συναρτήσεων.

Για τη συνάρτηση τώρα Y=f(x), όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή χ μεταβάλλεται από χ σε x+h, η ποσοστιαία μεταβολής δια του h. Δηλ. είναι : Μέση ποσοστιαία μεταβολή στο

διάστημα [x,x+h]== $\dfrac{\dfrac{f(X+h)}{f(X)}}{h} = \dfrac{f(X+h)}{h.f(X)}$.

Τέλος ο **ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής στο σημείο χ**=

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h\,.\,f(x)} = \frac{1}{f(x)}\,.\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{f(X)}\,.\,f'(x) = \frac{1}{f(X)}\,.\,\frac{df(x)}{dx} =$$

$$= \frac{d\ln f(x)}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\text{συνάρτηση οριακού μεγέθους}}{\text{συνάρτηση ολικού μεγέθους}},$$

με την προϋπόθεση ότι f(x) >0.

Με βάση τώρα τα παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα, ότι ο οριακός ή στιγμιαίος (αντίστοιχα) ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής μιας συναρτήσεως f(x) δίνεται από την παράγωγο της f(X) (αντίστοιχα της lnf(x)) και μάλιστα ο τελευταίος εκφράζεται σε *ποσοστό επι τοις (%), γι' αυτό και η ονομασία του ποσοστιαίος.*

Έτσι λοιπόν αν έχουμε τη συνάρτηση του χρόνου f(t)=2t³+t²-t+2, τότε, επειδή f'(t)=6t²+2t-1

και $\frac{d\ln f(t)}{dt}=\frac{6t^2+2t-1}{2t^3+t^2-t+2}$ *συμπεραίνουμε ότι το σημείο t=2 η f(t) αυξάνει με οριακό*

(αντίστοιχα ποσοστιαίο) ρυθμό f'(2)=27 μονάδων [αντίστοιχα $\frac{d\ln f(2)}{dt}=\frac{27}{20}=$ 135%] το χρόνο.

19. ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

Πολλές φορές ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής μιας συναρτήσεως αντικαθίσταται με το λεγόμενο **σταθερό ρυθμό** (constante rate) ή **σχετικό** ποσοστό (relative percentage), ιδίως όταν αναφερόμαστε σε προβλήματα με δημογραφικό περιεχόμενο, δηλ. εξελίξεως πληθυσμού (αφού άλλωστε πολλά οικονομικά μεγέθη εξαρτώνται από τον πληθυσμό), εθνικού εισοδήματος και γενικά συναρτήσεως που μπορούν να πάρουν εκθετική μορφή, όπως είναι τα προβλήματα ανατοκισμού.

Επειδή **άλλωστε** με τα λεγόμενα **χρηματοοικονομικά μαθηματικά** (mathematics of finance) ή **μαθηματικά πίστεως** (credit mathematics) - όπως λέγονται - μελετάμε πως *διαμορφώνεται η αξία διάφορων χρηματικών ροών ως συνάρτηση του χρόνου t και του* επιτοκίου r*, αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι η **τελική αξία** (the final value) A ενός αρχικού ποσού p στο τέλος t ετών με (ετήσιο) **επιτόκιο** (rate of interest) 100r% *υπλογίζεται με βάση τους ακόλουθους τύπους :*

$A=P(1+r)^t$ (1) $\Leftrightarrow$ $P=A(1+r)^{-t}$ (1α)

όταν ο **ανατοκισμός** (compound interest) γίνεται ετησίως (δηλ. μια φορά το έτος),

$$A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \quad (2) \Leftrightarrow \quad P=A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{-nt} \quad (2α)$$

όταν ο ανατοκισμός γίνεται n>1 φορές το έτος και

$A=Pe^{rt}$ (3) $\Leftrightarrow$ $P=Ae^{-rt}$ (3α)

όταν ο αντοκισμός γίνεται συνεχώς και τότε ο e^{rt} (αντ. e^{-rt}) λέγεται **συντελεστής ανατοκισμού** (computing coefficient) [αντ. **συντελεστής προεξοφλήσεως** (discountig coefficient)].

Πριν να προχωρήσουμε στην απόδειξη των τύπων (1), (2) και(3) υπενθυμίζουμε ότι κεφάλαιο (capital) Po (δρχ. ή νομισματικές μονάδες) τοκιζόμενο με **απλό τόκο** (simple interest), με επιτόκιο r (δηλ. 100r%) δίνει σε t έτη τόκο Po.t.r και άρα η **τελική αξία** θα *είναι ίση με* **Pt =Po +potr = po(1+rt)** (4).

Αν όμως θέλουμε να έχουμε **σύνθετο τόκο** (compound interest) ή **ανατοκισμό**, όπως απλά λέμε, δηλ. στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου ο τόκος να προστίθεται στο κεφάλαιο και ν' αποτελεί καινούριο κεφάλαιο για τη νέα χρονική περίοδο, εργαζόμαστε ως εξής :

Αν P είναι ένα ποσό που τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 100r% τότε στο τέλος του έτους θα εισπράξουμε A1=P+rP=P(1+r). Αν τώρα το νέο ποσό A₁ τοκιστεί πάλι για το επόμενο έτος, τότε θα πάρουμε μετά 1 έτος δηλ., μετά 2 έτη από την αρχή

$A_2=A_1+rA_1=P(1+r) + rP(1+r)= P(1+r)(1+r)=P(1+r)^2$.

Έτσι προχωρώντας αποδεικνύεται ότι μετά t έτη η (τελική) αξία A θα είναι $A=P(1+r)^t$ δηλ. ο (1).

Αν υποθέσουμε όμως ότι ο τόκος υπολογίζεται n φορές το έτος (όπου n>1), τότε στο τέλος της 1ης περιόδου θα εισπράξουμε $A1=p+\frac{r}{n}P= P\left(1+\frac{r}{n}\right)$ στο τέλος της δεύτερης περιόδου $A_2=A_1+\frac{r}{n}A_1 =P\left(1+\frac{r}{n}\right)+\frac{r}{n}p\left(1+\frac{r}{n}\right)= P\left(1+\frac{r}{n}\right)\left(1+\frac{r}{n}\right)=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^2$ και γενικά στο τέλος της περιόδου, δηλ. στο τέλος του έτους από την αρχή, θα πάρουμε $A_n = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$

Από τη σχέση αυτή εύκολα προκύπτει ότι μετά περίοδο t ετών η (τελική) αξία A θα είναι

$$A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$, δηλ. ο (2).

Από τη σύγκριση των τύπων (1) και (2) προκύπτει μια πολύ σπουδαία σχέση για τον ανατοκισμο, που είναι η $1+r_1=\left(1+\frac{r_n}{n}\right)^n$ (5). και μας δίνει το **ισοδύναμο** ετήσιο επιτόκιο r_1 *με ανατοκισμό μια φορά το έτος, όταν γνωρίζουμε το ετήσιο επιτόκιο 100rn% με* ανατοκισμό όμως n φορές το έτος.

Επειδή όμως ο προηγούμενος τύπο (2) μπορεί να γραφεί $A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=P\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}\right]^{t}$ και γνωρίζουμε $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e$ συμπεραίνουμε ότι αν ο ανατοκισμός είναι συνεχής, δηλ. γίνεται *n φορές το χρόνο όπου το n αυξάνει χωρίς όριο ($n\to\infty$), τότε θα έχουμε τη σχέση του* **συνεχούς ανατοκισμού** (continuous interest compounding) $A=Pe^{rt}$ δηλ. τον τύπο (3).

Ο τύπος αυτός (3), που γράφεται και $A=P\exp(rt)$ (6), προήλθε, όπως είδαμε, από τον τύπο (2) του ασυνεχούς ανατοκισμού με την οριακή διαδικασία, όπου καθώς $n\to\infty$ ο ανατοκισμός γίνεται όλο και πιο συχνά και η ασυνεχή μεταβλητή τείνει να γίνει συνεχής.

Σημείωση:

Στην καθημερινή πρακτική επειδή προφανώς η έννοια του συνεχούς ανατοκισμού δεν υπάρχει, οι τύποι αυτοί (3) ή (6) χρησιμοποιούνται σαν προσεγγίσεις ασυνεχούς ανατοκισμού. Έτσι για ν' αντιληφθούμε κατά πόσο ο (3) προσεγγίζει την πραγματικότητα, φτιάχνουμε τον πίνακα

n	1	2	4	8	10	100	1000	2000
$(1+1/n)^n$	2,00	2,25	2,44	2,56	2,59	2,70	2,717	2,718

απ' όπου παρατηρούμε ότι αν ο ανατοκισμός γίνεται περισσότερες από 100 φορές το έτος, τότε ο (3) μπορεί να θεωρηθεί από κάθε πρακτική άποψη συνεχής ανατοκισμός. *Αυτή η παρατήρηση είναι πολύ σπουδαία και έμμεσα σημαίνει ότι, ο ημερήσιος* ανατοκισμός που εφαρμόζουν οι τράπεζες, ισοδυναμεί ουσιαστικά με συνεχή ανατοκισμό.

Αν τώρα λάβουμε υπόψη ότι αριθμός $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ φανερώνει την αξία

μιας (1) νομισματικής μονάδας στο τέλος του έτους όταν το (ετήσιο) επιτόκιο είναι 100% (δηλ. r=1) και ο αριθμός των περιόδων ανατοκισμού ή αυξάνει χωρίς όριο (δηλ. $n\to\infty$), τότε οι τύποι *(1) και (2) μπορούν να μετασχηματιστούν τις ακόλουθες ισοδύναμες εκθετικές* (με βάση το e) συναρτήσεις (7) και (8) αντίστοιχα:

$A=Pe^{t\ln(1+r)}$ (7) $\Leftrightarrow$ $P=Ae^{-t\ln(1+r)}$ (7α)

$A=Pe^{nt\ln(1+r)}$ (7) $\Leftrightarrow$ $P=Ae^{-nt\ln(1+r)}$ (8α)

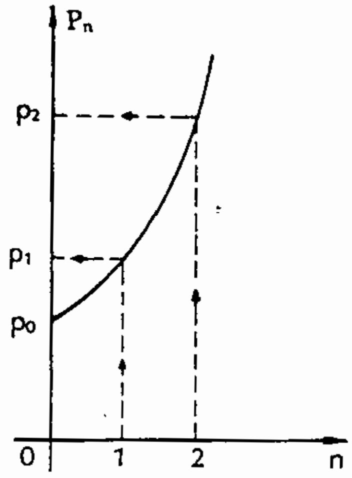
Διευκρινίζεται ότι στις (2) και (8) το r/n είναι το επιτόκιο για κάθε περίοδο ανατοκισμού *και το nt είναι ο αριθμός των περιόδων ανατοκισμού, ενώ το ποσό P ονομάζεται* ***παρούσα*** **αξία** (present value) του τελικού ποσού A. Ακόμα επισημαίνεται ότι ο **ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής** των συναρτήσεων (1), (2) ή (καλύτερα) των ισοδυνάμων τους (7),(8) καθώς και

της (3) είναι σταθερός και ίσος αντίστοιχα με ln(1+r), $n\ln\left(1+\frac{r}{n}\right)$ και r αφού, όπως εύκολα αποδεικνύεται, ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής μιας εκθετικής γενικά συναρτήσεως $f(t)=ae^{rt}$ είναι ίσος με $\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{are^{rt}}{ae^{rt}}=r$. Απο την τελευταία αυτή σχέση καταλαβαίνουμε οτι - η συνάρτηση $f(t) = ae^{rt}$ αυξάνει σταθερά με 100r% σε κάθε σημείο t. Με άλλα (απλά) λόγια ο ποσοστιαίος ρυθμός αυξήσεως αυτής είναι σταθερός και ίσος με 100r% σε κάθε σημείο t.

Επειδή ακόμα ισοδύναμα προκύπτει $f'(t)=r.f(t)$, συμπεραίνουμε ότι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολης $f'(t)$ της $f(t)$ σε οποιοδήποτε σημείο t είναι ανάλογο της τιμής της στο χρονικό αυτό σημείο.

Τέλος η μεγάλη χρησιμότητα όλων αυτών των τύπων ανατοκισμού, αλλά ιδίως (1) και (3) ή (3α), φαίνεται και από τις ακόλουθες κατηγορίες εφαρμογών:

1) Υπόθεση Malthus*: Κατά την υπόθεση αυτή η εξέλιξη ενός πληθυσμού ακολουθεί γεωμετρική πρόοδο. Πιο συγκεκριμένα αν Po είναι ο αρχικός πληθυσμός (the original *population) και r η σταθερή ετήσια αύξηση αυτού , τότε (προσεγγιστικά) ο πληθυσμός Pn* μετά από (σχετικά μικρή) διάρκεια n ετών δίνεται από τον τύπο $Pn=Po(1+r)^n$ και έχει τη γραφική παράσταση του Σχήματος 10.73.



Σχ. 10-73

2) *Αν Po ο σημερινός πληθυσμός (today's population) μιας πόλεως, τότε, με την* υπόθεση ότι αυξάνει συνεχώς με σταθερό ρυθμό 100r%, ο πληθυσμός Pt μετά απο χρονικό διάστημα t θα είναι $Pt=poe^{rt}$(9).

3) Αν Y_t και Yo είναι το **εθνικό εισόδημα** (*national income*) στα χρονικά σημεία *t* και O αντίστοιχα, τότε, η υπόθεση ότι το εθνικό εισόδημα αυξάνει ως συνάρτηση του χρόνου με σταθερό ρυθμό 100r%, εκφράζεται με την εκθετική συνάρτηση $Y1=Yoe^{rt}$ Yt=Yoexp(rt).

4) **Αριστοποίηση οικονομικού μεγέθους**: Είναι γνωστό, ότι υπάρχουν πολλά οικονομικά μεγέθη που η αξία τους μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο. Εμείς συνήθως *ενδιαφερόμαστε για τη μεγιστοποίηση της παρούσας αξίας ενός οικονομικού μεγέθους* όπως η αξία ακινήτου (οικόπεδο, σπίτι), προϊόντα κ.ά. Για τη μελέτη ενός τέτοιου προβλήματος εργαζόμαστε ως εξής:

Αν υποθέσουμε ότι A(T) είναι η αξία ενός οικονομικού μεγέθους ως συνάρτηση του χρόνου t και στην αξία αυτή εφαρμόζουμε συνεχή ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο 100r%, τότε η παρούσα αξία P(t) του υπόψη μεγέθους ως συνάρτηση του χρόνου t θα εκφράζεται, ως γνωστών, με τον τύπο (3α). Δηλ. θα είναι $P(t)=A(t)e^{-rt}$ (10).

Το πρόβλημά μας δηλ. εναι η μεγιστοποίηση της P(t) και γι' αυτό θ' αναζητήσουμε τιμή της t που ικανοποιεί τις σχέσεις P'(t)=0 και P''(t)<0 (11). Επειδή P(t), A(t)>0, από την (10) λογαριθμίζοντας παίρνουμε την lnP(t)+lnA(t)-rt απ' όπου με παραγώγιση έχουμε

$\frac{P'(t)}{P(t)} = \frac{A'(t)}{A(t)} - r \Leftrightarrow P'(t) = P(t)\left[\frac{A'(t)}{A(t)} - r\right]$ (12). και για να ισχύει η (α΄) των

(11) πρέπει $\frac{A'(t)}{A(t)} - r = 0 \Leftrightarrow \frac{A'(t)}{A(t)} = r$ (13).

Παρατηρούμε δηλ. από την (13) ότι η αναγκαία συνθήκη μεγιστοποίησως

της P(t) είναι η εξίσωση της συναρτήσεως του ποσοστιαίου ρυθμού μεταβολής $\frac{A'(t)}{A(t)}$ της A'(t) με το (σταθερό) ετήσιο επιτόκιο r.

Παραγωγίζοντας την (12) έχουμε την

$P''(t) = P'(t)\left[\frac{A'(t)}{A(t)} - r\right] + P(t)\left[\frac{A'(t)}{A(t)}\right]'$ και λόγω της (11) την

$P''(t)=P(t)\left[\frac{A'(t)}{A(t)}\right]'$ απο την οποία (επειδή P(t)>0) ικανοποιήται η (β') των

(11) μόνο όταν είναι $\left[\frac{A'(t)}{A(t)}\right]'<0$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση $\frac{A'(t)}{A(t)}$ είναι φθίνουσα.

Το συμπέρασμα λοιπόν είναι ότι η παρούσα αξία P(t) μεγιστοποιείται στο χρονικό σημείο t=tm αν και μόνο αν η συνάρτηση του ποσοστιαίου ρυθμού μεταβολής A(t) στο *σημείο αυτό είναι φθίνουσα και ισούται με το (σταθερό) επήσιο επιτόκιο r*. Δηλ. απλά αν <0 και A'(tm) =r.A(tm).

Παράδειγμα:

Αν η αξία ακινήτου που εξαρτάται από το χρόνο εκφράζεται με τη σχέση $A(t)=10^7(1,5)^{\sqrt{t}}$ δρχ. και το κόστος αυτού του κεφαλαίου είναι 100r% το έτος σε συνεχή βάση, τότε να προσδιοριστεί ο χρόνος που πρέπει να πωληθεί το ακίνητο ώστε να έχει τη *μέγιστη παρούσα αξία*. *Εφαρμογή*: *r=0,008*.

Λύση:

Αν P(t) είναι η παρούσα αξία, τότε από τη (10) θα έχουμε $P(t) = 10^7(1,5)^{\sqrt{t}}\,.\,e^{-rt}$ (14).

Σύμφωνα με τα παραπάνω ο αόριστος χρόνος πωλήσεως του ακινήτου θα βρεθεί από τη λύση της εξισώσεως $\frac{A'(t)}{A(t)} = r$.

Επειδή $\ln A(t) = \ln 10^7 + \sqrt{t}\ln(1,5)$ και με παραγώγιση αυτής παίρνουμε

$\frac{A'(t)}{A(t)} = \frac{\ln(1,5)}{2\sqrt{t}}$ τότε, επειδή πρέπει $\frac{A'(t)}{A(t)} = r$ θα έχουμε

$$r = \frac{\ln(1,5)}{2\sqrt{t}} \Leftrightarrow \sqrt{t} = \frac{\ln(1,5)}{2r} \Leftrightarrow t = t_m = \left[\frac{\ln(1,5)}{2r}\right]^2 \qquad (15)$$

Αφού όμως $\forall$ t>0 είναι $\left(\frac{A'(t)}{A(t)}\right)' = -\frac{\ln(1,5)}{4t\sqrt{t}}<0$, συμπεραίνουμε ότι όντως η P(t) μεγιστοποιείται στο χρόνο $t = t_m = \left[\frac{\ln(1,5)}{2r}\right]^2$. Εδώ μάλιστα μπορούμε να κάνουμε τη διαπίστωση ότι $t_m'(r) = \frac{dt_m}{dr} = -\frac{\ln^2(1,5)}{2r^3}<0$, που σημαίνει ότι ο άριστος χρόνος που μεγιστοποιείται η παρούσα αξία του εκφράστηκε ως φθίνουσα συνάρτηση του επιτοκίου r.

Αν τώρα αντικαταστήσουμε r=0,08 θα βρούμε ότι ο άριστος χρόνος πωλήσεως είναι $t_m = \left[\frac{\ln(1,5)}{0,16}\right]^2 = \left(\frac{0,40547}{0,16}\right)^2 \approx 6,4$ έτη και η παρούσα αξία του ακινήτου αυτού στα 6,4 έτη θα είναι

$P(6,4)=10^7 \cdot (1,5)^{\sqrt{6,4}} . e^{-0,08.6,4}$

$ln(6,4)=ln10^7+\sqrt{6,4}\, ln(1,5) -0,08.6,4 \Leftrightarrow$

$ln(6,4)=ln10^7+2,53.0,40547-0,08.6,4 \Leftrightarrow$

$ln(6,4)=ln10^7+0,51384 \Leftrightarrow$

$ln(6,4)=ln10^7+ ln(1,672) \Leftrightarrow$

$ln(6,4)=ln(10^7.1,672) \Leftrightarrow P(6,4)=16.720$ δρχ.

'Αλλα παραδείγματα στον ανατοκισμό:

1) Ποιό ποσό θα πάρουμε στο τέλος των 10 ετών αν καταθέσουμε σήμερα 100.000 δρχ. με ετήσιο επιτόκιο 6% και με α) ετήσιο αντοκισμό β) συνεχή ανατοκισμό.

Λύση

α) Με βάση τον τύπο (1) έχουμε $A=10^5(1+0,06)^{10} = 179.080$ *δρχ.*

β) Με βάση τον τύπο (3) έχουμε
$A= 10^5.e^{0,06.10}=10^5.e^{0,6}=10^5.1,822=180.220$ δρχ.
Δηλ. η διαφορά είναι 180.220 - 179.080 =1.140 δρχ.

2) 'Ενας θέλει να καταθέσει χρήματα σε μια τράπεζα. Τι τον συμφέρει καλύτερα, ετήσιο επιτόκιο 4,5% και ανατοκισμό μια φορά το έτος (ετήσιο) ή ετήσιο επιτόκιο 4% και ανατοκισμό τέσσερις φορές το έτος (ανά τρίμηνο) ;

Λύση :

Επειδή το ισοδύναμο ετήσιο επιτόκιο του ανά τρίμηνο ανατοκισμού με 4% δίνεται από τη σχέση (5), θα έχουμε: $1 + r_1 = \left(1 + \frac{0,04}{4}\right)^4 \Leftrightarrow 1 + r_1 = (1,01)^4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r_1 = 0,0406$ απ' όπου προκύπτει 100r1%=4,06%. Αφού λοιπόν αυτό είναι μικρότερο του 4,5% συμπεραίνουμε ότι συμφέρει ο ετήσιος ανατοκισμός με (ετήσιο) επιτόκιο 4,5%.

3) Σε πόσο χρόνο ένα κεφάλαιο διπλασιάζεται όταν το ετήσιο επιτόκιο είναι 100r% και με : α) ανατοκισμό κάθε εξάμηνο β) συνεχή ανατοκισμό.

Εφαρμογή: 100r%=5% δηλ. $r=0,05$.

Λύση :

α) Αν το κεφάλαιο ειναι P μον. μονάδες θα έχουμε από τον τύπο (2) την εξίσωση

$2P = P\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t} = 2$ την οποία πρέπει να λύσουμε ως προς t. Λογαριθμίζοντας έχουμε

$2t\ln\left(1+\frac{r}{2}\right)=\ln 2 \Leftrightarrow t=\dfrac{\ln 2}{2\ln\left(1+\frac{r}{2}\right)} \Leftrightarrow t=\dfrac{0,69315}{2\ln\left(1+\frac{r}{2}\right)}$ έτη. Από τη σχέση αυτή

για r=0,05 οπότε $\ln\left(1+\frac{r}{2}\right)=\ln(1+0,025)=\ln(1,025)=0,0246$ βρίσκουμε $t\approx 14,09$ έτη.

β) Εδώ προκύπτει από τον (3) η εξίσωση ως προς t $2p=pe^{rt} \Leftrightarrow e^{rt} \Leftrightarrow e^{rt}=2$. Λογαριθμίζοντας τώρα την τελευταία έχουμε $rt=\ln 2 \Leftrightarrow t=\ln 2/t$ έτη. Από τη σχέση αυτή για $\ln 2\approx 0,69315$ και r=0,05 βρίσκουμε $t\approx 13,86$ έτη.

4) Πόσο κεφάλαιο θα πρέπει να καταθέσουμε για να πάρουμε μετά από 10 έτη 3.000.000 δρχ. με συνεχή ανατοκισμό και με ετήσιο επιτόκιο 9%;

Λύση :

Με βάση τον τύπο (9) έχουμε $Pt=10^5.e^{0,03.10}=$
$10^5.e^{0,3}\approx 1,34.993$ βρίσκουμε $P10\approx 134993$ κάτοικοι.

20. ΡΑΝΤΕΣ

Μέχρι, τώρα αναφερθήκαμε σε προβλήματα ανατοκισμού όπου υπήρχε ένα αρχικό ποσό και ζητούσαμε την τελική αξία ή αντίστροφα.

Τώρα θα επεκτείνουμε την ανάλυση όπου ο ανατοκισμός αναφέρεται σε σειρές πληρωμών που ονομάζονται ράντες (annuities). Η πιο συνηθισμένη μορφή ράντας είναι αυτή όπου στο τέλος καθεμιάς από τις n περιόδους καταβάλλεται το ίδιο ποσό. Όπως και στα προηγούμενα, στα προβλήματα αυτά ζητάμε κυρίως την τελική αξία της ράντας ή το ποσό που θα πρέπει να πληρώνουμε κάθε περίοδο που θα μας δώσει την τελική αξία της ράντας. Για να προσδιορίσουμε τώρα τον τύπο της τελικής αξίας μιας ράντας *σκεφτόμαστε απλά ως εξής:*

Αν Κ είναι η πληρωμή κάθε περιόδου και r το ετήσιο επιτόκιο τότε η τελευταία πληρωμή έχει αξία Κ επειδή πληρώνεται στο τέλος της περιόδου t. Η παραγωγή Κ που *γίνεται στο τέλος της (t-1) περιόδου έχει αξία K(1+r) στο τέλος t της περιόδου. Με όμοιο* συλλογισμό η πληρωμή Κ που γίνεται στο τέλος της (t-2) περιόδου έχει αξία $K(1+r)^2$ στο τέλος της t περιόδου κ.ο.κ. Έτσι λοιπόν προκύπτει ότι η αξία Α των πληρωμών αυτών στο *τέλος t περιόδου είναι ίση με το άθροισμα της γεωμ. προόδου*
$A=K+(1+r)+K(1+r)^2+\ldots+k(1+r)^{t-1}$

(1)

$$\boxed{A=k.\frac{(1+r)^t-1}{r}}$$

Αν τώρα η ράντα αποτελείται απο πληρωμές του ποσού $\frac{K}{n}$ που γίνονται σε n ίσα χρονικά διαστήματα του έτους και ότι οι τόκοι ανατοκίζονται n φορές το χρόνο, αυτό σημαίνει ότι έχουμε μια ράντα με nt ανατοκισμούς στο τέλος των οποίων η αξία τους είναι ίση με $A=\frac{K}{n}+\frac{K}{n}\left(1+\frac{r}{n}\right)+\frac{K}{n}\left(1+\frac{r}{n}\right)^2+\ldots+\frac{K}{n}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt-1}$ απ' όπου, κατά τα γνωστά,

βρίσκουμε: $A=\frac{K}{n}\cdot\frac{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}-1}{\frac{r}{n}}$ ή τελικά : $A=K\frac{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}-1}{r}$

Τέλος αν ο ανατοκισμός γίνεται συνεχώς και πληρωμές είναι K κάθε χρόνο, τότε η συσσωρευόμενη αξία των πληρωμών αυτών στο τέλος των t χρόνων είναι ίση με

$$\boxed{A=f(t)=\lim_{n\to\infty}K\frac{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}-1}{r}=K\frac{e^{rt}-1}{r}.}$$

Παράδειγμα :

Ποιό ποσό θα εισπράξουμε μετά απο 10 έτη όταν κάθε χρόνο 1.000.000 δρχ. με επιτόκιο 8% και με: α) Ετήσιο ανατοκισμό β) συνεχή ανατοκισμό

Λύση:

α) Με βάση τον (1) βρισκουμε

$$A=10^6\left[\frac{(1+0,08)^{10}-1}{0,08}\right]=10^6.\frac{1,158925}{0,08}=14.486.562\delta\rho\chi.$$

β) Με βάση τον (3) βρισκουμε

$$A=10^6.\left[\frac{e^{0,08.10}-1}{0,08}\right]=10^6.\left[\frac{e^{0,8}-1}{0,08}\right]=10^6.\frac{1,2255}{0,88}=15.318.750\,\delta\rho\chi.$$

21. ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Αν έχουμε τη συνάρτηση Y=f(x)| A *τότε, όπως προείπαμε, η f'(x)|*A *εκφράζει τη* στιγμιαία ταχύτητα (ή το στιγμιαίο ρυθμό) μεταβολής της Y=f(x) σε μονάδες που μετριέται η χ. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε αλλαγή στις μονάδες μετρήσεως των χ ή Y μεταβάλλεται και f'(x).

Ένας ρυθμός μεταβολής μιας συναρτήσεως f(x) που είναι ανεξάρτητος των μονάδων μετρήσεως των χ ή Y είναι η ελαστικότητα (elasticity) που συμβολίζεται με $\frac{Ey}{Ex}=\frac{Ef(x)}{Ex}=$ ή $\varepsilon_{\bullet}$ ή $n_{\bullet}$ ή (σπάνια) f^{ε}.

Η ελαστικότητα, που είναι από τα πιο βασικά εργαλεία μελέτης των οικονομικών συναρτήσεων, ορίζεται ως ο **λόγος της ποσοστιαίας μεταβολής της εξαρτημένης μεταβλητής ως προς την ποσοστιαία μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβολής.**

Έτσι αν y=F(x)|A είναι μια πραγωγίσιμη στο A συνάρτηση και
$\frac{dY}{y} = \frac{df(x)}{f(x)}$, $\frac{dx}{x}$ οι ποσοστιαίες μεταβολές των y=F(x) και χ αντίστοιχα,

τότε θα έχουμε : $\frac{Ey}{Ex} = \frac{Ef(x)}{Ex} = εy = ηy = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{x}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{x}{f(x)}.\frac{df(x)}{dx} = \frac{x}{f(x)}.f'(x)$ *(1).*

Από τη σχέση αυτή προκύπτει και έμμεσος ορισμός της ελαστικότητας της συναρτήσεως f(x)|A στο σημείο $χ \in A$, με $f(x) \neq 0$, κατά τον οποίο **ελαστικότητα λέγεται το γινόμενο**

$\frac{x}{f(x)}f'(x)$ *ή, επειδή* ***(4.4)*** $\frac{x}{f(x)}.f'(x) = χ.\frac{x}{f(x)} = x.[\ln|f(x)|]'$, *συμπεραίνουμε ότι η* **ελαστικότητα της f(x) ορίζεται και σαν γινόμενο της ανεξάρτητης μεταβλητής χ *επί την τιμή της λογαριθμικής παραγώγου της f στη θέση χ.***

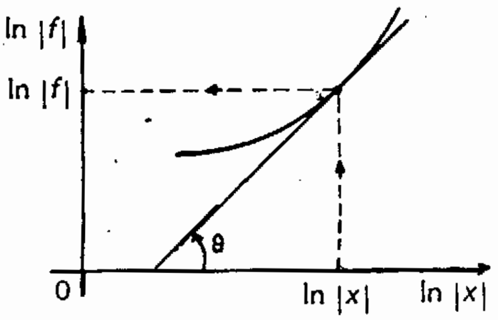
Επειδή από την (1) προκύπτει

$$\frac{Ef(x)}{Ex} = \frac{x}{f}.\frac{df}{dx} = \frac{\frac{df}{f}}{\frac{dx}{x}} = \frac{d(\ln f)}{d(\ln x)} \qquad (2).$$

συμπεραίνουμε, ότι σε σύστημα ορθογώνιων λογαριθμικών αξόνων ***ln|x|, ln|f|*** *η* καμπύλη της συναρτήσεως lnf(x) θα έχει (Σχ. 10-74) στο σημείο A(ln|x|,ln|f(x)|) εφαπτομένη που θα σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα ln|x| γωνία Θ τέτοια ώστε

$εφθ = \frac{Ef(x)}{Ex}$.

Με απλά λόγια δηλ. από τη σχέση (2) συμπεραίνουμε ότι η ελαστικότητα ισούται με το γωνιακό συντελεστή του λογαριθμικού διαγράμματος της συναρτήσεως Y=f(x).



Σχ. 10-74

Ακόμα αν στην ισότητα - ορισμό $\frac{EY}{Ex}=\frac{x}{Y}.\frac{dY}{dx}$ θελήσουμε ν' αλλάξουμε μονάδες μετρήσεως της χ και Υ και να θέσουμε π.χ. $\overset{o}{x}=\alpha x, \overset{o}{y}=\beta y$ τότε, για την *ελαστικότητα της καινούργιας συναρτησεως, π.χ.* $\overset{o}{y}=\sigma(\overset{o}{x})$, *θα έχουμε, κατά τα γνωστά :*

$$\frac{E\overset{o}{y}}{E\overset{o}{x}}=\frac{\overset{o}{x}}{\overset{o}{y}}\frac{d\overset{o}{y}}{d\overset{o}{x}}=\frac{\alpha x}{\beta y}.\frac{d(\beta y)}{d(\alpha x)}=\frac{\alpha x\beta dy}{\beta y\alpha dx)}=\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{Ey}{Ex} \qquad (3)$$

Αν τώρα πολ/σουμε αριθμητή και παρανομαστή της (1) με $\frac{y}{dx}$ θα λάβουμε :

$$\frac{Ey}{Ex}=\frac{E}{Ex}.f(x)=\frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}}.\frac{\frac{y}{dx}}{\frac{y}{dx}}=\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}}=\frac{\text{οριακη συναρτηση}}{\text{μεσησυναρτηση}}$$

Τέλος, επειδή από την (1) παίρνουμε την ισότητα

$$\frac{Ey}{Ex}=\frac{Ef(x)}{Ex}=\frac{x}{f}.f'=\frac{x}{f}.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}}$$

σε αντίθεση προς την παράγωγο

$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$ συμπεραίνουμε ότι η ελαστικότητα γενικά μας δίνει *ένα μέτρο μεταβλητότητας (variability standard) της συναρτήσεως Υ=f(x) με τη βοήθεια των σχετικών μεταβολών (αυξήσεων ή ελαττώσεων)* $\frac{\Delta f}{f},\frac{\Delta x}{x}$ *(στα σημεία χ,f(x)≠0) που είναι* (το μέτρο αυτό) ανεξάρτητο από τις μονάδες μετρήσεως των μεταβλητών χ και Υ.

Αυτό το γεγονός άλλωστε αποτελεί και το κύριο πλεονέκτημα της έννοιας της ελαστικότητας, σε σύγκριση με την αντίστοιχη έννοια της κλίσεως και γι' αυτό ενδεικνυται η χρήση της σε προβλήματα οικονομίας και είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη σύγκριση μεταβλητών με διαφορέτικές μονάδες μετρήσεως, αλλά και ρυθμών μεταβολής διάφορων οικονομικών συναρτήσεων.

Τελειώνοντας, θα μπορούσαμε να πούμε, η ελαστικότητα, στην οποία ιδιαίτερη σημασία θα δίνουν οι οικονομολόγοι, προσεγγιστικά ισούται (στη γενική περίπτωση) με το λόγο της σχετικής μεταβολής $\frac{\Delta Y}{Y}$ της εξαρτημένης μεταβλητής προς τη σχετική μεταβολή $\frac{\Delta Y}{Y}$

της ανεξάρτητης μεταβλητής, δηλ. είναι $\eta_Y = \dfrac{\frac{\Delta Y}{Y}}{\frac{\Delta X}{X}}$ (5). Ο λόγος αυτός είναι (δηλ. η ελαστικότητα) είναι καθαρός (δηλ. αδιάστακτος) αριθμός, εκφράζει το κατά πόσες φορές είναι μεγαλύτερος (ή μικρότερος) ο λόγος $\frac{\Delta Y}{Y}$ σε σχέση με το λόγο $\frac{\Delta Y}{X}$ και χρησιμοποιείται οσάκις η σύγκριση των σχετικών μεταβολών δύο μεβλητών είναι πιο ενδιαφέρουσα από τη σύγκριση των απολύτων μεταβολών, όπως π.χ. συμβαίνει κατά τη μελέτη της μεταβολής της ζητήσεως ή της προσφοράς σε σχέση με τη μεταβολή της τιμής.

Παραδείγματα:

1) Για τη συνάρτηση $f(x) = 3x-2 \,|\, R$ έχουμε ελαστικότητα $\frac{Ef(x)}{Ex} = \frac{x}{3x-2}(3x-2)' = \frac{x}{3x-2}.3 = \frac{3x}{3x-2}$ και για $x=2$ έχουμε τιμή

ελαστικότητας $\frac{Ef(3)}{Ex} = \frac{3.3}{3.3-2} = \frac{6}{6-2} = \frac{6}{4} = 1{,}5$ που σημαίνει ότι όταν η (μεταβλητή) x *αυξάνει (αντ. μειώνεται) κατά 1% τότε η (συνάρτηση) f(x) αυξάνει (αντ. μειώνεται) κατά 1,5%.*

2) Για τη συνάρτηση $\varphi(x)=x^2+x-2 \,|\, R$ έχουμε ελαστικότητα

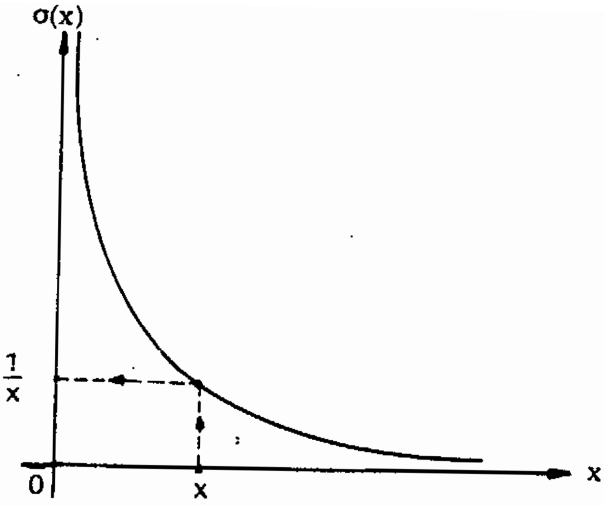
$\frac{Ef(x)}{Ex} = \frac{x}{x^2+x-2}(x^2+x-2)' = \frac{x}{x^2+x-2}(2x+1) = \frac{2x^2+x}{x^2+x-2}$ και για $x=1/2$ έχουμε

τιμή ελαστικότητας $\dfrac{E\varphi\left(\frac{1}{2}\right)}{Ex} = \dfrac{2.\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-2} = \dfrac{1}{-\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5} = -0{,}8$ που σημαίνει ότι, όταν η (μεταβλητή) x αυξάνει (αντ. μειώνεται) κατά 1%, τότε η (συνάρτηση) φ(x) μειώνεται (αντ. αυξάνει) κατά 0,8%.

3) Αν τώρα έχουμε τη συνάρτηση $\sigma(x)=\frac{1}{x} \,|\, R^*$, *τότε η ελαστικότητα*

στο (τυχαίο) σημείο x είναι. $\dfrac{E\sigma(x)}{Ex} = \dfrac{x}{\frac{1}{x}}.\dfrac{1}{x} = x^2.\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -1$, δηλ. σταθερή $\forall\ x \in R$. Επειδή

η καμπύλη Ex (Σχ.10-75) της παραπάνω συναρτήσεως (ορθογώνια υπερβολή) έχει σε όλα τα σημεία της την ίδια ελαστικότητα, γι' αυτό ονομάζεται ισοελαστική καμπύλη (isoelastic *curve).*



Σχ. 10-75

Η ελαστικότητα συναρτήσεως που ορίζεται από τη σχέση (1), επειδή αναφέρται σε συγκεκριμένο σημείο, λέγεται **ελαστικότητα σημείου** (point elasticity) ή **σημειακή** ή (σπάνια) **στιγμική ελαστικότητα**, υπλογίζεται **επακριβώς** και ασφαλώς έχει εφαρμογή *σε συναρτήσειςς που μπορούν να προσδιοριστούν αναλυτικά. Επειδή όμως πολλές φορές* ο προσδιορισμός της αναλυτικής μορφής μιας οικονομικής συναρτήσεως δεν είναι δυνατός, γι' αυτό χρησιμοποιείται η ελαστικότητα μεταξύ δύο σημείων που λέγεται **ελαστικότητα τόξου** *(arc elacity) και υπολογίζεται* ***προσεγγιστικά****, αφού εξαρτάται από τον τύπο που* χρησιμοποιείται.

Έτσι, πιο συγκεκριμένα, η ελαστικότητα τόξου για τη συνάρτηση Υ(χ) μεταξύ των σημείων (χ_1, Y_1) και (χ_2, Y_2) μπορεί να υπολογιστεί σαν προσέγγιση της σημειακής ελαστικότητας:

α) Στο σημείο (χ_1, Y_1) από τον τύπο (5) οπότε

$$n_{y}= \frac{\dfrac{y_2-y_1}{y_1}}{\dfrac{x_2-x_1}{x_1}} = \frac{x_1}{y_1}.\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{x_1}{y_1}.\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

β) Στο σημείο (χ_2, Y_2) απο τον τύπο (5) οπότε

$$n_{y}= \frac{\dfrac{y_2-y_1}{y_2}}{\dfrac{x_2-x_1}{x_2}} = \frac{x_2}{y_2}.\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{x_2}{y_2}.\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

γ) Στο σημείο $\left(\frac{X_1+X_2}{2}, \frac{Y_1+Y_2}{2}\right)$ δηλ. στο μέσο των προηγούμενων σημείων οπότε:

$$n_y = \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{\dfrac{y_1 + y_2}{2}}}{\dfrac{x_2 - x_1}{\dfrac{x_2 + x_1}{2}}} = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ευνόητο είναι ότι η προσεγγιστική τιμή της ελαστικότητας τόξου βελτιώνεται καθώς το τόξο της καμπύλης που ορίζεται από τα δύο σημεία άκρα (χ_1, χ_2) **γίνεται μικρότερο *και τείνει οριακά να γίνει σημείο.***

Σημείωση :

Από τις σχέσεις (6) και (7) και επειδή, όταν η συνάρτηση Υ(Χ) είναι γραμμική, έχουμε

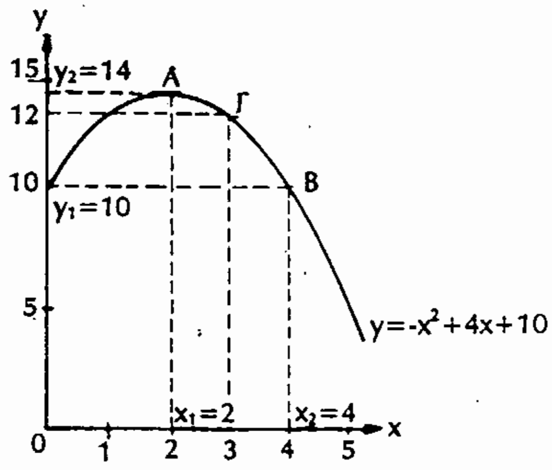
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, συμπεραίνουμε ότι για κάθε γραμμική συνάρτηση η σημειακή ελαστικότητα *συμπίπτει με την ελαστικότητα τόξου με την βασική προϋπόθεση όμως ότι αυτή δίνεται* απο τις (6) και (7).

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι ο λόγος dy/dx παριστάνει την κλίση της ευθείας, όταν έχουμε ευθύγραμμη συνάρτηση ή την κλίση της εφαπτομένης γραμμής σε συγκεκριμένο σημείο της *καμπύλης της συναρτήσεως, όταν έχουμε γενικά καμπυλόγραμμη συνάρτηση.*

Παράδειγμα :

Αν έχουμε τη συνάρτηση $y(x)=-x^2+4x+10$ (*Σχ. 10-76*) τότε να υπολογιστούν οι σημειακές ελαστικότητες στα σημεία Α(2,14), Β(4,10) καθώς και οι ελαστικότητες τόξου μεταξύ των σημείων αυτών.

Λύση :



Σχ. 10-76

Επειδή η συνάρτηση σημειακής ελαστικότητας της y(x) είναι [τύπος(1)]

$\varepsilon y=\dfrac{x}{y(x)}.y'(x)=\dfrac{x}{-x^2+4x+10}.(-2x+4)$ *συμπεραίνουμε ότι οι σημειακές ελαστικότητες* στα σημεία A και B θα είναι αντίστοιχα $\varepsilon_A=\dfrac{2}{14}.0=0$ και $\varepsilon_B=\dfrac{4}{10}.(-4)=-1{,}6$.

Επειδή είναι Δy=y2-y1=10-14= -4 Δx= x2-x1= 4-2 = 2 προκύπτει ότι η προσέγγιση της σημειακής ελαστικότητας στα σημεία A(2,14), B(4,10) και $\Gamma\left(\dfrac{2+4}{2},\dfrac{14+10}{2}\right)=(3,12)$ με ελστικότητες τόξου είναι [τύποι (6),(7)(8)] αντίστοιχα ίσες με

$\eta_A=\dfrac{2}{14}\left(-\dfrac{4}{2}\right)=-\dfrac{2}{7}\approx-0{,}29$, $\eta_B=\dfrac{4}{10}\left(-\dfrac{4}{2}\right)=-0{,}8$ και $\eta_\Gamma=\dfrac{2+4}{14+10}\left(-\dfrac{4}{2}\right)=-0{,}5$

22. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

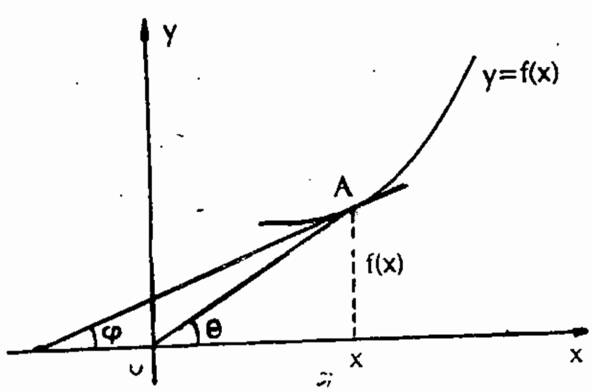
Η ελαστικότητα μιας συναρτήσεως y=f(x) μπορεί να ερμηνευτεί γεωμετρικά με δύο τρόπους, ανάλογα αν θ' αναφερθούμε σε γωνίες ή σε ευθύγραμμα τμήματα.

Πιο συγκεκριμένα επειδή από την (1) έχουμε ότι $\varepsilon y=\dfrac{x}{f(x)}.f'(x)=\dfrac{1}{\frac{f(x)}{x}}.f'(x)$. και από το

Σχ. 10-77 είναι $\dfrac{f(x)}{x}$ *= εφθ και f'(x)=εφφ, συμπεραίνουμε ότι*

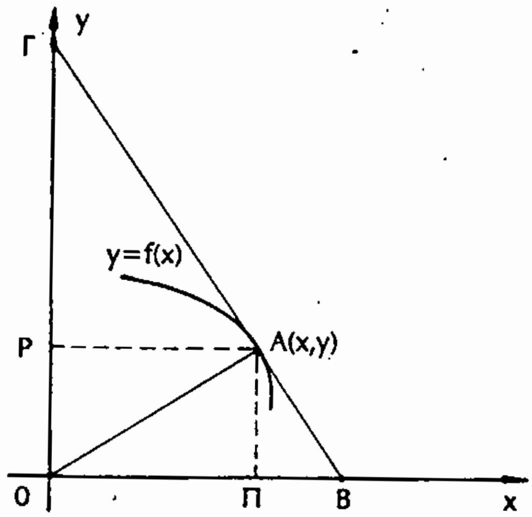
$$\boxed{\varepsilon_Y=\frac{1}{\varepsilon\varphi\theta}.\varepsilon\varphi\varphi=\frac{\varepsilon\varphi\varphi}{\varepsilon\varphi\theta}}$$

Άρα η ελαστικότητα στο σημείο A είναι πηλίκο εφαπτομένων των γωνιών κλίσεως της εφαπτομένης ευθείας στο A και της τέμνουσας OA.



Σχ. 10-77

Γενικά αν έχουμε το Σχ. 10-78 και χρησιμοποιήσουμε για τον αριθμό της *ελαστικότητας στο σημείο Α(χ,y) της καμπύλης y=f(x) τη σχέση (4), τότε,*



Σχ. 10-78

επειδή $\frac{dy}{dx}$= κλίση της εφαπτομένης στο σημείο $A = \frac{P\Gamma}{PA} = \frac{P\Gamma}{O\Pi}$ $και \frac{y}{x} =$ κλίση της

τέμνουσας , προκύπτει: $OA = \frac{\Pi A}{O\Pi} = \frac{OP}{O\Pi}$

εy= $\frac{P\Gamma}{O\Pi} : \frac{OP}{O\Pi} = \frac{P\Gamma}{O\Pi} \cdot \frac{O\Pi}{OP} = \frac{P\Gamma}{OP}$.

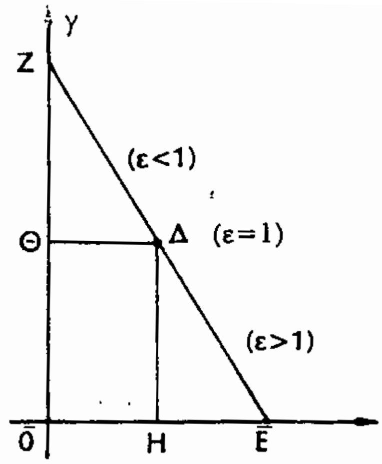
Επειδή όμως ισχύουν οι ισότητες

$\frac{P\Gamma}{OP} = \frac{O\Pi}{\Pi B} = \frac{A\Gamma}{AB}$, *θα έχουμε εy=* $\frac{P\Gamma}{OP} = \frac{O\Pi}{\Pi B} = \frac{A\Gamma}{AB}$. *Αρα ισχύει*

Ελαστικότητα στο σημείο Α= $\boxed{\frac{P\Gamma}{OP} = \frac{O\Pi}{\Pi B} = \frac{A\Gamma}{AB}}$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η ελαστικότητα σ' ένα σημείο μιας καμπύλης εκφράζεται σαν πηλίκο ευθύγραμμων τμημάτων.

Αν ειδικά έχουμε τη γραμμική συνάρτηση του Σχ. 10-79, τότε η ελαστικότητα στο μέσο Δ είναι ίση με τη μονάδα (αφού ΔΖ=ΔΕ), ενώη ελαστικότητα κάθε σημείου στο τμήμα ΔΖ (αντίστοιχα ΔΕ) είναι μικρότερη (αντίστοιχα μεγαλύτερη) της μονάδας, όπως εύκολα *προκύπτει από τους λόγους των αντίστοιχων ευθύγραμμων τμημάτων.*

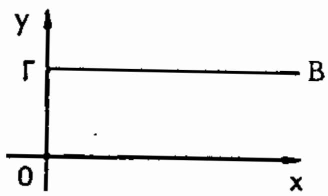


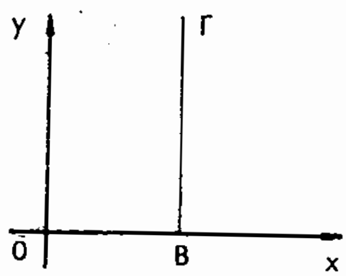
Σχ. 10-79

Για τις ειδικές περιπτώσεις όπου είναι εy=0 ή εy=∞ έχουμε αντίστοιχα τις εξής γεωμετρικές ερμηνείες:

Όταν ε=0 θα είναι $\frac{ΟΠ}{ΠΒ} = 0$ οπότε, επειδή **ΟΠ≠0**, θα έχουμε **ΠΒ**=∞ που σημαίνει ότι η *ΓΒ είναι παράλληλη προς* τον οριζόντιο άξονα (Σχ. 10-80). Όταν όμως ε=∞ θα είναι πάλι

$\frac{ΟΠ}{ΠΒ} = \infty$ *οπότε, επειδή ΟΠ≠0, θα έχουμε ΠΒ=0 που σημαίνει ότι η* ***ΓΒ*** *είναι κάθετη προς* τον οριζόντιο άξονα (Σχ.10-81).

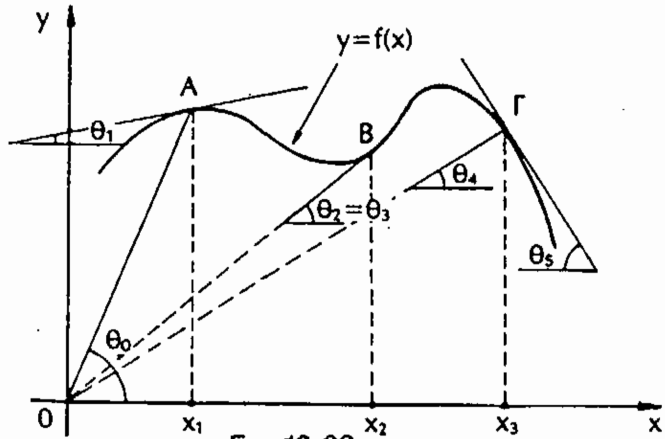




Σχ. 10-80 Σχ. 10-81

Γενικότερα μία συνάρτηση θα λέμε ότι είναι ***ελαστική*** *(elastic)* ***ανελαστική*** *(inelastic)* ή **μοναδιαίας ελαστικότητας** (unit elasticity) σ' ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, αν η ελαστικότητα στο σημείο αυτό είναι μεγαλύτερη της μονάδας, μικρότερη της μονάδας ή *ίση με τη μονάδα* αντίστοιχα.

Γεωμετρικά οι περιπτώσεις αυτές παρουσιάζονται στη συνάρτηση y=f(x) του σχήματος 10-82 όπου παρατηρούμε τα εξής:



Σχ. 10-82

Στο σημείο Α, επειδή θ1<θο οποτε $\varepsilon_A = \frac{\varepsilon\varphi\theta_1}{\varepsilon\varphi\theta_0} < 1$, η f(x) είναι **α ν ε λ α σ τ ι κ ή**, που σημαίνει ότι μια ποσοστιαία αύξηση στο χ=χ1 συνεπάγεται μικρότερη ποσοστιαία αύξηση στην τιμή $f(x_1)$.

Στο σημείο Β, επειδή θ2=θ3 οπότε $\varepsilon_B = \frac{\varepsilon\varphi\theta_2}{\varepsilon\varphi\theta_3} = 1$, η f(x) είναι **μοναδιαίας ελαστικότητας**, που σημαίει ότι μια ποσοστιαία αύξηση στο $\chi=\chi_2$ συνεπάγεται ίση ποσοστιαία αύξηση στην τιμή f(x2).

Τέλος στο σημείο Γ επειδή θ5>θ4 οπότε $\varepsilon\Gamma = \frac{\varepsilon\varphi\theta_5}{\varepsilon\varphi\theta_4} > 1$ η f(x) είναι ελαστική, που σημαίνει ότι μια ποσοστιαία αύξηση στο $\chi=\chi_3$ συνεπάγεται μεγαλύτερη αύξηση στην τιμή f(x3).

22. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ.

Αν έχουμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f(x) και φ(χ) τότε, σε κάθε κοινό σημείο *του πεδίου ορισμού τους και με βάση τον ορισμό της ελαστικότητας από τη σχέση (1), προκύπτουν εύκολα οι ακόλουθες ιδιότητες της ελαστικότητας, των οποίων την απόδειξη αφήνουμε στους σπουδαστές και (όπως λέμε) αποτελούν (αυτές οι ιδιότητες) την* 'Αλγεβρα ελαστικοτήτων:

1) Για κάθε σταθερή συνάρτηση y=f(x) =C≠0 ισχύει εy=0

2) Για y=f(x)=χ ισχύει εy=1.

3) Για $y=f(x)=\chi^\mu$ ισχύει εy=μ, ∀ μ∈R.

4) Για $y=[f(x)]^\mu$ ισχύει εy=μ.εf, ∀ μ∈R

5) *Για y=f(x) ±φ(χ) ισχύει* $\varepsilon y=\frac{1}{f\pm\varphi}[f.\varepsilon f\pm\varphi.\varepsilon\varphi]$, *που φανερώνει ότι δεν ισχύει η γραμμική* ιδιότητα

6) *Για y=f(x).φ(χ) ισχύει εy=εf+εφ*

7) Για y=f(x) με $\varphi(\chi) \neq 0$, ισχύει εy=εf-εφ

8) Για $y=e^{f(x)}$ ισχύει ey=x.f'(x)

9) Για $y=\alpha^{f(x)}$, με α>0, ισχύει εy=xlnα.f'(x)

10)Για y=lnf(x), με f(x)>0 , ισχύει $\varepsilon y = \dfrac{x}{\ln f(x)} \cdot \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

11)Για y=logaf(x), με 0<α≠1 και f(x) >0, ισχύει

$$\varepsilon y= \frac{x}{\log_a f(x)} \cdot \frac{1}{f(x).\ln a} \cdot f'(x)\ .$$

12) Τέλος αν είναι y=f(u) και **u=φ(χ)** *τότε, για την ελαστικότητα της σύνθετης* συναρτήσεως y=f(φ(x)), ισχύει η σχέση $\dfrac{Ey}{Ex} = \dfrac{Ey}{Eu} \cdot \dfrac{Eu}{Ex}$ ή πιο αναλυτικά εy(x)=εy(u).εu(x) =εf(u).εu(x)

Σημείωση :

Από τις παραπάνω γενικές ιδιότητες της ελαστικότητας μπορούμε εύκολα να πάρουμε τις εξής ειδικές περιπτώσεις:

5α) Για y=αχ±β προκύπτει $\varepsilon y= \dfrac{\alpha x}{\alpha x \pm \beta}$.

5β) Για y=f(x)±α προκύπτει $\varepsilon y= \dfrac{f(x)}{f(x) \pm \alpha} . \varepsilon_f$.

6α) Για y=αχ προκύπτει εy= 1 .

6α) Για $y=\alpha\chi^{\mu}$ προκύπτει εy=μ ∀ μ∈R .

6γ) Για y=αf(χ) προκύπτει εy= εf.

6δ) Για $y=\alpha[f(\chi)]^{\mu}$ προκύπτει $\varepsilon y=\mu\ \varepsilon_f$.

8α) Για $y=e^x$ προκύπτει εy=x.

8β) Για $y=e^{\alpha x}$ προκύπτει εy=αx.

9α) Για $y=\alpha^x$ προκύπτει εy=xlnα, ∀ α>0 .

9β) Για $y=\alpha^{\beta x}$ προκύπτει εy=βxlnα, ∀ α>0 .

10α) Για y=lnx προκύπτει $\varepsilon y = \dfrac{1}{\ln x}$, ∀ x>0 με χ≠1.

10β) Για $y=\log_\alpha x$ προκύπτει $\varepsilon y = \dfrac{1}{\log_a \ln a}$, ∀ α,x>0 με α≠1.

Παραδείγματα :

1) Αν y(x)=ln3x τότε $εy(x)=\frac{x}{\ln 3x}.\frac{3}{3x}=\frac{1}{\ln 3x}$, και για $x=\frac{e}{3}$ βρίσκουμε

$$εy=\left(\frac{e}{3}\right)=\frac{1}{\ln(3.\frac{e}{3})}=\frac{1}{\ln e}=\frac{1}{1}=1$$

2) Αν $y(x)=(x^3+5)^{1/3}\sqrt[5]{(x^2-1)^3}$ τότε να υπολογιστεί η ελαστικότητά της στο σημείο χ=2.

Λύση

Επειδή y=f(x).φ(χ) όπου $f(x)=(x^3+5)^{1/3}$ και $φ(χ)=\sqrt[5]{(x^2-1)^3}=(χ^2-1)^{3/5}$, τότε, εφαρμογή της ιδιότητας 6 και επειδή $εf=\frac{x}{(x^3+5)^{1/3}}.\frac{1}{3}(x^3+5)^{-2/3}.3x^2=\frac{x^3}{x^3+5}$ και

$εφ=\frac{x}{(x^2-1)^{3/5}}.\frac{3}{5}(x^2-1)^{-2/5}.2x=\frac{6x^2}{5(x^2-1)}$, θα έχουμε: $εy=\frac{x^3}{x^3+5}+\frac{6x^2}{5(x^2-1)}$. Απ' αυτή για χ=2 βρίσκουμε $εy(2)=\frac{8}{8+5}+\frac{6.4}{5.3}=\frac{8}{13}+\frac{24}{15}+\frac{120+312}{195}=\frac{432}{195}=\frac{144}{65}\doteq 2,2$.

3) Αν $y(x)=\frac{2x^{3/2}}{\sqrt[6]{x^{1/3}-\frac{1}{x^2}}}$, τότε να υπολογιστεί η ελαστικότητά της στο σημείο χ=8.

Λύση

Επειδή $y=\frac{f(x)}{φ(x)}$ όπου $f(x)=2x^{3/2}$ και $φ(x)=6\sqrt{x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{x^2}}$, τότε, με εφαρμογή της ιδιότητας 7 και

επειδή $εf=\frac{x}{2x^{3/2}}.2.\frac{3}{2}.x^{\frac{1}{2}}=\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{2x^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{2}$ και

$$εφ=\frac{x}{6\sqrt{x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{x^2}}}.\frac{1}{6}.x^{\frac{1}{3}}-\frac{1^{\frac{-5}{6}}}{x^2}.\frac{1}{3}x^{-2/3}+\frac{2}{x^3}=\frac{x}{x^{1/3}-\frac{1}{x^3}}.\frac{1}{6}.\frac{2}{x^3}.\frac{1}{6}x^{7/3}+1=$$

$$= \frac{\frac{\frac{1}{6}x^{7/3}+1}{3x^2}}{\frac{x^2 . x^{1/3}-1}{x^2}} = \frac{x^{7/3}+6}{18(x^{7/3}-1)},$$ θα έχουμε $\varepsilon y(x)=\frac{3}{2}-\frac{x^{7/3}+6}{18(x^{7/3}-1)}$.

Απ' αυτή όμως για χ=8 και επειδή $x^{7/3}=3\sqrt{x^{7}}=x^{2}\sqrt[3]{x}$ βρίσκουμε

$$\varepsilon y(\bullet)=\frac{3}{2}-\frac{8^{2}.^{3}\sqrt{8}+6}{18(8^{2}\sqrt{8}-1}=\frac{3}{2}-\frac{64.2+6}{18(64.2-1)}=\frac{3}{2}-\frac{134}{9.127}=\frac{3}{2}-\frac{134}{1143}=\frac{3429-268}{2286}=\frac{3161}{2286} \approx 1{,}4.$$

22.1 ΕΙΔΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Για την πληρότητα απλά συμπληρώνουμε ότι διακρίνουμε κυρίως τα εξής είδη ελαστικότητας, τα οποία και αναφέρουμε ονομαστικά:

α) **Την ελαστικότητα της ζητήσεως** (elasticity of demand) που την παριστάνουμε γενικά με ε**D** και περιλαμβάνει, τις ακόλουθες υποπεριπτώσεις :

i.**Την ελαστικότητα ζητήσεως ως προς την τιμή** (price elasticity of demand) που την παριστάνουμε με $\varepsilon_{D(\varphi)}$ και (συνήθως) έχει αρνητική τιμή, αφού για τα περισσότερα *αγαθά η ζητούμενη ποσότητα μειώνεται με την αύξηση της τιμής τους και αντίστροφα.*

ii.**Την ελαστικότητα ζητήσεως ως προς το εισόδημα του καταναλωτή ή την εισοδηματική ελαστικότητα ζητήσεως** (income elasticity of demand) που την παριστάνουμε με ε**D(in)** και

iii.**Την ελαστικότητα ζητήσεως ως προς την τιμή άλλου αγθού ή την σταυροειδή ελαστικότητα ζητήσεως** (cross elasticity of demand) που την παριστάσνουμε με $\varepsilon_{D(cr)}$.

β) **Την ελαστικότητα της προσφοράς** (elasticity of supply) που την παριστάνουμε γενικά με ε_s.

γ) ***Την ελαστικότητα της παραγωγής προϊόντος ή ελαστικότητα προϊόντος*** (elasticity of product) που την παριστάνουμε γενικά με ε_{pr} και περιλαμβάνει τις υποπεριπτώσεις:

i) Την ελαστικότητα παραγωγής ενός προϊόντος σε σχέση προς την ποσότητα εισροής ενός άλλου αγαθού και

ii)Την ελαστικότητα ενός προϊόντος *σε σχέση προς την ποσότητα παραγωγής ενός* άλλου προϊόντος.

δ) **Την ελαστικότητα του κόστους παραγωγής** (elasticity of cost production) που την παριστάνουμε με $\varepsilon_{c.pr}$.

ε) Την **ελαστικότητα του μετασχηματισμού** (elasticity of transformation) που την *παριστάνουμε με $ε_{tr}$ και*

στ) *Την* **ελαστικότητα της υποκαταστάσεως** *(elasticity of substitytion)* που παριστάνεται γενικά με $ε_{sb}$ και μπορεί ν' αναφέρεται στην υποκατάσταση ενός αγαθού με άλλο ή στην υποκατάσταση ενός συντελεστή παραγωγής με άλλον, οπότε (στη β! *περίπτωση) έχουμε την ελαστικότητα τεχνικής υποκαταστάσεως (elasticity of technical* substitutioon) που την παριστάνουμε με $ε_{t.sb}$.

Αν τώρα όμως θελήσουμε λίγο να διευκρινίσουμε τις περιπτώσεις ελαστικότητας ζητήσεως και προσφοράς, επειδή αυτές είναι σπουδαίας σημασίας, τότε έχουμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

1) Επειδή για ένα αγαθό η τιμή και η ποσότητα που ζητιέται κινούνται προς την αντίθετη κατεύθυνση δηλ. συνδέονται αντίστροφα, γι' αυτό (όπως προείπαμε) η ελαστικότητα ζητήσεως ως προς την τιμή $ε_{D(p)}$, είναι (συνήθως) ένας αρνητικός αριθμός.

Αν *όμως επιδιώξουμε ν' αποφύγουμε την χρήση αρνητικών αριθμών, τότε βάζουμε* (τοποθετούμε) μπροστά στον τύπο που μας δίνει την $ε_{D(p)}$ ένα αρνητικό πρόσημο και καταλήγουμε γενικά στην ακόλουθη πρόταση - ορισμό:

Σε όλες τις περιπτώσεις ελαστικότητας ζητήσεως $ε_D$ η ζήτηση λέγεται ***ελαστική*** *αν* $ε_D>1$, **ανελαστική** αν $ε_D<1$ και **μοναδιαίας ελαστικότητας** αν $ε_D=1$.

2) Μια καμπύλη ζητήσεως που είναι ευθεία γραμμή και τέμνει και τους δύο άξονες (δηλ. τους θετικούς ημιάξονες) είναι ελαστική πάνω από το μέσο της, έχει μοναδιαία *ελαστικότητα στο μέσο της και είναι ανελαστική κάτω από το μέσο της.*

Για καμπύλες ζητήσεως όμως που δεν είναι ευθείες, τέτοιες γενικές ιδιότητες δεν υπάρχουν και μόνο στην ειδική περίπτωση που η καμπύλη ζητήσεως έχει τη μορφή *ορθογώνιας υπερβολής έχουμε $ε_D=1$ σε καθε σημείο της (ισοελαστική καμπύλη).*

Ανεξάρτητα πάντως από το σχήμα της καμπύλης ζητήσεως, καθώς η τιμή του αγαθού πέφτει, η συνολική δαπάνη των καταναλωτών για το αγαθό (δηλ. το γινόμενο p.q) ευξάνεται όταν $ε_D >1$, παραμένει σταθερή (αμετάβλητη) όταν $ε_D =1$ και πέφτει όταν $ε_D<1$.

3) Στην περίπτωση της εισοδηματικής ελαστικότητας ζητήσεως αν $ε_{D(i)}<0$ το αγαθό είναι **κατώτερο** (inferior) ή **υποδεέστερο**, ενώ αν $ε_{D(in)}>0$ το αγαθό είναι **κανονικό** (normal). Ειδικότερα ένα κανονικό αγαθό θεωρείται αγαθό **πολυτελείας** (luxury) αν $ε_{D(in)}$ >1 ή αγαθό πρώτης ανάγκης (necessity) αν $0<ε_{D(in)}<1$. Ενδέχεται όμως, ανάλογα με το **επίπεδο εισοδήματος** (level of income) του καταναλωτή, η ελαστικότητα $ε_{D(in)}$ για το ίδιο αγαθό να έχει διάφορες τιμές. Έτσι, ένα αγαθό μπορεί να είναι αγαθό πολυτελείας σε χαμηλά επίπεδα εισοδήματος, αγαθό πρώτης ανάγκης σε ενδιάμεσα επίπεδα εισοδήματος και κατώτερο αγαθό σε υψηλά επίπεδα εισοδήματος, όπως ενδεικτικά φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα 5 όπου για αγαθό μπορούμε να πάρουμε π.χ. μπουκάλια σαμπάνιας.

Πίνακας 5

ΕΙΣΟΔΗΜΑ χ.Μ/έτος	Ποσότητα Μον./έτος	Ποσοτ.Μεταβ στη ποσοτ.	Ποσοτ.Μεταβ Εισοδ.	Εισοδ.ελαστ Ζητ. ED(in)	Ειδος του αγαθόυ
8.000	5				
		100	50	2	πολυτέλειας
12.000	10				
		50	33,33	1,50	πολυτέλειας
16.000	15				
		20	25	0,80	πρώτ. ανάγκης
20.000	18				
		11,11	20	0,56	πρώτ. ανάγκης
24.000	20				
		-5	16,67	-0,30	κατώτερο
28.000	19				
		-5,26	14,29	-0,37	κατώτερο
32.000	18				

Μελετώντας τον πίνακα παρατηρούμε ότι η σαμπάνια για επίπεδα εισοδήματος μέχρι *16.000* χρημ. μονάδων είναι αγαθό πολυτελείας, σε επίπεδα εισοδήματος από *16.000* μέχρι 24.000 χρ. μον. γίνεται αγαθό πρώτης ανάγκης και τέλος σε επίπεδα εισοδήματος απο 24.000 χρ. μον. το έτος γίνεται κατώτερο αγαθό, αφού το άτομο αυτό μάλλον την *υποκαθιστά με σπάνια και πολύ ακριβά κρασιά.*

4) Επειδή η σταυροειδής ελαστικότητα ζητήσεως ενός αγαθού χ εκφράζει τη σχέση μεταξύ της ζητούμενης ποσότητας αυτού και της τιμής άλλου αγαθού y, γι' αυτό, αν $\varepsilon_{D(cr)}>0$ (ή πιο απλά αν $\varepsilon_{xy}>0$) τα αγαθά χ και y είναι **ανταγωνιστικά** ή όπως εδώ πιο εύστοχα, λέγονται **υποκατάστατα** (substitutes) το ένα του άλλου (πιο συγκεκριμένα το αγαθό του άλλου y είναι υποκατάστατο του αγαθού χ), αν $\varepsilon_{xy}<0$ τα αγαθά είναι ***συμπληρωματικά*** *και τέλος αν $\varepsilon_{xy}=0$ τα δύο αγαθά είναι* ***ανεξάρτητα*** *(indipendent)* ή **ουδέτερα** (δηλ. δε σχετίζονται μεταξύ τους).

Θεωρούμε απαραίτητο να συμπληρώσουμε ότι μερικά αγαθά μπορεί να είναι υποκατάστατα σε μια περιοχή των τιμών και συμπληρωματικά σε άλλη περιοχή.

Σημείωση:

Εδώ συμπληρώντας τον ορισμό των ανταγωνιστικών προϊόντων διευκρινίζουμε ότι δύο αγαθά είναι υποκατάστατα το ένα του άλλου, όταν μια μεταβολή στην τιμή του ενός προκαλεί μια όμοια (προς την ίδια κατεύθυνση) μεταβολή της ποσότητας που αγοράζεται από το άλλο αγαθό. Έτσι ο *καφές είναι υποκατάστατο του τσαγιού, αφού αύξηση* (μείωση) στην τιμή του καφέ αυξάνει (μειώνει) την κατανάλωση του τσαγιού.

5) Τέλος, επειδή η καμπύλη προσφοράς έχει (10.2.2) συνήθως θετική κλίση, *συμπεραίνουμε ότι η τιμή και η ποσότητα κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση και άρα* γενικά η ελαστικότητα προσφοράς (ως προς την τιμή) ε_s είναι θετική και μόνο σε σπάνιες περιπτώσεις μπορεί να είναι μηδενική, άπειρη ή αρνητική.

Γενικά, επειδή η ελαστικότητα προσφοράς (ε_s) ορίζεται όπως ακριβώς και η ελαστικότητα ζητήσεως ως προς την τιμή $\varepsilon_{D(p)}$, γι' αυτό η προσφορά (ή καλύτερα η *καμπύλη προσφοράς)* θα λέγεται ελαστική αν $\varepsilon_s>1$, ανελάστική αν $\varepsilon_s<1$, και μοναδιαίας ελαστικότητας αν $\varepsilon_s=1$.

Ειδικότερα αν η καμπύλη προσφοράς είναι ευθεία με θετική κλίση, τότε (αποδεικνύεται) κατά μήκος αυτής της γραμμής είναι $\varepsilon_s>1$ αν η γραμμή αυτή τέμνει τον άξονα των τιμών, $\varepsilon_s<1$ αν τέμνει τον άξονα των ποσοτήτων και $\varepsilon_s=1$ αν περνάει από την αρχή των αξόνων.

Πολύ ενδιαφέρουσα μάλιστα είναι η περίπτωση του Σχήματος 10-83, όπου στο ίδιο σύστημα αξόνων έχουν σχεδιαστεί μια ευθεία καμπύλη μοναδιαία ελαστικότητα, μια με αρνητική ελαστικότητα, μια με μηδενική ελαστικότητα και μια με άπειρη ελαστικότητα. *Στην ειδική περίπτωση που η καμπύλη προσφοράς είναι ορθογώνια υπερβολή, τότε* βρίσκουμε $\varepsilon_s=-1$.

23. ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΠΟΥ ΙΣΧΥΟΥΝ ΜΕΤΑΞΥ ΟΛΙΚΩΝ ΜΕΣΩΝ ΚΑΙ ΟΡΙΑΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΩΝ ΤΟΥΣ.

Εδώ θα προσπαθήσουμε ν' ανακαλύψουμε και ν' αποδείξουμε σχέσεις και προτάσεις που να έχουν καθολική αποδοχή, δηλ. να ισχύουν σε οποιοδήποτε είδος και μορφή συναρτήσεων ολικών, μέσων και οριακών μεγεθών. Έτσι αν $y=f(x)$ είναι η συνάρτηση ενός ολικού μεγέθους π.χ. ολικό κόστος, ολικά κέρδη κ.λ.π. τότε οι αντίστοιχες συναρτήσεις

του μέσου και οριακού μεγέθους θα είναι, κατά τα γνωστά, $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ (1) (ή πιο απλά)

$f(x) = \dfrac{f(x)}{x}) \kappa\alpha\iota \dfrac{dy}{dx} = f'(x)(2)$. Ευνόητο είναι ότι αν δοθεί η συνάρτηση μέσου μεγέθους $h(x)$, *τότε από την (1) βρίσκουμε τη συνάρτηση του αντίστοιχου ολικού μεγέθους* $f(x) = x.h(x)$ (3).
Με παραγώγιση θα πάρουμε, ως γνωστό, τη συνάρτηση του **οριακού μέσου μεγέθους** $h'(x)$. Δηλ. είναι

$$h'(x) = \frac{dh(x)}{dx} = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \qquad \textbf{(4).}$$

Επειδή τώρα η $h'(x)$ μηδενίζεται στα σημεία όπου είναι

$$xf'(x) - f(x)=0 \Leftrightarrow xf'(x) = f(x) \Leftrightarrow f'(x)=\frac{f(x)}{x} = h(x) \quad (5)$$

συμπεραίνουμε από τις (4) και (5) την ακόλουθη :

1η Πρόταση : Η συνάρτηση ενός μέσου μεγέθους h(x)=$\frac{f(x)}{x}$ έχει τοπικά

ακρότατα στα σημεία που είναι ίση με την αντίστοιχη συνάρτηση του οριακού μεγέθους f'(x).

Αν τώρα θέλουμε να προσδιορίσουμε το είδος των τοπικών αυτών ακρότατων σημείων υπολογίζουμε την h"(x) και βρίσκουμε:

$$h''(x)=\frac{d^2h(x)}{dx^2}=\frac{f''(x)}{x}-\frac{2f'(x)}{x}+\frac{2f(x)}{x^3} \qquad (6)$$

Για να προσδιορίσουμε τώρα το πρόσημο της h"(x) στα σημεία όπου η h'(x) μηδενίζεται, αντικαθιστούμε στην (6) την f(x) με xf'(x) [λόγω της (5)] και πέρνουμε τελικά

την *h"(x)*=$\frac{d^2h(x)}{dx^2}=\frac{f''(x)}{x}$ *(7)*

Επειδή τώρα από την (7) προκύπτει ότι για χ>0 (που πάντα ισχύει) το πρόσημο της h"(x) είναι το ίδιο με αυτό της f"(x), που είναι η παράγωγος του οριακού μεγέθους, αποδείχτηκε έτσι η ακόλουθη.

2η Πρόταση : Στα σημεία χ=χ₀ όπου οι συναρτήσεις του μέσου και του οριακού μεγέθους είναι ίσες, η συνάρτηση του μέσου μεγέθους έχει τοπικά ελάχιστα ή τοπικά μέγιστα ανάλογα με το αν η παράγωγος του οριακού μεγέθους έχει τοπικά ελάχιστα ή *τοπικά μέγιστα ανάλογα με το αν η παράγωγος του οριακού μεγέθους είναι αντίστοιχα* θετική f"(xο)>0 ή αρνητική f"(xο)<0 στα σημεία αυτά.

Επειδή αν παραγωγίσουμε τη συνάρτηση ολικού μεγέθους απο την (3), δηλ. την f(x) = *x . h(x)* , βρίσκουμε

$$\frac{df(x)}{dx}=f'(x)=h(x)+xh'(x) \qquad (8)$$

και το χ είναι θετικό, *αποδεικνύεται από την (8) η ακόλουθη.*

3η Πρόταση : Όταν h'(x)<0, όταν h'(x)=0 τότε f'(x)=h(x) και η h(x) έχει (σύμφωνα και με τη 1η πρόταση) τοπικά ακρότατα στα σημεία αυτά και τέλος όταν h'(x)>0 τότε f'(x)>h(x).

Αν τώρα θελήσουμε να εμπλέξουμε στις συναρτήσεις ολικού και μέσου μεγέθους που δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις (3) και (1) και τις ελαστικότητές τους συμβολιζόμενες *με* ε_f *και* ε_h *αντίστοιχα, θα έχουμε :*

$$\varepsilon_f=\frac{x}{xh(x)}.[xh'(x)+h(x)]\frac{x}{h(x)}.h'(x)+1=\varepsilon_h+1 \qquad (9)$$

και $$\varepsilon_h=\frac{x}{\frac{f(x)}{x}}.\left[\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\right]=\frac{xf'(x)-f(x)}{f(x)}=\frac{x}{f(x)}.f'(x)-1=\varepsilon_f-1 \qquad (10)$$

Σημείωση :

Οι σχέσεις (9) και (10) μπορούσαν να βρεθούν με αντικατάσταση αμέσως από τις ιδιότητες 2, 6 και 7 της ελαστικότητας και ακόμα η (10) προκύπτει από την (9) αφού $\varepsilon_f=\varepsilon_h+1 \Leftrightarrow \varepsilon_h=\varepsilon_f-1$.

Από την (9) και επειδή η συνάρτηση του μέσου μεγέθους h(x) έχει (όπως γνωρίζουμε) τοπικά ακρότατα στα σημεία που η h'(x), δηλ. η συνάρτηση του αντίστοιχου οριακού (μέσου) μεγέθους, μηδενίζεται, αποδεικνύεται η

<u>4η Πρόταση :</u> Η συνάρτηση ενος μέσου μεγέθους h(x)=f(x)/x έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία όπου ελαστικότητα του αντίστοιχου ολικού μεγέθους είναι ίση με μονάδα.

Τέλος από τη (10) και επειδή η συνάρτηση του ολικού μεγέθους f(x) έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία που η συνάρτηση f'(x) δηλ. του αντίστοιχου οριακού μεγέθους, μηδενίζεται αποδεικνύεται *η*

<u>5η Πρόταση :</u> Η συνάρτηση ενός ολικού μεγέθους έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία όπου η ελαστικότητα του αντίστοιχου μέσου μεγέθους είναι ίση με την αρνητική μονάδα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΒΑΣΙΚΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Στο μέρος αυτό για την καλύτερη κατανόηση κρίνουμε σκόπιμο ν' αναφερθούμε, έστω και περιληπτικά, στη θεωρία του εθνικού εισοδήματος και ειδικότερα στις συναρτήσεις καταναλώσεως, αποταμιεύσεις, επενδύσεις και γενικότερα στο σύστημα *εξισώσεων εθνικής καταναλωτικής δαπάνης και εισοδήματος*.

1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΕΩΣ

Η συνάρτηση καταναλώσεως (the consumption function) εκφράζει τη σχέση μεταξύ εισοδήματος και καταναλώσεως, όπου το εισόδημα θεωρείται η ανεξάρτητη μεταβλητή και η δαπάνη καταναλώσεως η εξαρτημένη μεταβλητή. Έτσι, αν με C παραστήσουμε την *κατανάλωση (consumption) και με το Y το εισόδημα' (yield)* μιας *επιχειρήσεως*, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η συνάρτηση καταναλώσεως έχει τη γενική μορφή C=f(Y).

Συνήθως όμως παρουσιάζεται με γραμμική μορφή και πιο συγκεκριμένα έχει τη μορφή **C=α+βY** *(1)*, όπου η σταθερή ποσότητα α είναι το σταθερό μέρος τητ καταναλώσεως που (πολλες φορές) το λέμε αυτό **αυτόνομη κατανάλωση** (autonoomous consuption) και μπορούμε να το εξηγήσουμε σαν το μέρος εκείνο της καταναλώσεως που θα γίνει (πραγματοποιηθεί) *έστω και αν το εισοδημα είναι μηδέν*. Αλλιώς θα μπορούσαμε να εξηγήσουμε την αυτόματη κατανάλωση (αν είχαμε την περίπτωση μεμονωμένου ατόμου) σαν το πολύ ελάχιστο όριο της καταναλώσεως που είναι απαραίτητο να γίνει *(συμβεί) για τη συντήρηση του ατόμου. Εξάλλου ο συντελεστής β παριστάνει προφανώς* την κλίση (συντελεστή διευθύνσεως) της ευθείας (1) δηλ. τη μεταβολή της δαπάνης καταναλώσεως με την κατά μονάδα μεταβολή του εισοδήματος και λέγεται - όπως θα *δούμε στην συνέχεια - οριακή ροπή προς κατανάλωση (marginal property to consume)*.

2. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΠΟΤΑΜΙΕΥΣΕΩΣ

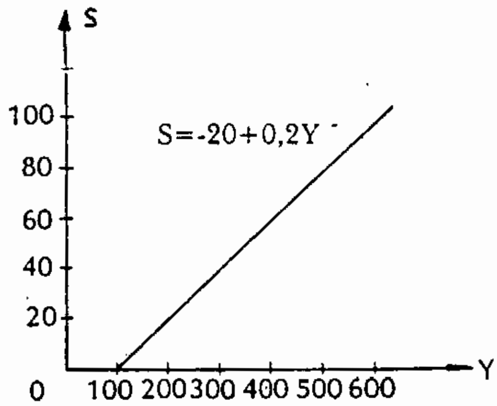
Η συνάρτηση αποταμιεύσεως (the function) εκφράζει τη σχέση μεταξύ εισοδήματος και αποταμιεύσεως, όπου το εισοδημα (όπως και στη συνάρτηση καταναλώσεως) θεωρείται η ανεξάρτητη μεταβλητή και η αποταμιευόμενη ποσότητα χρήματος θερωρείται η εξαρτημένη μεταβλητή. Αν τώρα κατ' επέκταση (και επειδή έχει επικρατήσει στην Οικονομική επιστημη) παραστήσουμε με Y το συνολικό εθνικό εισόδημα (total national income), με το C το τμήμα του εθνικού εισοδήματος που καταναλώνεται και με S το *υπόλοιπο τμήμα του εθνικού εισοδήματος που αποταμιεύεται (δεν καταναλώνεται)*, τότε θα έχουμε τη σχέση Y=C+S (1) που δηλώνει ότι το (εθνικό) εισόδημα είτε καταναλώνεται, είτε αποταμιεύεται.

Επειδή όμως από την (1) είναι S=Y-C τότε, αν λάβουμε την C=α+βY, θα έχουμε ότι η συνάρτηση αποταμιεύσεως - που στη γενική περίπτωση έχει τη γενική μορφή S=f(Y)- παίρνει (μετά τις πράξεις) την ειδική μορφή S=-α+(-β)Y (2)

Στη συνάρτηση αυτή, που αποτελεί - όπως είπαμε - και τη συνάρτηση της αποταμιεύσεως, η σταθερή ποσότητα φανερώνει την (αρνητική) τεταγμένη επί την αρχή *της ευθείας (2) και συντελεστής (1-β) παριστάνει την κλίση (συντελεστή διευθύνσεως)* της ευθείας αυτής δηλ. τη μεταβολή της αποταμιευόμενης ποσότητας (χρήματος) με την κατά μονάδα μεταβολή του εισοδήματος. Αυτός ο συντελεστής (1-β) λέγεται - όπως θα δούμε *στη συνέχεια - οριακή ροπή προς αποταμίευση (marginal property to save)*.

Παρατηρήσεις - συμπληρώσεις:

1η) Το αρνητικό σημείο της τεταγμένης επί την αρχή (-α) στη συνάρτηση (2) διαιολογείται από τη σκέψη, ότι σε μηδενικό επίπεδο εισοδήματος (Y=0) όχι μόνο δεν αποταμιεύουμε, αλλά ξοδεύουμε κι από πάνω υπάρχουσες (προηγούμενες) αποταμιεύσεις, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στο Σχ. 10.84 όπου για Υ=0 παίρνουμε S=-20 χρ. μον. (δηλ. ξοδέψαμε 20 χρ. μον. *από προηγούμενες αποταμιεύσεις).*



Σχ. 10-84

2η) Το άθροισμα της οριακής ροπής προς κατανάλωση β της προηγούμενης παραγράφου και της οριακής ροπής προς αποταμίευση (1-β) είναι -όπως θ' αποδείξουμε στη συνέχεια - ίσο πάντοτε με μονάδα (β+β-1=1).

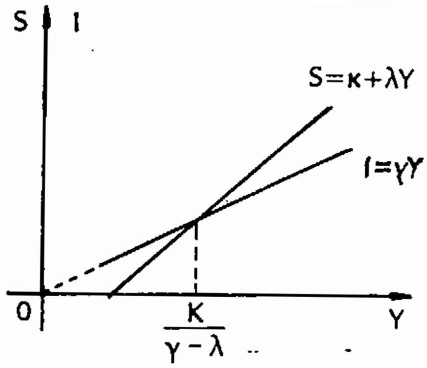
3η) Πολλές φορές αντί του τμήματος του εθνικού εισοδήματος (μιας χώρας) που αποταμιεύεται (δηλ. το S), παίρνουμε το τμήμα που **επενδύεται** δηλ. εκείνο το μέρος που *δεν καταναλώνεται για τίποτα άλλο παρά μόνο χρησιμοποιείται (ή καλύτερα διατίθεται)* για τις λεγόμενες **επενδύσεις** (investments). Έτσι θα προκύψει η αντίστοιχη σχέση της (1) η Υ=C+I (3), όπου με I παριστάνουμε (όπως είπαμε) το τμήμα του εθνικού εισοδήματος που *επενδύεται.*

Επειδή, κατά κανόνα, οι επενδύσεις είναι ανάλογες του εθνικού εισοδήματος, γι' αυτό παίρνουμε για **συνάρτηση επενδύσεως** *(investment function) τη σχέση* **I=γY** *(4).* Στη συνάρτηση αυτή ο συντελεστής γ φανερώνει την κλίση (συντελεστή διευθύνσεως) της ευθείας (4) και λέγεται (κατ' αναλογία προς τα προηγούμενη) **οριακή ροπή προς επένδυση** (marginal property to invest).

3. ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΑΠΟΤΑΜΙΕΥΣΕΩΣ ΚΑΙ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΣ

Αν υποθέσουμε ότι η **αποταμιευτική τάση** (s) μιας χώρας δίνεται από την εξίσωση s=u+λY (όπου λ είναι η οριακή ροπή προς αποταμίευση και Y το εθνικό εισόδημα), ενώ η **επενδυτική τάση** (I) από την εξίσωση I=γY (όπου γ η οριακή ροπή προς επένδυση), τότε το επίπεδο του εθνικού εισοδήματος στο οποίο έχουμε (πετυχαίνουμε) ισορροπία αποταμιεύσεως και επενδύσεως βρίσκεται εύκολα από την εξίσωση ισορροπίας S=I (5)

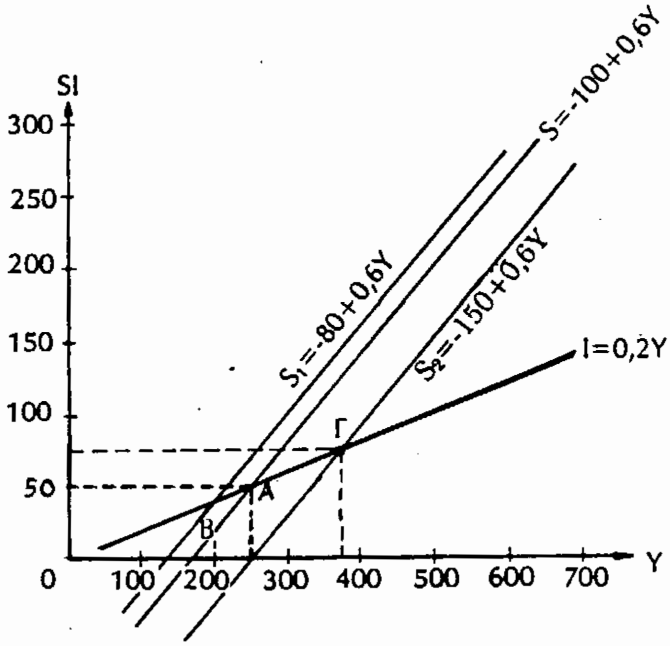
ότι είναι (για γ≠λ) το $Y = \gamma = \frac{\kappa}{\gamma - \lambda}$ *(Σχ. 10-85).*



Σχ. 10-85

Παράδειγμα :

Αν πάρουμε S= -100+0,6Y και I=0,2Y τότε ισορροπία θα έχουμε όταν S=I δηλ. όταν -100+0,6Y=0,2Y απ' όπου βρίσκουμε Y=250 και S=I=50 (σημείο Α στο Σχ. 10-86).



Σχ. 10-86

Αν τώρα υποθέσουμε ότι η αποταμιευτική τάση αυξάνεται και γίνεται π.χ. S1= -80+0,6Y, ενώ η επενδυτική τάση παραμένει η ίδια, τότε το νέο σημείο ισορροπίας, θα βρίσκεται σε χαμηλότερο επίπεδο εθνικού εισοδήματος, αφού από τη λύση της S1 =I δηλ. της -80+0,6Y=0,2Y βρίσκουμε Y=200 και S1=I=40 (σημείο Β).

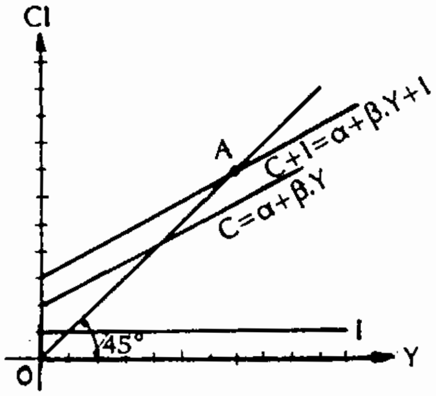
Τέλος αν η αποταμιευτική τάση υποθέσουμε ότι ελαττώνεται και γίνεται π.χ. S_2= -150+0,6Y, ενώ η επενδυτική τάση παραμένει σταθερή, τότε το σημείο ισορροπίας θα βρίσκεται σε ψηλότερο επίπεδο εθνικού εισοδήματος, αφού από τη λύση της S_2=I δηλ. της *-150+0,6=0,2Y βρίσκουμε Y=375 και* S_2*=I=75 χρ. μον. (σημειο Γ).*

4. ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΙΚΗΣ ΔΑΠΑΝΗΣ ΚΑΙ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ

Αν υποθέσουμε ότι το εθνικό εισόδημα μίας χώρας χρησιμοποιείται ολόκληρο για την (εθνική) καταναλωτική δαπάνη (C) και για επένδυση (I), τότε, ως γνωστό, θα έχουμε Y=C+I . Αν ακόμα υποθέσουμε ότι C=α+βY (όπου α σταθερή δαπάνη καταναλώσεως ανεξάρτητη από το εισόδημα και β η γνωστή μας οριακή ροπή προς κατανάλωση) τότε (επειδή η επένδυση θεωρείται **αυτόνομη**) το σύστημα των παραπάνω δύο εξισώσεων μπορεί να επιλυθεί, αν θεωρήσουμε ότι το εθνικό εισόδημα και η συνολική δαπάνη είναι ίσα σε κατάσταση ισορροπίας. Δηλ. αν *Y=C+I*. *Από την τελευταία C=α+βY βρίσκουμε εύκολα ότι*,

στην κατάσταση ισορροπίας, το επίπεδο εισοδήματος (για β≠1) είναι ο $y = \dfrac{\alpha + I}{1-\beta}$

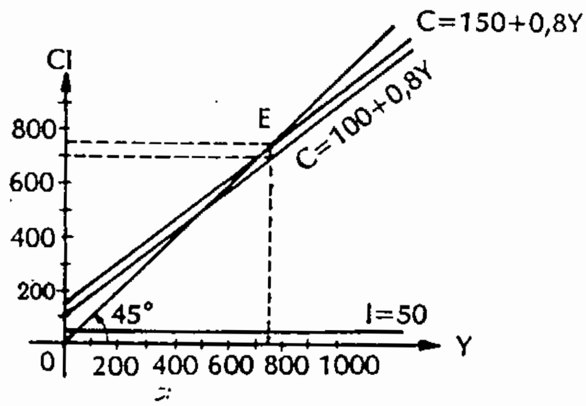
Στο Σχ.10-87, όπου για λόγους σαφήνειας έχουμε χρησιμοποιήσει ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, απεικονίζονται οι εξισώσεις της συνολικής εθνικής δαπάνης (C+I), της *δαπάνης καταναλώσεως (C) και της επενδύσεως (I) αλλά και το σημείο ισορροπίας* A.



Σχ.10-87

Παραδείγματα :

Αν πάρουμε Y=C+50 (δηλ. I=50) και C=100+0,8Y τότε, επειδή στην κατάσταση *ισορροπίας θα είναι* Y=C+50 *δηλ.* Y=100+0,8Y+50 ⇔Y=150+0,8Y



Σχ. 10-88

βρίσκουμε τελικά Y=750 και C=700 (σημείο E στο Σχ. 10-88) όπου απεικονίζονται οι εξισώσεις επενδύσεως I=50 και συνολικής εθνικής δαπάνης (C+I) της οποίας μάλιστα η *γραμμή (ευθεία) είναι παράλληλη της γραμμής της δαπάνης καταναλώσεως (C) και απέχει* απ' τη δεύτερη κατά το σταθερό ποσό επενδύσεως (I=50).

Ακόμα, όπως παρατηρούμε από το σχήμα, το σημείο ισορροπίας E είναι το σημείο τομής της διχοτόμου της γωνίας του ορθοκανονικού συστήματος αξόνων με την ευθεία της συνολικής εθνικής δαπάνης καταναλώσεως (C+I) και στο σημείο αυτό (αφού Y=C+I) τόσο το εθνικό εισόδημα όσο και η συνολική εθνική δαπάνη είναι 750 χρημ. μονάδες.

Παρατηρήσεις - Συμπληρώσεις:

1η) Προκειμένου να ορίσουμε αυστηρότερα την οριακή ροπή προς κατανάλωση (MPC) και την οριακή ροπή προς αποταμίευση (MPS) ξεκινάμε από τη γνωστή σχέση Y=C+S(1) *που ισχύει στη θεωρία του εθνικού εισοδήματος. Αν τώρα θεωρήσουμε ότι το εθνικό* εισόδημά μεταβάλλεται κατά ΔY, τότε, επειδή ένα μέρος ΔC της ΔY διατίθεται για κατανάλωση και το υπόλοιπο ΔS=ΔY-ΔC για αποταμίευση, θα ισχύει η σχεση *ΔY=ΔC+ΔS(2). Διαιρώντας και τα δύο μέλη της (2) με τη (μικρή) μεταβολή ΔY παίρνουμε*

την ισότητα $\frac{\Delta C}{dy}+\frac{\Delta S}{\Delta Y}$ = 1 και υποθέτοντας ότι ΔY→0 θα λάβουμε τη

σπουδαία ισότητα

(3)

$$\boxed{\frac{dC}{dY},\frac{dS}{dY}=1}$$

Στην ισότητα αυτή οι λόγοι - παράγωγοι $\frac{dC}{dY},\frac{dS}{dY}$ είναι αντίστοιχα οι γνωστές μας συναρτήσεις MPC, MPS και εκφράζουν, όπως είναι γνωστό από την παράγωγο, τους στιγμιαίους ρυθμούς μεταβολής της καταναλώσεως και της αποταμιεύσεως σε σχέση με τη μεταβολή στο ύψος του εθνικού εισοδήματος.

Αποδεικνύεται ότι η MPC (αντίστοιχα MPS) εξαρτάται από τη συνάρτηση της καταναλώσεως (αντ. αποταμιεύσεως). Ειδικότερα αν η συνάρτηση αυτή είναι γραμμική (ευθύγραμμη) τότε η MPC (αντ. MPS) είναι σταθερή. Αν όμως έχουμε μη γραμμικές *(καμπυλόγραμμες) συναρτήσεις καταναλώσεως (αντ. αποταμιεύσεως) τότε η MPC (αντ.* MPS) θα είναι συνάρτηση του (εθνικού) εισοδήματος.

Επειδή μάλιστα, σε κανονικές συνθήκες, οι μεταβολές των ΔC,ΔS είναι ομόσημες προς τη μεταβολή ΔY, γι' αυτό είναι *0<MPC<1*, *0<MPS<1* και, λόγω της *(3)*, έχουμε MPC+MPS=1 που απλά σημαίνει αν π.χ. MPC=0,6 τότε MPS=0,4.

2) Επειδή όμως στη θεωρία του εθνικού εισοδήματος ισχύει και η σχεση Y=C+I (1α) και

κατ' επέκταση και οι σχέσεις ΔY=ΔC+ΔI (2α) και $\frac{dC}{dY} + \frac{dI}{dY} = 1$ (3α), συμπεραίνουμε ότι ο

λόγος $\frac{dI}{dY}$, δηλ. η **οριακή ροπή προς επένδυση** (*MPI*), ταυτίζεται με την οριακή ροπή προς αποταμίευση (MPS). Γι' αυτό ακριβώς το λόγο είναι γνωστή και εύχρηστη μόνο η MPS, ενώ απεναντίας (συνήθως) δε χρησιμοποιείται η MPI (αφού καλύπτεται από την MPS).

3η) Αντί όμως της MPI χρησιμποιείται (ή καλύτερα είναι εύχρηστη έννοια) ο

αντίστροφος της MPI δηλ. ο λόγος δηλ. $\frac{1}{MPI} = \frac{dY}{dI}$ *η παράγωγος του εθνικού εισοδήματος* ως προς τις επενδύσεις. Ο λόγος αυτός παριστάνεται με το Κ και λέγεται

πολλαπλασιαστής επενδύσεως (investment multiplier). Δηλ. είναι $K = \frac{1}{MPI}$ (4) και

επειδή MPI = MPS = 1-MPC θα έχουμε τελικά $K = \frac{1}{MPS} = \frac{1}{1-MPC}$ (5). Έτσι αν είναι MPS = 0,25 (ή το ίδιο είναι αν MPC=0,75) τότε ο πολλαπλασιαστής επενδύσεως (IM) είναι

$\frac{1}{0,25} = 4$ *που απλά σημαίνει ότι για κάθε νομισματική μονάδα που αποταμιεύεται το εθνι-κό εισόδημα αυξάνει κατά 4 νομ. μονάδες.*

5. ΒΑΣΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΟΡΙΣΤΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ .

Η πιο κατάλληλη μέθοδος για να προσδιορίσουμε οικονομικές συναρτήσεις από συναρτήσεις οριακής μορφής, ασφαλώς είναι η τεχνική της ολοκληρώσεως. Πιο *συγκεκριμένα, η διαδικασία της ολοκληρώσεως αναφέρεται στον προσδιορισμό της* συναρτήσεως ενός ολικού μεγέθους που είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της αντίστοιχης συναρτήσεως του οριακού μεγέθους.

Ειδικότερα, αν αναφερθούμε σε οικονομικά μεγέθη, αυτό σημαίνει ότι μία συνάρτηση ενός ολικού οικνομικού μεγέθους, είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της αντίστοιχης συναρτήσεως ενός οριακού οικονομικού μεγέθους.

Έτσι π.χ. συναρτήσεις ολικών εσόδων, ολικού κόστους, ολικού προϊόντος, ισοπαραγωγής, ολικής χρησιμότητας, ολικής κατανάλωσης κ.α. μπορούν να προσδιοριστούν αν είναι γνωστές αντίστοιχα οι συναρτήσεις οριακών εσόδων, οριακού κόστους, οριακού προϊόντος,οριακής σχέσεως τεχνικής υποκαταστάσεων (MRTS), οριακής χρησιμότητας, οριακής ροπής προς κατανάλωση ή προς αποταμίευση κ.α. καθώς και η σταθερή, κατά περίπτωση, ποσότητα C (σταθερή ολοκληρώσεως).

Στη συνέχεια θ' αναφερθούμε με συγκεκριμένα παραδείγματα σε τέτοιες συναρτήσεις και στο τέλος θ' αναφέρουμε και δύο εφαρμογές με δημογραφικό περιεχόμενα, τους λεγόμενους νόμους του Malthus και του Verhulst.

Έτσι θα έχουμε:

1) Αν τα οριακά έσοδα που έχει μια επιχείρηση από την πώληση προϊόντος της δίνονται από τη σχέση (10.2.4.1) MR= $\frac{dR}{dq}$= $-q^2+5q+2$, τότε η συνάρτηση των ολικών εσόδων θα είναι TR (ή πιο απλά) R= $\int [-q^2+5q+2]\ dq = -\frac{q^3}{3}+\frac{5q^2}{2}+2q$ (χωρίς σταθερά ολοκληρώσεως).

2) Αν μια επιχείρηση έχει οριακό κόστος παραγωγής προϊόντος που δίνεται από τη *σχέση (10.2.5.1) MC=* $\frac{dC}{dq}=3q^2-4q+7$*, τότε η συνάρτηση του ολικού κόστους θε είναι TC ή* (πιο απλά) C= $3q^2-4q+7\ dq=q^3-2q^2+7q+a$, όπου ο προσδιορισμός της σταθεράς της ολοκληρώσεως α γίνεται με τη βοήθεια της τιμής του σταθερού κόστους. Έτσι π.χ. αν $C_o=4$ τότε (επειδή για $q=0$ είναι $C=4$) $C=q^3-2q^2+7q+4$.

3) *Αν μια επιχείρηση έχει οριακό προϊόν που δίνεται από τη σχέση (10.2.6.1.)* $MP=-z^2+8z+15$, τότε η συνάρτηση ολικού προϊόντος θα είναι $q=\int\left(-z^2+8z+15\ dz\right)=-\frac{z^3}{3}+4z^2+15z+C$, όπου C=σταθερή, γνωστή ποσότητα προϊόντος, που παράγεται χωρίς τη *χρησιμοποίηση του συντελεστή παραγωγής z.*

4) Αν η οριακή σχέση τεχνικής υποκαταστάσεως δύο συντελεστών παραγωγής δίνεται από τη σχέση (10.2.6.3) $MRTS_{LK}=\frac{dK}{dL}=-\frac{100}{L^2}$, τότε η συνάρτηση ισοπαραγωγής θα είναι $K=\int\left(-\frac{100}{L^2}\right)dL=\frac{100}{L}+C$, όπου C=σταθερή γνωστή, ποσότητα του συντελεστή K (κεφάλαιο) με οποιαδήποτε μεγάλη ποσότητα του συντελεστή L (εργασία).

5) Αν η οριακή χρησιότητα, που απολαβαίνει (αισθάνεται) ένας καταναλωτής από την κατανάλωση ενός αγαθού X, δίνεται από τη σχέση (10.2.7.1.) $MU_x=\frac{dU}{dx}=\frac{3}{\sqrt{x}}$, τότε η συνάρτηση ολικής χρησιμότητας θα είναι $U_x=\int\frac{3}{\sqrt{x}}dx=6\sqrt{x}$ (χωρίς σταθερά ολοκληρώσεως).

6) *Αν η οριακή ροπή προς κατανάλωση (MPC) δίνεται από τη σχέση (10.3.4)* $MPC=\frac{dC}{dY}=0,6+\frac{4}{\sqrt{Y}}$ και με την προϋπόθεση ότι η κατανάλωση είναι 10^7 χρ. μον. όταν το

εισόδημα είναι μηδέν (Y=0), τότε η συνάρτηση ολικής καταναλώσεως θα είναι

$$C = \int \left(0,6 + \frac{4}{\sqrt{Y}}\right) dY = 0,6Y + 8\sqrt{Y} + C.$$

Επειδή όμως όταν Y=0 είναι $C=10^7$ βρίσκουμε τελικά $C=0,6Y+8\sqrt{Y}+10^7$ χρ. μονάδες.

7) Αν η οριακή ροπή προς αποταμίευση (MPS) ή προς επένδυση (MPI) δίνεται από τη σχέση

(10.3.4.) MPS= $\frac{dS}{dY} = 0,4$ ή MPI= $\frac{dI}{dY}$ =0,4 αντίστοιχα και η κατανάλωση που αντιστοιχεί σε

ισόδημα μηδέν (Y=0) είναι 7.10^8 χρ. μον. τότε (επειδή $\frac{dc}{dY} = 1 - \frac{dS}{dY} = 1 - \frac{dI}{dY}$ =1-0,4=0,6) η συνάρτηση της ολικής καταναλώσεως θα είναι $C = \int 0,6dY = 0,6Y + C$. Επειδή όμως όταν Y=0 είναι $C=7.10^8$ βρίσκουμε τελικά $C=0,6Y+7.10^8$ χρ. μονάδες.

8) **Υπόθεση Mlthus**: Να βρεθεί ο πληθυσμός (μιας χώρας), όταν το σχετικό ποσοστό αυξήσεως αυτού είναι σταθερό K.

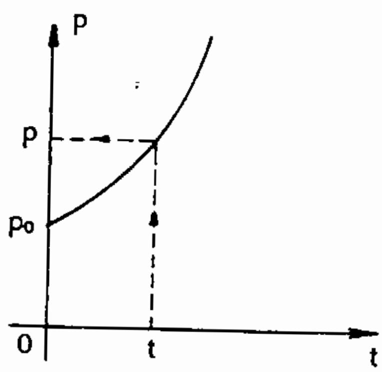
Λύση :

Αν P(t) είναι (άγνωστη) συνάρτηση του πληθυσμού και επειδή σχετικό ποσοστό αυξήσεως

αυτού λέγεται (10.2.8. και 10.2.9.) ο λόγος $\frac{P'(t)}{P(t)}$, θα έχουμε (από την υπόθεση)

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = K \Leftrightarrow \frac{dP(t)}{dt} = KP(t) \Leftrightarrow \frac{dP(t)}{P(t)} = Kdt.$$

Με ολοκλήρωση της τελευταίας έχουμε $\ln P(t)=Kt+C$ οπότε $P(t)=e^{Kt+c}$



Σχ. 10-89

Αν τώρα θέσουμε $P(0)=e^C=po$ θα έχουμε $P(t)=Poe^{Kt}$, της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο Σχ. 10-89.

9) Υπόθεση Verhulst: Να βρεθεί ο πληθυσμός (μιας χώρας), όταν το σχετικό ποσοστό αυξήσεως αυτού είναι ίσο με Κ-λP(t) όπου κ.λ. είναι σταθεροί αριθμοί.

Λύση :

Επειδή, σύμφωνα με την υπόθεση και το προηγούμενο παράδειγμα, είναι $\frac{P'(t)}{P(t)}$= Κ-λ . P(t)

θα έχουμε $\frac{dP}{dt}$ =(Κ-λP).P $\Leftrightarrow$ $\frac{dP}{(K-\lambda P).P}$ = dt. Από την τελευταία με ολοκλήρωση και

επειδή (6.1.4.4.) είναι $\frac{1}{(K-\lambda P)P}=\frac{1}{KP}+\frac{\lambda}{K(K-\lambda P)}$

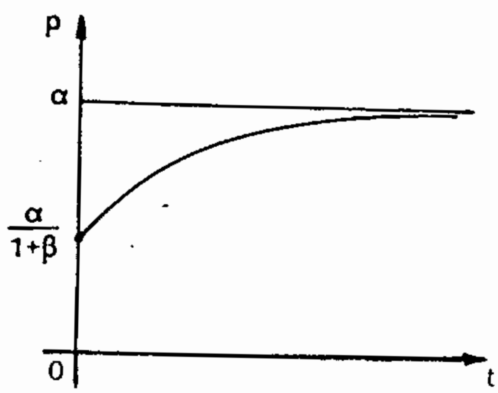
θα έχουμε

$$\frac{1}{K}\int\frac{dP}{p}+\frac{\lambda}{K}\int\frac{dP}{K-\lambda P}=\int dt \Leftrightarrow \text{(αν } K-\lambda P>0) \frac{1}{K}\ln P-\frac{1}{K}\ln(K-\lambda P)=$$

$$= t+C \Leftrightarrow \ln P-\ln(K-\lambda P)=Kt+KC \Leftrightarrow \ln\frac{P}{K-\lambda P}=Kt+KC \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{P}{K-\lambda P}=e^{Kt+KC} \Leftrightarrow P\ \ 1+\lambda e^{Kt+KC}=Ke^{Kt+KC} \Leftrightarrow P=\frac{Ke^{Kt+KC}}{1+\lambda e^{Kt+KC}} \Leftrightarrow$$

$$P=\frac{K}{\lambda+e^{-(KT+KC)}} \Leftrightarrow P(t)=\frac{\frac{K}{\lambda}}{1+\frac{e^{-KC}}{\lambda}.e^{-KT}} .$$



Σχ. 10-90

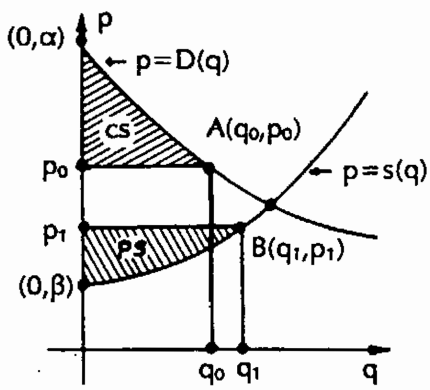
Στην τελευταία σχέση αν θέσουμε $\frac{K}{\lambda}$ = α και $\frac{e^{-KC}}{\lambda}$ = β θα λάβουμε $P(t)=\frac{\alpha}{1+\beta e^{-Kt}}$

της οποίας (Σχ. 10-90) η γραφική παράσταση (επειδή t≥0) αποτελεί τμήμα (10.1.2) της λογιστικής καμπύλης.

6. ΒΑΣΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΟΡΙΣΜΕΝΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ.

Στο μέρος αυτό θ' αναφερθούμε σε παραδείγματα οικονομικών εφαρμογών των ορισμένων ολοκληρωμάτων. Τα σπουδαιότερα από τα παραδείγματα αυτά είναι τα ακόλουθα :

1) ***Πλεόνασμα καταναλωτή*** *: Αν έχουμε τη συνάρτηση ζητήσεως P=D(q) ενός* προϊόντος ή ενός αγαθού και A(qoPo = D(qo)) είναι ένα ορισμένο σημείο της καμπύλης της, τότε οι καταναλωτές που προσφέρονται να πληρώσουν περισσότερο από την (ορισμένη) *τιμή* ***Po*** *, διαπιστώνουν κάποιο όφελος ή πλεόνασμα. Το ολικό αυτό όφελος του* καταναλωτή που ονομάστηκε από τον Αγγλο Οικονομολόγο Marshall **πλεόνασμα του καταναλωτή** (consumer's surplus), το συμβολίζουμε σύντομα με CS και γεωμετρικά *παριστάνεται (Σχ. 10-91) με το εμβαδόν του τόπου που είναι πάνω από την (οριζόντια)* ευθεία **P=Po** και κάτω από την καμπύλη ζητήσεως. Άρα για να το υπολογίσουμε θα χρησιμοποιήσουμε ορισμένο ολοκλήρωμα και θα έχουμε:



Σχ. 10-91

Πλεόνασμα καταναλωτή $CS=\int_{0}^{q_0} D(q)dq - p_0q_0$ (1).

Σημείωση :

Αν λάβουμε για συνάρτηση ζητήσεως την q=f(P) τότε, με την προϋπόθεση ότι **D(O)**=α, θα έχουμε: Πλεόνασμα καταναλωτή:

$= CS=\int_{p_0}^{\alpha} f(p)dp$ (2)

Έτσι λοιπόν το συμπέρασμα είναι (Σχ. 10-91) ότι

$CS=\int_{0}^{q_0} D(q)dq - p_0q_0=\int_{p_0}^{\alpha} f(p)dp$.

Παράδειγμα :

Αν η συνάρτηση ζητήσως ενός αγαθού είναι $P=D(q)=40-2q-3q^2$, να υπολογιστεί το πλεόνασμα του καταναλωτή όταν

α) $q_o=3$ και

β) $P_o=24$.

Λύση:

α) Επειδή, όταν $q_o=3$ το $P_o=D(q_o) = 40-6-27=7$, θα έχουμε από τον (1):

$$CS = \int_o^3 (40 - 2q - 3q^2)dq - 7 \cdot 3 = \left[40q - q^2 - q^3\right]_0^3 - 21 =$$

$=120-9-27-21 = 63.$

β) Επειδή από την $P_o=D(q_o)$ για $P_o=24$ βρίσκουμε $24=40-2q-3q^2 \Leftrightarrow 3q^2+2q-16=0 \Leftrightarrow q_o=2$ θα έχουμε

$$CS = \int_o^2 (40 - 2q - 3q^2)dq - 24 \cdot 2 = \left[40q - q^2 - q^3\right]_0^2 - 48 =$$

$= 80 -4-8-48 =20$

2) **Πλεόνασμα παραγωγού** : Αν έχουμε τη συνάρτηση προσφοράς $p=S(q)$ ενός προϊόντος ή αγαθού και Β $q_1p_1=S(P_1)$ είναι ένα ορισμένο σημείο της καμπύλης της, τότε, οι παραγωγοί που ήταν αποφασισμένοι να προσφέρουν το προϊόν τους σε τιμές μικρότερες από την (ορισμένη) τιμή P_1, διαπιστώνουν καποιο όφελος, που ονομάζεται **πλεόνασμα του παραγωγού** (producer's surplus). Το πλεόνασμα αυτό το συμβολίζουμε σύντομα με PS και *γεωμετρικά παριστάνεται (Σχ.10-91) με το εμβαδόν του τόπου που είναι πάνω από την* καμπύλη προσφοράς και κάτω από την (οριζόντια) ευθεία $p=p_1$. Άρα για να το υπολογίσουμε θα χρησιμοποιήσουμε ορισμένο ολοκλήρωμα και θα έχουμε : Πλεόνασμα *παραγωγού*

$$PS= p_1q_1 - \int_o^{q_1} S(q)dq \qquad (3).$$

Σημείωση :

Αν λάβουμε για συνάρτηση προσφοράς την $q= \varphi(P)$ τότε, με την προϋπόθεση ότι $S(O)=\beta$, θα έχουμε: Πλεόνασμα παραγωγού

$$PS= \int_\beta^{P_1} \varphi(p)dp \quad (4) .$$

Έτσι λοιπόν το συμπέρασμα είναι (Σχ. 10-91) ότι

$$PS= p_1q_1 - \int_o^{q_1} S(q)dq = \int_\beta^{P_1} \varphi(p)dp .$$

Παράδειγμα 1ο:

Αν η συνάρτηση προσφοράς ενός αγαθού είναι $p=S(q)=4q^2 +12q+9$ και η τιμή $p1 =49$, τότε να υπολογιστεί με δύο τρόπους το πλεόνασμα του παραγωγού.

Λύση :

Για να υπολογίσουμε με βάση τον (3) εργαζόμαστε ως εξής: Επειδή $p_1=4q_1^2+12q_1+9 \Leftrightarrow$

$49+4q_1^2+12q_1+9 \Leftrightarrow 4q_1^2+12q_1-40 = 0$

$\Leftrightarrow q_1^2 + 3q_1-10 = 0 \Leftrightarrow q1=2$

θα έχουμε από τον (3):

$$PS = 49 \,.\, 2 - \int_o^2 (4q^2 + 12q + 9)dq =$$

$$= 98 - \left[4\frac{q^3}{3} + 6q^2 + 9q\right]_o^2 = 98 - \frac{32}{3} - 24 - 18 = \frac{136}{3} = 45\frac{1}{3}.$$

Για να το υπολογίσουμε τώρα με βάση την (4) θα έχουμε: Επειδή β=S(O)=9 και από την p= $4q^2 + 12q+9$ βρίσκουμε $4q^2+12q+9-p=0 \Leftrightarrow$

$$q=\varphi(p)=\frac{-6 + \sqrt{36-4(9-p)}}{4} \Leftrightarrow$$

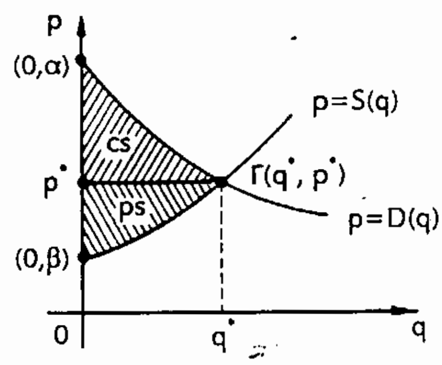
$q=\dfrac{-6+\sqrt{4p}}{4} \Leftrightarrow q=\dfrac{\sqrt{p}}{2} - \dfrac{3}{2}$ θα έχουμε απο την (4) :

$$PS = \int_9^{49} \left(\frac{\sqrt{p}}{2} - \frac{3}{2}\right)dp = \left[\frac{1}{3}p\sqrt{p} - \frac{3}{2}p\right]_9^{49}$$

$$= \frac{1}{3}(49.7 - 9.3) - \frac{3}{2}(49-9) = \frac{316}{3} - 60 = \frac{316}{3} - \frac{180}{3} = \frac{136}{3} = 45\frac{1}{3}.$$

Παρατήρηση :

Ευνόητο είναι ότι σε κατάσταση ισορροπίας {σημείο ισορροπίας το Γ (q^*,p^*)} τα πλεονάσματα καταναλωτή και παραγωγού παριστάνονται στο Σχ.10-92.



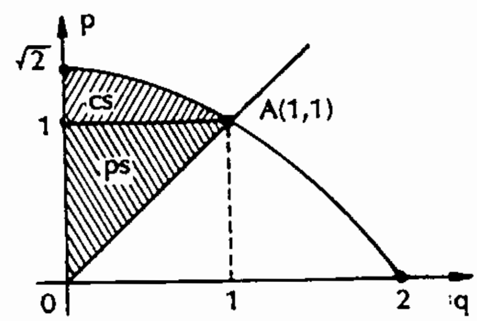
Σχ. 10-92

Παράδειγμα 2ο:

Να υπολογιστούν τα πλεονάσματα καταναλωτή και παραγωγού όταν βρισκόμαστε σε κατάσταση ισορροπίας με συνάρτηση ζητήσεως $q_D=2-p^2$ και συνάρτηση προσφοράς $p_S=p$.

Λύση :

Επειδή από την ισότητα $q_D=q_S$ προκύπτει το σημείο ισορροπίας $A(1,1)$ θα έχουμε (Σχ.10-93):



Σχ. 10-93

$$CS=\int_0^1 \sqrt{2-q}\,dq-1\,.\,1=\int_o^1 (2-q)^{\frac{1}{2}}dq-1=$$

$$=-\int_o^1 (2-q)^{\frac{1}{2}}d(2-q)-1=-\left[\frac{(2-q)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_o^1-1=-\frac{2}{3}\left(1-2^{\frac{3}{2}}\right)-1\approx 0{,}2\,.$$

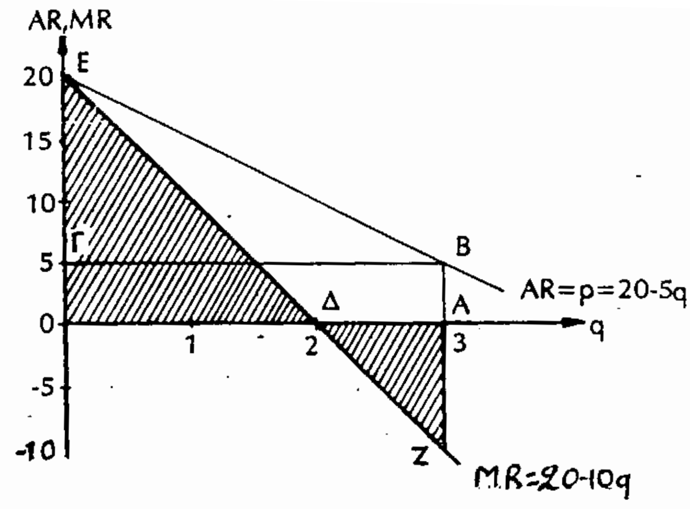
Για να υπολογίσουμε το πλεόνασμα του παραγωγού θα έχουμε (τύπος 4):

$$PS=\int_o^1 p\,dp=\left[\frac{p^2}{2}\right]_o^1=\frac{1}{2}\,.$$

3) ***Σχέση μέσων και οριακών εσόδων***: *Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση οριακών* εσόδων μιας (μονοπωλιακής) επιχείρησεως είναι MR=20-10q (όπου q μονάδες παραγόμενου και πωλούμενου προϊόντος) και η συνάρτηση μέσων εσόδων είναι (10.2.4.1) *AR=p=20-5q (όπου p=τιμή ανά μονάδα προϊόντος). Τα ολικά έσοδα R που θα έχει* (επιτύχει) τότε η επιχείρηση με την πώληση π.χ. q=3 μονάδων προϊόντος θα είναι (επειδή)

$AR=\frac{R}{q}$)R=(AR).q=(20-5.3).3=5.3=15 χρημ. μονάδες που αντιστοιχούν (πρόταση 2 της

10.2.4.1) στο εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΑΒΓ (Σχ. 10-94). Επειδή όμως $MR=\frac{dR}{dp}$, συμπεραίνουμε ότι τα ολικά έσοδα

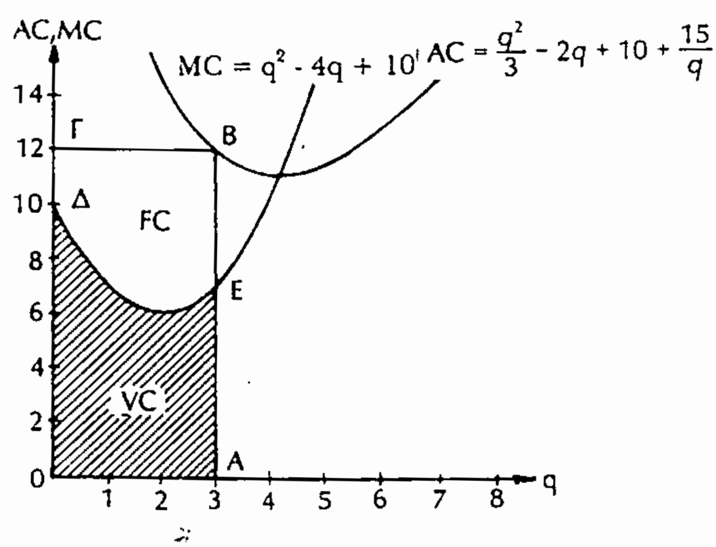


Σχ. 10-94

θ' αντιστοιχούν (σύμφωνα με τη γεωμ. ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος) στο εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζεται από την καμπύλη των οριακών εσόδων, τον οριζόντιο άξονα και τις κατακόρυφες ευθείες q=0 (κατακόρυφος άξονας) και q=3. Αυτό το εμβαδόν (επειδή τα οριακά έσοδα γίνονται αρνητικά μετά την δεύτερη μονάδα του q) γεωμετρικά θα αποδίδεται με τη διαφορά των εμβαδών των (τριγωνικών) επιφανειών ΟΔΕ και ΑΔΖ που αλγεβρικά είναι ίση με το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$R = \int (MR) \,.\, dq = \int_o^3 (20 - 10q)dq = \left[20q - 5q^2\right]_0^3 = 60 - 45 = 15 \,.$$

4) **Σχέση μέσου και οριακού κόστους**: Ανάλογη με την εξέταση της σχέσεως μεταξύ μέσων και οριακών εσόδων με την τεχνική ολοκληρώσεως είναι και αυτή μεταξύ μέσου και οριακού κόστους παραγωγής ενός προϊόντος.



Σχ. 10-95

Έτσι, αν έχουμε τις συναρτήσεις $Ac=\frac{q^2}{3}-2q+10+\frac{15}{q}$ και $MC=q^2-4q+10$ με τις αντίστοιχες καμπύλες τους (Σχ. 10-95), διαπιστώνουμε ότι το ολικό κόστος (C) για την παραγωγή π.χ. q=3 μονάδων προϊόντος (επειδή $AC=\frac{C}{q}$) θα είναι

$C=(AC)q=\left(\frac{3^2}{3}-2\,.\,3+10+\frac{15}{3}\right).\,3=$ 12.3=36 χρημ. μονάδες που αντιστοιχούν (πρόταση 2 της 10.2.51) στο εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΑΒΓ (Σχ. 10-95). Επειδή όμως στο παράδειγμά μας για το σταθερό κόστος (FC) είναι FC=15 χρηματικές μονάδες (αφού C=CV+FC=(AC).q $=\frac{q^3}{3}-2q^2+q+15$), συμπεραίνουμε ότι το μεταβλητό κόστος (VC) θα βρεθεί (λόγω του $MC=\frac{dC}{dp}$) με το ορισμένο ολοκληρωμα

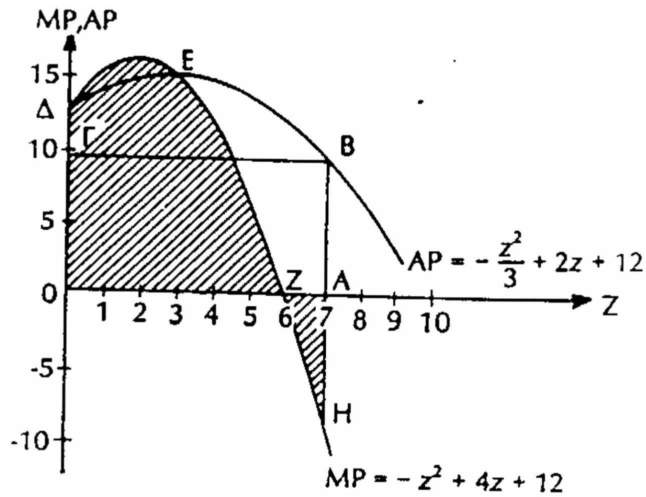
$VC=\int(MC)dq=\int_o^3(q^2-4q+10)dq=\left[\frac{q^3}{3}-2q^2+10q\right]_o^3$ =9-18+30=21 χρημ. μονάδες, όπως άλλωστε επιβεβαιώνεται το αποτέλεσμα και από την απλή σχέση VC=C-FC=36-15=21 χρ. μονάδες. Αλλά και από τη γεωμ. ερμηνεία του παραπάνω ολοκληρώματος συμπεραίνουμε ότι η τιμή του VC=21 χρ. μον. αντιστοιχεί στο εμβαδόν της επιφάνειας ΟΑΕΔ (Σχ. 10-95), όπου το εμβαδόν αυτό είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των επιφανειών ΟΑΒΓ και ΔΕΒΓ και στα οποία (επειδή 21=36-15) αντιστοιχούν οι τιμές ολικού και σταθερού κόστους.

5) **Σχέση μέσου και οριακού προϊόντος**: Ανάλογα με τις δύο προηγούμενες *περιπτώσεις είναι και τα συμπεράσματα που προκύπτουν με τη σύγκριση των επιφανειών* που ορίζονται από τις καμπύλες μέσου και οριακού προϊόντος.

Έτσι αν έχουμε τις συναρτήσεις $AP=-\frac{z^2}{3}-2z+12$ *και* $MP=-z^2+4z+12$ *με τις αντίστοιχες* καμπύλες τους (Σχ. 10-96), τότε το παραγόμενο ολικό προϊόν (*TP* ή πιο απλά q) με τη χρησιμοποίηση π.χ. z=7 μονάδων του συντελεστή παραγωγής z (επειδη $AP=\frac{TP}{z}$) θα είναι

$TP=(AP)\,.\,z=$

$=\left(-\frac{7^2}{3}+2\,.\,7+12\right).\,7=\frac{29}{3}\,.\,7=\frac{203}{3}\approx 67{,}7$ μονάδες (προϊόντος) που αντιστοιχούν στο εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΑΒΓ (Σχ. 10-96).



Σχ. 10-96

Επειδή όμως (10.2.6.1) $MP=\frac{d(TP)}{dz}$ *, συμπεραίνουμε ότι το ολικό προϊόν θ' αντιστοιχεί* (σύμφωνα με τη γεωμ. ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος) στο εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζεται από την καμπύλη του οριακού προϊόντος, τον οριζόντιο άξονα και τις δύο κατακόρυφες ευθείες *z=0 (κατακόρυφος άξονας) και z=7.* Αυτό όμως το εμβαδόν (επειδή το οριακό προϊόν γίνεται αρνητικό μετά την έκτη μονάδα του Ζ) γεωμετρικά θ' αποδίδεται με τη διαφορά των εμβαδών των επιφανειών ΟΔΕΖ και ΑΖΗ που αλγεβρικά *είναι ίση με το ορισμένο ολοκλήρωμα*

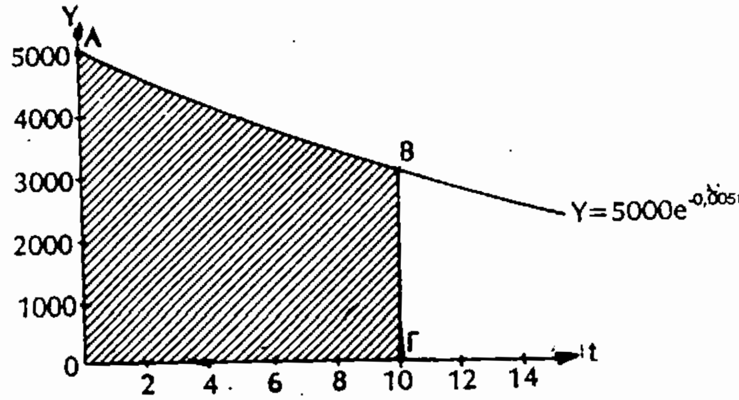
$$TP = \int (MP)dz = \int_0^7 (-z^2 + 4z + 12)dz = \left[-\frac{z^3}{3} + 2z^2 + 12z \right]_0^7 =$$

$$= -\frac{7^3}{3} + 2 \cdot 7^2 + 12 \cdot 7 = -\frac{343}{3} + 98 + 84 = \frac{203}{3} \approx 67{,}7 \,,$$

τιμή που βρήκαμε και από το γινόμενο (AP). Z.

Το τελικό συμπέρασμα που βγαίνει από τα παραπάνω και για δοσμένη (σταθερή) *ποσότητα Zo του συντελεστή παραγωγής, Z είναι ότι η επιφάνεια του ορθογωνίου του* μέσου προϊόντος είναι πάντοτε ίση με την επιφάνεια που ορίζεται από την καμπύλη του οριακού προϊόντος, τους δύο θετικούς ημιάξονες και τη γνωστη, ευθεία z=zo, αφού *λάβουμε υπόψη την περίπτωση - όπως στο παράδειγμά μας - που η καμπύλη του οριακού* προϊόντος είναι κάτω του (οριζοντίου) άξονα ΟΖ (Σχ. 10-96). ΄Οταν μάλιστα συμβαίνει αυτό, το ολικο προϊόν ελαττώνεται με την αύξηση του Ζ, αφού τότε αυξάνει το εμβαδόν *της επιφάνειας που είναι κάτω από τον οριζόντιο άξονα και που πρέπει ν' αφαιρεθεί από* εκείνο (το εμβαδόν) της επιφάνειας που είναι πάνω από τον οριζόντιο άξονα μέχρι της τιμής του *Z* που μηδενίζεται το οριακό προϊόν (δηλ. σημείο τομής της καμπύλης MP και του άξονα ΟΖ).

6)Προσδιορισμός παρούσας αξίας οικονομικού πόρου:Αν υποθέσουμε ότι ροή (flow) των εσόδων από τη χρησιμοποίηση οικονομικού πόρου (όπου οικοδομής, μηχανήματος, εδάφους, κ.α.) είναι σταθερή κάθε έτος και ίση με α χρημ. μονάδες, με *ποσοστό προεξοφλήσεως π.χ. το επιτόκιο που επικρατεί στην αγορά - 100r%, τότε η* παρούσα αξία του οικονομικού αυτού πόρου θα είναι συνάρτηση του αριθμου των ετών t κατά τα οποία θα πραγματοποιηθούν τα έσοδα, του (επιτοκίου) r και της σταθερής ροής των εσόδων α.



Σχ.10-97

Η παρούσα αυτή αξία, που είναι γνωστή και ως κεφαλοποίηση του **εισοδήματος** ή απλά **κεφαλοποίηση** (capitalization) και για την οποία σχετικός είναι και ο τύπος (10) της εφαρμογής 4 της 10.2.9., προκύπτει σαν το αποτέλεσμα του ορισμένου ολοκληρώματος

$$P(t) = \int_0^t \alpha e^{-rt} dt = -\frac{\alpha}{r}\int_0^t e^{-rt} d(-rt) = -\frac{\alpha}{r}\left[e^{-rt}\right]_0^t = -\frac{\alpha}{r}\left(e^{-rt} - 1\right).$$

Δηλ. τελικά είναι $P(t) = \frac{\alpha}{r}\left(1 - e^{-rt}\right)$ (1).

Παράδειγμα :

Αν είναι το επιτόκιο σταθερό και ίσο με 5% το έτος και το ετήσιο έσοδο ενεργητικού στοιχειου σταθερό και ίσο με 5000 χρ. μονάδες επί 10 έτη, τότε η παρούσα αξία αυτού του στοιχείου, σύμφωνα με τον πιο πάνω τύπο (1), θα είναι

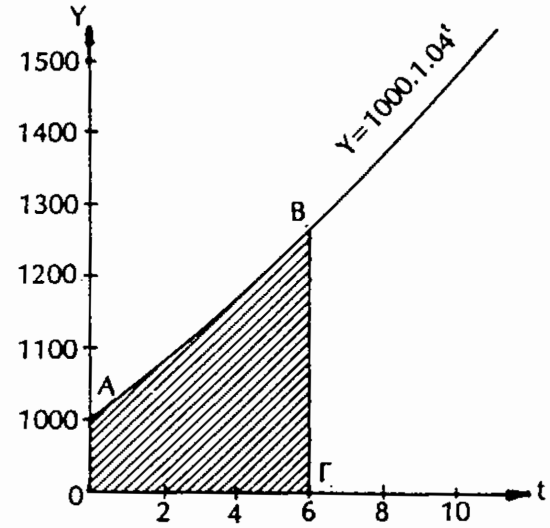
$$P(10) = \frac{5000}{0,05}.\left[1-e^{-0,05.10}\right] = 100000.\left[1-2,728^{-0,5}\right] =$$

$=100000 \ . \ 0,39347 \approx 39347$

χρ. μονάδες και αντιστοιχεί στο εμβαδόν της επιφάνειας ΟΑΒΓ (Σχ. 10-97).

7) ***Προσδιορισμός αξίας επενδύσεως*** : *Αν υποθέσουμε ότι το κεφάλαιο α χρημ.* μονάδων επενδύεται στο έτος t=0 και ανατοκίζεται με επιτόκιο 100r%, τότε η συνολική αξία επενδύσεως I(t) στο τέλος δοσμένης (ορισμένης) χρονικής περιόδου (π.χ. μετά *πάροδο t ετών) και για την οποία σχετικός είναι και ο τύπος (1) της 10.2.9., προκύπτει σαν* το αποτέλεσμα του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I(t) = \int_0^t \alpha(1+r)^t dt = \alpha\int_0^t (1+r)^t dt = \alpha\left[\frac{(1+r)^t}{ln(1+r)}\right]_0^t = \alpha\left[\frac{(1+r)^t}{ln(1+r)} - \frac{1}{ln(1+r)}\right].$$



Σχ. 10-98

Δηλ. τελικά είναι $I(t)=\dfrac{a}{\ln(1+r)}\cdot[(1+r)^t - 1]$ (1).

Παραδείγμα :

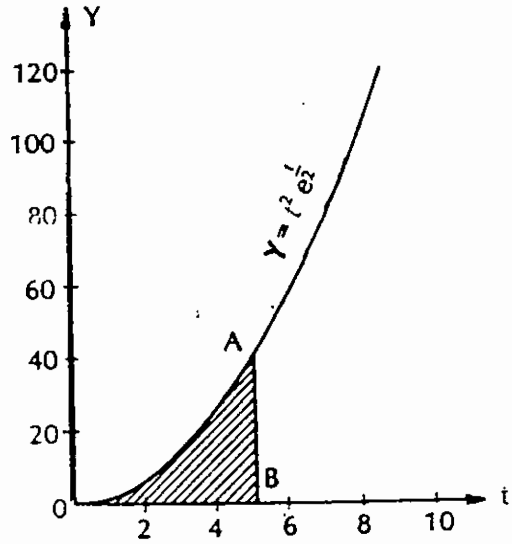
Αν το αρχικά επενδυόμενο κεφάλαιο είναι 1000 χρ. μονάδες και ανατοκίζεται με επιτόκιο 4% το έτος, τότε σε 6 έτη το ύψος της επενδύσεως θα είναι

$I(6)=\dfrac{1000}{\ln 1{,}04}(1{,}04^6-1)\approx 6768$ χρημ. μονάδες και αντιστοιχεί στο εμβαδόν της επιφάνειας ΟΑΒΓ (Σχ.10-98).

8) **Προσδιορισμός αξίας αποσβέσεως κεφαλαίου αγαθού**: Αν ο **ρυθμός αποσβέσεως** (amortization rate) της αξίας ενός κεφαλαιουχικού αγαθού (capital commodity) μιας επιχειρήσεως εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή του χρόνου χρησιμοποιήσεως του t δηλ. εκφράζεται π.χ. από τη συνάρτηση $y(t)$, τότε η αξία της συνολική αποσβέσεως $A(t)$ σε t έτη υπολογίζεταιμε το ορισμένο ολοκλήρωμα $A(t)=\ y(t)dt$.

Παράδειγμα:

Αν ο ρυθμός αποσβέσεως της αξίας ενός κεφαλαιουχικού αγαθού, π.χ. ενός μηχανήματος, είναι $y(t)=t^2e^{t/2}$, τότε η αξία της συνολικής αποσβέσεως (αυτού) του μηχανήματος σε 5 έτη θα είναι : $A(5)=\int_0^5 t^2e^{\frac{t}{2}}dt$ (1).



Σχ.10-99

Προκειμένου τώρα να υπολογίσουμε το ολοκληρωμα (1) παίρνουμε το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα και με εφαρμογή της παραγοντικής ολοκληρώσεως θα έχουμε:

$$\int t^2e^{\frac{t}{2}}dt = 2\int t^2de^{\frac{t}{2}} = 2\left[t^2e^{\frac{t}{2}} - \int e^{\frac{t}{2}}d(t^2)\right] = 2t^2e^{\frac{t}{2}} - 4\int te^{\frac{t}{2}}dt = 2t^2e^{\frac{t}{2}} - 8\int tde^{\frac{t}{2}} =$$

$$= 2t^2e^{\frac{t}{2}} - 8\left[te^{\frac{t}{2}} - \int e^{\frac{t}{2}}dt\right] = 2t^2e^{\frac{t}{2}} - 8te^{\frac{t}{2}} + 16\int de^{\frac{t}{2}} =$$

$$= 2t^2e^{\frac{t}{2}} - 8te^{\frac{t}{2}} + 16e^{\frac{t}{2}} = 2e^{\frac{t}{2}}(t^2 - 4t + 8) \qquad (2)$$

Η (1) λόγω της (2) θα γίνει

$$A(5) = \left[2e^{\frac{t}{2}}(t^2 - 4t + 8\right]_o^5 = 2 \,.\, 2{,}718^{\frac{5}{2}}(25 - 20 + 8) - 2 \,.\, 1 \,.\, 8 =$$

$$= 26 \,.\, 2{,}718^{2,5} - 16 \approx 301$$

χρημ. μονάδες και αντιστοιχεί στο εμβαδόν της επιφάνειας ΟΒΑ (Σχ. 10-99).

Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

1. ΣΠΥΡΟΣ ΣΑΣΣΑΛΟΣ "Γενικά Μαθηματικά" εκδ.οίκος "ΙΩΝ" 1992

2. ΔΑΣΚΑΛΟΠΟΥΛΟΥ Δ. "Γενικά Μαθηματικά" 1980

3. ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΠΟΥΛΟΣ Α. "Στοιχεία μαθηματικών δια σπουδαστάς οικονομικών σχολών" τόμος Ι, ΙΙ 1976

4. ΠΑΝΤΕΛΙΔΗ "Μαθηματική αναλύση" 1980

5. ΣΙΑΡΔΟΣ "Τα μαθηματικά στην οικονομική επιστήμη" 1979

6. ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΟΥ "Θέματα Γραμμικής Αλγεβρας και μαθηματικής ανάλυσης" 1988

7. ΠΑΠΑΜΙΧΑΗΛ Δ. " Γενικά Μαθηματικά" τεύχη 3 1976

8. ΜΠΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Α. "Αριθμητική ανάλυση" 1983

9. Ι.ΚΟΥΜΟΥΣΗΣ σημ."Γενικά Μαθηματικά" 1990-93