

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΜΕΣΟΛΟΓΓΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**«ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΧΑΜΗΛΟΔΙΑΒΑΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ MATLAB
ΣΕ ΤΡΕΙΣ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ»**

ΣΚΙΑΔΑ ΚΑΤΕΡΙΝΑ

(Α.Μ. 0849)

ΣΠΥΡΙΔΟΥΛΑ ΓΕΩΡΓΟΠΟΥΛΟΥ

(Α.Μ. 0663)

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΠΑΡΑΣΚΕΥΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ, Επίκουρος καθηγητής

Ναύπακτος, ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2013

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή

Ναύπακτος, 25 Απριλίου 2013

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

1. Μ.Παρασκευάς
2. Σπ.Λούβρος
3. Δ.Αμπελιώτης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία πραγματοποιήθηκε στο τμήμα Τηλεπικοινωνιακών Συστημάτων και Δικτύων παράρτημα του ΑΤΕΙ Μεσολογίου.

Η εργασία αυτή αποτελεί μια μελέτη της συμπεριφοράς των φίλτρων (αναλογικών και ψηφιακών) στα πλαίσια ενός συστήματος επεξεργασίας σημάτων.

Το θεωρητικό μέρος της εργασίας αποτελείται από μια εισαγωγή στη θεωρία Σημάτων, τα χαρακτηριστικά τους μεγέθη και τις ιδιότητές τους. Ακολουθεί η θεωρητική περιγραφή των φίλτρων καθώς και η σημασία τους στις σύγχρονες διαδικασίες επεξεργασίας σημάτων και μετάδοσης πληροφορίας. Παρατίθεται επίσης λεπτομερής καταγραφή των κατηγοριών και των ιδιοτήτων των φίλτρων καθώς και η μαθηματική τους ανάλυση, όπως κρίνεται απαραίτητο.

Το πρακτικό μέρος της εργασίας αφορά την δημιουργία του κώδικα για την προσομοίωση της λειτουργίας των IIR φίλτρων ,Butterworth, Chebyshev-I και Chebushev-II με χρήση του υπολογιστικού πακέτου matlab.

Στα πλαίσια της εργασίας αυτής θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε θερμότατα τον επιβλέπων καθηγητή κ. Μιχάλη Παρασκευά για την συνεχή και αμέριστη υποστήριξη του καθώς και για τις καθοριστικές παρατηρήσεις και συμβουλές του.

ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ

- Σήματα
- Φίλτρα
- IIR
- FIR
- CHEBYSHEV-I
- CHEBYSHEV-II
- BUTERWORTH
- DSP

ABSTRACT

This work is a study of the behavior of filters (analog and digital) within a system of signal processing.

The theoretical part of the thesis consists of an introduction to the theory of Signals, typical sizes and qualities. Then follows the theoretical description of the filters and their importance in modern signal processing and transmission of information. It also contains a detailed inventory of categories and properties of the filter and the mathematical analysis, as appropriate.

The practical part of the work concerns the creation of the code to simulate the operation of IIR filters, Butterworth, Chebyshev-I and Chebushev-II using the computational package matlab.

Thanks sincerely Prof. Michael Paraskevas for his continuous and unconditional support and the crucial observations and advice.

KEYWORDS

- Signals
- Filters
- IIR
- FIR
- CHEBYSHEV-I
- CHEBYSHEV-II
- BUTERWORTH
- DSP

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	3
ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ	3
ABSTRACT	4
KEYWORDS	4
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	5
ΛΙΣΤΑ ΕΙΚΟΝΩΝ.....	8
1 ΣΗΜΑΤΑ	10
1.1.1 Ημιτονοειδές σήμα	10
1.1.2 Τετραγωνικό σήμα	12
1.2 Τύποι σημάτων	12
1.3 Αναλογικά και ψηφιακά σήματα.....	13
1.3.1 Αναλογικά	13
1.3.2 Ψηφιακά	14
1.4 Διαφορές αναλογικών και ψηφιακών σημάτων	16
1.5 Η έννοια της συχνότητας στα σήματα.....	16
1.6 Μετασχηματισμός Z.....	17
1.7 Μετατροπή σήματος από αναλογικό σε ψηφιακό και αντίστροφα	19
1.7.1 Βήματα μετατροπής.....	20
1.8 Ψηφιακή επεξεργασία σήματος.....	23
2 ΦΙΛΤΡΑ	26
2.1 Ιδανικά και πραγματικά φίλτρα.....	29
2.2 Τεχνολογίες υλοποίησης φίλτρων	30
2.3 Αναλογικά και Ψηφιακά Φίλτρα	31
2.3.1 Αναλογικά	32
2.3.2 Ψηφιακά	33
2.4 Διαφορές Αναλογικών και Ψηφιακών Φίλτρων.....	34
2.5 Πλεονεκτήματα ψηφιακών φίλτρων.....	34
2.6 Λειτουργία ψηφιακών φίλτρων	35
2.7 Παραδείγματα απλών ψηφιακών φίλτρων	36
2.7.1 UNITY GAIN FILTER (ΦΙΛΤΡΟ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ).....	36

2.7.2	SIMPLE GAIN FILTER (ΦΙΑΤΡΟ ΑΠΛΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ)	36
2.7.3	PURE DELAY FILTER (ΦΙΑΤΡΟ ΚΑΘΑΡΗΣ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗΣ)	37
2.7.4	TWO-TERM DIFFERENCE FILTER (ΦΙΑΤΡΟ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΔΥΟ ΟΡΩΝ)	37
2.7.5	TWO-TERM AVERAGE FILTER (ΦΙΑΤΡΟ ΜΕΣΟΥ ΔΥΟ ΟΡΩΝ)	38
2.7.6	THREE-TERM AVERAGE FILTER (ΦΙΑΤΡΟ ΜΕΣΟΥ ΤΡΙΩΝ ΟΡΩΝ)	38
2.7.7	CENTRAL DIFFERENCE FILTER (ΦΙΑΤΡΟ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ)	38
2.8	Συνάρτηση μεταφοράς ενός ψηφιακού φίλτρου.....	39
2.9	Συνάρτηση μεταφοράς	40
2.10	Συντελεστές ψηφιακών φίλτρων	40
2.11	Κατηγορίες Φίλτρων και Βασικές Ιδιότητες.....	42
2.12	Τάξη ψηφιακού φίλτρου.....	42
2.12.1	Φίλτρα 1 ^{ης} τάξης	44
2.12.2	Φίλτρα 2 ^{ης} τάξης	45
2.13	Επαναληπτικά και μη επαναληπτικά φίλτρα.....	47
2.14	Φιλτράρισμα.....	48
2.15	Ολοδιαβατό φίλτρο.....	50
2.16	Μετασχηματισμοί συνάρτησης μεταφοράς.....	50
2.16.1	Μετασχηματισμός βαθυπερατού σε υψηπερατό	50
2.16.2	Μετασχηματισμός βαθυπερατού σε ζωνοπερατό	51
2.16.3	Μετασχηματισμός βαθυπερατού σε απόρριψης ζώνης	51
2.17	Ιδανικές Προδιαγραφές Φίλτρων	51
2.18	Είδη Κλασικών Ιδανικών Φίλτρων	53
2.18.1	Χαμηλοπερατό ή χαμηλοδιαβατό φίλτρο(Low Pass Filter)	53
2.18.2	Υψηλοπερατό ή υψηλοδιαβατό φίλτρο(High Pass Filter).....	54
2.18.3	Ζωνοπερατό φίλτρο(Band Pass Filter)	56
2.18.4	Ζωνοαπαγορευτικό φίλτρο(Band Stop Filter).....	56
2.18.5	Πολυπερατά ή Πολυδιαβατά Φίλτρα	57
2.18.6	Ολοπερατά ή Ολοδιαβατά Φίλτρα	57
2.19	Ιδανική Κρουστική Απόκριση Φίλτρου	57
2.20	Εύρος ζώνης	59
2.21	Σχεδιασμός φίλτρων	60
2.21.1	Βασικές αρχές σχεδιασμού.....	60
2.21.2	Προδιαγραφές του φίλτρου	60

2.21.3	Επίδραση της θέσης πόλων-μηδενικών στην απόκριση συχνότητας	62
3	FIR & IIR	67
3.1	Σύγκριση FIR και IIR Φίλτρων	68
3.2	IIR.....	69
3.2.1	Τάξη αναδρομικού ψηφιακού φίλτρου(IIR).....	69
3.2.2	Συντελεστές αναδρομικών ψηφιακών φίλτρων(IIR).....	69
3.2.3	Σχεδίαση IIR ψηφιακών φίλτρων.....	70
3.3	FIR.....	71
3.3.1	Κατηγορίες FIR φίλτρων.....	71
3.3.2	Χαρακτηριστικά FIR φίλτρων.....	71
3.3.3	Είδη FIR φίλτρων.....	72
3.3.4	Μηδενισμοί των FIR φίλτρων.....	73
3.3.5	Σχεδίαση FIR ψηφιακών φίλτρων με τη μέθοδο των παραθύρων	74
3.3.6	Σχεδίαση δισδιάστατων FIR φίλτρων με τη μέθοδο των παραθύρων	75
3.4	Επιλογή συνάρτησης Window και τάξης φίλτρου	75
3.4.1	Τάξη φίλτρου.....	76
3.4.2	Συνάρτηση window	76
3.5	Ευστάθεια και Αιτιατότητα	76
4	CHEBYSHEV & BUTTERWORTH.....	77
4.1	Φίλτρα Butterworth	77
4.2	Φίλτρα Chebyshev.....	78
4.3	Χαρακτηριστικά χαμηλοπερατού αναλογικού φίλτρου	81
5	MATLAB.....	86
6	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ-ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ.....	87
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	105

ΛΙΣΤΑ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1.1: Γραφική παράσταση ημιτονοειδούς σήματος..... 10

Εικόνα 1.2:Γραφική παράσταση τετραγωνικού σήματος..... 12

Εικόνα 1.3:Σήμα Διακριτού χρόνου..... 15

Εικόνα 1.4:Ψηφιακό σήμα 15

Εικόνα 1.5:Ψηφιοποίηση σήματος 18

Εικόνα 1.6:Διαφορετικές συναρτήσεις χρόνου με τον ίδιο μετασχηματισμό z 19

Εικόνα 1.7:Μετατροπέας A/D 20

Εικόνα 1.8:Ομοιόμορφη δειγματοληψία αναλογικού σήματος..... 21

Εικόνα 1.9:Κβάντιση και κωδικοποίηση σήματος..... 23

Εικόνα 1.10:Τύποι σημάτων (α) αναλογικό, (β) διακριτού χρόνου, (γ) ψηφιακό..... 25

Εικόνα 2.1: Ορισμός του όρου "φίλτρο" στη νέα ελληνική 26

Εικόνα 2.2:Φορτίο φίλτρου..... 29

Εικόνα 2.3:Αναλογικό φίλτρο 32

Εικόνα 2.4: Ψηφιακό φίλτρο 33

Εικόνα 2.5: Πίνακας φίλτρων 1ης τάξης..... 44

Εικόνα 2.6:Πίνακας φίλτρων 2ης τάξης..... 45

Εικόνα 2.7:Πίνακας φίλτρων 2ης τάξης..... 46

Εικόνα 2.8:Πίνακας φίλτρων 2ης τάξης..... 47

Εικόνα 2.9:Χρονική απόκριση επαναληπτικού φίλτρου 1ου βαθμού για $x_n=(1,0,0,\dots)$ 47

Εικόνα 2.10:Δομικό διάγραμμα μη επαναληπτικού φίλτρου 48

Εικόνα 2.11:Πίνακας ολοδιαβατού φίλτρου 50

Εικόνα 2.12:Πίνακας πολυωνύμων Butterworth για βαθυπερατή συνάρτηση 50

Εικόνα 2.13:Παράδειγμα συχνοτικού περιεχομένου συνδυασμού πληροφορίας (κυανό) και θορύβου (γκρι)..... 52

Εικόνα 2.14:Ιδανική χαρακτηριστική φίλτρου που φιλτράρει εντελώς το θόρυβο..... 52

Εικόνα 2.15:Γραφική παράσταση χαμηλοπερατού φίλτρου 53

Εικόνα 2.16:Χαμηλοπερατό φίλτρο 54

Εικόνα 2.17:Γραφική παράσταση υψηλοπερατού φίλτρου..... 54

Εικόνα 2.18:Υψηλοπερατό φίλτρο 55

Εικόνα 2.19:Γραφική παράσταση ζωνοπερατού φίλτρου 56

Εικόνα 2.20:Γραφική παράσταση ζωνοαπαγορευτικού φίλτρου 56

Εικόνα 2.21:Γραφική παράσταση πολυπερατού φίλτρου 57

Εικόνα 2.22:Εύρος ζώνης σε χαμηλοδιαβατό, ζωνοπερατό, υψηλοπερατό 59

Εικόνα 3.1:Παραμόρφωση πλάτους..... 73

Εικόνα 3.2:Παραμόρφωση συχνότητας 74

Εικόνα 4.1:Χαμηλοπερατό αναλογικό φίλτρο 81

Εικόνα 4.2:Η θέση των πόλων για ένα φίλτρο Chebyshev τρίτης τάξης 83

Εικόνα 4.3:Χαμηλοπερατό φίλτρο Butterworth..... 84

Εικόνα 4.4:Απόλυτη απόκριση ισχύος ενός ψηφιακού φίλτρου βασικής ζώνης 84

Εικόνα 4.5:Κανονικοποιημένη απόκριση ισχύος ενός αναλογικού φίλτρου βασικής ζώνης..... 85

Εικόνα 4.6:Σχετική απόκριση ισχύος ενός ψηφιακού φίλτρου βασικής ζώνης 85

Εικόνα 6.1: Απόκριση πλάτους..... 95

Εικόνα 6.2: Μοναδιαία απόκριση 96

Εικόνα 6.3: Απόκριση φάσης.....	96
Εικόνα 6.4: Χαρακτηριστικά φίλτρου.....	97
Εικόνα 6.5: Απόκριση πλάτους.....	98
Εικόνα 6.6: Μοναδιαία απόκριση	98
Εικόνα 6.7: Απόκριση φάσης.....	99
Εικόνα 6.8: Χαρακτηριστικά φίλτρου.....	99
Εικόνα 6.9: Απόκριση πλάτους.....	100
Εικόνα 6.10: Μοναδιαία απόκριση.....	101
Εικόνα 6.11: Απόκριση φάσης	101
Εικόνα 6.12: Χαρακτηριστικά φίλτρου.....	102

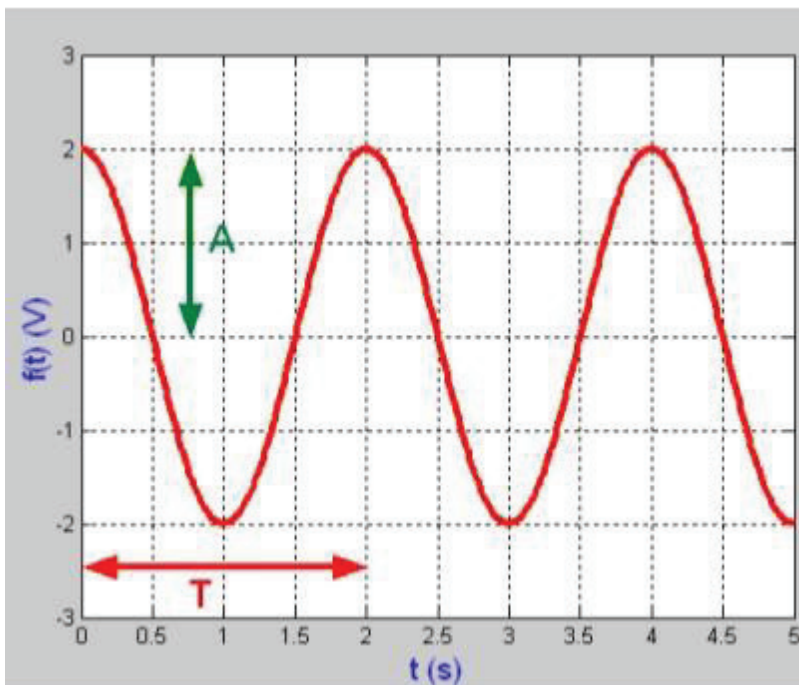
1 ΣΗΜΑΤΑ

Ως σήμα ορίζουμε το σύνολο των τιμών που λαμβάνει μια φυσική ποσότητα. Μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως συνάρτηση ή ακολουθία μιας ή περισσοτέρων ανεξάρτητων μεταβλητών. Τα σήματα περιέχουν πληροφορία σχετικά με την συμπεριφορά ή τη φύση ενός φαινομένου.

Δύο βασικά χαρακτηριστικά των ηλεκτρικών σημάτων είναι η έντασή τους και ο ρυθμός τους. Η ένταση των ηλεκτρικών σημάτων μας διευκολύνει στο να κατατάσσουμε τα σήματα σε ισχυρότερα ή ασθενέστερα. Ο ρυθμός δείχνει την ταχύτητα των σημάτων στον χρόνο, τις εναλλαγές της τιμής των σημάτων κάθε χρονική στιγμή και το κατά πόσο είναι απότομα ή όχι.

Τα σήματα διακρίνονται σε περιοδικά και μη περιοδικά. Ως περιοδικό ορίζεται το σήμα που επαναλαμβάνεται ανά τακτά χρονικά διαστήματα. Η μαθηματική παράσταση ενός περιοδικού σήματος είναι $f(t)=f(t+nT)$. Δηλαδή, ένα σήμα θεωρείται περιοδικό όταν ισχύει η παραπάνω εξίσωση για κάθε χρόνο t και κάθε ακέραιο αριθμό n . Ένα περιοδικό σήμα μπορεί να διακριθεί σε ημιτονοειδές ή σε τετραγωνικό σήμα. Το ημιτονοειδές σήμα αναπαριστά σήμα αναλογικών συστημάτων ενώ το τετραγωνικό συνήθως αναπαριστά σήμα ψηφιακών συστημάτων.

1.1.1 Ημιτονοειδές σήμα



Εικόνα 1.1: Γραφική παράσταση ημιτονοειδούς σήματος

Ισχύει $f(t)=A\cos(2\pi ft+\varphi)$ όπου A : πλάτος (amplitude)

f : συχνότητα (frequency)

φ : φάση (phase)

T ($f=1/T$): περίοδος (period)

Παράμετροι σήματος:

Τιμή κορυφής ή κορυφοτιμή (peak value, V_p)

Τιμή από κορυφή σε κορυφή ή διακορυφοτιμή (peak to peak value, V_{pp})

Απόκλιση (DC offset)

Μέση τιμή (average value, V_{avg})

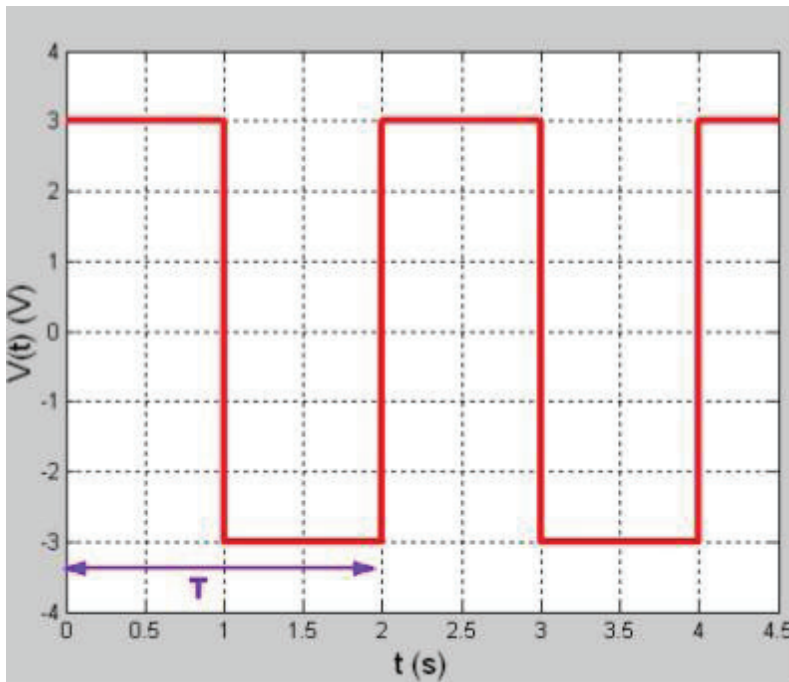
Ενεργός τιμή (root mean square value, rms, V_{rms})

Περίοδος (period, T)

Συχνότητα (frequency, f)

Φάση (phase, φ)

1.1.2 Τετραγωνικό σήμα



Εικόνα 1.2: Γραφική παράσταση τετραγωνικού σήματος

Το σήμα μεταβάλλεται από τη μέγιστη του τιμή στην ελάχιστη σε χρόνο μηδέν (ιδανική περίπτωση). Σε αυτό το παράδειγμα η εξίσωση του σήματος δίνεται από τη σχέση:

$$v(t) = \begin{cases} 3 & \text{για } 0 < t < T/2 \\ -3 & \text{για } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

1.2 Τύποι σημάτων

Τα σήματα χωρίζονται και σε κατηγορίες ανάλογα με τον τύπο και το πλήθος των μεταβλητών. Έτσι, ανάλογα με το αν η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι συνεχής ή διακριτή, έχουμε σήματα συνεχούς ή διακριτού χρόνου. Ανάλογα με το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών έχουμε σήματα μιας μεταβλητής ή διάστασης (μονοδιάστατα, 1-D), δύο μεταβλητών ή διαστάσεων και πολλών μεταβλητών ή διαστάσεων (πολυδιάστατα, N-D). Παράδειγμα μονοδιάστατου σήματος είναι η ομιλία (speech), όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος και η εξαρτημένη μεταβλητή η ακουστική πίεση. Μια εικόνα (φωτογραφία) αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα σήματος δύο διαστάσεων. Εδώ η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η φωτεινότητα της εικόνας και οι δύο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι δύο χωρικές

συντεταγμένες. Τέλος, παράδειγμα σήματος τριών διαστάσεων είναι η ακολουθία εικόνων (video), όπου οι δύο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι χωρικές και η τρίτη είναι ο χρόνος. Η εξαρτημένη μεταβλητή είναι και εδώ η φωτεινότητα της κάθε εικόνας. Καθένα από τα παραπάνω σήματα είναι απαραίτητο να το επεξεργαστούμε με στόχο να βελτιώσουμε την ποιότητά του, να εξάγουμε την χρήσιμη πληροφορία και να εξαλείψουμε κατά το δυνατόν τον θόρυβο, να το αποθηκεύσουμε ή να το μεταδώσουμε. Συνήθως, ως ανεξάρτητη μεταβλητή χρησιμοποιείται ο χρόνος, χωρίς όμως να αποκλείεται η ανεξάρτητη μεταβλητή να είναι κάποιο άλλο φυσικό μέγεθος, όπως για παράδειγμα η απόσταση, η θερμοκρασία ή η πίεση. Παρ' όλα αυτά έχει επικρατήσει να μιλάμε για σήματα διακριτού χρόνου

1.3 Αναλογικά και ψηφιακά σήματα

1.3.1 Αναλογικά

Ένα αναλογικό σήμα είναι μια χρονικά μεταβαλλόμενη τιμή δεδομένων ή όπως είναι ο ορισμός του, μια ομαλά μεταβαλλόμενη τιμή ηλεκτρικής τάσης ή έντασης ρεύματος (δηλ. ένα σήμα με πλάτος χρονικά μεταβαλλόμενο) η οποία μπορεί να περιγραφεί από μια μαθηματική συνάρτηση, με το χρόνο να αποτελεί την ανεξάρτητη και την τιμή του σήματος, κάθε χρονική στιγμή, την εξαρτημένη μεταβλητή. Ένα διακριτό σήμα είναι το αποτέλεσμα που παίρνουμε μέσω της μεθόδου της δειγματοληπτικής μείωσης από το αρχικό αναλογικό σήμα: δηλαδή, η τιμή των δεδομένων σημειώνεται ανά τακτά χρονικά διαστήματα (π.χ. μικροδευτερόλεπτο) και όχι συνεχώς (όπως είναι εκ φύσεως τα μηχανικά κύματα). Στα σήματα συνεχούς χρόνου (continuous time) η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι συνεχής, δηλαδή τα σήματα αυτά ορίζονται για οποιαδήποτε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Η εξαρτημένη μεταβλητή, δηλαδή το πλάτος (amplitude) του σήματος, είναι και αυτή συνεχής. Γι' αυτό και τα σήματα αυτά αναφέρονται και ως σήματα συνεχούς χρόνου συνεχούς πλάτους ή αναλογικά σήματα. Παραδείγματα τέτοιων σημάτων είναι η ομιλία ως συνάρτηση του χρόνου ή η ατμοσφαιρική πίεση ως συνάρτηση του ύψους. Ένα αναλογικό σήμα περιγράφεται ως μια συνάρτηση $x(t)$, όπου t πραγματικός αριθμός.

Αν οι ατομικές τιμές του σήματος αντί να μετρηθούν επακριβώς, επάνω στον άξονα του χρόνου, είναι εναρμονισμένες με κάποια ορισμένη ακρίβεια, τότε η ροή δεδομένων που προκύπτει είναι το ψηφιακό σήμα. Η διαδικασία προσέγγισης αυτής της ακρίβειας (δηλ. μιας συγκεκριμένης τιμής), μέσα από ένα σταθερό αριθμό ψηφίων (δηλ. bit) ονομάζεται ψηφιοποίηση.

1.3.2 Ψηφιακά

Σε γενικές γραμμές, ένα ψηφιακό σήμα είναι ένα ψηφιοποιημένο σήμα διακριτού χρόνου. Το διακριτό σήμα είναι το αποτέλεσμα της επεξεργασίας ενός αναλογικού σήματος με τη μέθοδο της δειγματοληπτικής μείωσης.

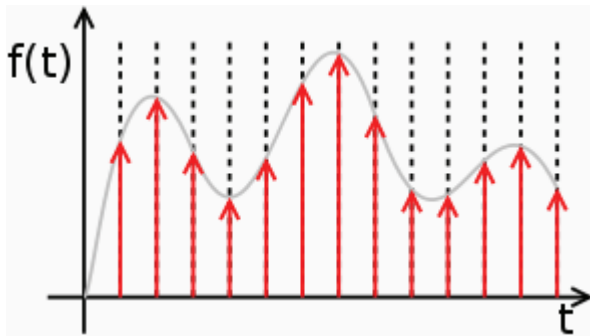
Ο όρος ψηφιακό σήμα αναφέρεται σε περισσότερες από μια έννοιες. Μπορεί να αναφέρεται σε ένα σήμα διακριτού χρόνου το οποίο μπορεί να πάρει συγκεκριμένες (διακριτές) τιμές στον άξονα του χρόνου. Σε αυτή τη περίπτωση μιλάμε για ένα σήμα το οποίο παράγεται μέσω μιας μεθόδου ψηφιακής διαμόρφωσης και θεωρείται περισσότερο ως αναλογικό σήμα (δηλ. ένα επεξεργασμένο αναλογικό σήμα για τη μετατροπή του σε ψηφιακό).

Μπορεί επίσης να αναφέρεται στην κυματομορφή ενός σήματος συνεχούς χρόνου σε ένα ψηφιακό σύστημα το οποίο μπορεί να αναπαρασταθεί σε μια αλληλουχία από bits. Σε αυτή τη περίπτωση μιλάμε για ένα εξ ολοκλήρου ψηφιακό σήμα.

Στα σήματα διακριτού χρόνου (discrete time) η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι διακριτή, δηλαδή τα σήματα αυτά ορίζονται μόνο για συγκεκριμένες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής. Με άλλα λόγια, η ανεξάρτητη μεταβλητή παίρνει τιμές από ένα διακριτό σύνολο τιμών. Η εξαρτημένη μεταβλητή, δηλαδή το πλάτος του σήματος, είναι συνεχής. Γι' αυτό και τα σήματα αυτά αναφέρονται και ως σήματα διακριτού χρόνου συνεχούς πλάτους. Παραδείγματα τέτοιων σημάτων είναι ο δείκτης Dow-Jones ως συνάρτηση του χρόνου (π.χ. ανά ημέρα) ή το κατά κεφαλήν εισόδημα ως συνάρτηση του τόπου διαμονής. Στη περίπτωση που και η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνει διακριτές τιμές, τότε μιλάμε για σήματα διακριτού χρόνου διακριτού πλάτους ή ψηφιακά σήματα. Ένα σήμα διακριτού χρόνου περιγράφεται ως $x(n)$, όπου n ακέραιος. Πρόκειται για μία ακολουθία (sequence) αριθμών, γι' αυτό συχνά αναφερόμαστε στο σήμα αυτό και ως ακολουθία.

Η Ψηφιακή Επανάσταση έχει αυξήσει κατακόρυφα τη χρήση ψηφιακών σημάτων. Οι περισσότερες-αν όχι όλες, οι σύγχρονες συσκευές ειδικότερα αυτές που συνδέονται στους υπολογιστές, χρησιμοποιούν ψηφιακά σήματα για την αναπαράσταση σημάτων τα οποία παραδοσιακά αναπαριστώνται ως σήματα συνεχούς χρόνου. Κινητά τηλέφωνα, συσκευές αναπαραγωγής βίντεο και ήχου, ψηφιακές φωτογραφικές μηχανές είναι μερικά παραδείγματα. Οι τεχνικές ψηφιακής επεξεργασίας σημάτων χρησιμοποιούνται σήμερα σε πολλές περιοχές της επιστήμης και της τεχνολογίας, όπως για παράδειγμα τις επικοινωνίες, την αεροναυτική, τη σεισμολογία, τη βιοϊατρική τεχνολογία.

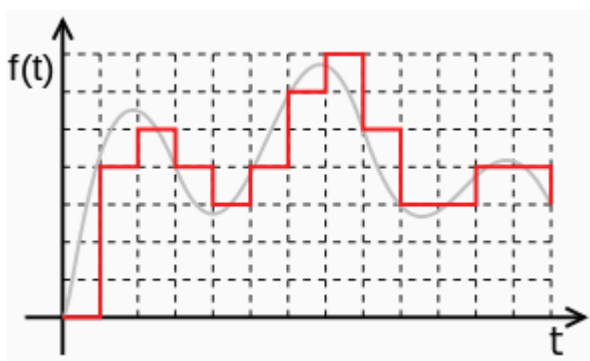
Σχεδόν σε όλες τις εφαρμογές, τα ψηφιακά σήματα αναπαριστώνται μέσω των δυαδικών αριθμών, έτσι ώστε να μπορούν να μετρηθούν σε bit. Επειδή 7 bits (δυαδικά ψηφία) μπορούν να καταγράψουν 128 διακριτές τιμές (0 έως 127), αυτό το σύστημα είναι το πιο ικανό από οποιοδήποτε άλλο για να εκφραστεί ένα τεράστιο πλήθος τιμών.



Εικόνα 1.3:Σήμα Διακριτού χρόνου

Το σήμα του ρολογιού είναι ένα ειδικό ψηφιακό σήμα το οποίο χρησιμοποιείται για τον συγχρονισμό των ψηφιακών κυκλωμάτων. Στην εικόνα1.3 φαίνεται η συγκεκριμένη κυματομορφή. Οι λογικές αλλαγές ενεργοποιούνται είτε από την αύξηση είτε από την μείωση του σήματος. Στο διπλανό διάγραμμα βλέπουμε ένα παράδειγμα του πρακτικού παλμού. Έτσι, όταν λέμε:

- Αύξηση του σήματος : εννοούμε την διαδικασία της μετάβασης από χαμηλή σε υψηλή τάση.
- Μείωση του σήματος : εννοούμε την διαδικασία της μετάβασης από υψηλή σε χαμηλή τάση.



Εικόνα 1.4:Ψηφιακό σήμα

1.4 Διαφορές αναλογικών και ψηφιακών σημάτων

Η βασική διαφορά που υφίσταται ανάμεσα στα αναλογικά και στα ψηφιακά σήματα, είναι το είδος των τιμών που μπορεί να λάβει το πλάτος του σήματος. Στην περίπτωση των αναλογικών σημάτων, τα οποία αναπαρίστανται ως χρονικά μεταβαλλόμενες κυματομορφές, το πλάτος του σήματος σε κάθε χρονική στιγμή, μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή, ανάμεσα σε δύο ακραίες τιμές οι οποίες υπαγορεύουν και το μέγιστο πλάτος του σήματος. Αντίθετα στην περίπτωση των ψηφιακών σημάτων, το πλάτος του σήματος μπορεί να πάρει μόνο μερικές διακριτές τιμές. Στις πιο πολλές περιπτώσεις το ψηφιακό σήμα μπορεί να έχει μόνο δύο τιμές τάσης, εκ των οποίων η μία τιμή αναπαριστά το δυαδικό 0, ενώ η άλλη, το δυαδικό 1.

Χαρακτηριστικό των ψηφιακών σημάτων είναι το μεγάλο φασματικό τους εύρος, με αποτέλεσμα να μεταδίδονται δύσκολα μέσα από το τηλεφωνικό δίκτυο. Ιδιαίτερη περίπτωση αποτελούν τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα των ορατών συχνοτήτων, που διακινούνται με οπτικές ίνες.

1.5 Η έννοια της συχνότητας στα σήματα

Από τη Φυσική γνωρίζουμε ότι η συχνότητα σχετίζεται με ένα τύπο περιοδικής κίνησης, η οποία ονομάζεται αρμονική ταλάντωση, και η οποία περιγράφεται από ημιτονοειδείς συναρτήσεις. Η έννοια της συχνότητας σχετίζεται άμεσα με την έννοια του χρόνου, αφού η διάσταση αυτής είναι το αντίστροφο του χρόνου. Κατά συνέπεια, η φύση του χρόνου (συνεχής ή διακριτή) αναμένεται να επηρεάζει την φύση της συχνότητας

Ο πιο συχνός σκοπός της ανάλυσης σημάτων στο πεδίο της συχνότητας είναι η ανάλυση ιδιοτήτων του σήματος. Ο μηχανικός μπορεί να μελετήσει το φάσμα των συχνοτήτων για να εντοπίσει ποιες συχνότητες υπάρχουν στο σήμα εισόδου.

Εκτός από την πληροφορία της συχνότητας συχνά χρειάζεται και η πληροφορία της φάσης. Αυτή μπορεί να δοθεί από τον μετασχηματισμό Φουριέ και το πώς μεταβάλλεται μαζί με την συχνότητα μπορεί να είναι σημαντικό σε πολλές εφαρμογές.

Το φιλτράρισμα μπορεί να γίνει με τον μετασχηματισμό στο πεδίο της συχνότητας, εφαρμογή του φίλτρου και μετασχηματισμό πίσω στο πεδίο του χρόνου. Αυτή είναι μια γρήγορη λειτουργία με πολυπλοκότητα $O(n \log n)$ και μπορεί στην πράξη να αποδώσει όλα τα φίλτρα.

Υπάρχουν κάποιοι μετασχηματισμοί στο πεδίο της συχνότητας που χρησιμοποιούνται συχνά. Για παράδειγμα, το κέστρον (cepstrum) μετατρέπει ένα σήμα στο πεδίο της συχνότητας μέσω

του μετασχηματισμού Φουριέ, παίρνει τον λογάριθμο και στη συνέχεια εφαρμόζει άλλον έναν μετασχηματισμό Φουριέ. Αυτό δίνει έμφαση στις συχνότητες με μικρότερο μέγεθος ενώ διατηρεί τη διάταξη των μεγεθών σε όλες τις συχνότητες.

Η ανάλυση στο πεδίο της συχνότητας αποκαλείται επίσης ανάλυση φάσματος (spectrum analysis, spectral analysis)

1.6 Μετασχηματισμός Z

Αν και τα αναλογικά φίλτρα συνήθως αναλύονται με βάση τη συνάρτηση μεταφοράς τους στο πεδίο των μετασχηματισμών Laplace, τα ψηφιακά φίλτρα αναλύονται στο πεδίο των μετασχηματισμών Z. Ένα ψηφιακό φίλτρο μπορεί να περιγραφεί στο πεδίο Z από το χαρακτηριστικό σύνολο μηδενικών και πόλων. Το πεδίο Z παρέχει έναν τρόπο αντιστοίχισης της ψηφιακής συχνότητας (δείγματα/δευτερόλεπτο) σε πραγματικές και φανταστικές συνιστώσες z , όπου για συνεχή περιοδικά σήματα και ω (είναι η ψηφιακή συχνότητα). Αυτό είναι χρήσιμο για την οπτικοποίηση της απόκρισης συχνότητας ενός ψηφιακού συστήματος ή σήματος.

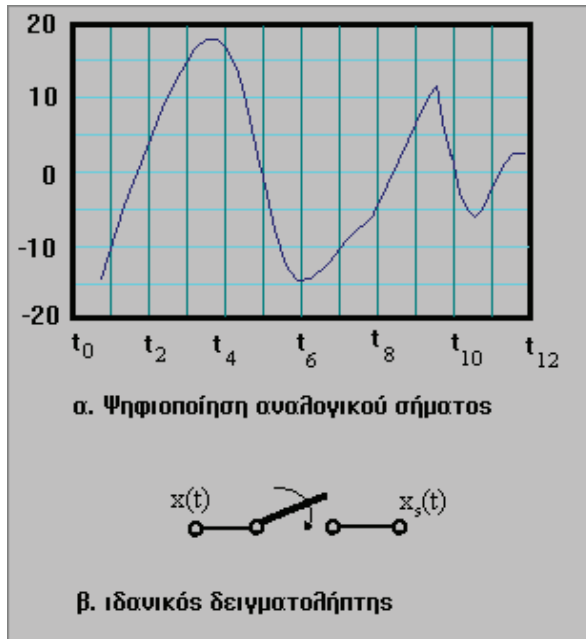
Ο μετασχηματισμός $-z$ (MZ) ενός σήματος $x(n)$ διακριτού χρόνου ορίζεται ως:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

Όπου z μια μιγαδική μεταβλητή.

Τα σήματα που συνήθως παίρνουμε είναι υπό αναλογική μορφή, δηλ. υπό συνεχή μορφή (π.χ. τηλεόραση, ραδιοφωνία, καρδιογραφήματα, εγκεφαλογραφήματα, σήματα από σεισμική δόνηση, κ.τ.λ.). Τα σήματα αυτά μπορούμε να τα μετατρέψουμε σε μια ακολουθία αριθμών. Κάθε αριθμός παριστάνει την ανάγνωση ή το πλάτος του σήματος σε ορισμένη χρονική στιγμή. Τα σημεία του χρόνου διαλέγονται ισαπέχοντα.

Η μέθοδος της μετατροπής ενός συνεχούς σήματος σε μια ακολουθία αριθμών σε ίσα χρονικά διαστήματα, ονομάζεται κβαντοποίηση ή ψηφιοποίηση. Το σχήμα (Εικόνα 1.5) δείχνει ένα σήμα που ψηφιοποιήθηκε. Η ψηφιοποίηση έγινε και κατά τον κατακόρυφο άξονα, που είναι το πλάτος του σήματος και κατά το χρόνο. Η ψηφιοποίηση ως πλάτος γίνεται με αναλογικό ψηφιακό μετατροπέα, ενώ ως προς το χρόνο γίνεται με δειγματολήπτη.



Εικόνα 1.5: Ψηφιοποίηση σήματος

Όταν η είσοδος του δειγματολήπτη είναι συνεχής συνάρτηση $x(t)$, η έξοδος του δειγματολήπτη θα είναι μια σειρά μοναδιαίων παλμών διαμορφωμένων κατά πλάτος που σχετίζονται με το $x(t)$, ως εξής:

$$x_s(t) = x(t) x_D(t)$$

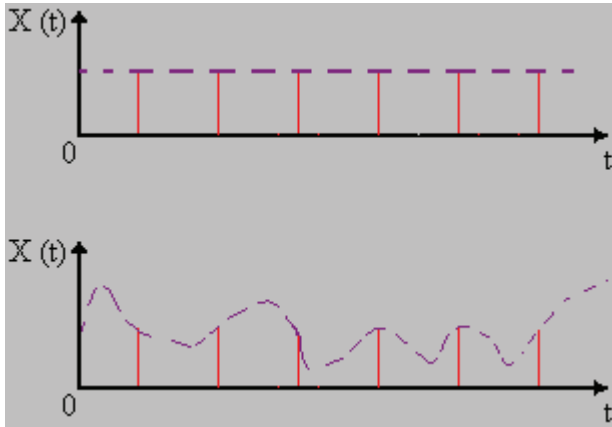
όπου η $x_D(t)$ ονομάζεται συνάρτηση Dirac ή συνάρτηση χτένας. Η συνάρτηση αυτή δίνεται από τη σχέση:

$$x_D = \sum \delta(t - nT)$$

όπου $\delta(t - nT)$ παριστάνει το μοναδιαίο παλμό, μοναδιαίου εμβαδού που εμφανίζεται στο χρόνο $t = nT$.

Ένα από τα μειονεκτήματα του μετασχηματισμού z είναι ότι δίνει πληροφορία για τη συνεχή συνάρτηση χρόνου μόνο κατά τις χρονικές στιγμές των δειγματοληψιών, δηλ. η $X(z)$ ορίζει μόνο τη $x_s(t)$. Αν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι υψηλή, τουλάχιστον διπλάσια της υψηλότερης συχνότητας του σήματος (θεώρημα της δειγματοληψίας του Nyquist), το συνεχές σήμα αποκαλύπτεται χωρίς παραμόρφωση από τον ιδανικό δειγματολήπτη, εφόσον είναι περιορισμένης ζώνης. Δηλ. ο μετασχηματισμός z , $X(z)$, μεταφέρει όλες τις πληροφορίες που έχει ο μετασχηματισμός Laplace. Αν, όμως, δε γνωρίζουμε τίποτα από τα χαρακτηριστικά της

$x(t)$, ο αντίστροφος μετασχηματισμός δεν είναι ιδανικός. Σ' αυτή την περίπτωση η διακεκριμένη συνάρτηση του χρόνου $x_S(t)$, που λαμβάνουμε από τη $X(z)$, παριστάνει οποιαδήποτε συνάρτηση $x(t)$ η οποία έχει την ίδια τιμή της $x_S(t)$ στους χρόνους της δειγματοληψίας.

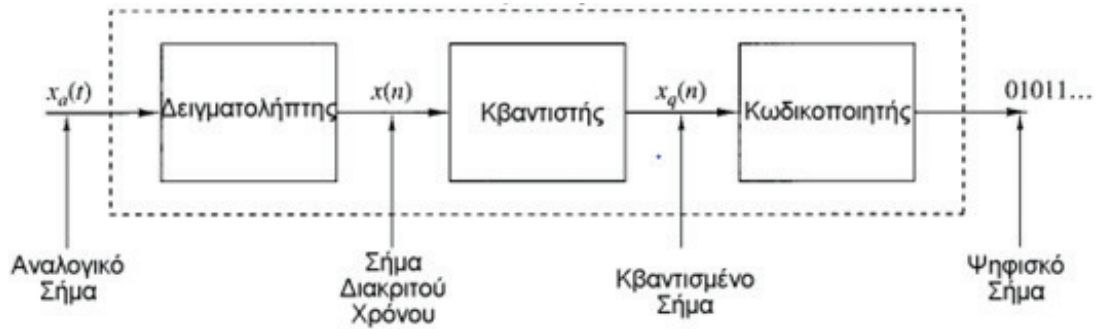


Εικόνα 1.6: Διαφορετικές συναρτήσεις χρόνου με τον ίδιο μετασχηματισμό z

Στο σχήμα (Εικόνα 1.6) φαίνονται δύο τελείως διαφορετικές συναρτήσεις χρόνου με τον ίδιο μετασχηματισμό z . Ο μόνος τρόπος να ξεχωρίσουμε τις δύο αυτές συναρτήσεις, από τη σκοπιά του μετασχηματισμού z , είναι να προσδιορίσουμε τις κυματομορφές των σημάτων μεταξύ των δειγματοληψιών. Για το σκοπό αυτό έχουν αναπτυχθεί αρκετές μέθοδοι. Οι πιο διαδεδομένες είναι η μέθοδος των υποπολλαπλασίων δειγματοληψιών και ο τροποποιημένος μετασχηματισμός z .

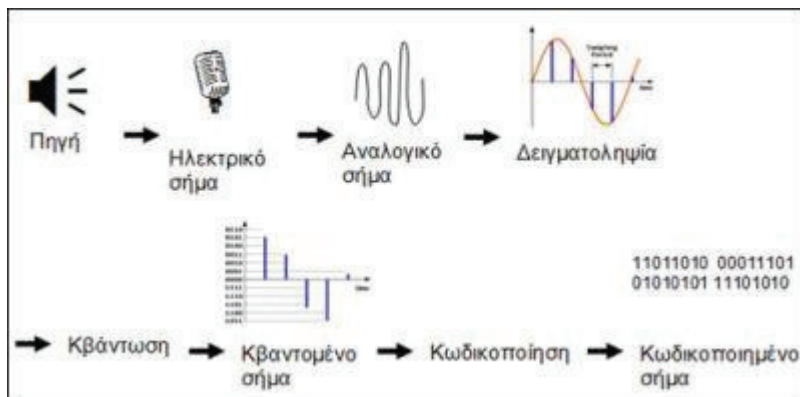
1.7 Μετατροπή σήματος από αναλογικό σε ψηφιακό και αντίστροφα

Τα περισσότερα σήματα που παρουσιάζουν πρακτικό ενδιαφέρον, όπως για παράδειγμα η ομιλία, τα βιολογικά σήματα, τα σεισμικά σήματα, κ.ά., είναι αναλογικά. Για να επεξεργαστούμε αναλογικά σήματα με ψηφιακά μέσα, απαιτείται η μετατροπή αυτών σε ψηφιακή μορφή, δηλαδή η μετατροπή τους σε μία ακολουθία αριθμών πεπερασμένης ακρίβειας. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται μετατροπή αναλογικού-σε-ψηφιακό (analog-to-digital conversion, A/D) και τα αντίστοιχα κυκλώματα ονομάζονται μετατροπείς αναλογικού-σε-ψηφιακό (analog-to-digital converters, ADCs). Η αντίστροφη διαδικασία της μετατροπής ενός ψηφιακού σήματος σε αναλογικό είναι γνωστή ως μετατροπή ψηφιακού-σε-αναλογικό (digital-to-analog conversion, D/A) και γίνεται με την βοήθεια κυκλωμάτων τα οποία ονομάζονται μετατροπείς ψηφιακού-σε-αναλογικό (digital-to-analog converters, DACs).



Εικόνα 1.7: Μετατροπές A/D

1.7.1 Βήματα μετατροπής



1. Δειγματοληψία (sampling): Αυτή είναι η διαδικασία μετατροπής ενός σήματος συνεχούς χρόνου σε ένα σήμα διακριτού χρόνου, παίρνοντας δείγματα του σήματος συνεχούς χρόνου σε διακριτές στιγμές του χρόνου.

Η δειγματοληψία συνήθως γίνεται σε δύο στάδια, τη μετατροπή σε διακριτές τιμές (discretization) και τον κβαντισμό (quantization). Στο πρώτο στάδιο, το πεδίο των σημάτων χωρίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας και ο κβαντισμός προκύπτει από την αντικατάσταση ενός σήματος από το αντίστοιχο σήμα που αναπαριστά την κλάση ισοδυναμίας του. Στο στάδιο του κβαντισμού οι τιμές του σήματος αναπαριστώνται από τιμές από ένα πεπερασμένο σύνολο.

Η δειγματοληψία ενός αναλογικού σήματος $x_a(t)$ επιτυγχάνεται παίρνοντας δείγματα αυτού ανά T δευτερόλεπτα. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται από την σχέση:

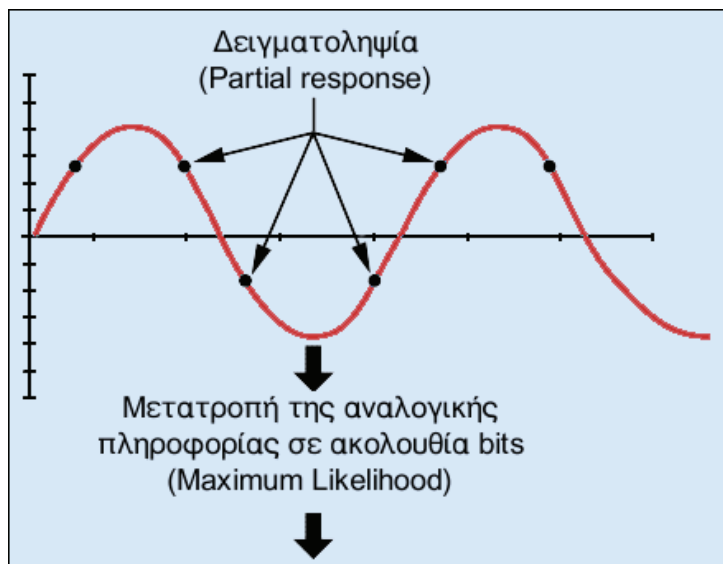
$$x(n) = x_a(nT), -\infty < n < \infty$$

Το θεώρημα της δειγματοληψίας, το οποίο απαντά στο εξής ερώτημα: Ποιός ο ρυθμός δειγματοληψίας F_s για τη σωστή αναπαράσταση ενός αναλογικού σήματος το οποίο μας δίνεται;

Δηλαδή, πόσο συχνά πρέπει να παίρνουμε δείγματα ώστε να έχουμε ένα πιστό αντίγραφο του αναλογικού σήματος; Η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα δόθηκε αρχικά από τον Nyquist (1928) και στη συνέχεια από τον Shannon (1949) και αποτελεί το λεγόμενο θεώρημα δειγματοληψίας ή θεώρημα του Shannon, διατυπώνεται δε ως εξής:

Η συχνότητα F_s , με την οποία λαμβάνονται τα δείγματα ενός σήματος, πρέπει να είναι τουλάχιστον διπλάσια από την υψηλότερη συχνότητα F_{\max} που περιέχεται στο σήμα, δηλαδή $F_s \geq 2F_{\max}$

Με άλλα λόγια, το θεώρημα δειγματοληψίας μας λέει πως για να μη χαθεί πληροφορία θα πρέπει να παίρνουμε τουλάχιστον δύο δείγματα ανά περίοδο (της υψηλότερης συχνότητας του σήματος). Για παράδειγμα, αν θελήσουμε να ψηφιοποιήσουμε ένα σήμα ομιλίας και χρησιμοποιούμε μικρόφωνο το οποίο λειτουργεί για συχνότητες μεταξύ 300 Hz και 3 kHz, τότε η μικρότερη συχνότητα δειγματοληψίας που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε είναι 6 kHz.



Εικόνα 1.8: Ομοιόμορφη δειγματοληψία αναλογικού σήματος

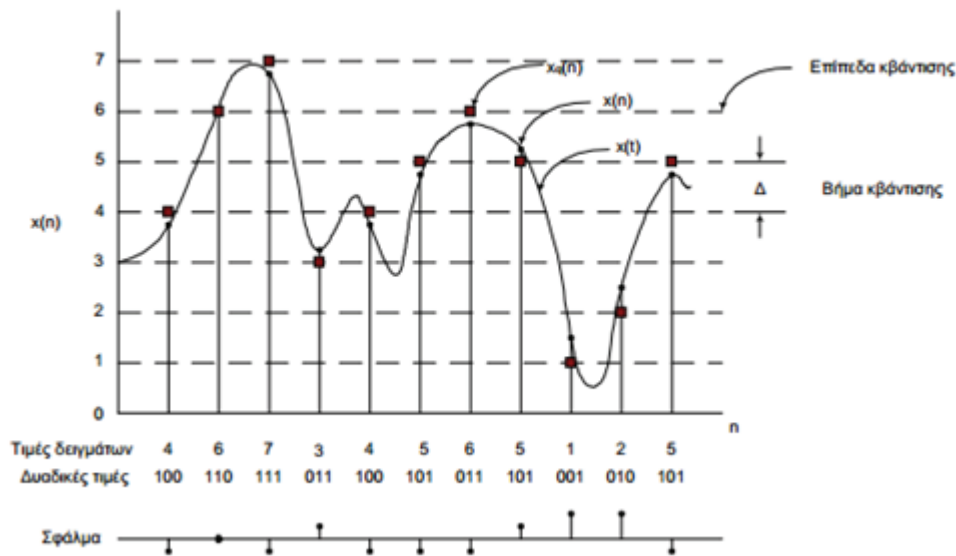
2. Κβάντιση (quantisation):

Κβάντιση (quantisation) ονομάζεται η διαδικασία της μετατροπής ενός σήματος διακριτού χρόνου συνεχούς-πλάτους σ' ένα ψηφιακό σήμα, εκφράζοντας την τιμή κάθε δείγματος ως ένα αριθμό με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων (αντί για άπειρο πλήθος ψηφίων που απαιτείται για κάθε συνεχούς-πλάτους τιμή). Το σφάλμα που υπεισέρχεται από την αναπαράσταση του σήματος συνεχών-τιμών με ένα πεπερασμένο πλήθος διακριτών-τιμών, ονομάζεται σφάλμα κβάντισης (quantisation error) ή θόρυβος κβάντισης (quantisation noise). Αν $x(n)$ είναι τα δείγματα εισόδου στον κβαντιστή και $x_q(n)$ η ακολουθία των κβαντισμένων δειγμάτων της

εξόδου του κβαντιστή, τότε το σφάλμα κβάντισης είναι η ακολουθία $e_q(n)$, η οποία ορίζεται ως η διαφορά της πραγματικής τιμής από την κβαντισμένη τιμή, δηλαδή $e_q(n) = x(n) - x_q(n)$. Για τον περιορισμό κάθε δείγματος στο επιθυμητό πλήθος ψηφίων, χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο της στρογγυλοποίησης (rounding) και όχι της αποκοπής (truncation). Οι τιμές τις οποίες επιτρέπεται να παίρνει ένα ψηφιακό σήμα, αποτελούν τα λεγόμενα επίπεδα κβάντισης (quantisation levels), ενώ η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών επιπέδων κβάντισης ονομάζεται βήμα κβάντισης (quantisation step) ή διακριτική ικανότητα ή ανάλυση (resolution). Κατά την στρογγυλοποίηση, ο κβαντιστής αποδίδει στη συνεχή τιμή $x(n)$ την τιμή του πλησιέστερου επιπέδου κβάντισης. Έτσι, το σφάλμα κβάντισης $e_q(n)$ κυμαίνεται στην περιοχή $-\Delta/2$ και $\Delta/2$, δηλαδή $-\frac{\Delta}{2} \leq e_q(n) \leq \frac{\Delta}{2}$. Το βήμα κβάντισης Δ ορίζεται ως $\Delta = (x_{\max} - x_{\min}) / (L - 1)$, όπου x_{\max} , x_{\min} είναι η μεγαλύτερη και η μικρότερη τιμή του $x(n)$ αντίστοιχα, και L το πλήθος των επιπέδων κβάντισης. Η διαφορά $x_{\max} - x_{\min}$ αποτελεί τη δυναμική περιοχή (dynamic range) του σήματος. Αν η δυναμική περιοχή του σήματος είναι καθορισμένη, τότε αύξηση του πλήθους των επιπέδων κβάντισης L , συνεπάγεται την μείωση του βήματος κβάντισης. Επομένως, το σφάλμα κβάντισης μειώνεται, δηλαδή, αυξάνεται η ακρίβεια του κβαντιστή. Τα επίπεδα κβάντισης L είναι συνάρτηση του πλήθους b των δυαδικών ψηφίων (bits) της λέξης που χρησιμοποιούμε για την αναπαράσταση κάθε δείγματος. Αποδεικνύεται ότι για ημιτονοειδή σήματα, ο λόγος του σήματος προς τον θόρυβο κβάντισης αυξάνεται κατά περίπου 6dB για κάθε επιπλέον bit που προστίθεται στο μήκος λέξης, δηλαδή για κάθε διπλασιασμό των επιπέδων κβάντισης.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι η κβάντιση αναλογικών σημάτων οδηγεί πάντοτε σε απώλεια πληροφορίας, εξαιτίας της ασάφειας που αυτή εισάγει. Πράγματι, η κβάντιση είναι μία μη-αντιστρεπτή διαδικασία, αφού όλα τα δείγματα σε απόσταση $\Delta/2$ γύρω από ένα επίπεδο κβάντισης, αντιπροσωπεύονται από την ίδια τιμή. Συνεπώς, δεν μπορούμε ποτέ να εξαλείψουμε τον θόρυβο κβάντισης, παρά μόνον να τον μειώσουμε αυξάνοντας το επίπεδο κβάντισης L .

3. Κωδικοποίηση (coding): Κατά την διαδικασία της κωδικοποίησης σ' ένα μετατροπέα αναλογικού-σε-ψηφιακό, ένας μοναδικός δυαδικός αριθμός εκχωρείται σε κάθε επίπεδο κβάντισης. Αν έχουμε L επίπεδα κβάντισης, χρειαζόμαστε τουλάχιστον L διαφορετικούς δυαδικούς αριθμούς.



Εικόνα 1.9:Κβάντιση και κωδικοποίηση σήματος

1.8 Ψηφιακή επεξεργασία σήματος

Η Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος (Digital signal processing ή DSP) ασχολείται με την αναπαράσταση σημάτων διακριτού χρόνου ως ακολουθίες αριθμών ή συμβόλων, καθώς και με την επεξεργασία των σημάτων αυτών, την ανάλυση, τροποποίηση και εξαγωγή πληροφοριών από αυτά, με την βοήθεια ψηφιακών επεξεργαστών. Η ψηφιακή επεξεργασία σήματος και η αναλογική επεξεργασία σήματος είναι υποπεδία της επεξεργασίας σήματος. Κάποια πεδία της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος είναι η επεξεργασία σημάτων ήχου, η επεξεργασία σημάτων φωνής, η επεξεργασία σημάτων από σόναρ, ραντάρ και συστοιχίες αισθητήρων, η εκτίμηση φάσματος (spectral estimation), η στατιστική επεξεργασία σήματος, η ψηφιακή επεξεργασία εικόνας, η επεξεργασία σήματος στις τηλεπικοινωνίες, ο έλεγχος συστημάτων, η επεξεργασία βιοϊατρικών σημάτων και η επεξεργασία σεισμικών δεδομένων.

Περιπτώσεις κατά τις οποίες θέλουμε να αφαιρέσουμε το θόρυβο από ένα σήμα ή να βρούμε τον μετασχηματισμό Fourier κάποιων δεδομένων ή να μετατρέψουμε ένα σήμα σε μια μορφή πιο κατάλληλη για επεξεργασία και ανάλυση της πληροφορίας που εμπεριέχει, αποτελούν παραδείγματα της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος. Αυτή χρησιμοποιείται όλο και περισσότερο σε πολλές περιοχές εφαρμογών όπου παραδοσιακά χρησιμοποιούνταν αναλογικές μορφές επεξεργασίας, αλλά και σε νέες εφαρμογές στις οποίες οι αναλογικές μέθοδοι είναι δύσκολο ή και αδύνατο να χρησιμοποιηθούν. Το γεγονός αυτό οφείλεται στα πλεονεκτήματα που παρουσιάζει η ψηφιακή επεξεργασία σήματος.

Υπάρχουν πολλοί λόγοι για τους οποίους θα προτιμούσαμε την ψηφιακή επεξεργασία ενός σήματος έναντι της αναλογικής. Πρώτον, ένα ψηφιακό προγραμματιζόμενο σύστημα παρουσιάζει μεγάλη ευελιξία στην τροποποίηση των πράξεων ψηφιακής επεξεργασίας με μια απλή μετατροπή του προγράμματος. Μια τέτοια τροποποίηση ενός αναλογικού συστήματος συνεπάγεται την επανασχεδίαση του κυκλώματος και τον συνεπακόλουθο έλεγχο και επιβεβαίωση (testing and verification) της ορθής λειτουργίας του.

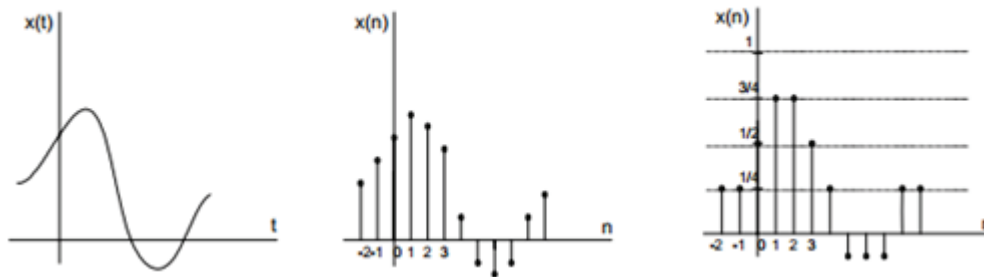
Η ακρίβεια (accuracy) παίζει επίσης πολύ σπουδαίο ρόλο. Οι ανοχές των στοιχείων των αναλογικών κυκλωμάτων καθιστούν δύσκολο τον προσδιορισμό της ακρίβειας ενός αναλογικού συστήματος επεξεργασίας. Στην περίπτωση ενός ψηφιακού συστήματος, ο έλεγχος των προδιαγραφών από άποψη ακρίβειας είναι πολύ πιο εύκολος.

Τα ψηφιακά σήματα αποθηκεύονται σε μαγνητικά ή οπτικά μέσα (π.χ. μαγνητικούς ή οπτικούς δίσκους, ταινίες, κ.ά.) χωρίς υποβάθμιση της πιστότητάς τους, πέραν αυτής που έχει υπεισέλθει εξαιτίας της διαδικασίας μετατροπής τους από αναλογικά σε ψηφιακά. Έτσι, δίνεται η δυνατότητα μεταφοράς και επεξεργασίας τέτοιων σημάτων σε μη πραγματικό χρόνο. Επιπλέον, δίνεται η δυνατότητα εφαρμογής πιο περίπλοκων αλγορίθμων επεξεργασίας σήματος. Συνήθως η υλοποίηση μαθηματικών πράξεων μεγάλης ακρίβειας είναι δύσκολο να γίνει σε σήματα τα οποία βρίσκονται σε αναλογική μορφή, πράγμα όμως που είναι συνηθισμένο και εύκολο για ένα ψηφιακό σήμα το οποίο επεξεργαζόμαστε με έναν υπολογιστή και με κατάλληλο λογισμικό.

Σε πολλές περιπτώσεις, η ψηφιακή επεξεργασία ενός σήματος είναι χαμηλότερου κόστους από την αντίστοιχη αναλογική. Αυτό μπορεί να οφείλεται είτε στο ότι το υλικό (hardware) σήμερα είναι φθηνότερο, είτε στην ευελιξία που παρέχεται λόγω της ψηφιακής υλοποίησης.

Αποτέλεσμα των πλεονεκτημάτων της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος είναι η διαρκώς αυξανόμενη χρήση της σε όλο και περισσότερους τομείς εφαρμογών, όπως στην επεξεργασία ομιλίας, στη μετάδοση σήματος σε τηλεφωνικά κανάλια, στη σεισμολογία, στη γεωφυσική, στην ιατρική, στην εξερεύνηση του διαστήματος, στη μετεωρολογία, κα.

Φυσικά, η ψηφιακή επεξεργασία σήματος έχει και τα όριά της, τα οποία οφείλονται στους περιορισμούς που τίθενται στην ταχύτητα λειτουργίας των μετατροπέων αναλογικού σήματος σε ψηφιακό, καθώς και στους ίδιους τους ψηφιακούς επεξεργαστές σήματος. Έτσι, σήματα με εξαιρετικά μεγάλο εύρος συχνοτήτων, για παράδειγμα σήματα με εύρος συχνοτήτων της τάξεως των 100 MHz, υφίστανται επεξεργασία ακόμη και σήμερα με αναλογικές μεθόδους.

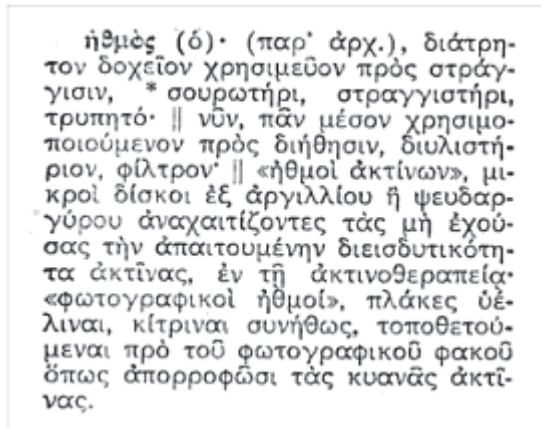


Εικόνα 1.10: Τύποι σημάτων (α) αναλογικό, (β) διακριτού χρόνου, (γ) ψηφιακό

Ο σκοπός της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος συνήθως είναι η μέτρηση, το φιλτράρισμα ή η συμπίεση συνεχόμενων αναλογικών φυσικών σημάτων. Το πρώτο βήμα συνήθως είναι η μετατροπή του σήματος από αναλογικό σε ψηφιακό, μέσω δειγματοληψίας και κβάντισης σήματος (sampling) από έναν μετατροπέα από αναλογικό σήμα σε ψηφιακό (analog-to-digital converter, ADC), ο οποίος μετατρέπει το αναλογικό σήμα σε μια ακολουθία από αριθμούς. Συχνά όμως το ζητούμενο σήμα εξόδου είναι επίσης αναλογικό, επομένως χρειάζεται ένας μετατροπέας από ψηφιακό σήμα σε αναλογικό (digital-to-analog converter, DAC). Αν και αυτή η διαδικασία μπορεί να είναι πιο πολύπλοκη σε σχέση με την αναλογική επεξεργασία και έχει διακριτό πεδίο τιμών, η χρήση υπολογιστικής ισχύος στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος έχει πολλά πλεονεκτήματα σε σχέση με την αναλογική επεξεργασία σήματος σε πολλές εφαρμογές, όπως ο εντοπισμός και η διόρθωση λαθών στις επικοινωνίες και η συμπίεση δεδομένων.

Οι αλγόριθμοι DSP εκτελούνται από παλιά σε υπολογιστές, σε εξειδικευμένους επεξεργαστές που ονομάζονται ψηφιακοί επεξεργαστές σήματος σε υλικό που κατασκευάζεται ειδικά για αυτόν τον σκοπό, όπως τα ολοκληρωμένα κυκλώματα εφαρμογών (application-specific integrated circuits, ASIC). Σήμερα χρησιμοποιούνται και άλλες τεχνολογίες για την ψηφιακή επεξεργασία σήματος όπως οι ισχυροί μικροεπεξεργαστές γενικής χρήσης, οι συστοιχίες επιτόπια προγραμματιζόμενων πυλών (FPGA), οι ψηφιακοί ελεγκτές σήματος (κυρίως σε εφαρμογές στη βιομηχανία, όπως ο έλεγχος κινητήρων) και οι επεξεργαστές ροής (stream processors).

2 ΦΙΛΤΡΑ



Εικόνα 2.1: Ορισμός του όρου "φίλτρο" στη νέα ελληνική

Η εμφάνιση των ψηφιακών φίλτρων άρχισε στα μέσα της δεκαετίας του 60, όταν οι ψηφιακοί υπολογιστές έγιναν προσιτοί για σοβαρή ερευνητική εργασία. Ο μετασχηματισμός όμως z που είναι το βασικό εργαλείο των ψηφιακών φίλτρων ήταν γνωστός αρκετά χρόνια πριν.

Τα ψηφιακά φίλτρα κάνουν την ίδια δουλειά που κάνουν και τα αναλογικά, με τη διαφορά ότι η αναλογική προσέγγιση, σε μερικές περιπτώσεις είναι δύσκολο ή ακατόρθωτο να πραγματοποιηθεί.

Η χρήση των ψηφιακών φίλτρων έχει πολλά πλεονεκτήματα, όπως τέλεια αναπαραγωγή, εγγυημένη στάθμη λειτουργία, ευκολία στην αλλαγή των χαρακτηριστικών του φίλτρου, καθώς και δυνατότητα μοιρασμού χρόνου των ίδιων ψηφιακών κυκλωμάτων μεταξύ πολλών φίλτρων. Το τελευταίο και το πιο σπουδαίο πλεονέκτημα είναι η δημιουργία ψηφιακών φίλτρων σε ολοκληρωμένο κύκλωμα.

Ψηφιακό φίλτρο είναι ένα σύστημα το οποίο δέχεται στην είσοδό του μια ακολουθία αριθμών, την επεξεργάζεται και δημιουργεί στην έξοδό του μία άλλη ακολουθία. Συνεπώς, ο σκοπός του ψηφιακού φίλτρου είναι ο ίδιος με του αναλογικού, δηλ. η μορφοποίηση του φάσματος εισόδου. Η φυσική, όμως, πραγματοποίηση του ψηφιακού φίλτρου είναι διαφορετική από εκείνη του αναλογικού.

Η θεωρία των γραμμικών συνεχών φίλτρων (αναλογικά) βασίζεται στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (Οι εξισώσεις αυτές λύνονται με τη βοήθεια του μετασχηματισμού z), ενώ

οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές, λύνονται με το μετασχηματισμό Laplace.

Τα ψηφιακά φίλτρα εφαρμόζονται σε ένα μεγάλο και αυξανόμενο αριθμό εφαρμογών σε σχέση με τα αναλογικά φίλτρα, όπως π.χ. σε όλα τα θέματα ανάλυσης και επεξεργασίας σημάτων. Τα σήματα αυτά είναι πεπερασμένα, μικρής διάρκειας, π.χ. καταγραφής σεισμών, παλιρροιών, κυμάτων, θερμικής μελέτης κτιρίων, μελέτης κυκλικής οικονομικής ανάλυσης, στην ιατρική, κ.α.

Τα πιο σημαντικά πλεονεκτήματα των ψηφιακών φίλτρων πραγματικού χρόνου ως προς τα αναλογικά, είναι τα εξής:

- Πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια.
- Μικρότερο μέγεθος επειδή πραγματοποιούνται με ολοκληρωμένα κυκλώματα
- Πολύ σταθερή λειτουργία.
- Δεν υπάρχει το πρόβλημα της προσαρμογής αντιστάσεων.
- Δεν υφίσταται περιορισμός της θέσης των κρίσιμων συχνοτήτων του φίλτρου.
- Μεγάλη ευελιξία, επειδή μπορούμε να αλλάξουμε την καμπύλη απόκρισης του φίλτρου με την αλλαγή των κατάλληλων συντελεστών.
- Δυνατότητα μοιρασμού χρόνου (time-sharing) με μεγαλύτερα τμήματα του συστήματος.
- Είναι πολύ οικονομικά, ειδικά στην περίπτωση φίλτρων πολύ χαμηλής συχνότητας διέλευσης (0.01-1Hz).

Τα πλεονεκτήματα αυτά μαζί με την τεχνολογία της ολοκλήρωσης ευρείας κλίμακας (Large Scale Integration-LSI) κάνουν τη χρήση των ψηφιακών φίλτρων τελείως καθημερινή, μέχρι σημείου να εκτοπίσουν τελείως τα αναλογικά φίλτρα, όπως έγινε με την εκτόπιση των λυχνιών από τα τρανζίστορ. Ήδη σήμερα υπάρχει σε ολοκληρωμένο κύκλωμα ψηφιακό φίλτρο 2-ου βαθμού από διάφορες εταιρίες.

Τα σήματα τα οποία μας ενδιαφέρουν περιέχουν πληροφορία αναμειγμένη με θόρυβο. Βασικό βήμα, πριν από οποιαδήποτε επεξεργασία, είναι να προσδιοριστούν χαρακτηριστικά τα οποία διαφοροποιούν τα δύο είδη σημάτων, προκειμένου στην συνέχεια, στηριζόμενοι στις εν λόγω διαφορές, να επιτύχουμε απομάκρυνση του θορύβου.

Οι μέθοδοι επεξεργασίας που θα αναπτύξουμε, στηρίζονται στη Βασική Υπόθεση, την υπόθεση δηλαδή ότι το σήμα πληροφορίας και ο θόρυβος δεν έχουν κοινές συχνότητες και επομένως διαφοροποιούνται μέσω των συχνοτήτων τους.

Η υιοθέτηση της Βασικής Υπόθεσης επιτρέπει την πλήρη απομάκρυνση του θορύβου με απλή γνώση των συχνοτικών ζωνών του σήματος πληροφορίας και θορύβου, δίχως να είναι απαραίτητη η ακριβής γνώση του συχνοτικού περιεχομένου των σημάτων που μας ενδιαφέρουν.

Όσον αφορά στη Βασική Υπόθεση, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι υπάρχουν πολλές εφαρμογές στις οποίες η υπόθεση αυτή είναι αληθής ή τουλάχιστον πολύ κοντά στην πραγματικότητα. Σε προβλήματα στα οποία η Βασική Υπόθεση δεν ισχύει, οι μέθοδοι επεξεργασίας που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια είναι ακατάλληλες. Στις περιπτώσεις αυτές πρέπει κανείς να ανατρέξει σε προχωρημένες τεχνικές επεξεργασίας, οι οποίες απαιτούν ακριβέστερο προσδιορισμό των προς επεξεργασία σημάτων.

Η Βασική Υπόθεση επιτρέπει την απομάκρυνση του θορύβου με τη χρήση απλών γραμμικών, χρονικά σταθερών, συστημάτων. Τα συστήματα αυτά καλούνται φίλτρα και η αντίστοιχη επεξεργασία φιλτράρισμα.

Προκειμένου να κατανοήσουμε την έννοια και τον ρόλο των φίλτρων σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα θα πρέπει πρώτα να καταλάβουμε την έννοια του όρου εύρος ζώνης. Ως εύρος ζώνης (Bandwidth) ορίζεται η διαφορά ενός μεγαλύτερης συχνότητας ενός φάσματος συχνοτήτων, μείον την μικρότερη συχνότητα του φάσματος αυτού. Η μαθηματική παράσταση του εύρους ζώνης είναι :

$$BW = f_{max} - f_{min}$$

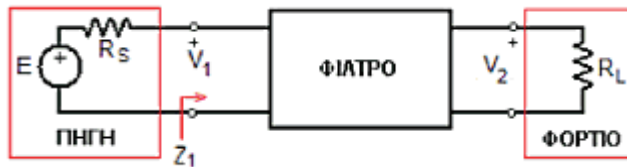
Πιο πρακτικά, όταν μιλάμε για εύρος ζώνης ουσιαστικά αναφερόμαστε στην περιοχή εκείνη του φάσματος συχνοτήτων μέσω ενός οποίας το σήμα περνά αναλλοίωτο από την είσοδο του πομπού στην έξοδο του δέκτη.

Τα φίλτρα εφαρμόζονται στην περίπτωση όπου επιθυμούμε να μην περάσει αναλλοίωτο ένα σήμα αλλά να υποστεί συγκεκριμένες αλλαγές ως ενός την φασματική του ζώνη. Επομένως το σήμα ξεκινάει διαφορετικό από την πηγή απ' ότι καταλήγει στον δέκτη.

2.1 Ιδανικά και πραγματικά φίλτρα

Ένα ηλεκτρονικό φίλτρο παρεμβάλλεται μεταξύ δυο βαθμίδων ενός ηλεκτρονικού συστήματος με σκοπό να ελέγξει την ισχύ που μεταφέρεται από την πρώτη βαθμίδα στη δεύτερη ,με ένα τρόπο που εξαρτάται από τη συχνότητα .Με το φίλτρο δηλαδή μπορούμε να οδηγήσουμε μόνο τις επιθυμητές συχνότητες στην επόμενη βαθμίδα με κάποια μικρή εξασθένηση ,ενώ τις υπόλοιπες με τόσο μεγαλύτερη εξασθένηση ,που να θεωρείται ότι δεν παίρνουν.

Συνήθως παριστάνουμε την προηγούμενη του φίλτρου βαθμίδα με το ισοδύναμο Thevenin, το οποίο αποτελεί την «πηγή». Παριστάνοντας τις επόμενες του φίλτρου βαθμίδες με το ισοδύναμο Thevenin, καταλήγουμε σε αυτό που το φίλτρο «βλέπει» ως φορτίο. Η θεώρηση αυτή φαίνεται στο σχήμα.



Εικόνα 2.2:Φορτίο φίλτρου

Η συνάρτηση μεταφοράς του πλήρους συστήματος είναι φυσικά $H(s) = \frac{V_2(s)}{E(s)}$ και η συναρτηση μεταδοσης $T(s)$ είναι το αντίστροφο της, δηλαδή $T(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{E(s)}{V_2(s)}$.

Η συνάρτηση απλού κέρδους είναι το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς για $s=j\omega$:

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{|V_2(j\omega)|}{|E(j\omega)|}$$

Ενώ η συνάρτηση λογαριθμικού κέρδους είναι η $G_{dB}(\omega) = 20\log(G(\omega))$ και η εξασθενηση $\alpha(\omega)$ σε dB ορίζεται από τη σχέση:

$$\alpha(\omega) = 20 \log(|T(j\omega)|) = 20 \log\left(\frac{1}{|H(j\omega)|}\right) = -20 \log(G(\omega)) \text{ dB}$$

Φυσικά το λογαριθμικό κέρδος σε dB είναι ακριβώς το αντίθετο της εξασθένησης δηλαδή 6 bB αντιστοιχεί σε λογαριθμικό κέρδος -6 dB και σε απλό κέρδος 0.5.

Ως προς την διαφορά φάσης εισόδου-εξόδου στα ιδανικά φίλτρα, όπως είδαμε είναι απόλυτα γραμμική ως προς την συχνότητα με αποτέλεσμα η καθυστέρηση ομάδας $D(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \varphi(\omega)$ να είναι σταθερή. Η φάση όμως αποτελεί τις περισσότερες φορές δευτερεύον χαρακτηριστικό των φίλτρων, τα οποία συνήθως σχεδιάζονται για να ικανοποιήσουν δεδομένες προδιαγραφές πλάτους δηλαδή κέρδους ή εξασθένησης.

Το φίλτρο, παρεμβαλλόμενο μεταξύ της πηγής και του φορτίου, εισάγει ένα εξαρτώμενο από την συχνότητα κέρδος $G(\omega)$ λόγω των χαρακτηριστικών με τα οποία έχει σχεδιαστεί. Η εξάρτηση αυτή των χαρακτηριστικών πλάτους από τη συχνότητα ονομάζεται επιλεκτικότητα.

Στην ιδανική περίπτωση η επιλεκτικότητα εκφράζεται με μηδενικό κέρδος (άπειρη εξασθένηση) σε κάποιες ζώνες, που ονομάζονται ζώνες αποκοπής και μηδενική εξασθένηση σε κάποιες ζώνες που ονομάζονται ζώνες διέλευσης. Η διατήρηση απολύτως σταθερών χαρακτηριστικών πλάτους ,μη εξαρτώμενων δηλαδή από τη συχνότητα ,σε μια ζώνη συχνοτήτων, δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί από φυσικά συστήματα και ήδη είδαμε ότι το ιδανικό βαθυπερατό δεν είναι πραγματοποιήσιμο.

2.2 Τεχνολογίες υλοποίησης φίλτρων

Τα ηλεκτρονικά φίλτρα, ως ηλεκτρικά συστήματα που μπορούν και επεξεργάζονται το φάσμα των ηλεκτρονικών σημάτων με τρόπο που καθορίζεται από τις προδιαγραφές τους, είναι από τα βασικότερα υποσυστήματα σε σύνθετα ηλεκτρικά, ηλεκτρονικά και επικοινωνιακά συστήματα και οι εφαρμογές τους αναρίθμητες. Ενδεικτικά:

- Αφαίρεση θορύβου στα επικοινωνιακά συστήματα
- Διαχωρισμός επιθυμητών και ανεπιθύμητων συχνοτήτων
- Αποδιαμορφώσεις σημάτων
- Ανίχνευση σημάτων στις ασύρματες μεταδόσεις(π.χ. ραδιόφωνο κ.λπ.)
- Συστήματα πολυπλεξίας χρόνου και συχνότητας, τεχνολογίες DSL
- Ζωνοπεριορισμός σημάτων πριν από την δειγματοληψία
- Ανάκτηση σημάτων από τα δείγματά τους
- Βελτίωση της πιστότητας του ήχου (crossover, ισοσταθμιστές κ.λπ.)
- Ισοστάθμιση γραμμών μεταφοράς

-Επεξεργασία και σύνθεση φωνής

-Επεξεργασία εικόνας, TV κ.λπ.

Στην πραγματικότητα, δεν υπάρχει σοβαρό ηλεκτρονικό σύστημα χωρίς φίλτρα. Τα συναντάμε από τα κινητά μας τηλέφωνα μέχρι τους σκληρούς μας δίσκους και από τα σταθερά μας τηλέφωνα μέχρι τις DSL συνδέσεις μας.

Ένα φίλτρο δέχεται ως διέγερση ένα ηλεκτρικό σήμα εισόδου, το επεξεργάζεται ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του και δημιουργεί την επιθυμητή απόκριση. Ανάλογα με τον τύπο των σημάτων εισόδου, των εσωτερικών σημάτων και την απόκριση, τα φίλτρα μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις μεγάλες κατηγορίες: φίλτρα συνεχούς χρόνου (CT, continuous time), φίλτρα δειγματοσιμμένων δεδομένων (sampled-data) και φίλτρα διακριτού χρόνου (discrete-time).

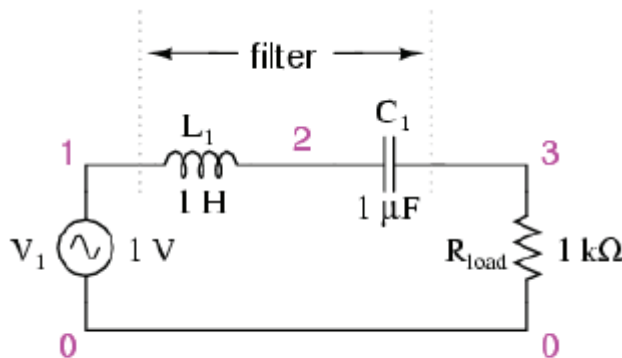
Σήματα συνεχούς χρόνου είναι αυτά που ορίζονται σε κάθε χρονική στιγμή t και περιγράφονται με μια συνάρτηση $f(t)$ με πεδίο ορισμού $-\infty \leq t \leq \infty$.

2.3 Αναλογικά και Ψηφιακά Φίλτρα

Υπάρχουν δύο βασικά είδη φίλτρων, ανάλογα με το είδος του σήματος στο οποίο απευθύνονται. Συγκεκριμένα τα φίλτρα με τα οποία επεξεργαζόμαστε αναλογικά σήματα καλούνται αναλογικά, ενώ τα αντίστοιχα που εφαρμόζονται στην επεξεργασία ψηφιακών σημάτων ψηφιακά. Είναι εντελώς διαφορετικά στη φυσική τους δομή και στον τρόπο με τον οποίο λειτουργούν.

Τα φίλτρα, στα οποία θα επικεντρωθούμε, είναι γραμμικά χρονικά σταθερά συστήματα και, επομένως, μπορούν να περιγραφούν πλήρως, είτε από την κρουστική τους απόκριση $h(t)$ (για αναλογικά) και h_n (για ψηφιακά), είτε ισοδύναμα από τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ και $H(z)$ αντίστοιχα. Επειδή τέλος μας ενδιαφέρει πολύ η συμπεριφορά των φίλτρων στο πεδίο της συχνότητας, το σημαντικότερο ρόλο στο σχεδιασμό ενός φίλτρου θα παίξει η απόκριση συχνότητας, δηλαδή το $H(j\Omega)$ (για αναλογικά) και $H(e^{j\omega})$ (για ψηφιακά).

2.3.1 Αναλογικά



Εικόνα 2.3: Αναλογικό φίλτρο

• Ένα αναλογικό φίλτρο χρησιμοποιεί ηλεκτρονικά κυκλώματα που αποτελούνται από συστατικά όπως αντιστάσεις, πυκνωτές και τελεστικοί ενισχυτές για να παραχθεί η απαιτούμενη επίδραση φίλτρου. Τέτοια κυκλώματα φίλτρων χρησιμοποιούνται ευρέως σε εφαρμογές όπως μείωση θορύβου, ενίσχυση σήματος video, γραφικοί equalizer σε hi-fi συστήματα, και σε πολλές άλλες περιοχές.

• Υπάρχουν καλά καθορισμένες standard τεχνικές για σχεδίαση κυκλώματος αναλογικού φίλτρου, για δοσμένες απαιτήσεις. Σε όλα τα στάδια, το σήμα που φιλτράρεται είναι μια ηλεκτρική τάση ή ένα ρεύμα το οποίο είναι ευθέως ανάλογο της φυσικής ποσότητας (π.χ. ένας ήχος ή ένα σήμα video ή η έξοδος ενός μετατροπέα) που μας ενδιαφέρει.

• Το αναλογικό σήμα εισόδου πρέπει πρώτα να δειγματοληφθεί και να ψηφιοποιηθεί με τη χρήση ενός ADC (analog to digital converter) μετατροπέα από αναλογικό σε ψηφιακό. Οι δυαδικοί αριθμοί που προκύπτουν, οι οποίοι αναπαριστούν διαδοχικές τιμές από τη δειγματοληψία του σήματος εισόδου, μεταφέρονται στον επεξεργαστή, που εκτελεί αριθμητικές πράξεις σ' αυτούς. Αυτοί οι υπολογισμοί τυπικά περιέχουν πολλαπλασιασμούς των τιμών εισόδου με σταθερές και άθροιση των γινομένων.

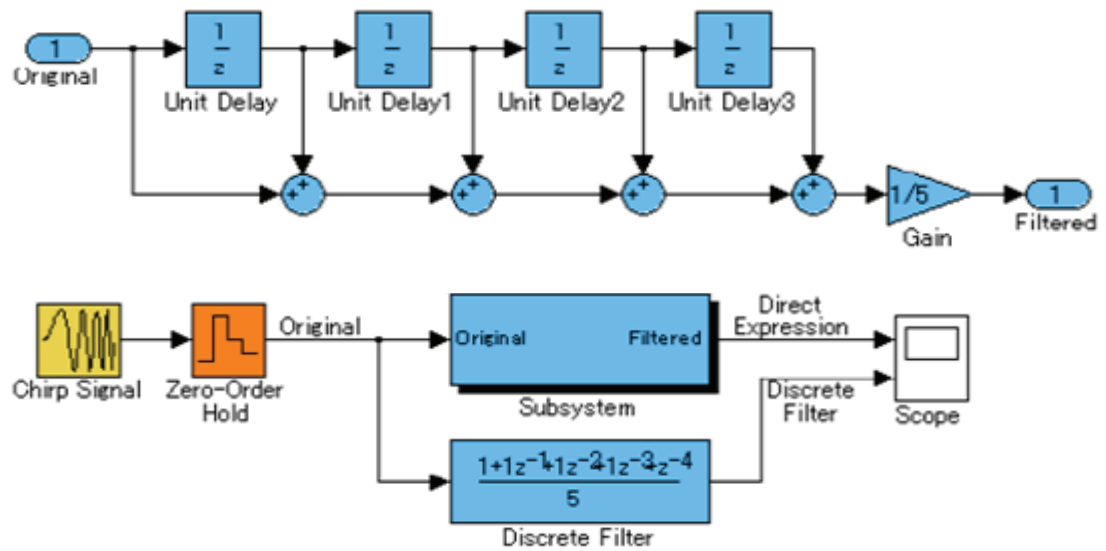
• Αν είναι απαραίτητο, τα αποτελέσματα αυτών των υπολογισμών, που αναπαριστούν τιμές από δειγματοληψία του φιλτραρισμένου σήματος, γίνονται έξοδοι μέσω ενός DAC (digital to analog converter) μετατροπέα από ψηφιακό σε αναλογικό, για να μετατραπεί το σήμα και πάλι σε αναλογική μορφή.

• Αρχικά εφευρέθηκαν για να χρησιμοποιηθούν σε ραδιοφωνικούς δέκτες και σε τηλεφωνικά συστήματα μεγάλων αποστάσεων, όμως με την πάροδο του χρόνου έχουν βρει πολύ

διαδεδομένες εφαρμογές, όπως: συστήματα επικοινωνίας και ραντάρ, τηλεφωνικά συστήματα, συστήματα δειγματοληψίας, συσκευές ακουστικών συχνοτήτων, ισοσταθμιστές.

- Τα ψηφιακά φίλτρα αναπτύχθηκαν ως φυσική επέκταση των αναλογικών

2.3.2 Ψηφιακά



Εικόνα 2.4: Ψηφιακό φίλτρο

- Αναπτύχθηκαν τη δεκαετία του '60
- Ένα ψηφιακό φίλτρο χρησιμοποιεί ένα ψηφιακό επεξεργαστή για να εκτελέσει αριθμητικούς υπολογισμούς σε δειγματοληπτικές τιμές του σήματος
- Ο επεξεργαστής μπορεί να είναι ένας γενικού σκοπού υπολογιστής όπως ένα PC, ή ένας ειδικού σκοπού DSP (Digital Signal Processor) chirp.

2.4 Διαφορές Αναλογικών και Ψηφιακών Φίλτρων

Τα δύο είδη φίλτρων δεν είναι ισοδύναμα ως προς τη συμπεριφορά τους σε πρακτικές εφαρμογές. Ανάλογα με την περίπτωση, άλλοτε είναι προτιμητέο το ένα είδος και άλλοτε το άλλο. Οι βασικές διαφορές τους είναι οι ακόλουθες:

- Τα αναλογικά φίλτρα υλοποιούνται με κλασικά ηλεκτρικά αναλογικά κυκλώματα και η επεξεργασία των αντίστοιχων σημάτων είναι άμεση δίχως καμία καθυστέρηση. Αντίθετα, τα ψηφιακά φίλτρα υλοποιούνται με τη βοήθεια ψηφιακών επεξεργαστών και το αποτέλεσμα της επεξεργασίας εξάγεται με καθυστέρηση, η οποία είναι συνάρτηση της πολυπλοκότητας της επεξεργασίας και της ταχύτητας του επεξεργαστή.
- Οι χαρακτηριστικές των αναλογικών φίλτρων είναι συνάρτηση των τιμών των στοιχείων των ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Οι τιμές αυτές αλλάζουν με θερμοκρασία, υγρασία, γήρανση, με αποτέλεσμα να μεταβάλλονται και οι αντίστοιχες χαρακτηριστικές των φίλτρων. Τα ψηφιακά φίλτρα είναι απολύτως σταθερά, εφόσον φυσικά ο επεξεργαστής λειτουργεί σωστά.
- Με ψηφιακά φίλτρα είναι δυνατό να προσεγγίσουμε τις ιδανικές προδιαγραφές με οποιαδήποτε επιθυμητή ακρίβεια. Αντίστοιχη ιδιότητα δεν διαθέτουν (πρακτικά) τα αναλογικά φίλτρα, διότι αυτό απαιτεί πολύπλοκα κυκλώματα με απροσδιόριστα αποτελέσματα, λόγω της μη ακριβούς γνώσης των τιμών των στοιχείων του κυκλώματος
- Τα ψηφιακά φίλτρα (συγκεκριμένα τα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης) έχουν πολύ μεγάλη ευελιξία στο σχεδιασμό τους. Πρακτικά είναι δυνατό να σχεδιαστεί φίλτρο με οποιαδήποτε χαρακτηριστική. Τα αναλογικά φίλτρα περιορίζονται στην υλοποίηση των λεγόμενων κλασικών φίλτρων.
- Ορισμένα φίλτρα, όπως τα αντιαναδίπλωσης και ανακατασκευής, δεν μπορεί να είναι παρά μόνο αναλογικά

2.5 Πλεονεκτήματα ψηφιακών φίλτρων

- Ένα ψηφιακό φίλτρο είναι σε θέση να προγραμματισθεί. Η λειτουργία του καθορίζεται από ένα πρόγραμμα στη μνήμη του επεξεργαστή. Αυτό σημαίνει ότι το ψηφιακό φίλτρο μπορεί να αλλαχθεί εύκολα χωρίς να επηρεαστεί το κύκλωμα (hardware). Ένα αναλογικό φίλτρο, μπορεί μόνο να αλλαχθεί ξανασχεδιάζοντας το κύκλωμα του φίλτρου.
- Τα ψηφιακά φίλτρα είναι εύκολα στη σχεδίαση, στη δοκιμή, και στην υλοποίηση σε ένα γενικού σκοπού υπολογιστή ή σε μια εγκατάσταση.
- Τα χαρακτηριστικά των σχεδίων των κυκλωμάτων ενός αναλογικού φίλτρου, (ιδιαίτερα αυτών που περιέχουν ενεργά συστατικά) εξαρτώνται από την τάση και βασίζονται στη

θερμοκρασία. Τα ψηφιακά φίλτρα δεν μαστίζονται από τέτοια προβλήματα και γι' αυτό είναι ιδιαίτερα σταθερά, ως προς τον χρόνο και τη θερμοκρασία.

- Αντίθετα προς τα αναλογικά ισοδύναμα, τα ψηφιακά φίλτρα μπορούν να χειριστούν χαμηλής συχνότητας σήματα επακριβώς. Καθώς η ανάπτυξη της DSP τεχνολογίας συνεχίζει να αυξάνεται, τα ψηφιακά φίλτρα είναι σε θέση να εφαρμοστούν σε υψηλής συχνότητας σήματα στην RF (ράδιο συχνότητα) περιοχή, η οποία στο παρελθόν ήταν η αποκλειστικότητα της αναλογικής τεχνολογίας.

- Τα ψηφιακά φίλτρα είναι πολύ περισσότερο ευμετάβλητα στην ικανότητά τους να παράγουν σήματα με μια ποικιλία τρόπων: αυτό εμπεριέχει την ικανότητα μερικών τύπων ψηφιακών φίλτρων να προσαρμόζονται στις αλλαγές των χαρακτηριστικών του σήματος.

- Οι γρήγοροι DSP επεξεργαστές μπορούν να χειριστούν σύνθετους συνδυασμούς των φίλτρων παράλληλα ή σειριακά, κάνοντας τις απαιτήσεις του hardware σχετικά απλές σε σύγκριση με το ισοδύναμο αναλογικό σχέδιο του κυκλώματος.

2.6 Λειτουργία ψηφιακών φίλτρων

Ας υποθέσουμε ότι το αρχικό σήμα, το οποίο είναι ψηφιακά φιλτραρισμένο, βρίσκεται με τη μορφή μιας διαφοράς δυναμικού που περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$V = x(t)$$

όπου t είναι ο χρόνος.

Αυτό το σήμα έχει δειγματοληφθεί ανά χρονικά διαστήματα μήκους h . Η τιμή του δείγματος σε χρόνο $t = ih$ είναι

$$x_i = x(ih)$$

Έτσι οι ψηφιακές τιμές μεταφερόμενες από τον ADC στον επεξεργαστή μπορούν να αναπαρασταθούν από την ακολουθία $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ ανταποκρινόμενες στις τιμές του σήματος της κυματομορφής σε χρόνους $t = 0, h, 2h, 3h, \dots$ (όπου $t = 0$ είναι η στιγμή στην οποία η δειγματοληψία αρχίζει).

Σε χρόνο $t = nh$ (όπου n είναι θετικός ακέραιος αριθμός), οι τιμές που είναι στη διάθεση του επεξεργαστή και είναι αποθηκευμένες στη μνήμη, είναι $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

- ✚ Οι ψηφιακές τιμές x_{n+1}, x_{n+2} κ.λπ. δεν είναι διαθέσιμες γιατί δεν έχουν υπολογιστεί ακόμη!

Η ψηφιακή έξοδος από τον μικροεπεξεργαστή στο DAC αποτελείται από την ακολουθία των τιμών $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$.

Γενικά, η τιμή του y_n υπολογίζεται από τις τιμές $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζονται τα y από τα x καθορίζει την ενέργεια του φιλτραρίσματος του ψηφιακού φίλτρου.

2.7 Παραδείγματα απλών ψηφιακών φίλτρων

2.7.1 UNITY GAIN FILTER (ΦΙΛΤΡΟ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΚΕΡΑΟΥΣ)

$$y_n = x_n$$

Κάθε εξαγόμενη τιμή y_n είναι ακριβώς η ίδια όπως η αντίστοιχη εισαγόμενη τιμή x_n :

$$y_0 = x_0$$

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_2$$

... κ.τ.λ.

Αυτό είναι μια συνηθισμένη υπόθεση στην οποία το φίλτρο δεν έχει καμιά επίδραση στο σήμα.

2.7.2 SIMPLE GAIN FILTER (ΦΙΛΤΡΟ ΑΠΛΟΥ ΚΕΡΑΟΥΣ)

$$y_n = Kx_n \text{ (K = σταθερό)}$$

Αυτό απλά πολλαπλασιάζει ένα σταθερό όρο K σε κάθε εισαγόμενη τιμή:

$$y_0 = Kx_0$$

$$y_1 = Kx_1$$

$$y_2 = Kx_2$$

... κ.τ.λ.

Το $K > 1$ κάνει το φίλτρο έναν ενισχυτή, ενώ το $0 < K < 1$ το κάνει έναν «υποβιβαστή». Το $K < 0$ ανταποκρίνεται σε έναν «αντιστρέφοντα» ενισχυτή. Το φίλτρο μοναδιαίου κέρδους είναι η ειδική περίπτωση όπου $K = 1$.

2.7.3 PURE DELAY FILTER_(ΦΙΛΤΡΟ ΚΑΘΑΡΗΣ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗΣ)

$$y_n = x_{n-1}$$

Η εξαγόμενη τιμή σε χρόνο $t = nh$ είναι απλά η εισαγόμενη σε χρόνο $t = (n-1)h$ δηλ. το σήμα καθυστερεί κατά χρόνο h :

$$y_0 = x_{-1}$$

$$y_1 = x_0$$

$$y_2 = x_1$$

$$y_3 = x_2$$

... κ.τ.λ.

Σημειώστε ότι επειδή η δειγματοληψία υποτίθεται ότι αρχίζει σε $t = 0$, η εισαγόμενη τιμή x_{-1} σε $t = -h$ είναι αδιευκρίνιστη. Είναι σύνηθες να παίρνουμε την τιμή αυτή (και κάθε άλλη τιμή του x προηγούμενη του $t = 0$) ως μηδέν.

2.7.4 TWO-TERM DIFFERENCE FILTER (ΦΙΛΤΡΟ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΔΥΟ ΟΡΩΝ)

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

Η εξαγόμενη τιμή σε $t = nh$ είναι ίση με τη διαφορά ανάμεσα στον τρέχοντα εισαγόμενο χρόνο x_n και στον προηγούμενο εισαγόμενο x_{n-1} :

$$y(0) = x(0) - x(-1)$$

$$y(1) = x(1) - x(0)$$

$$y(2) = x(2) - x(1)$$

$$y(3) = x(3) - x(2)$$

... κ.λπ.

Το εξαγόμενο είναι η αλλαγή του εισαγόμενου βάσει των περισσότερο πρόσφατων εισαγωγών.

2.7.5 TWO-TERM AVERAGE FILTER (ΦΙΛΤΡΟ ΜΕΣΟΥ ΔΥΟ ΟΡΩΝ)

$$y_n = (x_n + x_{n-1}) / 2$$

Το εξαγόμενο είναι ο μέσος όρος (αριθμητικός μέσος) του τρέχοντος και προηγούμενου εισαγόμενου:

$$y_0 = (x_0 + x_{-1}) / 2$$

$$y_1 = (x_1 + x_0) / 2$$

$$y_2 = (x_2 + x_1) / 2$$

$$y_3 = (x_3 + x_2) / 2$$

... κ.λπ.

Αυτός είναι ένας απλός τύπος βαθυπερατού φίλτρου, επειδή αναμένεται να εξαλείψει υψηλής συχνότητας διακυμάνσεις σε ένα σήμα.

2.7.6 THREE-TERM AVERAGE FILTER (ΦΙΛΤΡΟ ΜΕΣΟΥ ΤΡΙΩΝ ΟΡΩΝ)

$$y(n) = [x(n) + x(n-1) + x(n-2)] / 3$$

Αυτό είναι παρόμοιο με το προηγούμενο παράδειγμα, αλλά ο μέσος όρος λαμβάνεται από την τρέχουσα και δύο προηγούμενες εισαγωγές:

$$y_0 = [x(0) + x(-1) + x(-2)] / 3$$

$$y_1 = [x(1) + x(0) + x(-1)] / 3$$

$$y_2 = [x(2) + x(1) + x(0)] / 3$$

$$y_3 = [x(3) + x(2) + x(1)] / 3$$

... κ.λπ.

Όπως και πριν, το $x(-1)$ και το $x(-2)$ έχουν ληφθεί για να είναι μηδέν.

2.7.7 CENTRAL DIFFERENCE FILTER_(ΦΙΛΤΡΟ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ)

$$y(n) = (x(n) - x(n-2)) / 2$$

Αυτό είναι παρόμοιο στην επίδραση του με το φίλτρο διαφοράς δύο όρων. Το εξαγόμενο είναι ίσο με τη μισή αλλαγή στο εισαγόμενο σήμα,

για δύο μη γειτνιαζουσες προηγούμενες ψηφιακές τιμές:

$$y(0) = (x(0) - x(-2)) / 2$$

$$y(1) = (x(1) - x(-1)) / 2$$

$$y(2) = (x(2) - x(0)) / 2$$

$$y(3) = (x(3) - x(1)) / 2$$

... κ.λπ.

2.8 Συνάρτηση μεταφοράς ενός ψηφιακού φίλτρου

Χρησιμοποιήσαμε δύο διαφορετικούς τρόπους για να εκφράσουμε την δράση ενός ψηφιακού φίλτρου:

Στον πρώτο τρόπο δίνοντας την εξαγόμενη τιμή $y(n)$ απευθείας, και στο δεύτερο, δίνοντας μια συμμετρική έκφραση με όλους τους εξαγόμενους όρους (τα y) στη μια πλευρά, και όλους τους εισαγόμενους όρους (τα x) στην άλλη.

Έτσι, μπορούμε να εισάγουμε αυτό που αποκαλείται συνάρτηση μεταφοράς ενός ψηφιακού φίλτρου. Αυτό επιτυγχάνεται από το συμμετρικό τρόπο έκφρασης του φίλτρου, και μας επιτρέπει να περιγράψουμε ένα φίλτρο με μια κατάλληλη, σύνθετη έκφραση. Η συνάρτηση μεταφοράς ενός φίλτρου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθορίσει πολλά από τα χαρακτηριστικά του φίλτρου, όπως είναι η απόκριση συχνότητας.

Τελεστής μοναδιαίας καθυστέρησης

Πρώτα απ' όλα, πρέπει να εισάγουμε τον συντελεστή μοναδιαίας καθυστέρησης, δηλώνοντάς τον με το σύμβολο z^{-1} .

Όταν εφαρμόζεται σε μια σειρά από ψηφιακές τιμές, ο τελεστής αυτός δίνει την προηγούμενη τιμή στη σειρά. Αυτό συνεπώς, εισάγει τη καθυστέρηση ενός δείγματος.

Εφαρμόζοντας τον τελεστή z^{-1} σε μια εισαγόμενη τιμή (ας πούμε στη $x(n)$) δίνει το προηγούμενο εισαγόμενο ($x(n-1)$):

$$z^{-1} x(n) = x(n-1)$$

2.9 Συνάρτηση μεταφοράς

Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις εντός του ψηφιακού φίλτρου προκύπτει:

$$(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) y(n) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) x(n)$$

Τροποποιώντας την παραπάνω ισότητα για να δώσει μια άμεση σχέση ανάμεσα στην εξαγόμενη και την εισαγόμενη τιμή του φίλτρου, παίρνουμε:

$$y(n) / x(n) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) / (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})$$

Αυτή είναι η γενική φόρμα της συνάρτησης μεταφοράς ενός αναδρομικού ψηφιακού φίλτρου δεύτερης τάξης (IIR).

Για ένα φίλτρο πρώτης τάξης, οι όροι του z^{-2} αγνοούνται. Για φίλτρα τάξης άνω των 2, εμπλέκονται ανώτερες δυνάμεις του z^{-1} , στον αριθμητή και στον παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς. Ένα μη αναδρομικό φίλτρο (FIR) έχει μια απλούστερη συνάρτηση μεταφοράς η οποία δεν εμπεριέχει καθόλου όρους στον παρονομαστή. Ο συντελεστής b_0 αναγνωρίζεται ως να ήταν ίσος με 1, και όλοι οι άλλοι b συντελεστές είναι μηδενικοί. Η συνάρτηση μεταφοράς ενός φίλτρου FIR δεύτερης τάξης μπορεί παρομοίως να εκφραστεί στη γενική της μορφή:

$$y(n) / x(n) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$$

2.10 Συντελεστές ψηφιακών φίλτρων

Όλα τα παραδείγματα ψηφιακών φίλτρων που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο τμήμα, μπορούν να γραφούν στις παρακάτω γενικές φόρμες:

Μηδενικής τάξης: $y_n = a_0 x(n)$

Πρώτης τάξης: $y_n = a_0 x(n) + a_1 x(n-1)$

Δεύτερης τάξης: $y_n = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2)$

Παρόμοιες εκφράσεις μπορούν να διατυπωθούν για φίλτρα κάθε τάξης.

Οι σταθερές a_0, a_1, a_2, \dots που εμφανίζονται σε αυτές τις εκφράσεις ονομάζονται συντελεστές φίλτρων. Οι τιμές αυτών των συντελεστών καθορίζουν τα χαρακτηριστικά ενός συγκεκριμένου φίλτρου.

Συνάρτηση μεταφοράς $H(j\omega)$, ορίζουμε τον λόγο της απόκρισης, που μπορεί να είναι ρεύμα ή τάση σε κάποιο στοιχείο του κυκλώματος, προς τη διέγερση, που επίσης μπορεί να είναι ρεύμα ή τάση. Έτσι η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να εμφανισθεί με μια από τις παρακάτω σχέσεις:

$$H(j\omega) = \frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)}, H(j\omega) = \frac{V_{out}(j\omega)}{I_{in}(j\omega)}, H(j\omega) = \frac{I_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)}, H(j\omega) = \frac{I_{out}(j\omega)}{I_{in}(j\omega)}$$

Κάθε κύκλωμα έχει μια είσοδο και μια έξοδο. Όταν στην είσοδο του κυκλώματος εφαρμοσθούν σήματα διαφορετικής συχνότητας, πολλά από αυτά τα σήματα υπάρχει πιθανότητα να εμφανισθούν στην έξοδο του κυκλώματος, με το ίδιο πλάτος και την ίδια φάση με εκείνα της εισόδου. Πολλά όμως σήματα, μπορεί να εμφανιστούν στην έξοδο με μειωμένο πλάτος και με διαφορά φάσης. Τέτοιου είδους κυκλώματα αναφέρονται με το όνομα φίλτρα και λέγονται παθητικά αν περιέχουν μόνο παθητικά στοιχεία, όπως είναι οι ωμικές αντιστάσεις, τα πηνία και οι πυκνωτές.

Ένα ιδανικό φίλτρο επιτρέπει να διέρχονται χωρίς αλλαγή όλα τα σήματα με συχνότητες που εμπίπτουν στη ζώνη διέλευσης ή αποκοπής και απορρίπτει όλα τα άλλα. Η συνάρτηση του πλάτους της απόκρισης ή αλλιώς συνάρτηση μεταφοράς $H(j\omega)$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον χαρακτηρισμό των διαφόρων τύπων φίλτρων ανάλογα με τη περιοχή της ζώνης διέλευσης ή αποκοπής.

Ο άξονας των συχνοτήτων μπορεί να είναι βαθμονομημένος σε (ω) δηλ. σε (rad/sec) ή σε (F) δηλ. σε (Hz) και είναι λογαριθμικός. Ο κάθετος άξονας είναι γραμμικός και η βαθμονόμησή του μπορεί να είναι σε (db) ή σαν λόγος του μέτρου της απόκρισης προς τη διέγερση, που μπορεί να είναι καθαρός αριθμός κ.λπ.

Η μέγιστη τιμή του μέτρου $|H(j\omega)|$, συμβαίνει για $(\frac{R}{\omega L} = 0)$ δηλ. για $(\omega \rightarrow \infty)$ ή $(F \rightarrow \infty)$

Ολοδιαβατά συστήματα: Μία συνάρτηση $H_a(s)$ καλείται ολοδιαβατή αν είναι ευσταθής και το πλάτος της να είναι ίσο με 1:

$$|H_a(j\omega)| = 1$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι αν η $H_a(s)$ είναι ολοδιαβατή, τότε :

$$H_a(j\omega) = e^{j\varphi(\omega)}$$

Ολοδιαβατά συστήματα χρησιμοποιούνται για να τροποποιήσουν τη φάση ενός φίλτρου, αφήνοντας το πλάτος ανέπαφο (ισοσταθμιστές)

2.11 Κατηγορίες Φίλτρων και Βασικές Ιδιότητες

Ας επικεντρωθούμε κατ' αρχήν στα αναλογικά φίλτρα, τα οποία υλοποιούνται με κλασικά ηλεκτρικά κυκλώματα, δηλαδή κυκλώματα που περιέχουν αντιστάσεις, πυκνωτές και πηνία. Είναι γνωστό ότι σε τέτοια συστήματα η σχέση μεταξύ πηγής (εισόδου) και οποιασδήποτε τάσης ή έντασης στο κύκλωμα (εξόδου), στο πεδίο του Μετασχηματισμού Laplace, είναι της μορφής

$$H(s) = \frac{b_0 s^K + b_1 s^{K-1} + \dots + b_K}{s^L + a_1 s^{L-1} + \dots + a_L}$$

Με άλλα λόγια, η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος είναι μια ρητή συνάρτηση (λόγος πολυωνύμων) του s . Ο βαθμός του πολυωνύμου του παρονομαστή L αποτελεί σημαντική παράμετρο και καλείται τάξη του φίλτρου.

Το γεγονός ότι οι συναρτήσεις μεταφοράς στην πράξη μπορούν να έχουν μόνο την παραπάνω μορφή, επιβάλλει, όπως είναι ευνόητο, να περιοριστούμε αποκλειστικά στην ανάλυση φίλτρων αυτής της μορφής. Θα πρέπει βέβαια να σημειώσουμε ότι ακόμη και για την περιορισμένη αυτή κλάση φίλτρων δεν είναι δυνατή η υλοποίηση οποιασδήποτε ρητής συνάρτησης του s με κλασικά κυκλώματα.

Ας εξετάσουμε τώρα τα ψηφιακά φίλτρα. Εάν h_n , x_n , y_n είναι η κρουστική απόκριση, η είσοδος και η έξοδος του φίλτρου και $H(z)$, $X(z)$, $Y(z)$ η συνάρτηση μεταφοράς και ο Μετασχηματισμός Z εισόδου και εξόδου, τότε ισχύει

$$y(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l x_{n-l}$$

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

2.12 Τάξη ψηφιακού φίλτρου

Ως τάξη ενός ψηφιακού φίλτρου μπορεί να οριστεί ο αριθμός των προηγούμενων εισαγωγών (αποθηκευμένων στη μνήμη του επεξεργαστή) ο οποίος χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί το τρέχον εξαγόμενο.

Παράδειγμα (1):

$$y(n) = x(n)$$

Αυτό είναι ένα μηδενικής τάξης φίλτρο, από τη στιγμή που το τρέχον εξαγόμενο $y(n)$ εξαρτάται μόνο από το τρέχον εισαγόμενο $x(n)$ και όχι από όποιες άλλες προηγούμενες εισαγωγές.

Παράδειγμα (2):

$$y(n) = Kx(n)$$

Η τάξη αυτού του φίλτρου είναι πάλι μηδέν, αφού δεν απαιτούνται προηγούμενοι είσοδοι για να δώσουν την τρέχουσα εξαγόμενη τιμή.

Παράδειγμα (3):

$$y(n) = x(n-1)$$

Αυτό είναι φίλτρο πρώτης τάξης, καθώς μια προηγούμενη εισαγωγή ($x(n-1)$) απαιτείται για να υπολογίσουμε το $y(n)$. (Σημειώστε ότι αυτό το φίλτρο ταξινομείται ως πρώτης τάξης, γιατί χρησιμοποιεί μια προηγούμενη εισαγωγή, ακόμα και όταν η τρέχουσα εισαγωγή δεν χρησιμοποιείται).

Παράδειγμα (4):

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

Αυτό είναι πάλι ένα πρώτης τάξης φίλτρο, αφού μια προηγούμενη εισαγόμενη τιμή απαιτείται για να δώσει την τρέχουσα έξοδο.

Παράδειγμα (5):

$$y(n) = (x(n) + x(n-1) + x(n-2)) / 3$$

Για να υπολογίσουμε το τρέχον εξαγόμενο $y(n)$, δύο προηγούμενες είσοδοι ($x(n-1)$ και $x(n-2)$) χρειάζονται. Συνεπώς αυτό είναι ένα δεύτερης τάξης φίλτρο.

Η τάξη ενός ψηφιακού φίλτρου μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος αριθμός. Ένα μηδενικής τάξης φίλτρο (όπως αυτά στα παραδείγματα (1) και (2) παραπάνω) είναι δυνατό, αλλά χωρίς νόημα, από τη στιγμή που δεν φιλτράρει πραγματικά το εισαγόμενο σήμα.

2.12.1 Φίλτρα 1ης τάξης

$$H(s) = \frac{\alpha_1 s + a_0}{s + \omega_0}$$

Τρόποι υλοποίησης:

- Με παθητικά RC κυκλώματα.
- Με ενεργά RC κυκλώματα.

Πλεονεκτήματα-μειονεκτήματα

- Η υλοποίηση με ενεργά RC κυκλώματα προσφέρει την δυνατότητα ρύθμισης του μέγιστου κέρδους του φίλτρου.
- Η υλοποίηση με ενεργά RC κυκλώματα προσφέρει την δυνατότητα διαδοχικής διασύνδεσης των βαθμίδων, χωρίς η μία να επηρεάζει την άλλη.
- Η χρήση Τελεστικού Ενισχυτή συνεπάγεται διάφορους περιορισμούς για την συχνότητα λειτουργίας, το πλάτος του σήματος εισόδου κ.λ.π.

Τύπος φίλτρου και T(s)	Χαρακτηριστικά στο πεδίο s	Διάγραμμα Bode για T	Παθητική Υλοποίηση	Υλοποίηση TE-RC
(α) Βαθμωτικό $T(s) = \frac{a_0}{s + \omega_0}$				
(β) Υψηλοπαστό $T(s) = \frac{\alpha_1 s}{s + \omega_0}$				
(γ) Γενικό $T(s) = \frac{\alpha_1 s + \alpha_0}{s + \omega_0}$				

Εικόνα 2.5: Πίνακας φίλτρων 1ης τάξης

2.12.2 Φίλτρα 2^{ης} τάξης

$$H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)s + \omega_0^2}$$

Όπου

$$p_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

ω_0 : συχνότητα πόλου

Q: συντελεστής ποιότητας πόλου

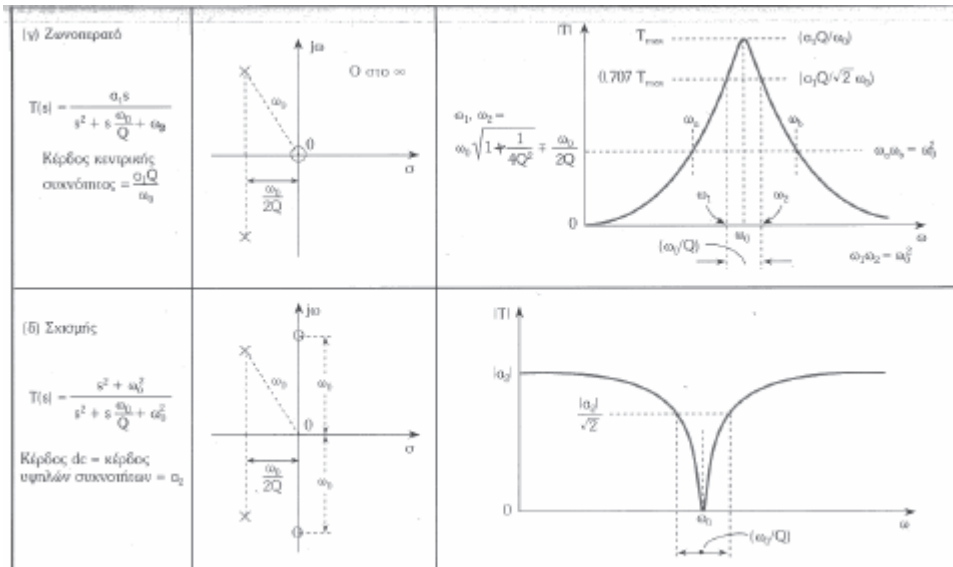
•Οι πόλοι είναι συζυγείς μιγαδικοί όταν $Q > 0.5$, και τότε το φίλτρο έχει υψηλότερη επιλεκτικότητα σε σχέση με την περίπτωση πραγματικών πόλων.

•Τα μηδενικά μεταφοράς καθορίζονται από τους συντελεστές του αριθμητή και έτσι αυτοί καθορίζουν το είδος της συνάρτησης που υλοποιείται.

Τύπος φίλτρου και $T(s)$	Χαρακτηριστικά στο πόλο s	π
(α) Βαθμερωτό $T(s) = \frac{a_0}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$ Κέρδος dc = $\frac{a_0}{\omega_0^2}$		
(β) Υπερρωτό $T(s) = \frac{a_2 s^2}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$ Κέρδος υψηλών συχνοτήτων = a_2		

Εικόνα 2.6: Πίνακας φίλτρων 2ης τάξης

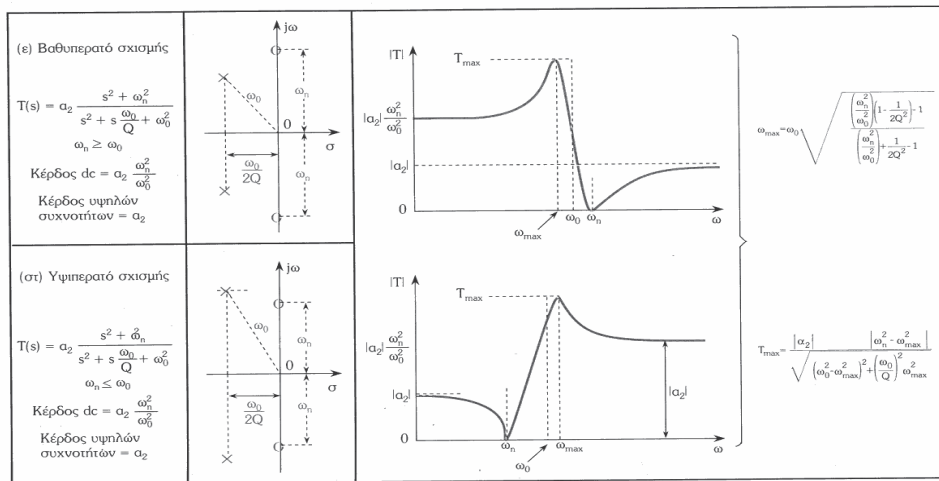
- Η κορυφή εμφανίζεται για $Q > 0.707$
- Όταν $Q = 0.707$ έχουμε απόκριση Butterworth



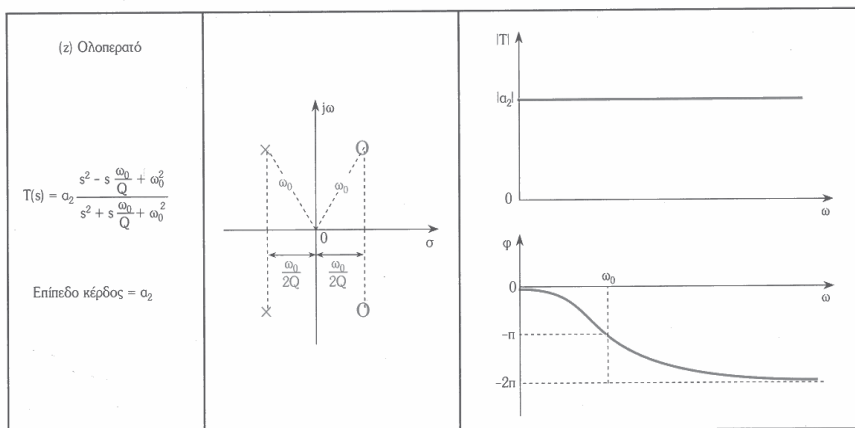
Στο ζωνοπερατό φίλτρο η συχνότητα των πόλων είναι ίση με την κεντρική συχνότητα του φίλτρου.

Η επιλεκτικότητα ενός ζωνοπερατού φίλτρου μετρείται με το εύρος ζώνης 3dB.

$$BW = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0 / Q$$



Εικόνα 2.7: Πίνακας φίλτρων 2ης τάξης



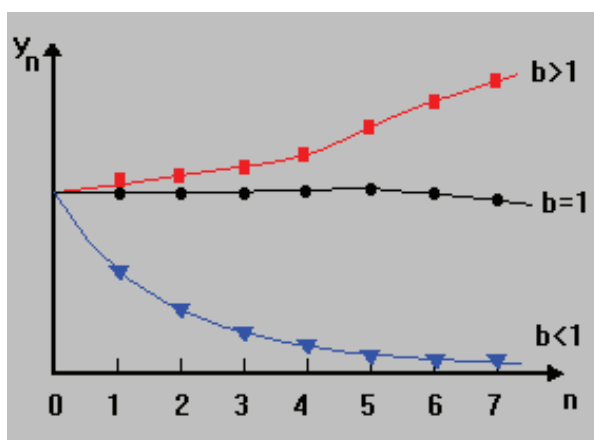
Εικόνα 2.8: Πίνακας φίλτρων 2ης τάξης

2.13 Επαναληπτικά και μη επαναληπτικά φίλτρα

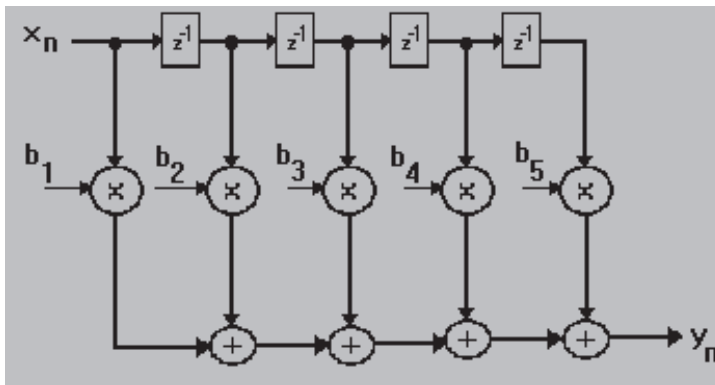
Τα ψηφιακά φίλτρα διαίρουνται σε δύο κατηγορίες που είναι: τα επαναληπτικά και τα μη επαναληπτικά φίλτρα. Επαναληπτικό λέγεται το ψηφιακό φίλτρο του οποίου το δομικό διάγραμμα περιέχει μια ή περισσότερες ανασυζεύξεις. Το σχήμα 2.9 δείχνει το δομικό διάγραμμα ενός ψηφιακού φίλτρου 1-ου βαθμού.

Στα επαναληπτικά φίλτρα η ακολουθία τους μπορεί να είναι άπειρη αν η σταθερά $b < 1$ (η ακολουθία είναι φθίνουσα, αλλά ποτέ δεν πλησιάζει το μηδέν).

Μια δεύτερη ιδιότητα των επαναληπτικών φίλτρων είναι ότι μπορεί να είναι ασταθή. Αν $b > 1$ η ακολουθία δε φθίνει ασυμπτωματικά προς το μηδέν και το φίλτρο είναι ασταθές. Ένα ψηφιακό φίλτρο είναι σταθερό αν η ψηφιακή ακολουθία του φθίνει προς το μηδέν.



Εικόνα 2.9: Χρονική απόκριση επαναληπτικού φίλτρου 1ου βαθμού για $x_n = (1, 0, 0, \dots)$



Εικόνα 2.10: Δομικό διάγραμμα μη επαναληπτικού φίλτρου

Το δείχνει το δομικό διάγραμμα(2.10) ενός μη επαναληπτικού φίλτρου. Το φίλτρο αυτό δεν έχει ανασύζευξη. Μια βασική ιδιότητα του φίλτρου αυτού είναι ότι η ψηφιακή του ακολουθία είναι πεπερασμένου μήκους. Τα φίλτρα αυτά είναι για όλες τις συνθήκες σταθερά. Εφόσον η ακολουθία τους είναι πεπερασμένου μήκους, η ακολουθία τους μετά από έναν πεπερασμένο αριθμό ωρολογιακών παλμών πλησιάζει το μηδέν.

Ο τρόπος υπολογισμού των επαναληπτικών και των μη επαναληπτικών φίλτρων είναι τελείως διαφορετικός.

2.14 Φιλτράρισμα

Η πιο συχνή προσέγγιση για αναπαράσταση στο πεδίο του χρόνου ή του χώρου είναι η επεξεργασία του σήματος εισόδου με μια μέθοδο που ονομάζεται φιλτράρισμα (filtering). Το ψηφιακό φιλτράρισμα συνήθως αποτελείται από έναν γραμμικό μετασχηματισμό μεταξύ ενός δείγματος του σήματος εισόδου ή εξόδου και των γύρω του δειγμάτων. Υπάρχουν πολλοί τρόποι να χαρακτηριστεί ένα φίλτρο. Κάποιοι από αυτούς είναι:

- Ένα «γραμμικό» φίλτρο είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός των δειγμάτων εισόδου, ενώ υπάρχουν και «μη γραμμικά» φίλτρα. Τα γραμμικά φίλτρα ικανοποιούν την συνθήκη της υπέρθεσης (superposition), δηλαδή αν η είσοδος είναι ένας γραμμικός συνδυασμός από διαφορετικά σήματα (το καθένα με κάποιο αριθμητικό βάρος), η έξοδος είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των αντίστοιχων σημάτων εξόδου με αντίστοιχα βάρη.
- Ένα «αιτιατό» φίλτρο μπορεί να χρησιμοποιήσει μόνο προηγούμενα δείγματα των σημάτων εισόδου ή εξόδου, ενώ ένα «μη αιτιατό» φίλτρο χρησιμοποιεί δείγματα

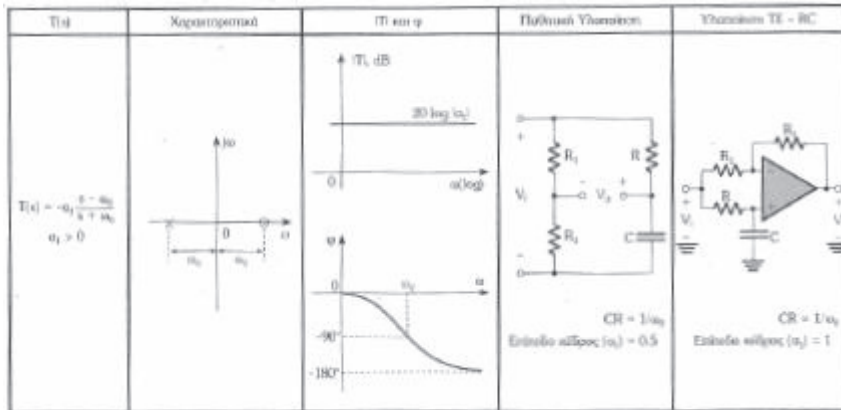
της εισόδου από μελλοντικές στιγμές. Ένα μη αιτιατό φίλτρο μπορεί συνήθως να γίνει αιτιατό με την προσθήκη καθυστέρησης σε αυτό.

- Ένα «αναλλοίωτο στον χρόνο» φίλτρο έχει σταθερές ιδιότητες στον χρόνο. Άλλα φίλτρα, όπως τα προσαρμοστικά φίλτρα (adaptive filters) αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου.
- Κάποια φίλτρα είναι «σταθερά» ενώ άλλα είναι «ασταθή». Ένα σταθερό φίλτρο παράγει μια έξοδο που συγκλίνει σε μια σταθερή τιμή με τον χρόνο ή παραμένει μέσα σε κάποια πεπερασμένα όρια. Ένα ασταθές φίλτρο μπορεί να παράγει μια έξοδο που μεγαλώνει χωρίς όριο, ενώ η είσοδός του να είναι μέσα σε κάποια όρια ή ακόμα και μηδενική.
- Ένα φίλτρο «πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης» (finite impulse response, FIR) χρησιμοποιεί μόνο τα σήματα εισόδου, ενώ ένα φίλτρο «άπειρης κρουστικής απόκρισης» (infinite impulse response, IIR) χρησιμοποιεί τόσο το σήμα εισόδου όσο και προηγούμενα δείγματα από το σήμα εξόδου. Τα φίλτρα FIR είναι πάντα σταθερά, ενώ τα φίλτρα IIR μπορεί να είναι ασταθή.

Τα φίλτρα μπορούν να αναπαρασταθούν από μπλοκ διαγράμματα, τα οποία στη συνέχεια μπορούν να οδηγήσουν σε έναν αλγόριθμο επεξεργασίας δειγμάτων που να υλοποιείται μέσω εντολών σε υλικό. Ένα φίλτρο μπορεί επίσης να περιγραφεί σαν εξίσωση διαφορών (difference equation), ένα σύνολο από μηδενικά και πόλους ή, αν είναι φίλτρο FIR, σαν κρουστική ή βηματική απόκριση.

Η έξοδος ενός ψηφιακού φίλτρου σε κάποια είσοδο μπορεί να υπολογιστεί από τη συνέλιξη του σήματος εισόδου με την κρουστική απόκριση.

2.15 Ολοδιαβατό φίλτρο



Εικόνα 2.11: Πίνακας ολοδιαβατού φίλτρου

• Τα ολοδιαβατά φίλτρα χρησιμοποιούνται σε συστήματα όπου απαιτείται μορφοποίηση της φάσης (π.χ σε delay equalizers).

2.16 Μετασχηματισμοί συνάρτησης μεταφοράς

Αποκανονικοποίηση συχνότητας

($KDC=1, \varepsilon=1, \omega_p=1 \text{ rad/sec}$)

Βαθμός	Πολυώνυμο
1	$s_n + 1$
2	$s_n^2 + 1.414s_n + 1$
3	$(s_n^2 + s_n + 1)(s_n + 1)$

Εικόνα 2.12: Πίνακας πολυωνύμων Butterworth για βαθυπερατή συνάρτηση

- Οι παραπάνω εκφράσεις είναι κανονικοποιημένες στη συχνότητα αποκοπής.
- Για να γίνει αποκανονικοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς ($\omega_p \neq 1 \text{ rad/sec}$), πρέπει να τεθεί:

$$s_n = \frac{s}{\omega_p}$$

2.16.1 Μετασχηματισμός βαθυπερατού σε υψηλερατό

- Στην κανονικοποιημένη βαθυπερατή συνάρτηση τίθεται:

$$s_n = \frac{\omega_p}{s}$$

οπότε προκύπτει υπερπερατό με συχνότητα ω_p .

2.16.2 Μετασχηματισμός βαθυπερατού σε ζωνοπερατό

• Στην κανονικοποιημένη βαθυπερατή συνάρτηση τίθεται:

$$s_n = \frac{s^2 + \omega_1\omega_2}{s(\omega_2 - \omega_1)}$$

2.16.3 Μετασχηματισμός βαθυπερατού σε απόρριψης ζώνης

• Στην κανονικοποιημένη βαθυπερατή συνάρτηση τίθεται:

$$s_n = \frac{s(\omega_2 - \omega_1)}{s^2 + \omega_1\omega_2}$$

2.17 Ιδανικές Προδιαγραφές Φίλτρων

Στηριζόμενοι στη Βασική Υπόθεση που παρουσιάσαμε στην αρχή, θα επιχειρήσουμε το φιλτράρισμα όλων των συχνοτήτων που ανήκουν στον θόρυβο και τη διατήρηση των συχνοτήτων που ανήκουν στην πληροφορία.

Ιδανικές Χαρακτηριστικές

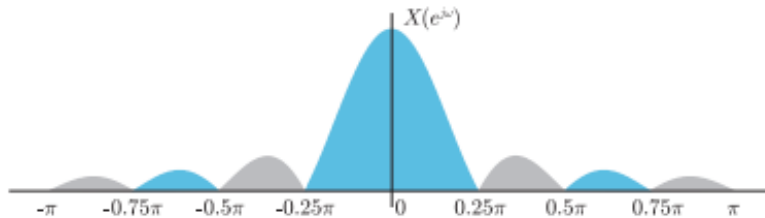
Αφού τα φίλτρα που μας ενδιαφέρουν είναι γραμμικά χρονικά σταθερά συστήματα, η επίδραση τους στο συχνοτικό περιεχόμενο ενός σήματος είναι

$$Y(j\Omega) = D(j\Omega)X(j\Omega) \text{ για αναλογικά}$$

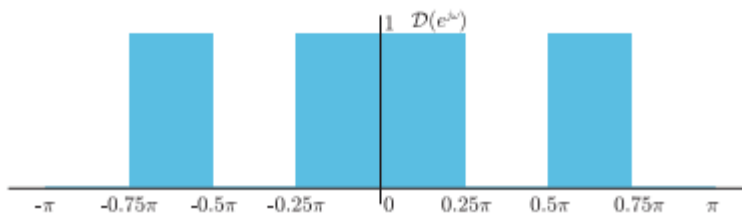
$$Y(e^{j\omega}) = D(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \text{ για ψηφιακά}$$

όπου $X()$ το συχνοτικό περιεχόμενο του προς επεξεργασία σήματος (είσοδος), $D()$ η ιδανική απόκριση συχνότητας του φίλτρου και $Y()$ το συχνοτικό περιεχόμενο της εξόδου του φίλτρου. Είναι προφανές ότι επιλέγοντας την ιδανική απόκριση συχνότητας του φίλτρου $D()$ ώστε να είναι 0 στις συχνότητες του θορύβου και 1 στις συχνότητες της πληροφορίας επιτυγχάνουμε ακριβώς το επιθυμητό αποτέλεσμα, το πλήρες δηλαδή φιλτράρισμα του θορύβου. Τονίζουμε πάλι, ότι το είδος αυτό της επεξεργασίας είναι απόλυτα επιτυχές λόγω της Βασικής Υπόθεσης, της υπόθεσης δηλαδή ότι η πληροφορία και ο θόρυβος δεν περιέχουν κοινές συχνότητες.

Επειδή στην πράξη τα σήματα περιέχουν ζώνες συχνοτήτων, θα υποθέσουμε ότι όλες οι διαθέσιμες συχνότητες διαιρούνται σε ένα σύνολο από ζώνες, όπου κάθε μια ανήκει είτε στην πληροφορία είτε στο θόρυβο.



Εικόνα 2.13: Παράδειγμα συχνοτικού περιεχομένου συνδυασμού πληροφορίας (κυανό) και θορύβου (γκρι)



Εικόνα 2.14: Ιδανική χαρακτηριστική φίλτρου που φιλτράρει εντελώς το θόρυβο

Παρατηρούμε ότι τα ιδανικά φίλτρα είναι συνήθως παραθυρικής μορφής, δηλαδή συχνοτικά παράθυρα που εφαρμόζονται πάνω στις ζώνες συχνοτήτων της πληροφορίας. Οι ζώνες συχνοτήτων που επιθυμούμε να διατηρήσουμε καλούνται ζώνες διάβασης, ενώ αυτές που επιθυμούμε να εξαλείψουμε ζώνες αποκοπής του φίλτρου.

Εξ όσων προηγήθηκαν, είναι φανερό ότι ο καθορισμός των προδιαγραφών ενός ιδανικού φίλτρου έγκειται στον καθορισμό των ζωνών διάβασης και αποκοπής, όπου στις πρώτες η απόκριση του φίλτρου είναι μοναδιαία, ενώ στις δεύτερες μηδενική. Αυτή είναι η συνηθέστερη περίπτωση φίλτρων που εμφανίζονται στην πράξη (κλασικά φίλτρα).

Η γενική επομένως περίπτωση ιδανικής απόκρισης συχνότητας που θα μας απασχολήσει είναι της ακόλουθης μορφής

$$D(j\Omega) = \begin{cases} D_i(j\Omega) & \Omega_{li} \leq \Omega \leq \Omega_{ui} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

για αναλογικά, και

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} D_i(e^{j\omega}) & \omega_{li} \leq \omega \leq \omega_{ui} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

για ψηφιακά.

Όπου $[\Omega_{li}, \Omega_{ui}]$ (αντίστοιχα $[\omega_{li}, \omega_{ui}]$) είναι οι ζώνες διάβασης του φίλτρου και $D_i()$ η τροποποίηση που επιθυμούμε να εκτελεί το φίλτρο στις συχνότητες της αντίστοιχης ζώνης διάβασης. Η συνηθέστερη περίπτωση είναι, όπως αναφέραμε, τα κλασικά φίλτρα, όπου $D_i() = 1$.

Συνοψίζοντας τις ιδανικές προδιαγραφές έχουμε τα ακόλουθα:

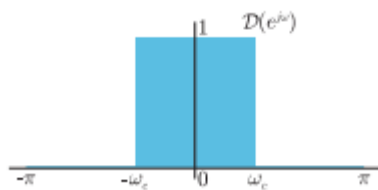
Ιδανικές Προδιαγραφές Φίλτρων : Οι ιδανικές προδιαγραφές ενός φίλτρου συνίστανται στον

- Καθορισμό των ζωνών διάβασης και αποκοπής.
- Καθορισμό των ιδανικών χαρακτηριστικών στις ζώνες διάβασης.

2.18 Είδη Κλασικών Ιδανικών Φίλτρων

Τα πλέον συνηθισμένα φίλτρα που εμφανίζονται στην πράξη είναι τα κλασικά 0 - 1 φίλτρα, τα οποία, είτε αποκόπτουν εντελώς, είτε αφήνουν αναλλοίωτη κάθε συχνότητα. Διακρίνουμε τα ακόλουθα είδη κλασικών φίλτρων (με βάση τις περικοπές που επιθυμούμε κάθε φορά ως συχνότητες του σήματος), τα οποία, εάν και παρουσιάζουμε για την περίπτωση των ψηφιακών, έχουν τα ακριβή αντίστοιχά τους στην περίπτωση και των αναλογικών φίλτρων.

2.18.1 Χαμηλοπερατό ή χαμηλοδιαβατό φίλτρο(Low Pass Filter)



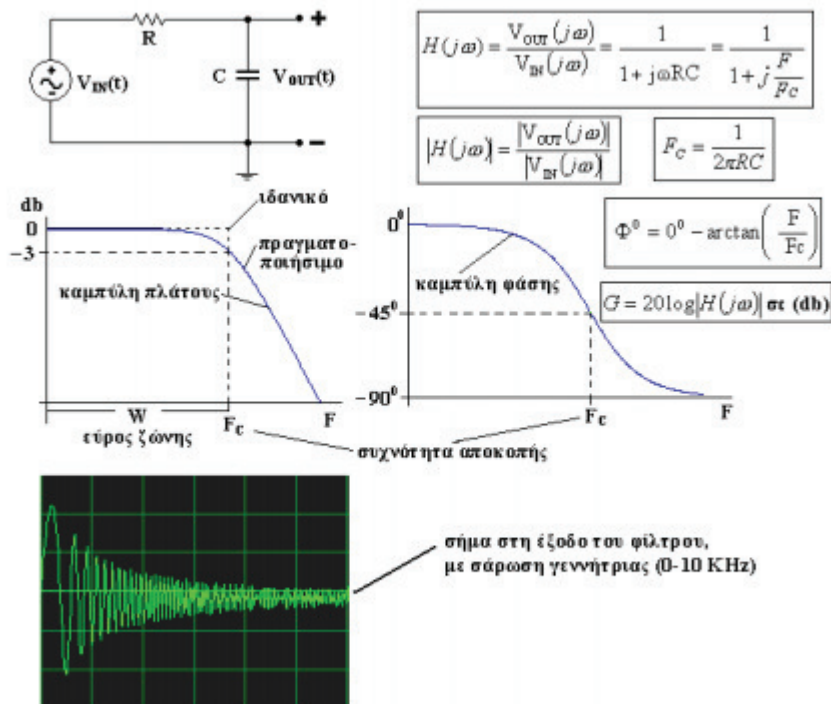
Εικόνα 2.15:Γραφική παράσταση χαμηλοπερατού φίλτρου

Η ιδανική απόκριση συχνότητας ορίζεται

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_e \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

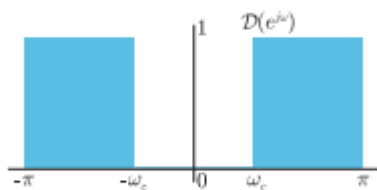
Πρόκειται για φίλτρο το οποίο επιτρέπει να διέλθουν μόνο οι χαμηλές συχνότητες ενός σήματος. Αποκόπτει όλες τις συχνότητες που είναι υψηλότερες από μια συγκεκριμένη

συχνότητα (FC), που ονομάζεται συχνότητα αποκοπής (cutoff frequency). Στη συχνότητα αποκοπής (FC), το κέρδος (G) σε (decibel ή db) είναι ίσο με (- 3 db) και το σήμα στην έξοδο καθυστερεί κατά (- 45°) σε σχέση με εκείνο της εισόδου.



Εικόνα 2.16: Χαμηλοπερατό φίλτρο

2.18.2 Υψηλοπερατό ή υψηλοδιαβατό φίλτρο(High Pass Filter)

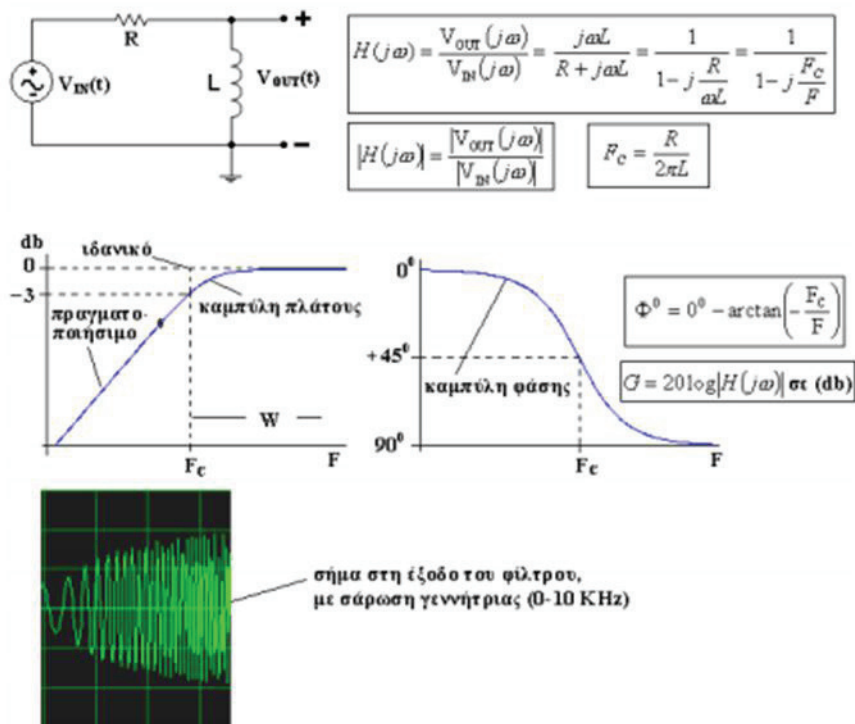


Εικόνα 2.17: Γραφική παράσταση υψηλοπερατού φίλτρου

Η ιδανική απόκριση συχνότητας ορίζεται

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \omega_c \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

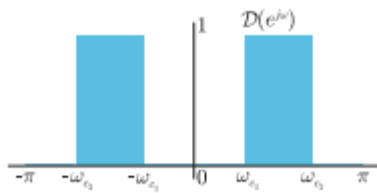
Είναι το φίλτρο που επιτρέπει την διέλευση μόνο των υψηλών συχνοτήτων ενός σήματος. Αποκόπτει όλες τις συχνότητες κάτω από τη συχνότητα αποκοπής. Στη συχνότητα αποκοπής (FC), το κέρδος (G) σε (decibel ή db) είναι πάλι ίσο με (- 3 db) αλλά το σήμα της εξόδου προηγείται τώρα κατά (+ 45°) εκείνου της εισόδου. Το εύρος ζώνης (W) του υψηλερατού φίλτρου, εκτείνεται από τη συχνότητα αποκοπής (FC) μέχρι το άπειρο θεωρητικά.



Εικόνα 2.18:Υψηλοπερατό φίλτρο

2.18.3 Ζωνοπερατό φίλτρο(Band Pass Filter)

Φίλτρο στο οποίο επιτρέπεται η διέλευση συγκεκριμένου πεδίου μεσαίων συχνοτήτων.



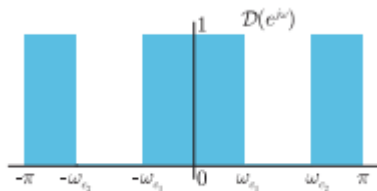
Εικόνα 2.19:Γραφική παράσταση ζωνοπερατού φίλτρου

Η ιδανική απόκριση συχνότητας ορίζεται

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

2.18.4 Ζωνοαπαγορευτικό φίλτρο(Band Stop Filter)

Πρόκειται για φίλτρο που απαγορεύει την διέλευση συγκεκριμένου μεσαίου τμήματος συχνοτήτων.



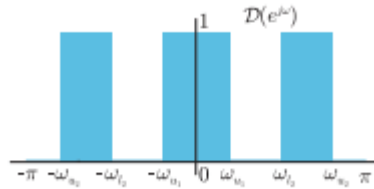
Εικόνα 2.20:Γραφική παράσταση ζωνοαπαγορευτικού φίλτρου

Η ιδανική απόκριση συχνότητας ορίζεται

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & \omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2} \\ 1 & \text{αλλού} \end{cases}$$

2.18.5 Πολυπερατά ή Πολυδιαβατά Φίλτρα

Επιλέγει πολλές ζώνες προτιμώμενων συχνοτήτων και απορρίπτει τις υπόλοιπες ζώνες από τις παρούσες στο σήμα.



Εικόνα 2.21:Γραφική παράσταση πολυπερατού φίλτρου

Η ιδανική απόκριση συχνότητας ορίζεται

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \omega_{li} \leq \omega \leq \omega_{ui} \quad i = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

όπου ω_{li} , ω_{ui} , η κάτω και η άνω συχνότητα αποκοπής της i -οστής ζώνης διάβασης.

2.18.6 Ολοπερατά ή Ολοδιαβατά Φίλτρα

Δεν απομακρύνουν καμία συχνότητα.

Η ιδανική απόκριση συχνότητας ορίζεται

$$D(e^{j\omega}) = 1$$

Συνεπώς τα φίλτρα αυτά δεν απομακρύνουν καμία συχνότητα. Βασικός τους στόχος είναι η αλλαγή της κατανομής της φάσης ανά συχνότητα.

2.19 Ιδανική Κρουστική Απόκριση Φίλτρου

Όταν είναι γνωστή η απόκριση συχνότητας ενός γραμμικού συστήματος, είναι πολύ εύκολο να υπολογίσουμε την κρουστική του απόκριση με τη βοήθεια του Αντίστροφου Μετασχηματισμού Fourier. Εάν καλέσουμε $d(t)$ ή d_n την ιδανική κρουστική απόκριση, τότε

$$d(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad \text{για αναλογικά}$$

$$d_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega \quad \text{για ψηφιακά}$$

Στην πράξη, βέβαια, ενδιαφερόμαστε κυρίως για επεξεργασία πραγματικών σημάτων. Προκειμένου το αποτέλεσμα της επεξεργασίας να είναι πραγματικό, είναι φανερό ότι η κρουστική απόκριση του φίλτρου θα πρέπει να είναι επίσης πραγματική. Η ιδιότητα αυτή εξασφαλίζεται με την ακόλουθη συνθήκη (γνωστή από τις ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier).

Πραγματική Κρουστική Απόκριση Φίλτρου: : Η συνθήκη που εξασφαλίζει το πραγματικό της κρουστικής απόκρισης είναι

$$D(-j\Omega) = D^*(j\Omega) \quad \text{για αναλογικά}$$

$$D(e^{-j\omega}) = D^*(e^{j\omega}) \quad \text{για ψηφιακά}$$

Εάν επιπλέον η ιδανική απόκριση συχνοτήτων $D()$ είναι πραγματική συνάρτηση (όπως στη περίπτωση των κλασικών φίλτρων), τότε η προηγούμενη συνθήκη ισοδυναμεί με το να είναι η $D()$ άρτια.

Μολονότι η ιδανική κρουστική απόκριση επιτυγχάνει το επιθυμητό αποτέλεσμα, φιλτράρει δηλαδή πλήρως το θόρυβο και μετασχηματίζει τις συχνότητες πληροφορίας σύμφωνα με τις απαιτήσεις μας, εμφανίζει σημαντικά μειονεκτήματα που την καθιστούν πρακτικά ανεφάρμοστη. Συγκεκριμένα, για μεν την αναλογική περίπτωση η ιδανική κρουστική απόκριση δεν αντιστοιχεί σε οποιαδήποτε μορφή συστήματος IIR και επομένως δεν είναι υλοποιήσιμη με ηλεκτρικά κυκλώματα, για δε την ψηφιακή δεν καταλήγει ούτε σε FIR ούτε σε IIR συστήματα και επομένως απαιτεί άπειρες πράξεις ανά δείγμα εξόδου. Τέλος, η ιδανική κρουστική απόκριση, σε καμία από τις παραπάνω περιπτώσεις, δεν είναι αιτιατή.

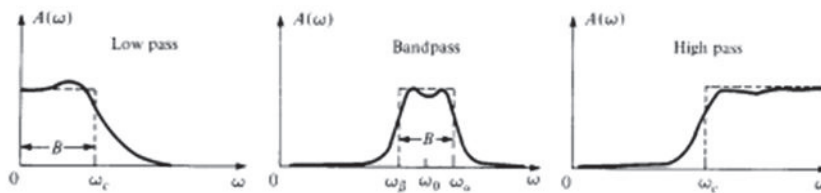
Εφόσον τα φίλτρα που μας ενδιαφέρουν είναι τα FIR και IIR, είναι προφανές ότι με τα συστήματα αυτά δεν είναι δυνατό να ικανοποιήσουμε ακριβώς τις ιδανικές προδιαγραφές, είναι όμως εφικτή η προσέγγισή τους. Από τη στιγμή που αναφερόμαστε σε προσεγγίσεις, είναι απαραίτητο να καθοριστούν συνθήκες, τις οποίες πρέπει να ικανοποιεί η προσέγγιση, προκειμένου να θεωρείται ικανοποιητική.

2.20 Εύρος ζώνης

Για να προσεγγίσουμε το εύρος ζώνης λειτουργίας ενός φίλτρου έχει οριστεί ότι τα όρια της ζώνης είναι ουσιαστικά η ισχύς του σήματος κατά την έξοδο μειωμένο κατά 3db. Δηλαδή, μειωμένο κατά το διπλάσιο του αρχικού σήματος. Αυτά τα όρια που τίθενται αποκαλούνται συχνότητες αποκοπής.

Ουσιαστικά, το φίλτρο είναι ένα σύστημα του οποίου η απόκριση συχνότητας παίρνει σημαντικές τιμές μόνο για συγκεκριμένες ζώνες του άξονα συχνοτήτων. Κάθε φίλτρο έχει εύρος ζώνης που καθορίζεται από τα σημεία αποκοπής. Αυτά τα σημεία τα οποία είναι μάλλον αυθαίρετα και καθορίζονται από τις συχνότητες ω_c τις οποίες η απόκριση συχνότητας $A(\omega)$ είναι κλάσμα της μέγιστης τιμής της δηλ. όπου $A(\omega) = \max A(\omega) / \sqrt{2}$

Το εύρος ζώνης B ενός χαμηλοδιαβατού φίλτρου ισούται με τη συχνότητα αποκοπής ω_c . Το εύρος ζώνης ενός ζωνοδιαβατού φίλτρου είναι η απόσταση $B = \omega_a - \omega_b$ μεταξύ των σημείων αποκοπής. Το σημείο ω_0 που βρίσκεται στο μέσο του διαστήματος (ω_a, ω_b) είναι η κεντρική συχνότητα του φίλτρου.



Εικόνα 2.22:Εύρος ζώνης σε χαμηλοδιαβατό, ζωνοπερατό, υψηλοπερατό

Η απόκριση συχνότητας $H(j\omega)$ ενός φίλτρου επιλέγεται έτσι ώστε να προσεγγίζει τις προδιαγραφές που έχουν επιλεγεί κατά τη σχεδίαση (διακεκομμένες γραμμές στο Σχήμα)

Το πρόβλημα της προσέγγισης εκφράζεται ως προς το πλάτος $A(\omega)$ της $H(j\omega)$. Αν οι προδιαγραφές φάσης το απαιτούν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα ολοδιαβατό φίλτρο για να διορθώσει τις παραμορφώσεις της φάσης (ισοσταθμιστής).

Για να υλοποιήσουμε ένα φίλτρο, πρέπει να ξέρουμε τη συνάρτηση του συστήματος $H(s)$. Στην επεξεργασία σήματος, η λειτουργία ενός φίλτρου είναι να απομακρύνει τα ανεπιθύμητα μέρη ενός σήματος, όπως ένα τυχαίο θόρυβο, ή να εξάγει χρήσιμα κομμάτια ενός σήματος, όπως οι συνιστώσες που βρίσκονται σε μια συγκεκριμένη περιοχή συχνοτήτων.

2.21 Σχεδιασμός φίλτρων

2.21.1 Βασικές αρχές σχεδιασμού

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}$$

• Η σταθερά b επιλέγεται έτσι ώστε η απόκριση μέτρου να έχει συγκεκριμένη τιμή για κάποια συχνότητα.

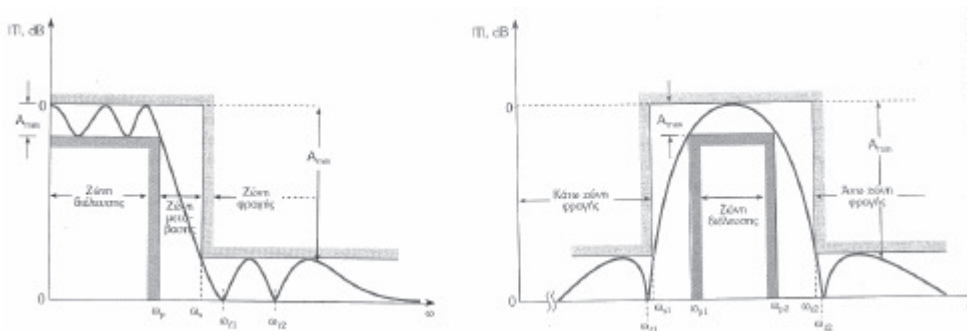
• Τοποθετούνται οι πόλοι κοντά σε σημεία του μοναδιαίου κύκλου που αντιστοιχούν σε συχνότητες που είναι θεμιτό να ενισχυθούν.

• Τοποθετούνται τα μηδενικά κοντά σε σημεία του μοναδιαίου κύκλου που αντιστοιχούν σε συχνότητες που είναι θεμιτό να πραγματοποιηθεί απόσβεση.

• Οι πόλοι πρέπει να βρίσκονται μέσα στον μοναδιαίο κύκλο, για να είναι ευσταθές το φίλτρο.

• Οι μιγαδικοί πόλοι θα πρέπει να είναι συζυγείς, έτσι ώστε οι συντελεστές του φίλτρου να είναι πραγματικοί.

2.21.2 Προδιαγραφές του φίλτρου



Βαθμός επιλεκτικότητας (selectivity factor): ω_s/ω_p

Κυμάτωση της ζώνης διέλευσης (passband ripple): A_{max}

2.21.2.1 Εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς (προσέγγιση του φίλτρου)

$$H(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{\alpha_N s^N + \alpha_{N-1} s^{N-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} = K \frac{(s - z_1) * (s - z_2) \dots * (s - z_M)}{(s - p_1) * (s - p_2) \dots * (s - p_N)}, K = \frac{b_M}{\alpha_N}$$

•Οι ρίζες του αριθμητή λέγονται μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς ή μηδενικά διέλευσης. Οι ρίζες του παρανομαστή λέγονται πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς ή φυσικές συχνότητες.

•Επειδή οι συντελεστές του φίλτρου είναι πραγματικοί, οι μιγαδικοί πόλοι/μηδενικά είναι συζυγείς.

•Τα μηδενικά βρίσκονται πάνω στον $j\omega$ άξονα όταν η απόκριση μέτρου είναι μηδενική σε πεπερασμένες συχνότητες.

•Ο αριθμός των μηδενικών που βρίσκονται στο άπειρο είναι: $N-M$.

•Για να υπάρχει ελάχιστη μεταβολή στη φάση, τα μηδενικά θα πρέπει να βρίσκονται στο αριστερό ημιπίεδο του πεδίου- s

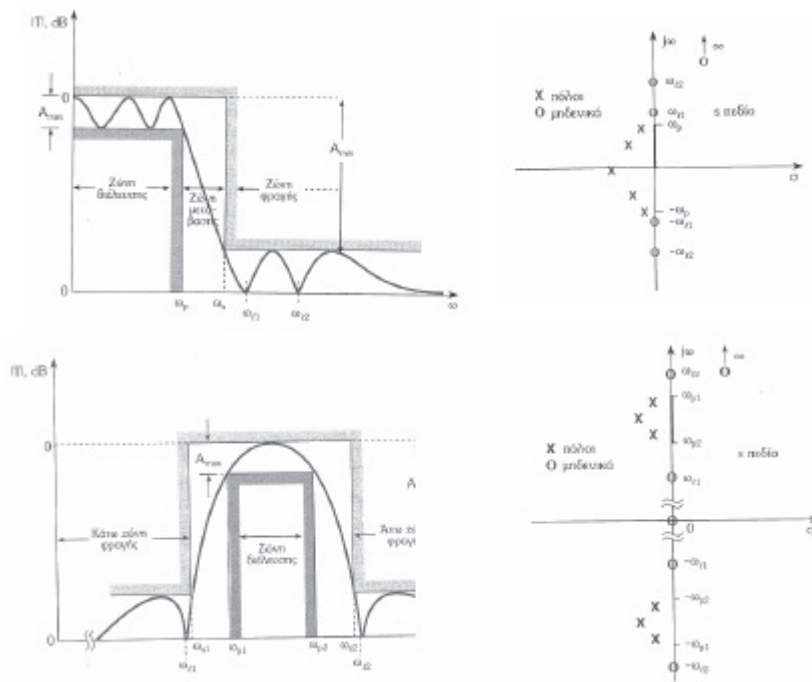
•Για να είναι το φίλτρο ευσταθές θα πρέπει:

- $N \geq M$. (N : τάξη του φίλτρου)

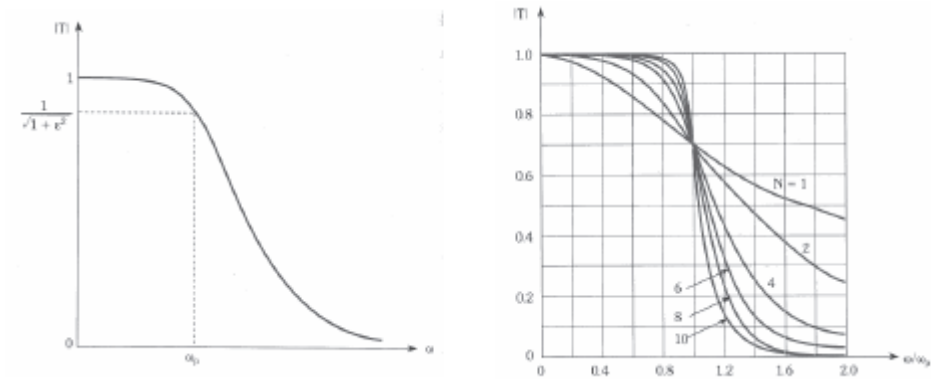
-Οι πόλοι πρέπει να βρίσκονται στο αριστερό ημιπίεδο του πεδίου- s

(εκτός από τον $j\omega$ άξονα).

2.21.3 Επίδραση της θέσης πόλων-μηδενικών στην απόκριση συχνότητας



Βαθωπερατές συναρτήσεις Butterworth



•Όλα τα μηδενικά διέλευσης είναι στο άπειρο (φίλτρα με πόλους μόνο).

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2N}}}}$$

Προσδιορισμός της τάξης του φίλτρου

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2N}}}$$

• Για $\omega = \omega_p$

$$H(\omega_p) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \rightarrow A_{max} = -20 \log H(\omega_p) = 20 \log \sqrt{1 + \varepsilon^2} \rightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1}$$

Για $\varepsilon = 1$, τότε $\omega_p = \omega_{-3dB}$

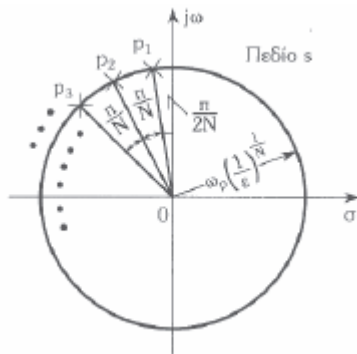
• Για $\omega = \omega_s$

$$A(\omega_s) = 10 \log \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^{2N} \right] \geq A_{min}$$

• Από τις 2 παραπάνω προσδιορίζεται η τάξη του φίλτρου

$$N \geq \frac{\log \sqrt{\frac{10^{0.1A_{min}} - 1}{10^{0.1A_{max}} - 1}}}{\log \left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)}$$

Εύρεση των πόλων της συνάρτησης



➤ Εύρεση του μέτρου των πόλων

•Οι πόλοι βρίσκονται πάνω σε κύκλο ακτίνας: $\omega_0 = \omega_p \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{N}}$

Άρα όλοι οι πόλοι έχουν την ίδια συχνότητα ω_0 .

Για $N=1$, τότε $\omega_0 = \omega_p$.

➤ Εύρεση της φάσης των πόλων

•Οι πόλοι σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία π/N , με τον πρώτο πόλο να σχηματίζει γωνία $\pi/2N$ με τον $j\omega$ άξονα.

➤ Έκφραση για τυχαίο πόλο $p_k = \omega_0 (\cos\varphi_k + j\sin\varphi_k)$

Εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς

Γενική μορφή συνάρτησης Butterworth:

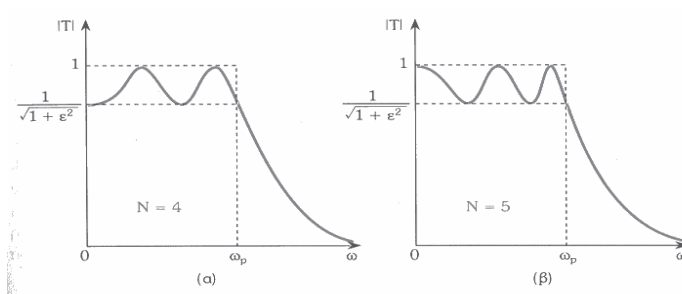
$$H(s) = \frac{K \omega_0^N}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_N)}$$

όπου K είναι το απαιτούμενο κέρδος στο DC.

Σχόλια:

- Οι αντίστοιχες υπερπερατές, ζωνοδιαβατές κ.λπ. συναρτήσεις προκύπτουν με την χρήση κατάλληλων μετασχηματισμών συχνότητας.
- Τα φίλτρα Butterworth έχουν το πλεονέκτημα της επίπεδης απόκρισης στη ζώνη διέλευσης (*maximally flat filters*).
- Τα φίλτρα Butterworth έχουν το μειονέκτημα της αργής μετάβασης στη ζώνη αποκοπής.

Βαθυπερατές συναρτήσεις Chebyshev



- Στα φίλτρα περιττής τάξης είναι $H(0)=1$.
- Τα φίλτρα άρτιας τάξης παρουσιάζουν την μέγιστη απόκλιση για $\omega=0$.
- Ο συνολικός αριθμός μεγίστων και ελαχίστων είναι ίσος με την τάξη του φίλτρου.
- Όλα τα μηδενικά διέλευσης είναι στο άπειρο (φίλτρα με πόλους μόνο).

Προσδιορισμός της τάξης του φίλτρου

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \cos^2 \left[N \cos^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right) \right]}}, \quad \omega \leq \omega_p$$

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \cosh^2 \left[N \cosh^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right) \right]}}, \quad \omega \geq \omega_p$$

• $\omega=\omega_p \rightarrow H(\omega_p) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \rightarrow A_{max} = -20 \log H(\omega_p) = 20 \log \sqrt{1+\varepsilon^2} \rightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1}$

• Για $\omega = \omega_s \rightarrow A(\omega_s) = 10 \log \left[1 + \varepsilon^2 \cosh^2 \left(N \cosh^{-1} \frac{\omega_s}{\omega_p} \right) \right] \geq A_{min}$

$$N \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0.1A_{min}} - 1}{10^{0.1A_{max}} - 1}}}{\cosh^{-1} \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} \right)}$$

Εύρεση των πόλων της συνάρτησης

$$P_k = -\omega_p \sin \left(\frac{2k-1}{N} \frac{\pi}{2} \right) \sinh \left(\frac{1}{N} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon} \right) + j\omega_p \cos \left(\frac{2k-1}{N} \frac{\pi}{2} \right) \cosh \left(\frac{1}{N} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon} \right),$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

Εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς

$$H(s) = \frac{K \omega_p^N}{\varepsilon^{2N-1} (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_N)}$$

όπου **K** είναι το απαιτούμενο κέρδος στο DC.

Σχόλια:

• Για την ίδια τάξη και το ίδιο A_{max} , το φίλτρο Chebyshev παρέχει μεγαλύτερη απόσβεση στη ζώνη διέλευσης, σε σχέση με το Butterworth.

• Για να ικανοποιηθούν οι ίδιες προδιαγραφές απαιτείται μικρότερη τάξη για ένα φίλτρο Chebyshev, σε σχέση με το Butterworth.

3 FIR & IIR

Ένα αναδρομικό φίλτρο (IIR, Infinite Impulse Response) είναι αυτό, το οποίο χρησιμοποιεί ως εισαγόμενες τιμές και προηγούμενες εξαγόμενες τιμές. Αυτές, όπως και οι προηγούμενες εισαγόμενες τιμές, αποθηκεύονται στη μνήμη του επεξεργαστή.

Οι όροι “Finite Impulse Response” και “Infinite Impulse Response” αναφέρονται στη διαφοροποίηση της impulse response των δύο τύπων φίλτρου. Η impulse response ενός ψηφιακού φίλτρου είναι η εξαγόμενη ακολουθία από το φίλτρο, όταν μια unit impulse εφαρμόζεται στην ίδια του την είσοδο. (Μια unit impulse είναι μια πολύ απλή εισαγόμενη ακολουθία που αποτελείται από μια τιμή 1 σε χρόνο $t = 0$, ακολουθούμενη από μηδενικά σε όλα τα διαδοχικά στιγμιαία δείγματα).

Ένα FIR φίλτρο είναι κάποιο του οποίου η impulse response είναι μετρήσιμης διάρκειας. Ένα IIR φίλτρο είναι κάποιο του οποίου η impulse response (θεωρητικά) συνεχίζει για πάντα, επειδή οι περιοδικά επαναλαμβανόμενοι όροι (προηγούμενη έξοδος) ανατροφοδοτούν συνεχώς με ενέργεια την είσοδο του φίλτρου. Ο όρος IIR δεν είναι πολύ ορθός, επειδή οι πραγματικές impulse response σχεδόν όλων των IIR φίλτρων μειώνονται στο μηδέν σε ένα μετρήσιμο χρόνο. Ωστόσο, αυτοί οι δύο όροι χρησιμοποιούνται ευρέως.

Η λέξη αναδρομικός κυριολεκτικά σημαίνει "επιστρέφω πίσω" και αναφέρεται στο γεγονός ότι τιμές που έχουν υπολογιστεί στο παρελθόν επιστρέφουν πίσω ως είσοδοι για τον υπολογισμό των νέων τιμών. Η έκφραση ενός αναδρομικού φίλτρου δεν εμπεριέχει μόνο τις εισαγόμενες τιμές ($x(n)$, $x(n-1)$, $x(n-2)$, ...) αλλά επίσης και προηγούμενες εξαγόμενες $y(n-1)$, $y(n-2)$, ...

FIR:

- Το σήμα εξόδου εξαρτάται μόνο από το σήμα εισόδου κι όχι από προηγούμενες τιμές του σήματος εξόδου. Γι' αυτό και τα φίλτρα τέτοιου είδους έχουν πεπερασμένη διάρκεια.
- Τέτοια συστήματα/φίλτρα στη γενική τους μορφή είναι:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

IIR:

- Το σήμα εξόδου έχει άπειρη διάρκεια και εξαρτάται από προηγούμενες τιμές του σήματος εξόδου.
- Τέτοια συστήματα/φίλτρα στη γενική τους μορφή είναι:

$$y(n) = \sum_{k=1}^N \alpha_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

Από τον ορισμό αυτό, μπορεί να φαίνεται ότι τα αναδρομικά φίλτρα απαιτούν περισσότερους υπολογισμούς, από τη στιγμή που υπάρχουν προηγούμενοι εξαγόμενοι όροι στην έκφραση του φίλτρου όπως και εισαγόμενοι όροι. Όμως ισχύει συνήθως το αντίθετο. Για να επιτευχθεί μια δοσμένη απόκριση συχνότητας, με ένα αναδρομικό φίλτρο, γενικά απαιτείται χαμηλότερη τάξη φίλτρου, και συνεπώς λιγότεροι όροι που πρέπει να υπολογιστούν από τον επεξεργαστή, σε σύγκριση με ένα μη αναδρομικό φίλτρο. Τα IIR φίλτρα είναι επαναληπτικά ή αναδρομικά, με την έννοια ότι δείγματα της εξόδου χρησιμοποιούνται από το σύστημα για τον υπολογισμό των νέων τιμών της εξόδου σε επόμενες χρονικές στιγμές. Για να επιτύχουμε μια επιθυμητή απόκριση χρειαζόμαστε σημαντικά λιγότερους συντελεστές για ένα IIR φίλτρο σε σχέση με το αντίστοιχο FIR. Τα IIR φίλτρα είναι ασταθή, αν οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Τα IIR δεν έχουν γραμμική απόκριση φάσης στη ζώνη διέλευσης, όπως τα μη επαναληπτικά FIR φίλτρα με συμμετρική ή αντισυμμετρική κρουστική απόκριση. Τα IIR φίλτρα μπορούν εύκολα να σχεδιασθούν αρχίζοντας από ένα αναλογικό φίλτρο και κατόπιν χρησιμοποιώντας κατάλληλη απεικόνιση του επιπέδου-s στο επίπεδο-z. Αρχικά προσδιορίζεται η $H(s)$ και στη συνέχεια στο $H(z)$, έτσι ώστε τα επιθυμητά χαρακτηριστικά του αναλογικού φίλτρου να διατηρούνται κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

3.1 Σύγκριση FIR και IIR Φίλτρων

Αναλογικά φίλτρα:

- τα υλοποιήσιμα αναλογικά φίλτρα ανήκουν στην κατηγορία των IIR φίλτρων.

Στον αναλογικό κόσμο δεν υπάρχει επομένως πρόβλημα επιλογής, αφού διατίθεται ένα είδος φίλτρου.

Ψηφιακά φίλτρα:

- Τα FIR φίλτρα μπορούν να υπολογιστούν κατά βέλτιστο τρόπο με ελαχιστοποίηση κριτηρίων απόστασης μεταξύ της ιδανικής συνάρτησης $D(e^{j\omega})$ και της προσεγγίζουσας $R(e^{j\omega})$. Στα IIR δεν υπάρχει αντίστοιχη μεθοδολογία, δεν είναι δηλαδή (πρακτικά) δυνατό να υπολογίσουμε τους συντελεστές των πολυωνύμων αριθμητή και παρονομαστή ελαχιστοποιώντας κάποιο κριτήριο απόστασης.

- Με τα FIR φίλτρα μπορούμε να σχεδιάσουμε χαρακτηριστικές που είναι πολύ γενικής μορφής. Τα IIR εφαρμόζονται κυρίως σε περιπτώσεις κλασικών 0-1 φίλτρων.

- Τα FIR φίλτρα μπορούν να είναι γραμμικής φάσης με μηδενικό επιπλέον κόστος. Τα IIR δεν είναι γραμμικής φάσης.

- Από καθαρά υπολογιστική άποψη, για τον ίδιο βαθμό προσέγγισης της ιδανικής χαρακτηριστικής, τα IIR φίλτρα απαιτούν σημαντικά λιγότερες πράξεις από ότι τα FIR φίλτρα.

Το είδος του φίλτρου που είναι κατάλληλο εξαρτάται αποκλειστικά από τη φύση της εφαρμογής για την οποία προορίζεται. Ο γενικός κανόνας είναι ότι:

- Επιλέγει κανείς FIR όταν επιθυμεί γραμμική φάση
- Διαφορετικά, προτιμά τα IIR φίλτρα λόγω της μικρότερης υπολογιστικής πολυπλοκότητας.

3.2 IIR

3.2.1 Τάξη αναδρομικού ψηφιακού φίλτρου(IIR)

Η τάξη ενός ψηφιακού φίλτρου, ορίστηκε πρωτύτερα, ως ο αριθμός των προηγούμενων εισαγόμενων τιμών οι οποίες πρέπει να αποθηκευτούν για να παράγουν μια έξοδο. Αυτός ο ορισμός είναι κατάλληλος για μη αναδρομικά φίλτρα (FIR), τα οποία χρησιμοποιούν μόνο τις τρέχουσες και προηγούμενες εισαγόμενες τιμές για να υπολογίσουν την τρέχουσα έξοδο. Στην περίπτωση των αναδρομικών φίλτρων, ο καθορισμός μπορεί να επεκταθεί όπως φαίνεται παρακάτω:

Η τάξη ενός αναδρομικού φίλτρου είναι ο μεγαλύτερος αριθμός των προηγούμενων εισαγόμενων και εξαγόμενων τιμών που απαιτούνται για να υπολογιστεί η τρέχουσα έξοδος.

Αυτός ο ορισμός είναι αρκετά γενικός αφού εφαρμόζεται στα FIR και στα IIR φίλτρα.

3.2.2 Συντελεστές αναδρομικών ψηφιακών φίλτρων(IIR)

Από την παραπάνω συζήτηση, μπορούμε να δούμε ότι ένα αναδρομικό φίλτρο μοιάζει βασικά με ένα μη αναδρομικό φίλτρο, με την προσθήκη επιπλέον όρων εμπεριέχοντας προηγούμενες εισαγωγές ($y(n-1)$, $y(n-2)$,...).

Ένα πρώτης τάξης αναδρομικό φίλτρο μπορεί να γραφεί στη γενική μορφή

$$y_n = (a_0x(n) + a_1x(n-1) - b_1y(n-1)) / b_0$$

Σημειώστε το σημείο αφαίρεσης μπροστά από τον αναδρομικό όρο $b_1y(n-1)$, και τον παράγοντα $(1/b_0)$ που πολλαπλασιάζεται σε όλους τους συντελεστές. Ο λόγος που εκφράζουμε

το φίλτρο με τέτοιο τρόπο, είναι για να μας επιτραπεί να ξαναγράψουμε την έκφραση στην παρακάτω συμμετρική μορφή:

$$b_0y(n) + b_1y(n-1) = a_0x(n) + a_1x(n-1)$$

Στην περίπτωση ενός φίλτρου δεύτερης τάξης η γενική μορφή είναι:

$$yn = [a_0x(n) + a_1x(n-1) + a_2x(n-2) - b_1y(n-1) - b_2y(n-2)] / b_0$$

Μια εναλλακτική αναδρομική μορφή αυτής της έκφρασης είναι:

$$b_0y(n) + b_1y(n-1) + b_2y(n-2) = a_0x(n) + a_1x(n-1) + a_2x(n-2)$$

Σημειώστε τη σύμβαση ότι οι συντελεστές των εισαγόμενων τιμών (τα x) υποδηλώνονται με a, ενώ οι συντελεστές των εξαγόμενων τιμών (τα y) υποδηλώνονται με b.

3.2.3 Σχεδίαση IIR ψηφιακών φίλτρων

Όπως και στην περίπτωση των FIR φίλτρων, έτσι και εδώ, υπάρχουν πολλές μέθοδοι σχεδίασης IIR φίλτρων. Η πρώτη και πιο απλή από αυτές, είναι αυτή της απευθείας τοποθέτησης των πόλων και μηδενικών του φίλτρου πάνω στο μιγαδικό επίπεδο-z, προσδιορίζοντας άμεσα την συνάρτηση μεταφοράς και κατά συνέπεια του συντελεστές του φίλτρου. Η μέθοδος αυτή είναι περισσότερο θεωρητικής και εκπαιδευτικής σημασίας παρά πρακτικής αξίας. Υπάρχουν και άλλες τεχνικές, κατά τις οποίες η σχεδίαση του φίλτρου γίνεται απευθείας στο πεδίο-z, όπως η μέθοδος των προσεγγίσεων Pade ή η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, τις οποίες όμως δεν θα διαπραγματευτούμε.

Περισσότερο συνηθισμένο είναι να χρησιμοποιούμε τεχνικές οι οποίες μετατρέπουν ένα αναλογικό φίλτρο σε ψηφιακό. Και εδώ υπάρχουν διαφορετικές μέθοδοι μετατροπής ενός αναλογικού φίλτρου σε ψηφιακό. Εμείς θα αναφερθούμε στις δύο πιο γνωστές από αυτές, τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής και τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού. Τέλος, θα πρέπει να επαναλάβουμε ότι υλοποιήσιμα και ευσταθή IIR φίλτρα δεν μπορεί να έχουν γραμμική απόκριση φάσης. Έτσι, οι προδιαγραφές των φίλτρων θα αναφέρονται μόνο στο μέτρο της απόκρισης στη συχνότητα. Αυτό δεν σημαίνει ότι η φάση δεν είναι ουσιώδους σημασίας. Σημαίνει απλά πως, αφού μέτρο και φάση είναι αλληλένδετα, δεχόμαστε την φάση όπως αυτή προκύπτει από την διαδικασία σχεδίασης. Αν κάποια εφαρμογή απαιτεί γραμμική φάση, τότε θα πρέπει να σχεδιάσουμε ένα FIR φίλτρο με συμμετρική ή αντισυμμετρική κρουστική απόκριση.

Η μέθοδος της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης για την σχεδίαση IIR ψηφιακών φίλτρων είναι κατάλληλη για βαθυπερατά και ορισμένα ζωνοδιαβατά φίλτρα. Η μέθοδος του διγραμμικού μετασχηματισμού (bilinear transformation method) τουλάχιστον δε θέτει τέτοιους

περιορισμούς. Πρόκειται για έναν μαθηματικό μετασχηματισμό του πεδίου-s στο πεδίο-z. Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό αυτό, όταν μας δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του αναλογικού φίλτρου, μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του αντίστοιχου ψηφιακού φίλτρου, αντικαθιστώντας το s με το $(z-1)/(z+1)$

Έτσι, η σχεδίαση ενός ψηφιακού φίλτρου ανάγεται ουσιαστικά στην σχεδίαση του κατάλληλου αναλογικού φίλτρου και στην μετέπειτα μετάβαση από το $H(s)$ στο $H(z)$ έτσι ώστε τα επιθυμητά χαρακτηριστικά του αναλογικού φίλτρου να διατηρούνται κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Γενική μορφή της απόκρισης συχνότητας ενός αναλογικού βαθυπερατού φίλτρου:

Η απόκριση συχνότητας ενός αναλογικού φίλτρου (αναλογικού συστήματος) προκύπτει από την συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ αυτού για τιμές του s πάνω στον άξονα των φανταστικών $j\Omega$, δηλαδή:

$$H(j\Omega) = H(s)$$

$$s = j\Omega$$

3.3 FIR

3.3.1 Κατηγορίες FIR φίλτρων

- Φίλτρα μέσης τιμής (MA filters)
- Μέθοδος Μετασχηματισμού Fourier ή μέθοδος των παραθύρων
- Φίλτρα ισοκυματικά-βέλτιστα (equiripple filters)
- Φίλτρα με δειγματοληψία συχνότητας

3.3.2 Χαρακτηριστικά FIR φίλτρων

- Η μορφή των FIR φίλτρων:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

- Συνάρτηση μεταφοράς και απόκριση συχνότητας (**DTFT**):

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad \text{και} \quad H(\omega) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega}$$

- Έχουν μόνο μηδενισμούς \rightarrow **ευστάθεια**
- Η γραμμική φάση αποτελεί το βασικό χαρακτηριστικό των FIR φίλτρων

Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για γραμμική φάση είναι η συμμετρία των συντελεστών $h(n)$ του FIR φίλτρου.

Για ένα φίλτρο τάξεως N , έχουμε δύο είδη συμμετρίας:

άρτια: $h(n) = h(N-n)$ και

περιττή: $h(n) = -h(N-n)$

3.3.3 Είδη FIR φίλτρων

1. N =περιττός

$h(n)=h(N-1-n) < H(\omega)=-\alpha\omega$ όπου $\alpha=(N-1)/2$

Υλοποιεί όλους τους τύπους των φίλτρων

2. N =άρτιος

$h(n)=h(N-1-n) < H(\omega)=-\alpha\omega$ όπου $\alpha=(N-1)/2$

$$H_r(\omega) = 2 \sum_1^{N/2} h\left(\frac{N}{2} - n\right) \cos\left(|\omega n - \frac{\pi}{2}\right)$$

$H(\omega)=H_r(\omega)e^{j\alpha\omega}$ όπου

Επειδή για $\omega=\pi \rightarrow H_r(\omega)=0$ ΔΕΝ μπορεί να υλοποιήσει φίλτρα Υψηλερατά και Απόρριψης ζώνης.

3. N =περιττός

$h(n)=-h(N-1-n) < H(\omega)=\beta-\alpha\omega =\pi/2-\omega(N-1)/2$

$$H(\omega) = H_r(\omega)e^{j[\beta-\alpha\omega]} \text{ όπου } H_r(\omega) = 2 \sum_1^{(N-1)/2} h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) \sin(\omega n)$$

Για $\omega=0$ και $\omega=\pi \rightarrow H_r=0$. Άρα ο τύπος αυτός ΔΕΝ δίνει Υψηλερατά και Βαθυπερατά φίλτρα Είναι όμως κατάλληλο για διαφοριστές και μετασχ. Hilbert

4. N =άρτιος

$h(n)=-h(N-1-n) < H(\omega)=\beta-\alpha\omega =\pi/2-\omega(N-1)/2$

$$H(\omega) = H_r(\omega)e^{j[\beta-\alpha\omega]} \text{ όπου } H_r(\omega) = 2 \sum_1^2 h\left(\frac{N}{2} - n\right) \sin\left\{\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right\}$$

Για $\omega=0 \rightarrow H_r=0$. Άρα ο τύπος αυτός είναι κατάλληλος για διαφοριστές και μετασχ. Hilbert

3.3.4 Μηδενισμοί των FIR φίλτρων

Επειδή δεν έχουν πόλους αλλά μόνο μηδενισμούς η ευστάθεια είναι δεδομένη για όλο το μιγαδικό επίπεδο $-z$

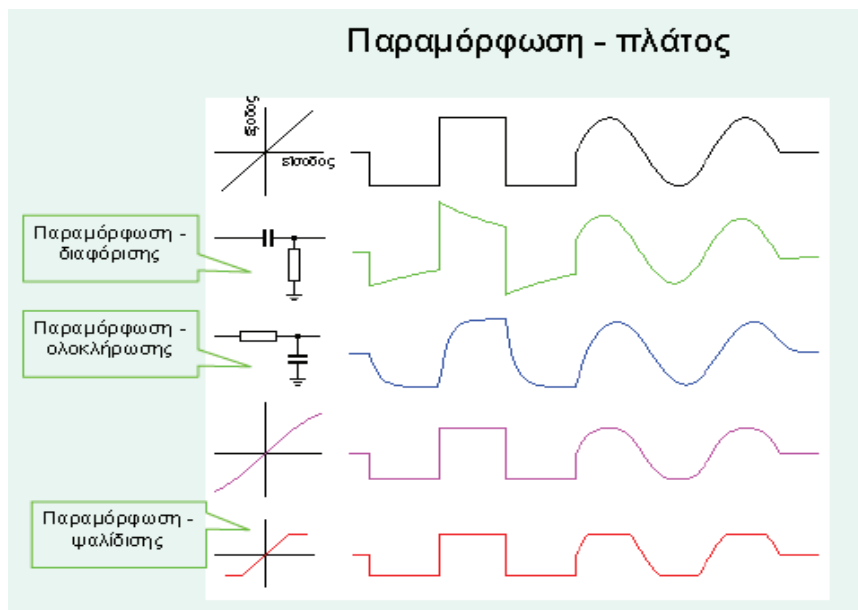
Οι μηδενισμοί εφόσον είναι μιγαδικοί θα πρέπει να είναι συζυγείς για να έχουμε συναρτήσεις με πραγματικούς συντελεστές

$$z_1 \rightarrow z_1^*$$

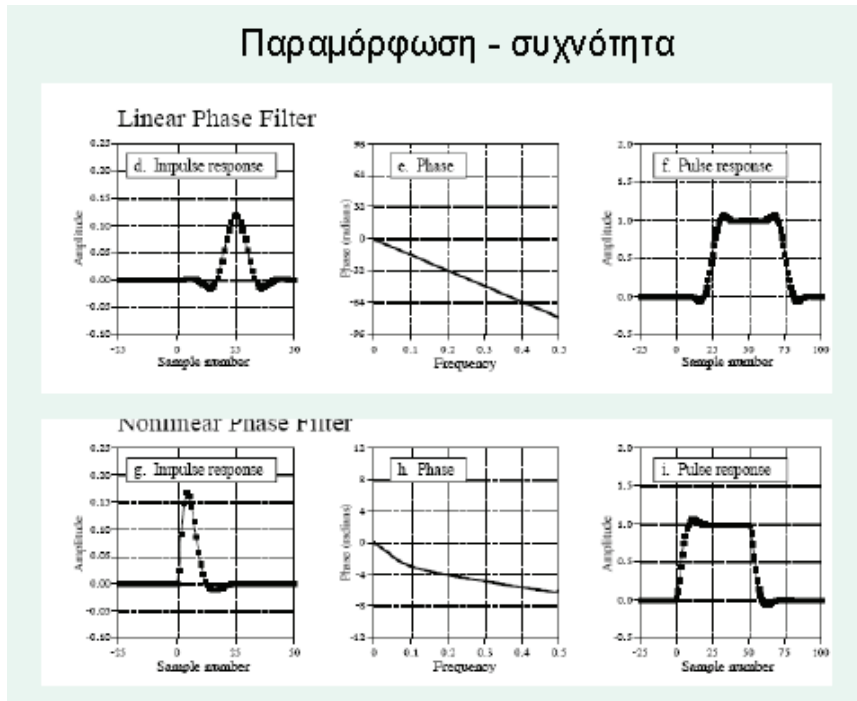
Εάν θεωρήσουμε και την συμμετρία δεδομένη θα πρέπει για κάθε μηδενισμό να υπάρχει και ο αντίστροφός του (επειδή $H(z)=H(z^{-1})$)

$$z_1 \rightarrow (z_1)^{-1}$$

Αρα για κάθε μηδενισμό τιμής z_1 , θα πρέπει να υπάρχουν και οι μηδενισμοί: z_1^* , $(z_1)^{-1}$ και $(z_1^*)^{-1}$



Εικόνα 3.1: Παραμόρφωση πλάτους



Εικόνα 3.2: Παραμόρφωση συχνότητας

3.3.5 Σχεδίαση FIR ψηφιακών φίλτρων με τη μέθοδο των παραθύρων

Ένα αιτιατό FIR φίλτρο μήκους L περιγράφεται από την εξίσωση διαφοράς:

$$y(n) = \sum_{k=0}^L a_k x(n - k) = h(n) * x(n)$$

με συνάρτηση μεταφοράς της μορφής:

$$H(z) = \sum_{x=0}^L h(n)z^{-n} = h(0) + h(1)z^{-1} + \dots + h(L)z^{-L}$$

όπου οι συντελεστές a_k αποτελούν τους όρους $h(n)$ της κρουστικής απόκρισης του φίλτρου. Επομένως, για να σχεδιαστεί το φίλτρο, αρκεί να προσδιοριστεί η πεπερασμένη ακολουθία $h(n)$.

- Βασίζεται στον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier. Δηλαδή δίνεται η μορφή της απόκρισης συχνότητας $H(\omega)$ και ζητείται η αντίστοιχη $h(n)$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega$$

- Συνήθως εφαρμόζεται για απλές μορφές $H(\omega)$

- Το βασικό πρόβλημα στη μέθοδο αυτή είναι ο αριθμός των συντελεστών $h(n)$ που πρέπει να επιλεγούν.
- Η μέθοδος αρχίζει με την υλοποίηση ιδανικής μορφής βαθυπερατού φίλτρου.
- Για να έχει νόημα το φίλτρο πεπερασμένου μήκους πρέπει να κρατήσουμε έναν πεπερασμένο μόνο αριθμό από τους συντελεστές, να κάνουμε δηλαδή αποκοπή.
- Η αποκοπή αυτή αλλοιώνει την αρχική ιδανική βαθυπερατή συνάρτηση της οποίας είναι προσέγγιση. Η προσέγγιση αυτή είναι η βέλτιστη με την έννοια του μέσου τετραγωνικού σφάλματος.
- Δηλαδή το σφάλμα $e = \int_{2\pi} |H_d(\omega) - H_a(\omega)| d(\omega)$ είναι ελάχιστο.
- Η αποκοπή εκφράζεται καλύτερα με την έννοια του παραθύρου.
- Δηλ. είναι πράξη πολλαπλασιασμού της (άπειρης) ακολουθίας $h(n)$ με ένα ορθογώνιο παράθυρο $w(n)$ πεπερασμένου μήκους N .
- Η έννοια του παραθύρου μας δίνει την δυνατότητα γενίκευσης της αποκοπής με ταυτόχρονη διαμόρφωση των συντελεστών $h(n)$.

3.3.6 Σχεδίαση δισδιάστατων FIR φίλτρων με τη μέθοδο των παραθύρων

Σημαντικό πλεονέκτημα των δισδιάστατων FIR φίλτρων είναι ότι μπορούν να σχεδιαστούν ώστε η απόκριση συχνότητάς τους να είναι πραγματική, με αποτέλεσμα να μην προκαλούν μεταβολή στη φάση των διαφόρων συχνοτήτων του σήματος. Για το λόγο αυτό καλούνται φίλτρα μηδενικής φάσης και χρειάζεται γι τούτο να έχουν συμμετρική κρουστική απόκριση γύρω από το δείγμα 0:

$$h(n) = h(-n)$$

3.4 Επιλογή συνάρτησης Window και τάξης φίλτρου

Στον σχεδιασμό FIR ψηφιακών φίλτρων με τη μέθοδο Window, υπάρχουν δύο βασικοί παράγοντες που μπορούν να αλλάξουν ώστε να προσεγγίσουμε καλλίτερα την επιθυμητή απόδοση:

- Η συνάρτηση Window
- Η τάξη του φίλτρου

3.4.1 Τάξη φίλτρου

Η τάξη του φίλτρου καθορίζει το πλάτος της ζώνης διέλευσης: όσο υψηλότερη είναι η τάξη τόσο πιο "στενή" είναι η μετάβαση από την ζώνη διέλευσης στην ζώνη αποκοπής.

3.4.2 Συνάρτηση window

Η επιλογή συνάρτησης window καθορίζεται από την απαιτούμενη τιμή της εξασθένησης στην ζώνη αποκοπής.

- Rectangular
- Hanning
- Hamming
- Blackman

3.5 Ευστάθεια και Αιτιατότητα

Τα φίλτρα που επιθυμούμε να σχεδιάσουμε, αφού είναι γραμμικά χρονικά σταθερά συστήματα, θα πρέπει να διέπονται από την βασική ιδιότητα της ευστάθειας, ώστε το αποτέλεσμα της επεξεργασίας να έχει πρακτικό νόημα. Επίσης πρέπει τα συστήματα αυτά να είναι αιτιατά, ώστε για τον υπολογισμό της εξόδου τη χρονική στιγμή n να χρησιμοποιούνται είσοδοι που είναι διαθέσιμες έως τη χρονική αυτή στιγμή. Από το συνδυασμό ευστάθειας και αιτιατότητας απορρέουν συνθήκες που εξασφαλίζουν ευστάθεια στα συστήματα που μας ενδιαφέρουν

Ευστάθεια Αιτιατών Φίλτρων : Οι περιορισμοί ανά κατηγορία φίλτρου είναι οι ακόλουθοι

- Τα FIR ψηφιακά φίλτρα είναι πάντοτε ευσταθή.
- Τα IIR ψηφιακά φίλτρα είναι ευσταθή, όταν οι πόλοι (ρίζες του παρονομαστή που δεν απαλείφονται από ρίζες του αριθμητή) της συνάρτησης μεταφοράς, βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Δηλαδή, όταν οι πόλοι βρίσκονται στο αρνητικό μιγαδικό ημιπίπεδο.

Επιπλέον, ιδανικά φίλτρα δε μπορούν να υλοποιηθούν από αιτιατά συστήματα.

Η αρχή της αιτιατότητας θέτει τους παρακάτω περιορισμούς:

1. Η απόκριση συχνότητας μπορεί να είναι μηδενική μόνο για πεπερασμένο αριθμό συχνοτήτων.

2. Η απόκριση μέτρου δεν μπορεί να είναι σταθερή για ένα διάστημα συχνοτήτων.

3. Η μετάβαση από την περιοχή διέλευσης στην περιοχή αποκοπής δεν μπορεί να είναι «άπειρα» απότομη.

4. Η απόκριση μέτρου και φάσης δεν μπορούν να καθορίζονται ανεξάρτητα.

4 CHEBYSHEV & BUTTERWORTH

4.1 Φίλτρα Butterworth

Τα βαθυπερατά φίλτρα Butterworth έχουν μόνο πόλους και το μέτρο της απόκρισης συχνότητας δίνεται από τη σχέση:

$$H(j\Omega) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{\left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)^{2N}\right)^{1/2}}$$

όπου N η τάξη του φίλτρου, Ω_c η συχνότητα αποκοπής (cut-off frequency), Ω_p η συχνότητα στο όριο της ζώνης διέλευσης και

$$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$$

το μέτρο της απόκρισης συχνότητας στο όριο της ζώνης διέλευσης. Παρατηρούμε ότι:

α. Για $\Omega = \Omega_c$ το μέτρο της απόκρισης συχνότητας ισούται με $1/\sqrt{2}$ δηλαδή

$$|H(jU)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ανεξάρτητα από την τιμή του N. Αυτό σημαίνει ότι η ισχύς του σήματος υποδιπλασιάζεται για τη συγκεκριμένη συχνότητα. Η τιμή αυτή εκφρασμένη σε decibels (dB) ισούται με -3.

β. Για $\Omega=0$ το μέτρο της απόκρισης ισούται με 1, δηλαδή με 0 dB, ανεξάρτητα από την τιμή του N.

γ. Επειδή η παράγωγος του μέτρου της απόκρισης είναι πάντοτε αρνητική για θετικές τιμές του Ω , συνεπάγεται ότι η απόκριση συχνότητας μειώνεται μονοτονικά καθώς το Ω αυξάνεται.

$$|H(j\Omega_2)| < |H(j\Omega_1)| \text{ για } 0 \leq \Omega_1 < \Omega_2$$

Για συχνότητα αποκοπής Ω_c ίση με 1 rad/sec ($\Omega_c=1$) παίρνουμε από τη σχέση το ονομαζόμενο πρωτότυπο βαθυπερατό φίλτρο (prototype lowpass filter). Οι γραφικές παραστάσεις του μέτρου της απόκρισης συχνότητας του κανονικοποιημένου Butterworth βαθυπερατού φίλτρου με $\Omega_c=1$ (πρωτότυπου) για διαφορετικές τιμές του N. Παρατηρούμε ότι αύξηση της τάξης N του φίλτρου οδηγεί σε βελτίωση των ζωνών διέλευσης και αποκοπής με ταυτόχρονη μείωση της ζώνης μετάβασης.

4.2 Φίλτρα Chebyshev

Υπάρχουν δύο τύποι φίλτρων Chebyshev.

Τα φίλτρα τύπου I είναι φίλτρα μόνο με πόλους τα οποία παρουσιάζουν ομοιόμορφη κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης και μονοτονική συμπεριφορά στη ζώνη αποκοπής. Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας των βαθυπερατών φίλτρων Chebyshev τύπου I δίνεται από τη σχέση:

$$H(j\Omega) = \frac{1}{(1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_p))^{1/2}}$$

όπου ε η παράμετρος του φίλτρου που σχετίζεται με την κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης, Ω_p η συχνότητα στο όριο της ζώνης διέλευσης και $T_N(x)$ πολώνυμο Chebyshev τάξης N, το οποίο ορίζεται ως:

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x), & |x| < 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1} x), & |x| > 1 \end{cases}$$

Τα φίλτρα Chebyshev τύπου II είναι φίλτρα με πόλους και μηδενικά, παρουσιάζουν μονοτονική συμπεριφορά στη ζώνη διέλευσης και ομοιόμορφη κυμάτωση στη ζώνη αποκοπής.

Τα μηδενικά στην περίπτωση αυτών των φίλτρων βρίσκονται πάνω στο φανταστικό άξονα του επιπέδου-s. Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας δίνεται από τη σχέση:

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{(1 + \varepsilon^2 [T_N^2(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}) / T_N^2(\frac{\Omega_s}{\Omega})])^{1/2}}$$

όπου $T_N(x)$ είναι και πάλι το πολυώνυμο Chebyshev τάξης N , και Ω_s η συχνότητα στο όριο της ζώνης αποκοπής.

Ένα φίλτρο Butterworth τάξης n είναι ένα σύστημα με απόκριση συχνότητας:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}}$$

Αυτή η απόκριση πλησιάζει ένα ιδανικό χαμηλοδιαβατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\omega_c=1$ γιατί:

$$A(\omega) \rightarrow \begin{cases} 1 & |\omega| < 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases}$$

Η απόκριση ενός φίλτρου Butterworth είναι "επίπεδη" κοντά στην περιοχή του $\omega=0$. Όμως ο ρυθμός αποκοπής δεν είναι ικανοποιητικός.

Ένα φίλτρο Chebyshev τάξης n είναι φίλτρο με απόκριση συχνότητας:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon C_n^2(\omega)}}$$

Όπου

$$C_n(\omega) = \cos nx \quad \cos x = \omega$$

Η συνάρτηση $C_n(\omega)$ είναι πολυώνυμο (Chebyshev) ως προς ω γιατί η $\cos nx$ μπορεί να εκφρασθεί ως πολυώνυμο ως προς $\cos x$.

Πράγματι, επειδή

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

συμπεραίνουμε ότι

$$C_2(\omega) = 2\omega^2 - 1$$

$$C_3(\omega) = 4\omega^3 - 3\omega$$

$$C_4(\omega) = 8\omega^4 - 8\omega^2 + 1$$

Ένα πολυώνυμο Chebyshev $C_n(\omega)$ ταλαντώνεται μεταξύ 1 και -1 καθώς το ω αυξάνεται από 0 σε 1. Αυτό αποδεικνύει ότι η $A(\omega)$ έχει την ισοκυμματική (equiripple) ιδιότητα στη ζώνη του φίλτρου. Το πλάτος της κυμάτωσης ελαττώνεται, καθώς μειώνεται το ϵ .

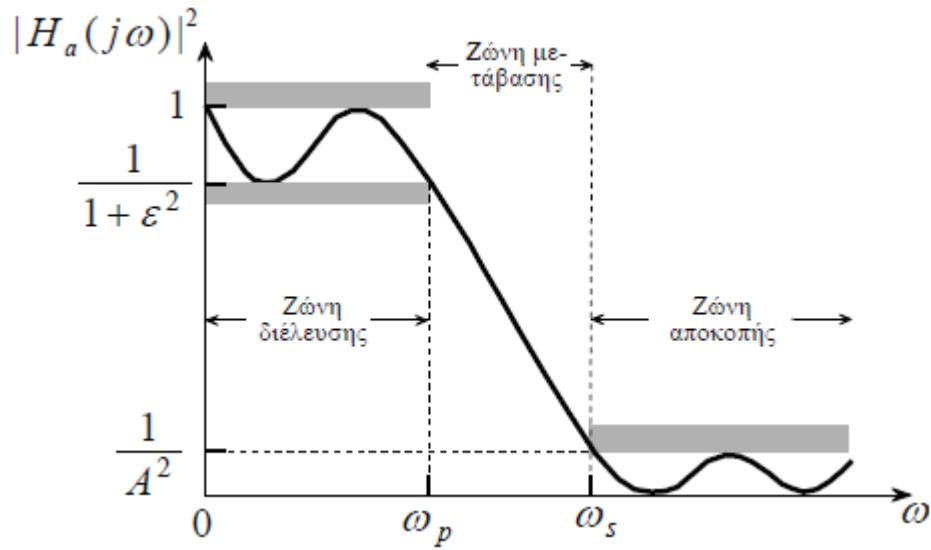
Μπορεί να αποδειχθεί ότι το φίλτρο Chebyshev έχει την παρακάτω πολύ καλή ιδιότητα.

Ανάμεσα στα άλλα φίλτρα της ίδιας τάξης και της ίδιας κυμάτωσης, έχει το μεγαλύτερο ρυθμό αποκοπής.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Το φίλτρο Chebyshev είναι το βέλτιστο μόνο στην κατηγορία των φίλτρων με σταθερό αριθμητή. Αν απομακρύνουμε τον περιορισμό αυτό, μπορούμε να αυξήσουμε περισσότερο το ρυθμό αποκοπής.

Προσαρμογή (scaling): Τα διάφορα φίλτρα που αναφέρθηκαν περιλαμβάνουν κανονικοποιημένες ζώνες συχνότητας και φορτία. Τα αποτελέσματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το σχεδιασμό φίλτρων για αυθαίρετες ζώνες και φορτία. Αυτό γίνεται με ανάλογη προσαρμογή (κλιμάκωση) των στοιχείων σύμφωνα με κάποιους κανόνες.

4.3 Χαρακτηριστικά χαμηλοπερατού αναλογικού φίλτρου



Εικόνα 4.1: Χαμηλοπερατό αναλογικό φίλτρο

ϵ : παράμετρος ταλαντώσεων ζώνης διέλευσης (passband ripple parameter)

ω_p : συχνότητα αποκοπής ζώνης διέλευσης (passband cutoff frequency)

ω_s : συχνότητα αποκοπής ζώνης αποκοπής (stopband cutoff frequency)

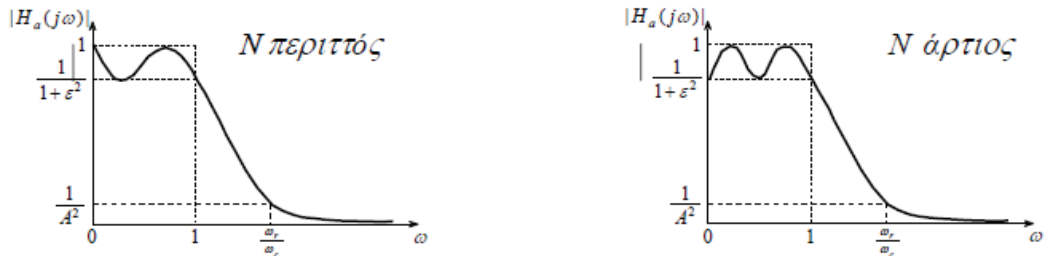
Χαμηλοπερατό Φίλτρο Chebyshev

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)}$$

όπου N είναι η τάξη του φίλτρου, ϵ είναι ο παράγοντας ταλάντωσης στη ζώνη διέλευσης και $T_N(x)$ το πολυώνυμο Chebyshev N -τάξης το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1}(x)), & 0 \leq x \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1}(x)), & 1 < x < \infty \end{cases} \quad \text{όπου } x = \frac{\omega}{\omega_c}$$

Το πολυώνυμο $T_N(x)$ μεταξύ $0 < x < 1$ ταλαντώνεται μεταξύ του -1 και 1 έτσι το φίλτρο παρουσιάζει ταλαντώσεις ίσου πλάτους στη ζώνη διέλευσης. Επίσης για $1 < x < \infty$ ελαττώνεται μονότονα στο μηδέν.



Για να προσδιορίσουμε ένα αιτιατό και ευσταθές φίλτρο $H_a(s)$ πρέπει να βρούμε τους πόλους του $H_a(s)$ $H_a(-s)$ και να επιλέξουμε τους πόλους που βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο για το $H_a(s)$. Οι πόλοι του $H_a(s)$ $H_a(-s)$ είναι οι ρίζες του

$$1 + e^{2T_N^2} \frac{s}{j\omega_c}$$

Αν $p_k = \sigma_k + j\omega_k, k = 0, 1, \dots, N - 1$ είναι οι πόλοι στο αριστερό ημιεπίπεδο του παραπάνω πολυωνύμου τότε:

$$\sigma_k = (a\omega_c) \cos\left[\frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N}\right]$$

$$k = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$\omega_k = (b\omega_c) \sin\left[\frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N}\right]$$

Όπου

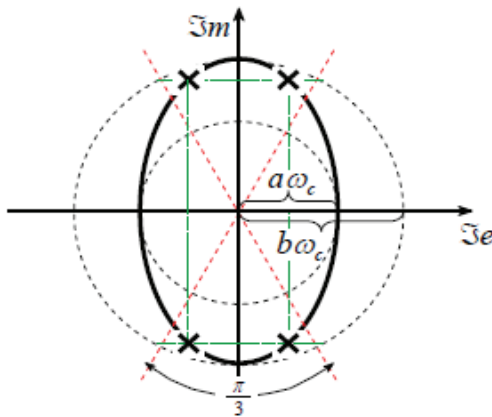
$$a = \left(\frac{1}{2} \sqrt{N} - \sqrt{1/a}\right) \text{ και } a = \frac{1}{3} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2}}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι:

$$H_a(s) = \frac{K}{\prod_k (s - P_k)}$$

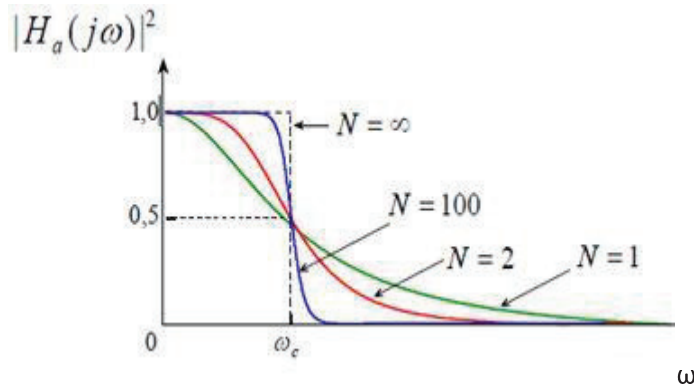
όπου K είναι ο παράγοντας κανονικοποίησης που επιλέγεται έτσι ώστε

$$H_a(j0) = \begin{cases} 1, & N \text{ περιττός} \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}, & N \text{ άρτιος} \end{cases}$$



Εικόνα 4.2: Η θέση των πόλων για ένα φίλτρο Chebyshev τρίτης τάξης

Χαμηλοπερατό Φίλτρο Butterworth



Εικόνα 4.3:Χαμηλοπερατό φίλτρο Butterworth

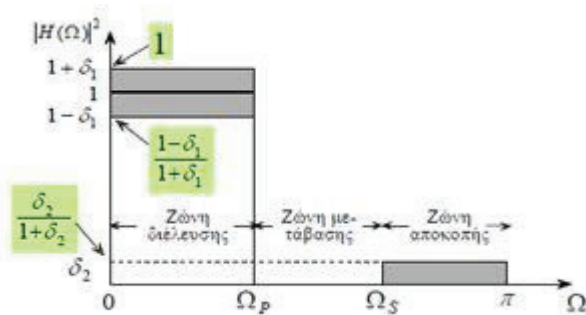
Η απόκριση ισχύος του φίλτρου είναι $|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\frac{\omega}{\omega_c})^{2N}}$

Για τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος ισχύουν:

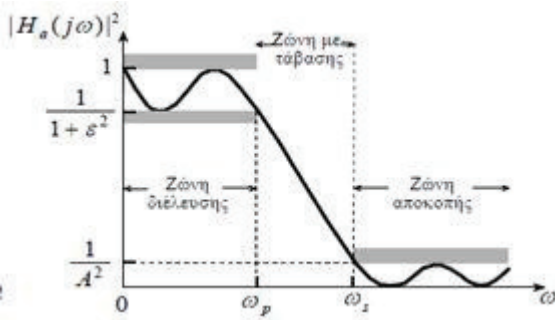
$$H_a(s)H_a(-s) = |H_a(j\omega)|^2|_{\omega=sj} = \frac{1}{1+(s/j\omega_c)^{2N}} = \frac{(j\omega_c)^{2N}}{s^{2N}+(j\omega_c)^{2N}}$$

Οι ρίζες του πολωνύμου του παρονομαστή είναι

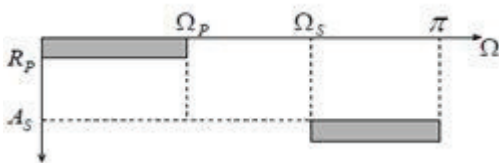
$$P_k = (-1)^{\frac{1}{2N}}(j\omega_c) = \omega_c e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N+1)} \quad k = 0,1, \dots, 2N - 1$$



Εικόνα 4.4:Απόλυτη απόκριση ισχύος ενός ψηφιακού φίλτρου βασικής ζώνης



Εικόνα 4.5:Κανονικοποιημένη απόκριση ισχύος ενός αναλογικού φίλτρου βασικής ζώνης



Εικόνα 4.6:Σχετική απόκριση ισχύος ενός ψηφιακού φίλτρου βασικής ζώνης

Η απόκριση συχνότητας του αναλογικού φίλτρου ικανοποιεί τις

$$0 \leq |H_\alpha(j\omega)|^2 \leq \frac{1}{A^2} \quad , \omega_s \leq |\omega|$$

$$\frac{1}{1 + \epsilon^2} \leq |H_\alpha(j\omega)|^2 \leq 1 \quad , |\omega| \leq \omega_p$$

Σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων του αναλογικού φίλτρου:

$$|H_\alpha(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2} \text{ στην } \omega = \omega_p \text{ , } |H_\alpha(j\omega)|^2 = \frac{1}{A^2} \text{ στην } \omega = \omega_s$$

Οι παράμετροι ε και Α σχετίζονται με τις Rp και As αντίστοιχα στην κλίμακα dB με τις

$$R_p = -10 \log_{10} \frac{1}{1+\epsilon^2} \Rightarrow \epsilon = \sqrt{10^{R_p/10} - 1} \quad A_s = -10 \log_{10} \frac{1}{A^2} \Rightarrow A = 10^{A_s/20}$$

Οι ταλαντώσεις δ1 και δ2 σχετίζονται με τις ε και Α αντίστοιχα με τις

$$\frac{1-\delta_1}{1+\delta_1} = \sqrt{\frac{1}{1+\epsilon^2}} \Rightarrow \epsilon = \frac{2\sqrt{\delta_1}}{1-\delta_1} \quad \frac{\delta_2}{1+\delta_1} = \frac{1}{A} \Rightarrow A = \frac{1+\delta_1}{\delta_2}$$

5 MATLAB

Το **MATLAB** ("MATrixLABoratory") είναι ένα περιβάλλον αριθμητικής υπολογιστικής και μια προγραμματιστική γλώσσα τέταρτης γενιάς. Αποθηκεύει και κάνει τις πράξεις με βάση την άλγεβρα μητρώων. Η τρέχουσα έκδοσή του είναι η R2011a η οποία κυκλοφόρησε στις 8 Απριλίου του 2011. Δημιουργήθηκε από τον C. Moler, αρχικά σαν εργαλείο διαχείρισης των βιβλιοθηκών Fortran: LINPACK (γρ. άλγεβρα) και EISPACK (ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα). Από τότε έχει αναπτυχθεί αρκετά, για να γίνει ένα ισχυρότατο εργαλείο στην οπτικοποίηση, στον προγραμματισμό, στην έρευνα, στην επιστήμη των μηχανικών, και στις επικοινωνίες.

Χρησιμοποιείται κατά κύριο λόγο για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, ωστόσο είναι πολύ "ισχυρό" και μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για προγραμματισμό καθώς περιέχει εντολές από την C++ όπως την while, την switch και την if. Στον τομέα των γραφικών όσον αφορά τον μαθηματικό κλάδο μπορεί να υλοποιήσει συναρτήσεις πραγματικές, μιγαδικές, πεπλεγμένες συναρτήσεις δύο μεταβλητών και άλλες. Όσον αφορά τον στατιστικό κλάδο μπορεί να υλοποιήσει ιστογράμματα, τομεογράμματα, ραβδοδιαγράμματα, εμβαδογράμματα και άλλα.

Παρέχει στο χρήστη ένα διαδραστικό περιβάλλον με χιλιάδες ενσωματωμένες συναρτήσεις, κατάλληλες για την υλοποίηση απαιτητικών υπολογιστικών αναλύσεων, γραφημάτων καθώς επίσης και για την παραγωγή διαφόρων animations. Επιπλέον, το MATLAB προσφέρει τη δυνατότητα επέκτασης σε ποικίλα πεδία εφαρμογών με τη αξιοποίηση την υψηλού επιπέδου γλώσσας προγραμματισμού, την οποία διαθέτει σε όλες τις εκδόσεις του.

Το MATLAB αποτελεί ένα εξελιγμένο υπολογιστικό εργαλείο, το οποίο μπορεί να βρει εφαρμογή σε διάφορους τομείς της επιστήμης αλλά βέβαια και της πράξης, όπως για παράδειγμα τη μηχανική, την ιατρική, τις θετικές επιστήμες (Μαθηματικά– Φυσική), την οικονομία καθώς και γενικά τη βιομηχανική παραγωγή. Μάλιστα, το φάσμα των εφαρμογών του συγκεκριμένου πακέτου λογισμικού διευρύνεται συνεχώς και περισσότερο, αναδεικνύοντας με αυτό τον τρόπο τις πολλαπλές δυνατότητες του, όπως:

- Υψηλή απόδοση και ταχύτητα υπολογιστικών αναλύσεων.
- Δυνατότητα προσομοίωσης φυσικών συστημάτων.
- Δυνατότητα υλοποίησης αλγορίθμων.
- Δυνατότητα αμφίδρομης επικοινωνίας με πληθώρα άλλων προγραμμάτων και εφαρμογών.
- Υψηλής ποιότητας γραφικές απεικονίσεις και animations.
- Δυνατότητα σύνδεσης με διάφορες συσκευές καταγραφής.
- Φιλικότητα προς το χρήστη και διαδραστικός χαρακτήρας.

6 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ-ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Το πειραματικό μέρος της εργασίας αφορά τον σχεδιασμό των IIR φίλτρων, Butterworth, Chebyshev I και Chebyshev II.

Τα IIR φίλτρα (Infinite Impulse Response), μπορούν να χαρακτηριστούν από τις ρητές συναρτήσεις μεταφοράς τους είτε από εξισώσεις διαφορών. Τέτοια φίλτρα κατηγοριοποιούνται ως φίλτρα ARMA (Auto-regressive moving average) ή γενικότερα ως αναδρομικά φίλτρα.

Θεωρώντας τα φίλτρα αυτά ως γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα (LTI), για την περιγραφή της δομής τους χρησιμοποιούνται τρία βασικά στοιχεία:

- Αθροιστές(Adders): Στοιχεία δύο εισόδων-μιας εξόδου
- Πολλαπλασιαστές(Gain): Στοιχείο μιας εισόδου-μιας εξόδου
- Στοιχείο Μοναδιαίας καθυστέρησης(shifter): Στοιχείο μιας εισόδου-μιας εξόδου που προκαλεί μοναδιαία καθυστέρηση

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός IIR φίλτρου δίνεται από την σχέση:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{n=0}^M b_n * z^{-n}}{\sum_{n=0}^N a_n * z^{-n}} = \frac{b_0 + b_1 * z^{-1} + \dots + b_M * z^{-M}}{1 + a_1 * z^{-1} + a_N * z^{-N}}$$

Όπου b_n και a_n είναι συντελεστές του φίλτρου. Η αντίστοιχη εξίσωση διαφορών του φίλτρου εκφράζεται ως :

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m * x(n - m) - \sum_{m=1}^N a_m * y(n - m)$$

- Ένα IIR φίλτρο λοιπόν μπορεί να υλοποιηθεί σε τρεις διαφορετικές μορφές:
 - Direct form: Σε αυτή τη μορφή η εξίσωση διαφορών υλοποιείται απευθείας ως έχει, χρησιμοποιώντας την έτοιμη συνάρτηση filter του Matlab.
 - Cascade form: Σε αυτή τη μορφή η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου, παραγοντοποιείται σε μικρότερα τμήματα δεύτερης τάξης που ονομάζονται biquads. Έτσι η $H(z)$ (συνάρτηση μεταφοράς) του φίλτρου προκύπτει ως το γινόμενο αυτών των biquads.

- Parallel form: Είναι παρόμοια με την cascade form με την διαφορά ότι μετά την παραγοντοποίηση η συνάρτηση μεταφοράς εκφράζεται ως το άθροισμα των biquads.

➤ Για την υλοποίηση των φίλτρων Butterworth, Chebyshev-I και Chebyshev-II, χρησιμοποιήσαμε την cascade μορφή που μαθηματικά εκφράζεται από την εξίσωση:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 * z^{-1} + \dots + b_n * z^{-N}}{1 + a_1 * z^{-1} + \dots + a_N * z^{-N}} = b_0 * \frac{1 + \frac{b_1}{b_0} * z^{-1} + \dots + \frac{b_N}{b_0} * z^{-N}}{1 + a_1 * z^{-1} + \dots + a_N * z^{-N}}$$

$$= b_0 * \prod_{k=1}^K \frac{1+B_{k,1}*z^{-1}+B_{k,2}*z^{-2}}{1+A_{k,1}*z^{-1}+A_{k,2}*z^{-2}}$$

όπου $K = \frac{N}{2}$ και $B_{k,1}, B_{k,2}, A_{k,1}$ και $A_{k,2}$ είναι

πραγματικοί αριθμοί που εκφράζουν τις παραμέτρους των τμημάτων δεύτερης τάξης (biquads).

Για την μετατροπή από την απευθείας (direct) μορφή στην cascade μορφή χρησιμοποιήσαμε τη συνάρτηση `dir2cas(b,a)`, η οποία παρατίθεται εδώ:

`[b0,β,A]=dir2cas(b,a)`

FUNCTION dir2cas

```
function [ b0,B,A] = dir2cas (b, a) ;
b0=b (1) ;
b=b/b0;
a0=a (1) ;
a=a/a0;
b0=b0/a0;
M=length (b) ;
N=length (a) ;
if N > M
    b=[b zeros (1, N-M) ] ;
elseif M > N
    a=[a zerow (1, M-N) ] ;
    N=M;
else
    NM=0;
end
K=floor (N/2) ;
B=zeros (K, 3) ;
A=zeros (K, 3) ;
if K*2==N;
    b=[b 0] ;
    a=[a 0] ;
end
```



```

broots=cplxpair(roots(b));
aroots=cplxpair(roots(a));
for i=1:2:2*K
    Brow=broots(i:1:i+1,:);
    Brow=real(poly(Brow));
    B(fix((i+1)/2),:)=Brow;
    Arow=aroots(i:1:i+1,:);
    Arow=real(poly(Arow));
    A(fix((i+1)/2),:)=Arow;
end
end

```

Η συνάρτηση `dir2cas` δέχεται ως ορίσματα τα διανύσματα των συντελεστών του αριθμητή και του παρανομαστή της συνάρτησης μεταφοράς. Συμπληρώνει με μηδενικά το μικρότερο διάνυσμα (αν υπάρχει) ώστε να προκύψουν ισομήκη διανύσματα. Ακολούθως υπολογίζει τις ρίζες δηλαδή τους πόλους και τα μηδενικά για τα πολώνυμα $A(z)$ και $B(z)$ των biquads, της cascade μορφής του φίλτρου.

Έχοντας δημιουργήσει την συνάρτηση `dir2cas` προχωράμε την διαδικασία του σχεδιασμού των ψηφιακών φίλτρων IIR. Τα IIR φίλτρα έχουν άπειρης διάρκειας μοναδιαίες αποκρίσεις και για το λόγο αυτό μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως αναλογικά φίλτρα (analog filters).

Έτσι η βασική τεχνική σχεδιασμού IIR φίλτρων ξεκινά με την δημιουργία αρχικά γνωστών αναλογικών φίλτρων και ακολούθως την μετατροπή τους σε ψηφιακά με την χρήση μετασχηματισμών στο μιγαδικό πεδίο.

Το βασικό πλεονέκτημα αυτής της τεχνικής είναι ότι τόσο τα αναλογικά φίλτρα όσο και οι μετασχηματισμοί είναι ευρέως διαθέσιμοι στη βιβλιογραφία.

Το μειονέκτημα της διαδικασίας αυτής είναι ότι εστιάζει κυρίως στην απόκριση πλάτους και παραμελεί την απόκριση φάσης και γωνίας. Για αυτές τις αποκρίσεις απαιτούνται πιο εξελιγμένες τεχνικές οι οποίες είναι εκτός των στόχων αυτής της εργασίας.

Αρχικά ορίζουμε τις παραμέτρους που απαιτούνται για τον καθορισμό του αναλογικού φίλτρου, μέσω της απόκρισης πλάτους.

Οι παράμετροι αυτές δίνονται από τις απαιτήσεις των εφαρμογών και είναι απαραίτητες για τον σχεδιασμό του φίλτρου:

W_p : ζωνοπερατή συχνότητα σε rad/sec

W_s : ζωνοφρακτική συχνότητα σε rad/sec

R_p : ζωνοπερατή διακύμανση (triple) σε dB

As: ζωνοφρακτική απόσβεση σε dB

Δεδομένων των προδιαγραφών αυτών υλοποιούμε τα ψηφιακά φίλτρα Butterworth, Chebyshev-I και Chebyshev-II.

Για τον σχεδιασμό των φίλτρων θα χρησιμοποιήσουμε έτοιμες συναρτήσεις του matlab εξηγώντας την λειτουργία τους όπου κρίνεται απαραίτητο.

Για την υλοποίηση των ζητούμενων φίλτρων θα χρησιμοποιήσουμε και για τα τρία είδη τις ενδεικτικές τιμές των παραμέτρων:

$$Wp=0,2\pi \text{ (r/s)} , Ws=0,3\pi \text{ (r/s)}$$

$$Rp=1\text{(dB)} , As=15\text{(dB)}$$

Οι τιμές αυτές είναι ενδεικτικές όπως αναφέραμε και φυσικά μπορούν να αλλάζουν ανάλογα την εφαρμογή και τις απαιτήσεις του σχεδιαστή. Θα τις χρησιμοποιήσουμε και για τα τρία φίλτρα ίδιες ούτως ώστε να διακρίνουμε τις διαφορές και τις αποκλίσεις που παρουσιάζονται.

ΦΙΛΤΡΟ BUTTERWORTH

Για την υλοποίηση του φίλτρου Buterworth χρησιμοποιούμε την έτοιμη συνάρτηση $[b,a]=butter(N,Wn)$ του Matlab. Η συνάρτηση αυτή σχεδιάζει ένα N-οστής τάξης χαμηλοδιαβατό ψηφιακό φίλτρο Butterworth και επιστρέφει τις παραμέτρους b,a του φίλτρου σε αντίστοιχα διανύσματα μήκους N+1.

Η τάξη (N) του φίλτρου υπολογίζεται από την σχέση:

$$N = \frac{\log_{10}[(10^{Rp/10}-1)/(10^{As/10}-1)]}{2*\log_{10}(wp/ws)}$$

Δεδομένου ότι η τάξη ενός φίλτρου απαιτείται να είναι ακέραιος αριθμός η παραπάνω σχέση τίθεται ως όρισμα της συνάρτησης ceil του Matlab που επιστρέφει τον αμέσως μεγαλύτερο ακέραιο του αποτελέσματος της διαίρεσης. Επιπροσθέτως η συχνότητα αποκοπής του φίλτρου Wn καθορίζεται από τη σχέση:

$$wn = \frac{2}{\pi} * \tan^{-1}\left(\frac{w_c * T}{2}\right)$$

Ο κώδικας υλοποίησης του Butterworth ψηφιακού φίλτρου είναι :

```

wp = 0.2*pi ;
ws = 0.3*pi ;
Rp = 1 ;
As = 15 ;
T = 1 ;
OmegaP = (2/T)*tan(wp/2) ;
OmegaS = (2/T)*tan(ws/2) ;
N=ceil((log10((10^(Rp/10)-1)/(10^(As/10)-1)))/(2*log10(OmegaP/OmegaS)))
;
fprintf( '\n*** Butterworth Filter Order = %2.0f \n' ,N)
%Butterworth Filter Order = 6
OmegaC = OmegaP/((10^(Rp/10)-1)^(1/(2*N))) ;

wn = 2*atan((OmegaC*T)/2) ;
wn = wn/pi;
[b,a]=butter(N,wn) ;
[b0,B,A] = dir2cas(b,a)

fvtool(b,a)
    
```

ΦΙΛΤΡΟ CHEBYSHEV I

Για την υλοποίηση του φίλτρου Chebyshev-I χρησιμοποιούμε την έτοιμη συνάρτηση $[b,a]=cheby1(N,Rp,Wn)$ του Matlab. Η συνάρτηση αυτή σχεδιάζει ένα φίλτρο N-τάξης με διακύμανση R_p decibels στη ζωνοπερατή περιοχή. Επιστρέφει τις παραμέτρους b και a ως διανύσματα $N+1$ μήκους.

Η τάξη N του φίλτρου δίνεται από τη σχέση:

$$N = \frac{\log_{10}[g + \sqrt{g^2 - 1}]}{\log_{10}[Wr + \sqrt{Wr^2 - 1}]}$$

Όπου $W_r = \frac{W_s}{W_p}$, $W_c = W_p$, $\varepsilon = \sqrt{10^{0.1 \cdot R_p} - 1}$, $A = 10^{A_s/20}$, $g = \sqrt{(A^2 - 1)/\varepsilon^2}$

Και η συχνότητα αποκοπής W_n δίνεται από τη σχέση: $W_n = W_p/\pi$

Ο κώδικας υλοποίησης του Chebyshev-I ψηφιακού φίλτρου είναι:

```

wp = 0.2*pi ;
ws = 0.3*pi ;
    
```

```

Rp = 1 ;
As = 15 ;

T = 1 ;
OmegaP=(2/T)*tan(wp/2);
OmegaS=(2/T)*tan(ws/2);
ep=sqrt(10^(Rp/10)-1);
A=10^(As/20);
OmegaC = OmegaP ;
OmegaR = OmegaS/OmegaP ;
g = sqrt(A*A-1)/ep ;
N = ceil(log10(g+sqrt(g*g-1))/log10(OmegaR+sqrt(OmegaR*OmegaR-1))) ;
fprintf( '\n*** Chebyshev-1 Filter Order = %2.0f \n' ,N)
%Chebyshev-1 Filter Order = 4

wn = wp/pi ;
[b,a]=cheby1(N,Rp,wn) ;
[b0,B,A] = dir2cas(b,a)

fvtool(b,a)

```

ΦΙΛΤΡΟ CHEBYSHEV II

Ο σχεδιασμός του φίλτρου Chebyshev-II υλοποιείται από την έτοιμη συνάρτηση του Matlab:

$[b,a]=cheby2(N,As,wn)$, και επιστρέφει τα διανύσματα b και a μήκους $N+1$, χρησιμοποιώντας τις ίδιες σχέσεις όπως ορίστηκαν για το φίλτρο Chebyshev-I, με τη διαφορά ότι ως όρισμα της συνάρτησης τίθεται η As (ζωνοφρακτική απόσβεση) αυτή της Rp (ζωνοπερατής διακύμανσης).

Ο κώδικας υλοποίησης σε matlab δίνεται στο σημείο:

```

wp=0.2*pi;
ws=0.4*pi;
Rp=1;
As=15;

T=1;
OmegaP=(2/T)*tan(wp/2);
OmegaS=(2/T)*tan(ws/2);

ep=sqrt(10^(Rp/10)-1);
A=10^(As/20);
OmegaC=OmegaP;
OmegaR=OmegaS/OmegaP;
g=sqrt(A*A-1)/ep;
N=ceil(log10(g+sqrt(g*g-1))/log10(OmegaR+sqrt(OmegaR*OmegaR-1)));
fprintf('\n*** Chebyshev-2 Filter Order = %2.0f \n' ,N)

wn=ws/pi;
[b,a]=cheby2(N,As,wn);

```

`[b0,B,A]=dir2cas(b,a)`

`fvtool(b,a)`

Επίσης χρησιμοποιούμε τις αναλογικές συχνότητες:

- Omega P: ζωνοπερατή συχνότητα αναλογικού φίλτρου

Δίνεται από τη σχέση

$$\text{Omega P} = \left(\frac{2}{T}\right) \tan \frac{\omega_p}{z}$$

- Omega S: ζωνοφρακτική συχνότητα αναλογικού φίλτρου

Δίνεται από τη σχέση

$$\text{Omega S} = \left(\frac{2}{T}\right) \tan \frac{\omega_s}{z}$$

- Omega C: συχνότητα αποκοπής αναλογικού φίλτρου η οποία για το φίλτρο Butterworth είναι

$$\text{Omega C} = (\text{Omega P}) / (10^{Rp/10-1})^{\frac{1}{2N}}$$

Ενώ για τα Chebyshev I&II είναι :

$$\text{Omega C} = \text{Omega S}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Όπως αναφέραμε ο σχεδιασμός των ψηφιακών ΠΡ φίλτρων αφορά ουσιαστικά την μετατροπή του αντίστοιχου αναλογικού φίλτρου σε ψηφιακό. Για τον λόγο αυτό και στις τρεις υλοποιήσεις απαιτείται αρχικά ο καθορισμός ενός αναλογικού πρωτότυπου φίλτρου.

Συνεπώς κρίνουμε σκόπιμο να παρουσιάσουμε στο σημείο αυτό τις παραμέτρους σχεδιασμού των αναλογικών φίλτρων καθώς και τις σχέσεις ορισμού τους.

Αρχικά για όλα τα φίλτρα χρησιμοποιήσαμε την κανονικοποιημένη τιμή $T=1$ για την περίοδο δειγματοληψίας, επιλογή που δε βλάπτει την γενικότητα της μεθόδου αλλά απλοποιεί αρκετά τους υπολογισμούς μας.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από την υλοποίηση των τριών ψηφιακών φίλτρων με τη χρήση του κώδικα που παραθέσαμε με τις δεδομένες παραμέτρους, τις οποίες για ευκολία αναφέρουμε πάλι:

- $\omega_p=0.2\pi$, $R_f=1$ dB
- $\omega_s=0.3\pi$, $A_s=15$ dB

προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα:

Για το φίλτρο Butterworth

$e = 5.7969e-004$

$B = 1.0000 \quad 2.0049 \quad 1.0049$

$1.0000 \quad 1.9951 \quad 0.9951$

$1.0000 \quad 2.0000 \quad 1.0000$

$$A = 1.0000 \quad -0.9459 \quad 0.2342$$

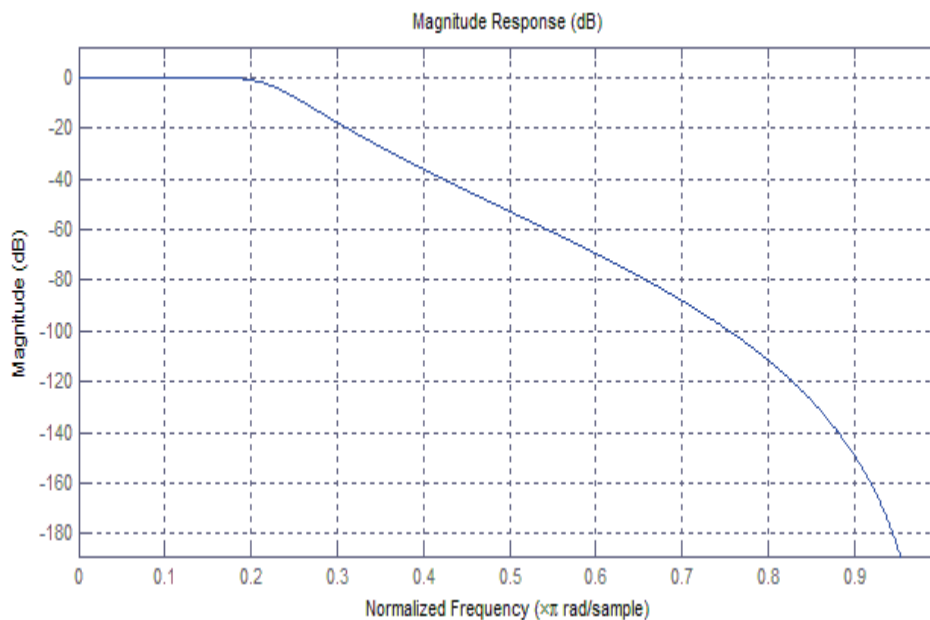
$$1.0000 \quad -1.0541 \quad 0.3753$$

$$1.0000 \quad -1.3143 \quad 0.7149$$

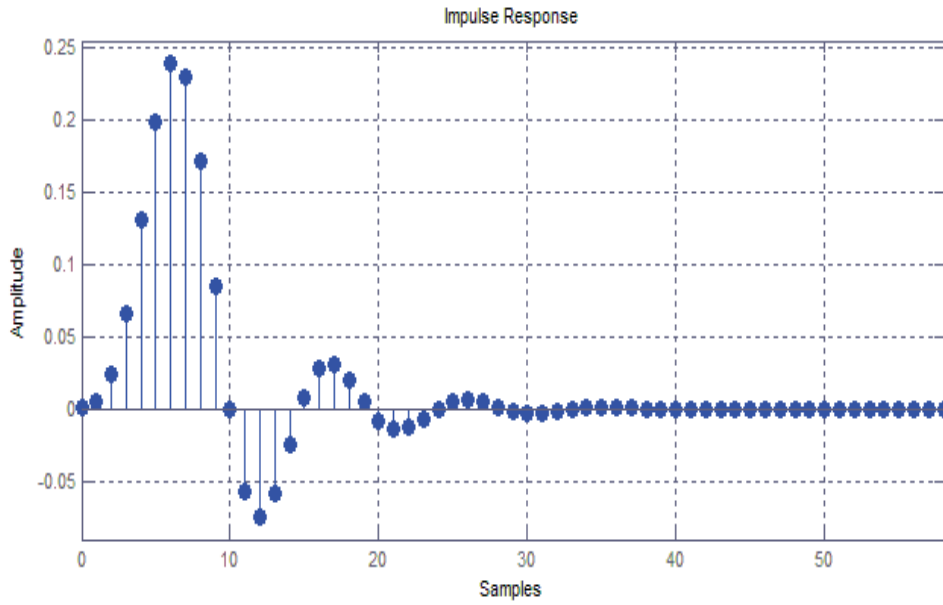
Η συνάρτηση μεταφοράς (απόκρισης) του φίλτρου είναι:

$$H(z) = \frac{0.00057969 * (1 + z^{-1})^6}{(1 - 0.9459 * z^{-1} + 0.2342 * z^{-2})(1 - 1.0541 * z^{-1} + 0.3753 * z^{-2})(1 - 1.3143 * z^{-1} + 0.7149 * z^{-2})}$$

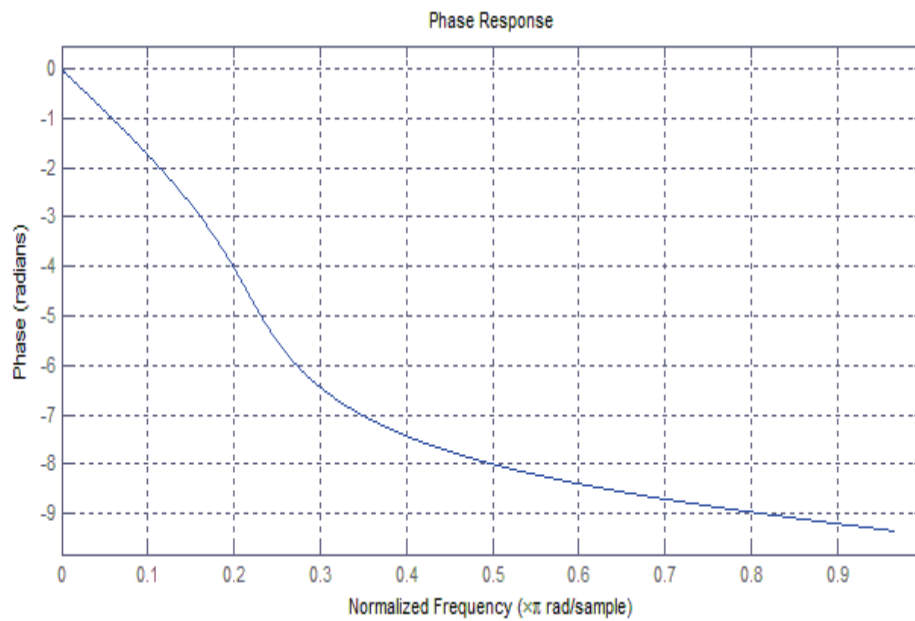
Και τα αντίστοιχα γραφήματα:



Εικόνα 6.1: Απόκριση πλάτους



Εικόνα 6.2: Μοναδιαία απόκριση



Εικόνα 6.3: Απόκριση φάσης


```

Discrete-Time IIR Filter (real)
-----
Filter Structure : Direct-Form II Transposed
Numerator Length : 7
Denominator Length : 7
Stable : Yes
Linear Phase : No

Implementation Cost
Number of Multipliers : 13
Number of Adders : 12
Number of States : 6
MultPerInputSample : 13
AddPerInputSample : 12
    
```

Εικόνα 6.4: Χαρακτηριστικά φίλτρου

Το φίλτρο Butterworth είναι 6^{ης} τάξης και ζωνοφρακτικής απόσβεσης 15 dB.

Για το φίλτρο Chebyshev 1

$$b_0 = 0.0018$$

$$B = 1.0000 \quad 2.0000 \quad 1.0000$$

$$1.0000 \quad 2.0000 \quad 1.0000$$

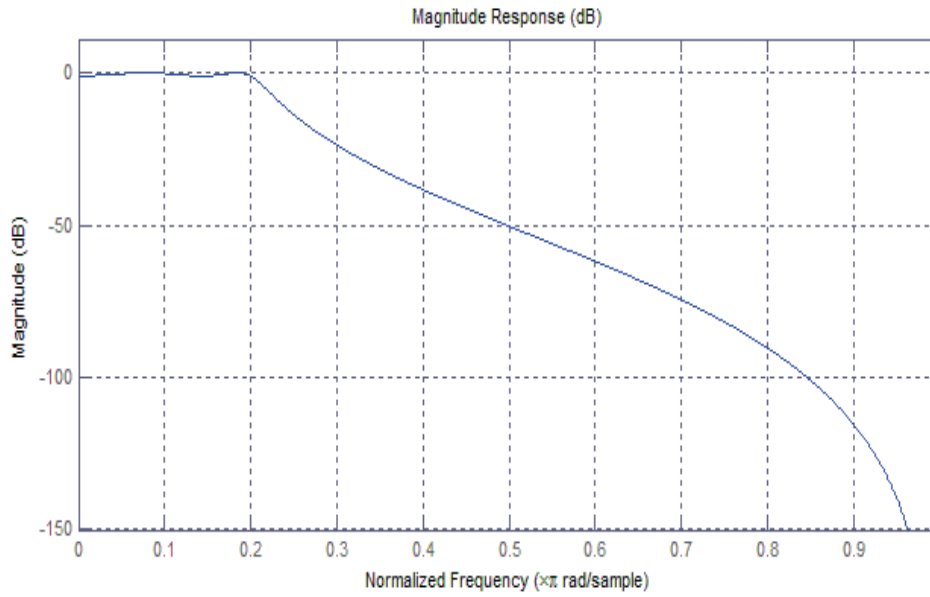
$$A = 1.0000 \quad -1.4996 \quad 0.8482$$

$$1.0000 \quad -1.5548 \quad 0.6493$$

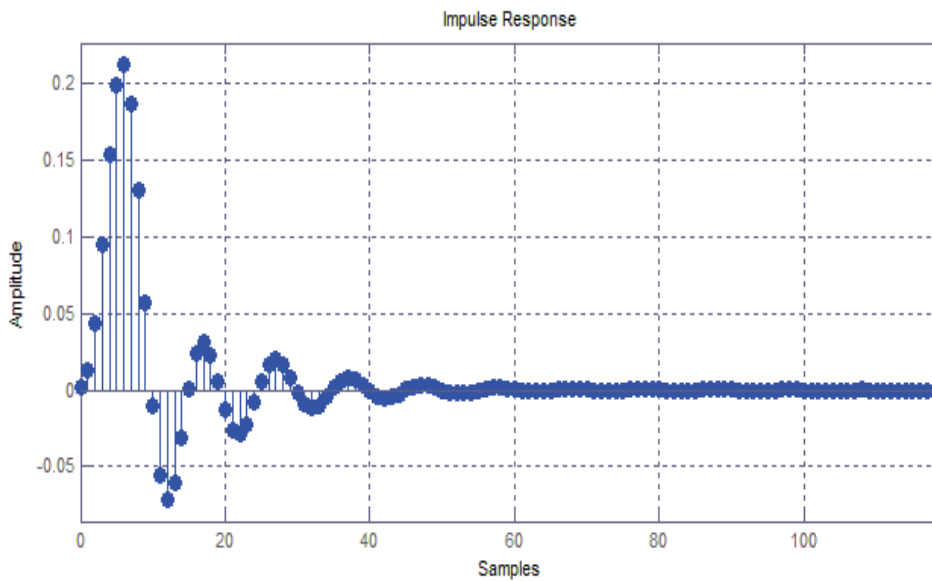
Η προκύπτουσα συνάρτηση μεταφοράς στο μιγαδικό πεδίο είναι:

$$H_{ch1}(z) = \frac{0.0018 * (1 + z^{-1})^4}{(1 - 1.4996 * z^{-1} + 0.8482 * z^{-2})(1 - 1.5548 * z^{-1} + 0.6493 * z^{-2})}$$

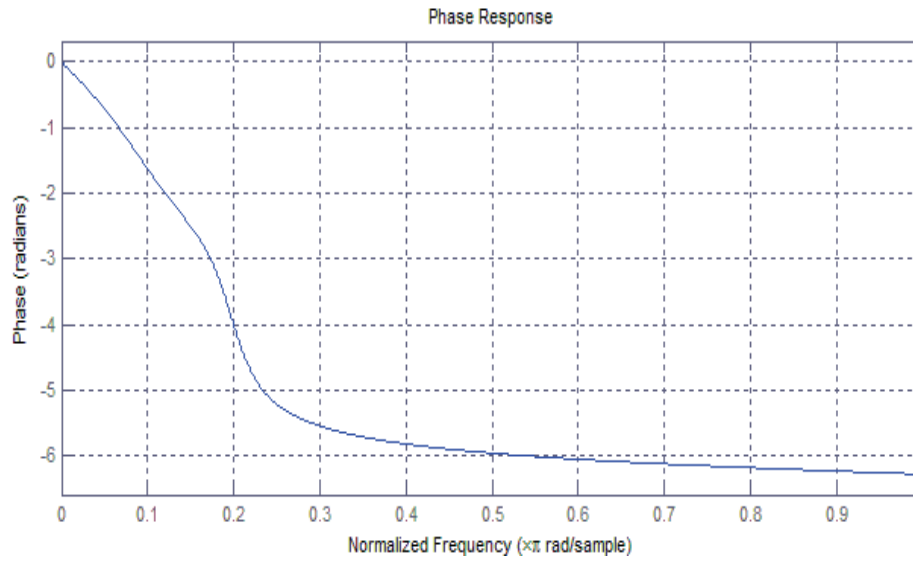
Τα αντίστοιχα γραφήματα :



Εικόνα 6.5: Απόκριση πλάτους



Εικόνα 6.6: Μοναδιαία απόκριση



Εικόνα 6.7: Απόκριση φάσης

```

Discrete-Time IIR Filter (real)
-----
Filter Structure   : Direct-Form II Transposed
Numerator Length  : 5
Denominator Length: 5
Stable             : Yes
Linear Phase      : No

Implementation Cost
Number of Multipliers : 9
Number of Adders      : 8
Number of States      : 4
MultPerInputSample    : 9
AddPerInputSample     : 8
    
```

Εικόνα 6.8: Χαρακτηριστικά φίλτρου

Η τάξη του φίλτρου Chebyshev 1 είναι $N=4$ και η ζωνοφρακτική απόσβεση στα 25 dB.

Για το φίλτρο Chebyshev 2:

$$b_0 = 0.2103$$

$$B = 1.0000 \quad -0.3477 \quad 1.0000$$

$$1.0000 \quad 1.0000 \quad 0$$

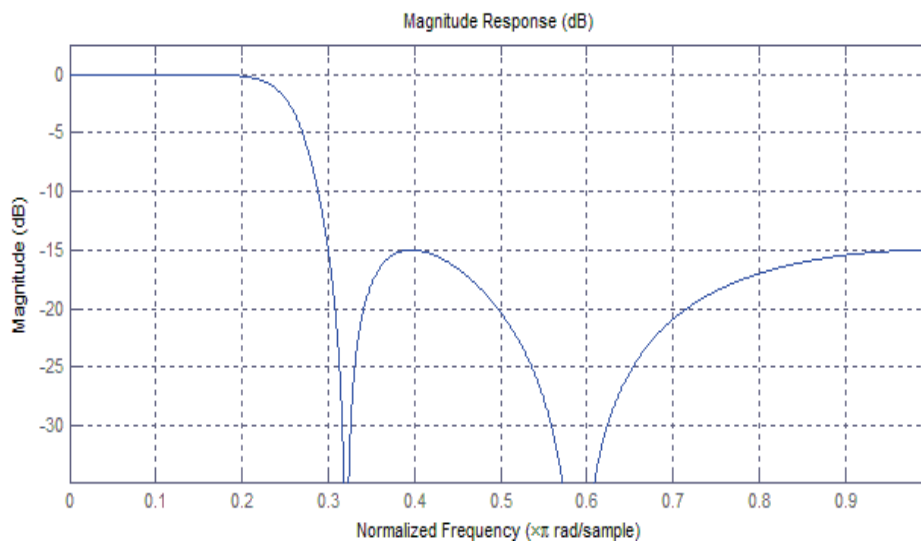
$$A = 1.0000 \quad -0.7489 \quad 0.5236$$

$$1.0000 \quad -0.1031 \quad 0$$

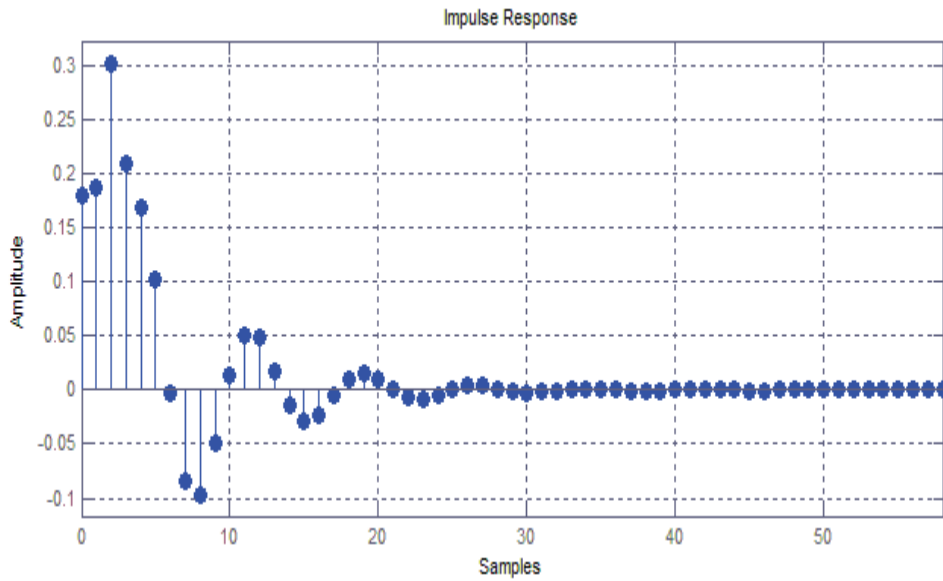
Και η σχέση μεταφοράς:

$$H_{ch2}(z) = \frac{0.1797 * (1 + 0.5574 * z^{-1} + z^{-2})(1 - 1.0671 * z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 0.4183 * z^{-1} + 0.1503 * z^{-2})(1 - 1.1325 * z^{-1} + 0.7183 * z^{-2})}$$

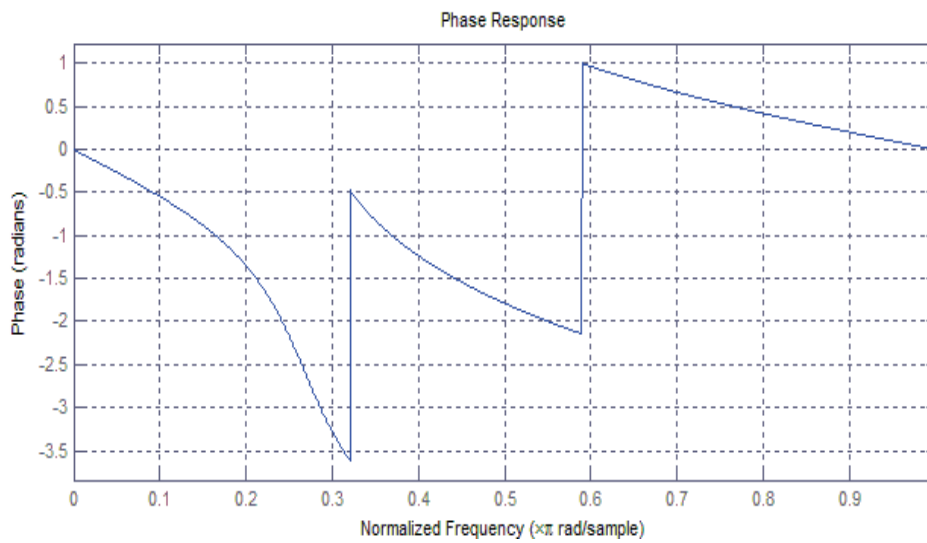
Το αντίστοιχα γραφήματα :



Εικόνα 6.9: Απόκριση πλάτους



Εικόνα 6.10: Μοναδιαία απόκριση



Εικόνα 6.11: Απόκριση φάσης

```
Discrete-Time IIR Filter (real)
-----
Filter Structure      : Direct-Form II Transposed
Numerator Length     : 5
Denominator Length   : 5
Stable                : Yes
Linear Phase         : No

Implementation Cost
Number of Multipliers : 9
Number of Adders      : 8
Number of States      : 4
MultPerInputSample    : 9
AddPerInputSample     : 8
```

Εικόνα 6.12: Χαρακτηριστικά φίλτρου

Η τάξη του φίλτρου Chebyshev 2 φίλτρου είναι $N=4$ και η ζωνοφρακτική απόσβεση στα 25 dB.

Τα διαγράμματα που παραθέτουμε για τα τρία φίλτρα είναι το διάγραμμα πλάτους – κανονικοποιημένης συχνότητας, το διάγραμμα φάσης – συχνότητας, το διάγραμμα μοναδιαίας απόκρισης και τέλος τον πίνακα χαρακτηριστικών για κάθε περίπτωση.

Το κύριο χαρακτηριστικό των φίλτρων Butterworth είναι η απολύτως επίπεδη απόκριση πλάτους στη ζωνοπερατή περιοχή. Η ζωνοπερατή (passband) περιοχή του φίλτρου Butterworth δεν παρουσιάζει καμία κυμάτωση. Στην εικόνα 6.1 φαίνεται αυτό ακριβώς το χαρακτηριστικό του φίλτρου, το οποίο είναι και το κύριο πλεονέκτημα του σε σχέση με άλλα φίλτρα.

Όμως επίσης παρατηρούμε τη σχετικά αργή προσαρμογή του φίλτρου στη ζώνη αποκοπής. Το γεγονός αυτό, δηλαδή το σχετικά αργό roll off με την ταυτόχρονη επίπεδη απόκριση πλάτους, κάνει το φίλτρο κατάλληλο για εφαρμογές που η κυμάτωση (ripple) της βασικής ζώνης είναι ανεπιθύμητη.

Η απόκριση φάσης είναι μη γραμμική αλλά γνησίως φθίνουσα συνάρτηση της κανονικοποιημένης συχνότητας (εικόνα 6.2).

Η απόκριση μοναδιαίου παλμού (εικόνα 6.3) παρουσιάζεται ικανοποιητική. Το φίλτρο είναι ευσταθές (οι πόλοι του βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο). Το κόστος υλοποίησης σε όρους πλήθους στοιχείων που απαιτούνται για την υλοποίηση είναι 13 πολλαπλασιαστές και 12 αθροιστές (εικόνα 6.4).

Για το φίλτρο Chebyshev –I αρχικά παρατηρούμε ότι παρουσιάζει κυμάτωση (ripple) στη ζωνοπερατή περιοχή (εικόνα 6.5). Το χαρακτηριστικό αυτό είναι κοινό σε όλη την «οικογένεια» των φίλτρων Chebyshev. Όμως το μειονέκτημα αυτό αντισταθμίζεται από το καλύτερο roll off δηλαδή την πιο απότομη κλίση στη συχνότητα αποκοπής σε σχέση με το φίλτρο Butterworth. Θεωρητικά μάλιστα μπορούμε να πετύχουμε ακόμα πιο απότομη κλίση με αντιστάθμισμα τη μεγαλύτερη κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης. Η απόκριση φάσης του φίλτρου είναι μη γραμμική αλλά επίσης γνησίως φθίνουσα σε συνάρτηση με την κανονικοποιημένη συχνότητα (εικόνα 6.6).

Η κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης παρατηρείται και στην απόκριση μοναδιαίου παλμού του φίλτρου (εικόνα 6.7). Το κόστος υλοποίησης είναι 9 πολλαπλασιαστές και 8 αθροιστές ενώ το φίλτρο είναι ευσταθές (εικόνα 6.8).

Τέλος για το φίλτρο Chebyshev – II δεν παρουσιάζει κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης (εικόνα 6.9). Φαίνεται στο σχήμα ότι η ζώνη διέλευσης είναι επίπεδη όπως του Butterworth φίλτρου όμως παρατηρούμε επίσης έντονη κυμάτωση (ripple) στη ζώνη αποκοπής. Ακόμη παρατηρούμε την απότομη κλίση που παρουσιάζει σε σχέση και με τα δυο προαναφερθέντα φίλτρα. Η απόκριση φάσης (εικόνα 6.10) παρουσιάζει έντονες διακυμάνσεις ξεκινώντας από γνησίως φθίνουσα μέχρι τη συχνότητα αποκοπής και κλιμακωτές αυξομειώσεις στη ζωνοφρακτική περιοχή.

Οι κυματώσεις στη ζώνη αποκοπής παρουσιάζονται και στο διάγραμμα της μοναδιαίας απόκρισης (εικόνα 6.11) του φίλτρου. Παρουσιάζει ευστάθεια, και το κόστος υλοποίησης είναι 9 πολλαπλασιαστές και 8 αθροιστές. (εικόνα 6.12)

Επιχειρώντας μια συγκριτική αποτίμηση των χαρακτηριστικών και τις συμπεριφοράς των τριών φίλτρων που εξετάσαμε μπορούμε να αναφέρουμε καταρχάς ότι η παρουσία πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων σε κάθε ένα από αυτά, μας οδηγεί στην επιλογή ανά περίπτωση και ανάλογα την εφαρμογή.

Το φίλτρο Butterworth με την άριστη προσαρμογή στη ζώνη διέλευσης ενδείκνυται σε εφαρμογές που κυμάτωση είναι ανεπιθύμητη. Το χαρακτηριστικό αυτό όμως θα πρέπει να συνδυάζεται με το σχετικά μεγάλο κόστος υλοποίησης και τη σχετικά αργή προσαρμογή στην περιοχή αποκοπής.

Το φίλτρο Chebyshev –I έχει το πλεονέκτημα της απλούστερης και πιο συμφέρουσας υλοποίησης, της πιο καλής προσαρμογής στην περιοχή αποκοπής, παρουσιάζει όμως το φαινόμενο της κυμάτωσης που στη ζώνη διέλευσης μπορεί να αποτελεί σοβαρό ανασταλτικό παράγοντα σε κάποιες εφαρμογές.

Τέλος το φίλτρο Chebyshev- II συνδυάζει τα πλεονεκτήματα και των δυο προηγούμενων φίλτρων όμως με κόστος τη μεγάλη κυμάτωση στην περιοχή αποκοπής. Για το λόγο αυτό είναι και το λιγότερο χρησιμοποιούμενο φίλτρο στην πράξη.

Και τα τρία φίλτρα είναι ευσταθή και όπως προείπαμε η επιλογή ενός από αυτά εξαρτάται από τις απαιτήσεις της εκάστοτε εφαρμογής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- WIKI
- Σ. Θεοδωρίδης, Κ. Μπερμπερίδης, Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων & Συστημάτων
- Ν.Καλουπτσίδης, Σήματα, Συστήματα και Αλγόριθμοι, Εκδόσεις Διάυλος, 1993.
- S.K.Mitra, Digital Signal Processing: A computer-Based Approach, McGraw Hill, 1998.
- S.J.Orfanidis, Introduction to Signal Processing, Prentice-Hall, 1996.
- Α. ΣΚΟΔΡΑΣ & Β. ΑΝΑΣΤΑΣΟΠΟΥΛΟΣ: ‘ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΕΙΚΟΝΑΣ’
 - «Μελέτη και κατασκευή ραδιοφωνικού πομπού συχνοτικής διαμόρφωσης (FM)» πτυχιακή εργασία Μανίκης Κωνσταντίνος ΑΝΩΤΑΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΡΗΤΗΣ ΤΜΗΜΑ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ & ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ
 - <http://www.ssp.ece.upatras.gr/courses/dsp/downloads/kefalaio5.pdf>
 - http://www.themistoklis.org/ucy/623/lectures/7_filters.pdf
 - <http://automatismoι.freesevers.com/FILTRA/filtra.htm>
 - http://portal.survey.ntua.gr/main/courses/general/sigproc/lectures/dsp2005_0809.pdf
 - http://www.eln.teilam.gr/sites/default/files/Digital_signal_processing_EAP_Skodras.pdf
 - adPwQFHNY&sig=Ch20WDxEaI_x0EGpmgHoZIEWPV0&redir_esc=y
 - Digital Signal Processing using MATLAB , Vinay K. Ingle John G. Proakis , Bookware Companion Series
 - <http://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/handle/10889/4601>
 - [http://www.upatras.gr/ieee/skodras/courses/dsp/DSP-Chapter1\(29xii00\).pdf](http://www.upatras.gr/ieee/skodras/courses/dsp/DSP-Chapter1(29xii00).pdf)
 - [http://www.upatras.gr/ieee/skodras/courses/dsp/DSP-Chapter5\(29xii00\).pdf](http://www.upatras.gr/ieee/skodras/courses/dsp/DSP-Chapter5(29xii00).pdf)
 - <http://147.102.25.133/mobile/filters.pdf>
 - http://charon.phys.uoa.gr/moag/admin/pdf_files/Telecom_Labs.pdf

- <http://thesis.ekt.gr/thesisBookReader/id/0217#page/1/mode/2up>