

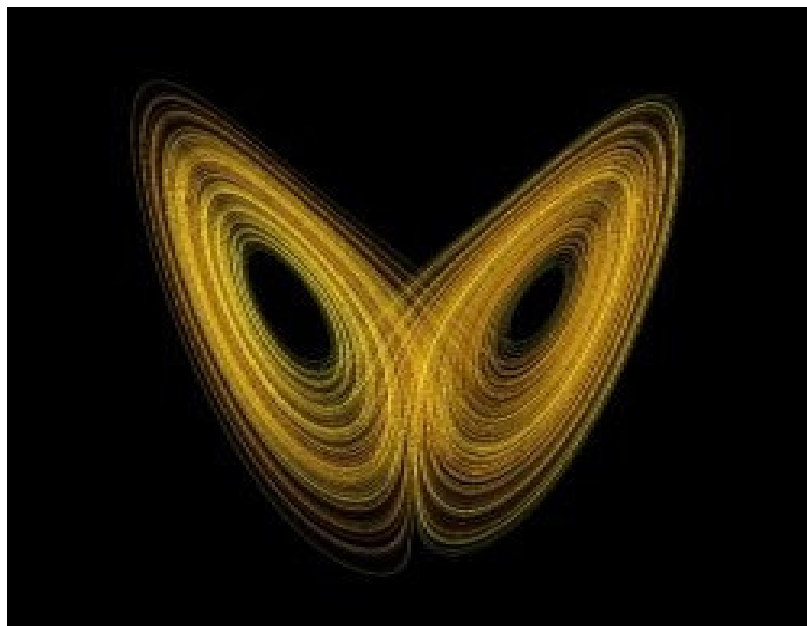


Τμήμα Τηλεπικοινωνιακών Συστημάτων και Δικτύων
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Μεσολογίου



ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ



Του φοιτητή

Χατζηδάκη Κωνσταντίνου

Αρ. Μητρώου: 0345

Επιβλέπων καθηγητής

Δρ. Λούβρος Σπυρίδων

Ναύπακτος 2013

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θέλω πρώτα απ' όλους να ευχαριστήσω τους γονείς μου για όλη την αμέριστη Βοήθεια τους, την στήριξη τους, την υπομονή τους αλλά και για της θυσίες που έκαναν όλα αυτά τα χρόνια. Τον παππού μου στον οποίο είναι αφιερωμένη αυτή η εργασία καθώς και τον αδερφό μου για την βοήθειά του και την παροχή των γνώσεων του σε μαθηματικά και φυσική. Τέλος ευχαριστώ και τον καθηγητή μου για την βοήθεια και την καθοδήγηση του.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	5
1. Σκοπός	5
2. Περίληψη	5
ΠΡΟΛΟΓΟΣ	6
1. Η Ανάπτυξη του Διαφορικού Λογισμού και των Δυναμικών Συστημάτων	6
2. Ντετερμινισμός και ο Δαίμονας του Λαπλάς	7
3. Η Αρχή της Απροσδιοριστίας του Heisenberg	7
4. Δυναμικά Συστήματα	8
5. Η Πρώτη Ένδειξη για της Ύπαρξη Χάους από τον Henri Poincare	9
6. Η Ανακάλυψη Αιτιοκρατικού Χάους από τον Edward Lorenz	11
7. Το Φαινόμενο της Πεταλούδας	14
8. Χάος: Μια Νέα Επιστήμη	14
Κεφάλαιο 1^ο	16
1.1 Δυναμικά Συστήματα	16
1.1.2 Αυτόνομα και μη αυτόνομα δυναμικά συστήματα	17
1.1.3 Καταστάσεις ισορροπίας των δυναμικών συστημάτων	18
1.1.3.1 Γραμμικά δυναμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων	18
1.1.3.2 Μη γραμμικά δυναμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων	20
1.1.3.3 Απεικονίσεις	21
Κεφάλαιο 2^ο	24
2.1 Το Πέρασμα από την Αιτιοκρατία στο Χάος	24
2.2 Γενικά στοιχεία της Θεωρίας του Χάους	27
2.3 Χαοτική δυναμική	28
2.3.1 Ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες	29
2.3.2 Τοπολογική Μεταβατικότητα	30
2.3.3 Πυκνότητα των περιοδικών τροχών	30
2.3.4 Ελκυστές	31

2.3.5 Παράξενοι Ελκυστές	31
2.3.6 Ελάχιστη πολυπλοκότητα ενός χαοτικού συστήματος	32
2.4 Η Διάκριση Τυχαίων Από Χαοτικών Δεδομένων	33
2.5 Εφαρμογές Του Χάους	34
Κεφάλαιο 3^ο	36
3.1 Εισαγωγικά	36
3.2 Εφαρμογή Στην Πρόβλεψη Του Καιρού	36
3.3 Εφαρμογή Στην Ηλεκτρονική: Κύκλωμα Chua	39
3.3.1 Εισαγωγή στο κύκλωμα Chua	39
3.3.2 Εξισώσεις του συστήματος Chua	40
3.3.3 Χαοτική συμπεριφορά του κυκλώματος Chua	46
3.4 Εφαρμογή Χάους Στην Κρυπτογράφηση	49
3.4.1 Ασφάλεια Δεδομένων	49
3.4.2 Λίγα Λόγια για Το Picasso	50
3.4.4 Αρχή Λειτουργίας	51
3.4.5 Στόχοι του PICASSO	52
3.4.6 Περίληψη των αποτελεσμάτων	53
3.4.7 Επιτεύγματα ανά Τομέα Έρευνας	57
Επίλογος	76
Βιβλιογραφία	77

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Σκοπός

Σκοπός της αυτής πτυχιακής εργασίας είναι η εμβάθυνση στη Θεωρία των Μη Γραμμικών Δυναμικών Συστημάτων και των εφαρμογών τους στην Ηλεκτρονική, τα Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα και τη Μαθηματική Φυσική.

2. Περίληψη

Η παρακάτω πτυχιακή εργασία χωρίζεται σε πέντε μέρη. Στο πρώτο μέρος έγινε μία ιστορική αναδρομή από τα προϊστορικά χρόνια μέχρι και την ανακάλυψη και μελέτη των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων και του χάους.

Στην συνέχεια έχουμε το κύριο μέρος της εργασίας στο οποίο περιέχονται τα επόμενα τρία μέρη από τα 5 μέρη της εργασίας. Στο πρώτο περιγράφονται τα συστήματα γενικά(συστήματα, δυναμικά συστήματα, γραμμικά και μη γραμμικά). Γίνεται μία περιγραφή και ανάλυση των ορισμών τους με παραδείγματα.

Στο δεύτερο περιγράφω το πέρασμα στο χάος καθώς και όλες τις έννοιες και ορισμούς που το συνοδεύουν με σχήματα, εικόνες και παραδείγματα.

Στο τρίτο μέρος στο κυρίως μέρος παραθέτω τρεις επιστημονικές μελέτες-εφαρμογές των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων και του χάους.

Και τελευταίο μέρος της εργασίας ο επίλογος όπου αναφέρω προσωπικές παρατηρήσεις και συμπεράσματα.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

1. Η Ανάπτυξη του Διαφορικού Λογισμού και των Δυναμικών Συστημάτων

Για τους προϊστορικούς ανθρώπους τα φυσικά φαινόμενα και ο κόσμος όλος παρουσιάζονταν σαν χάος. Με την πάροδο του χρόνου και την ανάπτυξη των επιστημών άρχισε να μπαίνει μια τάξη στο χάος αυτό, καθώς όλο και περισσότερα φαινόμενα εξηγούνταν μιας και διατυπώνονταν νόμοι που τα ερμήνευαν. Παράλληλα με τις φυσικές επιστήμες αναπτύσσονταν και τα μαθηματικά και η κατανόηση ενός φυσικού φαινομένου συμπεριλάμβανε και μια κατάλληλη μαθηματική περιγραφή του. Μια από τις πρώτες και σημαντικότερες εφαρμογές των μαθηματικών ήταν πάνω σε ένα πρωταρχικό ερώτημα που από καταβολής κόσμου έκανε τον άνθρωπο να προβληματισθεί, σχετικά με τους νόμους και την προβλεψιμότητα της φύσης. Πρόκειται για την κίνηση των ουρανίων σωμάτων. Χρειάστηκαν πολλές χιλιετίες και ένας ολόκληρος θησαυρός παρατηρήσεων συσσωρευμένων από την αρχαιότητα, οι οποίες μεταδόθηκαν με θρησκευτική ευλάβεια από τη μια γενιά αστρονόμων στην άλλη, ώσπου να ανακαλυφθούν οι νόμοι της κίνησης των πλανητών από τον Γιόχαν Κέπλερ. Παράλληλα, την ίδια περίπου εποχή, πριν από τρακόσια περίπου χρόνια, πραγματοποιήθηκε ένα μνημειώδες επίτευγμα, η ανάπτυξη του διαφορικού λογισμού ανεξάρτητα από τον Isaac Newton και τον Wilhelm Leibniz.

Στη συνέχεια, το 1687 ο Νεύτωνας, στο βιβλίο του με τίτλο «Φιλοσοφία των Φυσικών Επιστημών» (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica), με βάση το νόμο της παγκόσμιας έλξης, την ύπαρξη δηλαδή της βαρυτικής δύναμης *απέδειξε* τους τρεις νόμους του Κέπλερ για την κίνηση των πλανητών. Οι επιτυχίες των Μαθηματικών στην περιγραφή των φυσικών φαινομένων διαδέχονταν η μία την άλλη με εντυπωσιακούς ρυθμούς κατά τους αιώνες που ακολούθησαν και η μέθοδος αυτή της μοντελοποίησης χρησιμοποιώντας τις διαφορικές εξισώσεις και τις εξισώσεις διαφορών χρησιμοποιήθηκε έκτοτε στις περισσότερες επιστήμες με εξαιρετικά αποτελέσματα.. Με βάση το παράδειγμα της Νευτώνειας φυσικής και χρησιμοποιώντας το πανίσχυρο εργαλείο των διαφορικών εξισώσεων κατέστη δυνατό να μοντελοποιηθούν φαινόμενα απ' όλο το φάσμα των επιστημών. Αυτό δημιούργησε την εικόνα, κυρίως κατά το δέκατο ένατο και τις αρχές του εικοστού αιώνα, ενός καθαρά μηχανιστικού κόσμου, όπου τα πάντα είναι προβλέψιμα, με επιπτώσεις ακόμα και στη φιλοσοφική αντίληψη του κόσμου. Δημιουργήθηκε **η εικόνα ενός σύμπαντος που λειτουργεί με απόλυτη τάξη.**

2. Ντετερμινισμός και ο Δαίμονας του Λαπλάς

Η επιτυχία αυτών των υπολογισμών στην πρόβλεψη της θέσεως ενός σώματος για μεγάλα χρονικά διαστήματα απετέλεσε τον θρίαμβο της αιτιοκρατίας. Εφόσον η εξέλιξη ενός φαινομένου που διέπεται από καθαρά αιτιοκρατικούς νόμους, όπως είναι οι νόμοι του Νεύτωνα, έχει κατανοηθεί πλήρως και μπορεί να προβλεφθεί, εισήχθη με τον τρόπο αυτό στην επιστήμη η έννοια του ντετερμινισμού και ταυτόχρονα επικράτησε η πεποίθηση ότι οι όροι ντετερμινισμός και προβλεψιμότητα είναι ισοδύναμοι.

Ντετερμινισμός ή **αιτιοκρατία** είναι η θεωρία που ισχυρίζεται πως οτιδήποτε συμβαίνει στο σύμπαν καθορίζεται επακριβώς από πρότερες συνθήκες. Αν αυτή η θεωρία είναι σωστή, τότε οτιδήποτε συμβαίνει στο σύμπαν, είτε ανήκει στο παρελθόν, είτε στο παρόν είτε στο μέλλον, είναι κατ' αρχήν παραγωγικά εξηγήσιμο.

Σύμφωνα με τη φιλοσοφική αυτή τάση, η οποία επηρέασε ιδιαίτερως την επιστημονική σκέψη από την αρχαιότητα μέχρι και σήμερα, είναι αποδεκτή η ύπαρξη μιας καθολικής αιτιώδους και νομοτελειακής συνάφειας όλων των φαινομένων. Δεν υπάρχουν ανεξήγητα ή τυχαία γεγονότα. Η κατ' εξοχήν διατύπωση του ντετερμινιστικού δόγματος που στηριζόταν στην μαθηματική ανάπτυξη του διαφορικού λογισμού και που αναφέρεται πιο συχνά είναι αυτή που προέρχεται από το έργο του Λαπλάς «Αναλυτική Θεωρία των Πιθανοτήτων», η οποία αποτέλεσε το σύμβολο μιας ολόκληρης εποχής και αποκαλείται **διάνοια** ή **δαίμονας του Λαπλάς**.

Ο δαίμονας του Λαπλάς αποτελεί μια από τις ζωηρότερες εικόνες που αναδύθηκε μέσα από το σύνολο της βιβλιογραφίας για τον ντετερμινισμό και προϋποθέτει ότι το παρελθόν, το παρόν και το μέλλον είναι συνδεδεμένα με σχέσεις αιτιότητας. Κατά συνέπεια, το πρόβλημα της ακριβούς πρόγνωσης βρίσκεται στη δυσκολία της καταγραφής των σχετικών δεδομένων και μόνο.

3. Η Αρχή της Απροσδιοριστίας του Heisenberg

Το 1927 ο Werner Heisenberg διατύπωσε την περίφημη **αρχή της απροσδιοριστίας** (*indeterminacy principle*) ή **αρχή της αβεβαιότητας** (*uncertainty principle*). Σύμφωνα με την αρχή αυτή είναι αδύνατο να μετρήσουμε με απεριόριστη ακρίβεια, τη θέση και την ορμή ενός σωματιδίου ταυτόχρονα. Εάν μετράμε τη θέση ενός σωματίου με αβεβαιότητα Δx και ταυτόχρονα μετράμε την ορμή του με αβεβαιότητα Δp , τότε το γινόμενο των δύο μεγεθών δεν μπορεί να είναι μικρότερο από έναν αριθμό, δηλαδή:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

όπου \hbar είναι η μειωμένη σταθερά του Planck (δηλαδή η σταθερά του Planck διαιρούμενη με το 2π). Η ελάχιστη αβεβαιότητα στη μέτρηση των Δx και Δp δεν είναι πειραματικό σφάλμα, δεν οφείλεται δηλαδή στις ατέλειες των πειραματικών συσκευών, αλλά προκύπτει από την δομή της ύλης και η σχέση αβεβαιότητας είναι άμεση συνέπεια του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού της ύλης. *Η αρχή της απροσδιοριστίας του Χάιζενμπεργκ είναι θεμελιώδης, αναπόδραστη, χαρακτηριστική ιδιότητα του κόσμου* (Hawking, 1996).

Παρόλα αυτά, η συνηθισμένη εμπειρία δεν παρέχει καμιά ένδειξη για την αλήθεια της αρχής αυτής. Φαίνεται να είναι εύκολο να υπολογίσει κανείς με ακρίβεια την ταχύτητα και τη θέση ενός αυτοκινήτου την ίδια χρονική στιγμή. Αυτό όμως συμβαίνει διότι για τα αντικείμενα αυτού του μεγέθους οι αβεβαιότητες που ορίζει η αρχή της απροσδιοριστίας είναι πολύ μικρές για να παρατηρηθούν έξω από ένα πειραματικό εργαστήριο φυσικής. Το πλήγμα που δέχθηκε ο κλασικός ντετερμινισμός από την αρχή της απροσδιοριστίας ήταν πολύ μεγάλο, παρόλα αυτά δε σήμανε και το τέλος του ντετερμινισμού. Στην πραγματικότητα κανείς επιστήμονας δεν είχε πιστέψει ως απόλυτα εφικτό το ντετερμινιστικό δόγμα του Λαπλάς (Peitgen et al, 1992). Ακόμα και το πιο προσεκτικά μελετημένο πείραμα ποτέ δεν είναι εντελώς απομονωμένο από τις επιδράσεις του περιβάλλοντος και η κατάσταση οποιουδήποτε συστήματος δεν είναι ποτέ απόλυτα γνωστή μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Αυτό που πραγματικά πίστευαν οι επιστήμονες είναι ότι από σχεδόν τις ίδιες αιτίες ακολουθούν σχεδόν τα ίδια αποτελέσματα, τόσο στη φύση όσο και σε οποιοδήποτε πείραμα (Gleick, 1987). Αν δηλαδή γνωρίζουμε προσεγγιστικά τις αρχικές συνθήκες ενός συστήματος και κατανοούμε τους φυσικούς νόμους, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά τη συμπεριφορά του συστήματος. Η υπόθεση αυτή βρίσκεται στην καρδιά της φιλοσοφίας της επιστήμης. Αν τα πράγματα δεν είχαν έτσι, τότε κανείς δε θα μπορούσε να βεβαιώσει την ισχύ οποιουδήποτε φυσικού νόμου.

Υπάρχει μια σύγκλιση στον τρόπο που δουλεύουν τα πράγματα και οι τυχαίες μικρές επιδράσεις δεν ενισχύονται ώστε να δίνουν μεγάλα τυχαία αποτελέσματα. Δυστυχώς όμως, ούτε αυτή η τόσο εύλογη επιστημονική απαίτηση αποδείχθηκε εφικτή αλλά κλονίστηκε εκ νέου τη δεκαετία του 1970, από την ανακάλυψη του αιτιοκρατικού χάους (αν και η σύλληψή της έννοιας αυτής είχε διατυπωθεί και προγενέστερα) στη μοντελοποίηση των δυναμικών συστημάτων με διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών.

4. Δυναμικά Συστήματα

Η έννοια ενός δυναμικού συστήματος οφείλει την προέλευσή της στη Νευτώνεια μηχανική αλλά ως σήμερα δεν υπάρχει άλλος κλάδος των μαθηματικών με τόσες πολλές εφαρμογές, όσο αυτός των δυναμικών συστημάτων.

Τα δυναμικά συστήματα είναι τα φυσικά φαινόμενα ή οι διεργασίες εκείνες που περιγράφονται από συστήματα διαφορικών εξισώσεων ή εξισώσεων διαφορών, των οποίων η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος. (Μπούντης, 1995). Για τα συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων έχει αναπτυχθεί ολόκληρη θεωρία και επιτεύχθηκε η πλήρης επίλυσή τους. Δυστυχώς, ακόμη και σήμερα δεν υπάρχει καμιά γενική θεωρία, αντίστοιχη με εκείνη των γραμμικών, που να μας επιτρέπει να λύνουμε αναλυτικά συστήματα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Η διερεύνηση της συμπεριφοράς των μη γραμμικών συστημάτων έχει τοπικό χαρακτήρα, μια που τις περισσότερες φορές η εύρεση γενικής λύσης του συστήματος είναι αδύνατη. Το ενδιαφέρον μιας τέτοιας διερεύνησης, εστιάζεται στη μελέτη των σημείων ισορροπίας, στην περιοχή των οποίων διενεργείται γραμμικοποίηση του συστήματος. Για τον καθορισμό της κατάστασης του συστήματος στο απώτερο μέλλον απαιτείται η διαδοχική επανάληψη του υπολογισμού που προκύπτει από τις σχέσεις του συστήματος πολλές φορές, όπου κάθε φορά δίνεται ένας χρόνος προώθησης, ένα μικρό βήμα. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται αριθμητική επίλυση του συστήματος και απαιτεί πάρα πολλούς υπολογισμούς, αλλά με τη χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών απέδωσε εξαιρετικά αποτελέσματα. Λαμβάνοντας υπόψη ένα αρχικό σημείο είναι δυνατό με τη μέθοδο αυτή να καθοριστούν όλα τα μελλοντικά σημεία του, η τροχιά δηλαδή του σημείου. Το πιο σημαντικό ίσως ερώτημα στα δυναμικά συστήματα είναι ποια είναι η συμπεριφορά των λύσεών τους καθώς ο χρόνος t τείνει στο άπειρο, πού καταλήγουν δηλαδή οι τροχιές, από οποιοδήποτε σημείο αφετηρίας. Ανάλογα με την αρχική συνθήκη, οι τροχιές έλκονται από ένα σημείο ή σύνολο σημείων ή διαφεύγουν στο άπειρο. Το σύνολο των σημείων που έλκει έναν αριθμό τροχιών ονομάζεται ελκυστής.

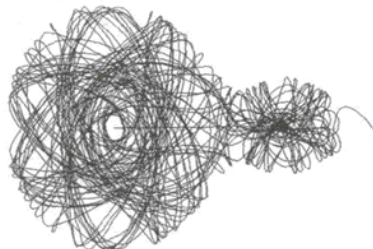
Τα φαινόμενα που μοντελοποιούνται από συστήματα των διαφορικών εξισώσεων ή εξισώσεων διαφορών ανήκουν σε όλους τους τομείς του επιστητού, όπως καιρικά φαινόμενα, οι κινήσεις των πλανητών, η εξέλιξη του πληθυσμού, η καρδιακή λειτουργία, η αλληλεπίδραση χημικών ουσιών και πολλά άλλα. Οι διαφορικές εξισώσεις διαδραματίζουν εξέχοντα ρόλο στη φυσική, τη χημεία, τη βιολογία, τα οικονομικά και σε πολλούς ακόμη τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας. Εμφανίζονται όποτε υπάρχει μια αιτιοκρατική σχέση που συσχετίζει μερικές συνεχώς μεταβαλλόμενες ποσότητες, που μοντελοποιούνται από συναρτήσεις, και το ρυθμό μεταβολής τους, που εκφράζεται από την παράγωγο των συναρτήσεων αυτών, ένα φαινόμενο δηλαδή που εξελίσσεται αιτιοκρατικά στο χρόνο.

Οι περισσότερες διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν ρεαλιστικά τα ως άνω φυσικά φαινόμενα είναι μη γραμμικές και επομένως πολύ δύσκολο έως αδύνατο να επιλυθούν αναλυτικά εκτός από ελάχιστες εξαιρετικές περιπτώσεις. Για το λόγο αυτό, οι επιστήμονες αναγκαζόντουσαν να καταφύγουν σε γραμμικοποιήσεις και σημαντικές απλουστεύσεις των προβλημάτων τους, οι οποίες μπορούσαν να δώσουν ενδιαφέροντα αποτελέσματα.

5. Η Πρώτη Ένδειξη για της Ύπαρξη Χάους από τον Henri Poincare

Μέχρι τα τέλη του 19ου αιώνα η εύρεση της τροχιάς κάθε ουράνιου σώματος γινόταν προσεγγιστικά, με τη βοήθεια των νόμων του Νεύτωνα και Κέπλερ, αφού δεν υπήρχαν ηλεκτρονικοί υπολογιστές για μεγαλύτερη ακρίβεια. Οι κινήσεις των πλανητών και των άλλων ουρανίων σωμάτων θεωρούνταν περιοδικές και κανονικές σαν τη κίνηση ενός τέλει εκκρεμούς. Στα τέλη όμως του 19ου αιώνα, ο Γάλλος μαθηματικός και αστρονόμος Henri Poincare (1854-1912), έκανε μια ανακάλυψη που έμελλε να αλλάξει τα θεμέλια της Νευτώνειας μηχανικής, και να συντελέσει στη γέννηση ενός νέου επιστημονικού κλάδου, της επιστήμης των δυναμικών συστημάτων και του χάους. Σε αυτόν αποδίδεται η αρχική σύλληψη της έννοιας του αιτιοκρατικού χάους όπως το εννοούμε σήμερα μολονότι η έννοια αυτή δεν έγινε πλήρως κατανοητή παρά περίπου ένα αιώνα αργότερα.

Για να αντιμετωπίσει τη μεγάλη δυσκολία του προβλήματος υπέθεσε ότι υπάρχουν μόνο 3 σώματα που κινούνται σε ένα επίπεδο (και όχι στον τρισδιάστατο χώρο). Τα δύο έχουν μεγάλη μάζα και το τρίτο έχει απειροελάχιστα μικρή μάζα, αμελητέα σε σχέση με τα άλλα δύο, όπως για παράδειγμα δύο αστέρια και ένας αστεροειδής. Ο Πουανκαρέ υπέθεσε ακόμη ότι οι αρχικές συνθήκες, οι θέσεις δηλαδή και οι ταχύτητες των δύο άστρων ήταν τέτοιες ώστε αυτά να κινούνται με σταθερή ταχύτητα σε ελλείψεις γύρω από το κέντρο της μάζας τους



Στην **Εικόνα 1**: Η τροχιά του αστεροειδούς με τα δύο άστρα ακίνητα (Alligood et all, 2000).

Στην εικόνα αυτή υποθέτουμε ότι κοιτάμε τα δύο άστρα από ψηλά, πάνω από το επίπεδο που κινούνται, περιστρεφόμενοι και εμείς μαζί τους έτσι ώστε να εμφανίζονται σταθερά. Στο αριστερό άκρο της ευθείας γραμμής βρίσκεται το σώμα με τη μεγαλύτερη μάζα και στο δεξί άκρο το δεύτερο μεγάλο σώμα, με μάζα όμως μικρότερη από την πρώτη. Στη συγκεκριμένη τροχιά, το μικροσκοπικό σώμα κινείται μπρος και πίσω ανάμεσα στα δύο μεγαλύτερα σώματα για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα και αποκτά μεγάλη ταχύτητα καθώς τελικά ξεφεύγει προς τα δεξιά, έτσι ώστε να μην επιστρέψει πάλι. Αν χρησιμοποιήσουμε μια διαφορετική αρχική θέση του αστεροειδούς, αυτός παραμένει για πάντα άλλες φορές κοντά στο μεγάλο άστρο και άλλες κοντά στο μεσαίο. Μια απειροελάχιστη αλλαγή στην αρχική θέση ή ταχύτητα του αστεροειδούς μας δίνει σαν αποτέλεσμα μια τελείως διαφορετική τροχιά. Ως συνέπεια είναι αδύνατο να προβλεφθεί η τροχιά του αστεροειδούς, παρότι το φαινόμενο είναι πλήρως ντετερμινιστικό και οι νόμοι που το διέπουν έχουν πλήρως διατυπωθεί και μάλιστα με μαθηματικό τρόπο. Ο Poincare, στη μαθηματική ανάλυση που έκανε απέδειξε ότι δεν μπορεί να προβλεφθεί η τροχιά οποιουδήποτε ουράνιου σώματος που δέχεται την επίδραση δύο η περισσότερων άλλων σωμάτων (Peterson, 1993), μολονότι αυτή είναι ντετερμινιστικά προκαθορισμένη και περιγράφεται πλήρως από μαθηματικές εξισώσεις. Το πρόβλημα των τριών σωμάτων, η πρόβλεψη της τροχιάς τους δηλαδή ήταν και παραμένει άλυτο. Ο Poincare αποκάλυψε το χάος στο Ηλιακό σύστημα και μαζί ανακάλυψε την απρόβλεπτη εξέλιξη ενός μη γραμμικού συστήματος¹. Είχε κατανοήσει πως πολύ μικρές επιδράσεις μπορούν να μεγεθυνθούν μέσω της ανάδρασης. Γι' αυτό και διατύπωσε την άποψη ότι μια ελάχιστη αιτία που διαφεύγει της προσοχής μπορεί να προκαλέσει ένα σημαντικό αποτέλεσμα. Το σύστημα αυτό, κατά συνέπεια, διαθέτει την ιδιότητα που πολύ αργότερα ονομάστηκε ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες, ιδιότητα που πρώτος ο Ανρύ Πουανκαρέ συνέλαβε και μάλιστα χωρίς τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών, οι οποίοι δεν είχαν ανακαλυφθεί την εποχή εκείνη.

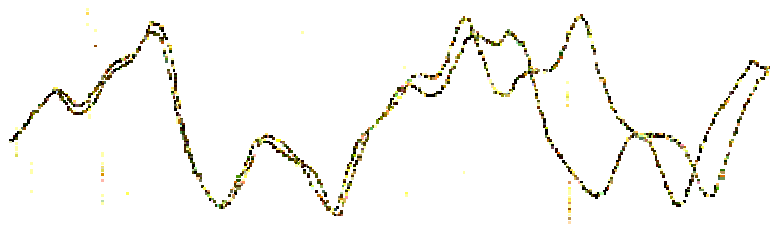
6. Η Ανακάλυψη Αιτιοκρατικού Χάους από τον Edward Lorenz

Πρώτος ανακάλυψε την αδυναμία για μακροπρόθεσμη πρόβλεψη στα ντετερμινιστικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων που μοντελοποιούσαν την εξέλιξη του καιρού, ο μετεωρολόγος Edward Lorenz. Το 1963, δημοσιεύτηκε ένα άρθρο του με τίτλο «Ντετερμινιστική, μη Περιοδική Ροή» (Deterministic, non Periodic Flow).

Ο Lorenz είχε δημιουργήσει ένα μοντέλο για να προσομοιώσει την εξέλιξη του καιρού, σε ένα πρωτόγονο ηλεκτρονικό υπολογιστή εκείνης της εποχής. Μετά από αρκετές δοκιμές είχε καταλήξει σε ένα σύστημα 12 διαφορικών εξισώσεων που

εξέφραζαν τις σχέσεις ανάμεσα στις μεταβλητές από τις οποίες εξαρτάται η εξέλιξη του καιρού όπως η θερμοκρασία, η πίεση, η ταχύτητα του ανέμου κ.α. Χρησιμοποιώντας την αριθμητική μέθοδο επίλυσης του συστήματος, κάθε ένα λεπτό εργασίας ο υπολογιστής τύπωνε μια σειρά αριθμούς, οι οποίοι αντιστοιχούσαν στην εξέλιξη του καιρού μιας ολόκληρης μέρας. Η εξέλιξη του καιρού, με τον τρόπο αυτό, ήταν ντετερμινιστικά προδιαγεγραμμένη από τις διαφορικές εξισώσεις και την αρχική συνθήκη.

Κάποια μέρα ο Lorenz, θέλοντας να εκτυπώσει μια ακολουθία της εξέλιξης του καιρού που να έχει μεγαλύτερο μήκος αντί να αρχίσει από την αρχή, άρχισε από τη μέση των υπολογισμών της προηγούμενης μέρας. Πληκτρολόγησε τους αριθμούς κατευθείαν από την προηγούμενη τυπωμένη σελίδα και πήγε να πιει ένα καφέ ώσπου να τελειώσει ο υπολογιστής τις εκτυπώσεις του. Όταν γύρισε μια ώρα αργότερα, είδε κάτι απρόσμενο, κάτι που έριχνε το σπόρο μιας νέας επιστήμης (Gleick,1987). Η καινούργια εκτέλεση, που κανονικά έπρεπε να είναι ίδια με την παλιά, διέφερε από κάποιο σημείο και μετά εντελώς, ώστε ο (ψηφιακός) καιρός έπειτα από λίγους μήνες είχε χάσει κάθε ομοιότητα με αυτόν που είχε υπολογίσει ο υπολογιστής την προηγούμενη μέρα.



Εικόνα 2: Στην εικόνα φαίνεται μια εκτύπωση που πήρε ο Lorenz το 1961. Από το ίδιο σχεδόν σημείο εκκίνησης ο Lorenz είδε τον καιρό που έδινε ο υπολογιστής να δημιουργεί σχήματα που εξελίσσονταν όλο και πιο διαφορετικά μέχρι που κάθε ομοιότητα εξαφανίστηκε (Gleick,1987).

Η απόκλιση των αποτελεσμάτων οφειλόταν στο γεγονός ότι τα νούμερα που ξανα-εισήγαγε "με το χέρι" ο Lorenz είχαν μικρότερη ακρίβεια (λιγότερα δεκαδικά ψηφία) από εκείνα που εσωτερικά αποθήκευε ο υπολογιστής.

Ο Lorenz είχε πληκτρολογήσει τον αριθμό στρογγυλεμένο, υποθέτοντας ότι η διαφορά του ενός χιλιοστού δε θα είχε συνέπειες. Το συμπέρασμα ήταν ότι, στο συγκεκριμένο μοντέλο, και η ελάχιστη ακόμη έλλειψη ακρίβειας είναι καθοριστική,

κάτι που αργότερα αποκαλύφθηκε ότι είναι γενικό χαρακτηριστικό μιας ολόκληρης κλάσης συστημάτων, των λεγόμενων χαοτικών.

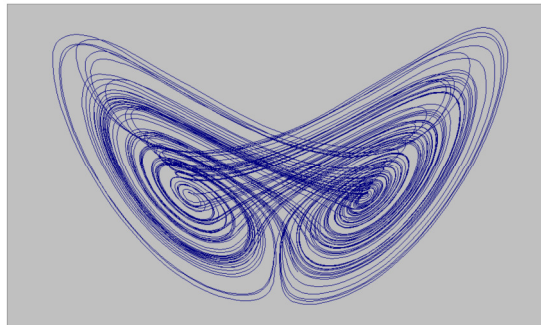
Στη συνέχεια ο Lorenz απλοποίησε το μοντέλο του, κατασκευάζοντας ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων που να ανήκει στο χώρο των τριών διαστάσεων και όχι των δώδεκα. Μολονότι τρισδιάστατο διατηρεί την πολύπλοκη συμπεριφορά του αρχικού με τις δώδεκα εξισώσεις, γεγονός που οφείλεται στη μη γραμμικότητά του. Το κλασικό μοντέλο, που συνήθως αποκαλείται σύστημα των εξισώσεων του Lorenz και αναλύεται στο άρθρο του 1963, είναι το εξής:

$$dx/dt=10(y-x)$$

$$dy/dt=xz+28x-y$$

$$dz/dt=xy-(8/3)z$$

Παρατηρούμε ότι αποτελείται από τρεις διαφορικές εξισώσεις που περιέχουν δύο μη γραμμικούς όρους (τους xz και xy) και μοντελοποιούσαν ρεύματα μεταφοράς θερμότητας μέσα σε ένα ρευστό. Στην εικόνα 3 παρουσιάζεται ένα μέρος της τροχιάς της λύσης, που σήμερα ονομάζεται Ελκυστής του Lorenz.



Εικόνα 3: Ο Ελκυστής του Lorenz. Κάθε τροχιά, παρότι κινείται μέσα σε μια φραγμένη περιοχή του χώρου, συνεχίζει την κίνησή της επ' άπειρον (δεν τερματίζει ποτέ!) δημιουργώντας βρόγχους και δεν τέμνει ποτέ τον εαυτό της, άρα κανένα τμήμα της δεν επαναλαμβάνεται. Εμφανίζει δηλαδή ένα είδος άπειρης πολυπλοκότητας.

Ολόκληρος ο ελκυστής είναι αδύνατο να σχεδιαστεί μιας και οποιαδήποτε τροχιά είναι άπειρη, δηλαδή δεν τερματίζει κάπου, σε ένα σημείο δηλαδή ή σε μια περιοδική κίνηση. Παρότι οι τροχιές κινούνται επ' άπειρον στο χώρο των τριών διαστάσεων, παραμένουν παγιδευμένες σε μια πεπερασμένη περιοχή και "κουλουριάζονται" χωρίς ποτέ να τέμνουν η μία την άλλη ή να κλείνουν, να επαναλαμβάνονται δηλαδή περιοδικά. Η κίνηση αυτή συνεχίζει να δημιουργεί βρόγχους επ' άπειρον μέσα σε μια φραγμένη περιοχή του χώρου αλλά κανένα τμήμα της δεν επαναλαμβάνεται και δεν τέμνει ποτέ τον εαυτό της, εμφανίζει δηλαδή ένα είδος άπειρης πολυπλοκότητας.

Η ακολουθία των αριθμών που παράγει την τροχιά δεν επαναλαμβάνεται ποτέ, πρόκειται για καθαρή αταξία αλλά ταυτόχρονα αποτελεί και ένα νέο είδος τάξης. Όλες οι τροχιές, μετά από αρκετό χρόνο, συγκεντρώνονται τελικά σε μια περιοχή που αποτελεί τον ελκυστή του συστήματος. Δεν πρόκειται όμως για κανονικό ελκυστή που να ανήκει σε οποιοδήποτε είδος από αυτά που περιγράφηκαν σε προηγούμενη παράγραφο. Το γεωμετρικό αυτό σύνολο δεν έχει καμιά από τις συνήθεις ιδιότητες και αργότερα το είδος αυτού του ελκυστή ονομάστηκε από τους David Ruelle και Floris Takens **παράξενος ελκυστής** και είναι μορφοκλασματικό σύνολο ή αλλιώς **σύνολο φράκταλ**.

Με τον όρο φράκταλ ονομάζεται ένα γεωμετρικό σχήμα που επαναλαμβάνεται αυτούσιο σε άπειρο βαθμό μεγέθυνσης και συχνά αναφέρεται ως απείρως πολύπλοκο. Το φράκταλ παρουσιάζεται ως "μαγική εικόνα" που όσες φορές και να μεγεθυνθεί οποιοδήποτε τμήμα του θα συνεχίζει να παρουσιάζει ένα εξίσου περίπλοκο σχέδιο με μερική ή ολική επανάληψη του αρχικού. Χαρακτηριστικό επομένως των φράκταλ είναι η λεγόμενη αυτο-ομοιότητα σε κάποιες δομές τους, η οποία εμφανίζεται σε διαφορετικά επίπεδα μεγέθυνσης.

Η πιο χαρακτηριστική ιδιότητα των φράκταλ είναι ότι είναι γενικά περίπλοκα ως προς τη μορφή τους, δηλαδή εμφανίζουν ανωμαλίες στη μορφή σε σχέση με τα συμβατικά γεωμετρικά σχήματα και κατά συνέπεια δεν είναι αντικείμενα τα οποία μπορούν να οριστούν με τη βοήθεια της ευκλείδειας γεωμετρίας.

Εκτός από την απείρως πολύπλοκη αυτή γεωμετρική δομή όμως, ο ελκυστής του Lorenz επιδεικνύει και **την ιδιότητα της ευαισθησίας στις αρχικές συνθήκες ή αλλιώς φαινόμενο της πεταλούδας**.

7. Το Φαινόμενο της Πεταλούδας

Αν χρησιμοποιήσουμε την ίδια «σχεδόν» αρχική συνθήκη, αν για παράδειγμα μετακινήσουμε το αρχικό σημείο της τροχιάς της λύσης του διαφορικού συστήματος του Lorenz κατά ένα εκατομμυριοστό, τότε η καινούργια τροχιά που θα προκύψει, μετά από ένα αρχικό χρονικό όριο που θα ακολουθεί την παλιά, θα εξελιχθεί εντελώς διαφορετικά από προηγούμενη. Η τροχιά αυτή αναπαριστά την εξέλιξη του καιρού, κατά συνέπεια η παραμικρή απόκλιση, της τάξης του εκατομμυριοστού ή και μικρότερη αφαιρεί τη δυνατότητα πρόβλεψης, παρότι το σύστημα είναι απολύτως ντετερμινιστικό. Στο φαινόμενο αυτό δόθηκε η ονομασία **φαινόμενο της πεταλούδας²** και αργότερα ο πιο τεχνικός όρος **ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχι-**

κές συνθήκες. Σύμφωνα με μια από τις διατυπώσεις, λέγεται ότι "αν μια πεταλούδα κινήσει τα φτερά της στον Αμαζόνιο, μπορεί να φέρει βροχή στην Κίνα".

8. Χάος: Μια Νέα Επιστήμη

Η Επιστήμη των Δυναμικών Συστημάτων και του Χάους μελετά τη συμπεριφορά ορισμένων μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, τα οποία κάτω από ορισμένες συνθήκες παρουσιάζουν ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες. Η ευαισθησία αυτή έχει ως αποτέλεσμα την φαινομενική τυχαιότητα της παρατηρούμενης συμπεριφοράς των συστημάτων, παρόλο που τα συστήματα αυτά είναι αιτιοκρατικά (ντετερμινιστικά), με την έννοια ότι είναι καλώς ορισμένοι οι νόμοι εξέλιξής τους και δεν περιέχουν τυχαίες ατμόσφαιρα, το ηλιακό σύστημα, οι τεκτονικές πλάκες, τα οικονομικά συστήματα και η εξέλιξη (μεταβολή) των πληθυσμών κα.

Η έλλειψη προβλεψιμότητας δεν οφείλεται σε ανεπάρκεια της μαθηματικής περιγραφής των φαινομένων ή σε ελλιπή γνώση των φυσικών νόμων που τα διέπουν αλλά απορρέει κατά κύριο λόγο από το παραμέτρους, ενώ είναι μη προβλέψιμα. Στα συστήματα αυτού του είδους περιλαμβάνονται γεγονός ότι τα περισσότερα φυσικά φαινόμενα περιγράφονται από εξισώσεις που είναι μη γραμμικές και περιέχουν πολλές μεταβλητές που εξαρτώνται η μία από την άλλη με ιδιαίτερα περίπλοκο τρόπο. Τέτοια μη γραμμικά συστήματα διαθέτουν, για πολλές τιμές των παραμέτρων τους, μεγάλες περιοχές στις οποίες η κίνηση εξαρτάται εξαιρετικά ευαίσθητα από την επιλογή των αρχικών συνθηκών. Τα συστήματα αυτά ονομάζονται χαοτικά.

Κεφάλαιο 1^ο

Θεωρία Δυναμικών Συστημάτων

1.1 Δυναμικά Συστήματα

Κάθε σύστημα του οποίου η εξέλιξη από κάποια αρχική κατάσταση περιγράφεται από ένα σύνολο εξισώσεων καλείται δυναμικό σύστημα. Μια μεγάλη ομάδα δυναμικών συστημάτων μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά από ένα σύστημα n διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t, c) \quad (1.1)$$

Το x είναι ένα διάνυσμα n πραγματικών συναρτήσεων ως προς το χρόνο t , που συνήθως περιγράφεται από την σχέση

$$x(t) \equiv \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\} \quad (1.2)$$

ή από τον συμβολισμό $x \in R^n$. Ο χώρος R^n λέγεται χώρος φάσεων ή καταστάσεων. Οι συναρτήσεις x_i ($i=1, \dots, n$) συνήθως αντιπροσωπεύουν φυσικές ποσότητες όπως θέση, ταχύτητα, θερμοκρασία, πίεση, αλλά και μεγέθη από άλλους επιστημονικούς κλάδους, όπως χημικές συγκεντρώσεις και πληθυσμοί ειδών κλπ. φάσεων ή χώρος των καταστάσεων. Η σταθερά $c \equiv (c_1, \dots, c_k)$ είναι εξωγενής μεταβλητή και οι c_i ($i=1, \dots, k$) καλούνται παράμετροι ελέγχου του δυναμικού συστήματος. Μεταβάλλοντας την τιμή μιας παραμέτρου ελέγχου είναι δυνατόν να αλλάξει η συμπεριφορά

του δυναμικού συστήματος. Κατά την διάρκεια παρατήρησης της εξέλιξης ενός δυναμικού συστήματος οι παράμετροι ελέγχου παραμένουν σταθερές.

Στο χώρο φάσεων, η κατάσταση του συστήματος σε μια δοσμένη χρονική στιγμή καθορίζεται από ένα σημείο. Το σημείο αυτό κινείται σε σχέση με το χρόνο, δημιουργώντας μια τροχιά στο χώρο φάσεων, με ταχύτητα που προσδιορίζεται από το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ της σχέσης (1.1). Κάθε σημείο στο χώρο των φάσεων διαγράφει μόνο μια τροχιά που είναι συνέπεια της ντετερμινιστικής φύσεως της περιγραφής του συστήματος. Από φυσική άποψη αυτό σημαίνει ότι αν κάποια χρονική στιγμή είναι γνωστή μια κατάσταση, τότε με ολοκλήρωση της σχέσης (1.1) γνωρίζουμε και το παρελθόν και το μέλλον.

Στην ειδική περίπτωση ενός σημειακού σωματιδίου η κατάσταση του περιγράφεται από την θέση του (τρεις χωρικές συντεταγμένες) και την ταχύτητα του (τρεις συντεταγμένες ταχύτητας) οπότε ο χώρος φάσεων είναι έξι διαστάσεων. Για ένα σωματίδιο που εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση ο χώρος φάσεων είναι δύο-διαστάσεων, με συντεταγμένες την θέση και την ταχύτητα.

1.1.2 Αυτόνομα και μη αυτόνομα δυναμικά συστήματα

Όταν το πεδίο $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ δεν εξαρτάται από τον χρόνο, τότε το δυναμικό σύστημα λέγεται αυτόνομο. Η τύπος του αυτόνομου συστήματος είναι της μορφής

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{F}(x, c) \quad (1.3)$$

Σε αυτή την περίπτωση οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι ανεξάρτητες του χρόνου. Επίσης μπορεί να αποδειχθεί ότι δύο τροχιές που αντιστοιχούν στην χρονική εξέλιξη δύο διαφορετικών αρχικών συνθηκών δεν τέμνονται στο χώρο των φάσεων (εκτός από την ειδική περίπτωση που οι τροχιές συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας για $t \rightarrow \infty$). Αυτό είναι μια αναπόφευκτη συνέπεια της ντετερμινιστικής φύσης της περιγραφής του συστήματος. Διαφορετικά για μια μόνο αρχική συνθήκη (το σημείο τομής) θα υπήρχαν δυο διαφορετικές τροχιές, που συ-

νεπάγεται ότι το σύστημα θα ήταν απρόβλεπτο (μη ντετερμινιστικό) στο σημείο τομής.

Όταν το πεδίο F είναι συνάρτηση του χρόνου το δυναμικό σύστημα λέγεται μη αυτόνομο και περιγράφεται από την εξίσωση (1.1). Σ' αυτή την περίπτωση είναι δυνατόν δύο διαφορετικές τροχιές που αντιστοιχούν σε διαφορετικές αρχικές συνθήκες να διέρχονται από το ίδιο σημείο στο χώρο φάσεων. Αν αυξήσουμε την διάσταση του χώρου φάσεων κατά ένα, θέτοντας το χρόνο ως μεταβλητή, έτσι ώστε οι συσχετισμένες να είναι $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t$ τότε το δυναμικό σύστημα μετασχηματίζεται σε αυτόνομο, και οι τροχιές πλέον δεν τέμνονται.

Όταν οι νόμοι που περιγράφουν ένα δυναμικό σύστημα είναι ένα σύνολο από διαφορικές εξισώσεις το σύστημα λέγεται ροή, γιατί η λύση είναι συνεχής στο χρόνο. Το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση (1.1) είναι τέτοιας μορφής. Όταν οι νόμοι είναι ένα σύνολο από εξισώσεις διαφορών με διακριτό χρόνο, το σύστημα λέγεται απεικόνιση και είναι της μορφής

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad (1.4)$$

1.1.3 Καταστάσεις ισορροπίας των δυναμικών συστημάτων

1.1.3.1 Γραμμικά δυναμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων

Ένα δυναμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων λέγεται γραμμικό όταν το διανυσματικό πεδίο F είναι γραμμικός συνδυασμός των μεταβλητών x_i ($i=1, \dots, n$). Ένα γραμμικό σύστημα γράφεται σε διανυσματική μορφή ως

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (1.5)$$

όπου A συμβολίζει τον σταθερό, μη ιδιάζοντα ($n \times n$) πίνακα των συντελεστών. Αν όλες οι n ιδιοτιμές λ_i του πίνακα A είναι διαφορετικές, τότε υπάρχουν n ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα y_i και η γενική λύση της εξίσωσης (1.5) μπορεί να εκφραστεί με το γραμμικό συνδιασμό

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \mathbf{y}_i \quad (1.6)$$

όπου οι n σταθερές C_i προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του συστήματος.

Η κατάσταση \mathbf{x}_s του συστήματος για την οποία ισχύει $\dot{\mathbf{x}}_s = 0$ λέγεται σημείο ισορροπίας και η μελέτη του είναι σημαντική από φυσική άποψη. Ένα σημείο ισορροπίας μπορεί να είναι ασυμπτωτικά σταθερό (καταβόθρα) ή ασταθές (πηγή) αν όλες οι τροχιές που βρίσκονται σε μια γειτονική περιοχή του \mathbf{x}_s έλκονται ή απωθούνται από το σημείο ισορροπίας.

Στην ειδική περίπτωση που ο χώρος φάσεων είναι δύο διαστάσεων η μορφή της κατάστασης ισορροπίας εξαρτάται από τις ιδιοτιμές λ_1, λ_2 του πίνακα \mathbf{A} . Η ταξινόμηση των δυνατών καταστάσεων ισορροπίας σε σχέση με τις ιδιοτιμές είναι:

A. Πραγματικές ιδιοτιμές

1. Άνισες ιδιοτιμές

1. Ομόσημες, θετικές για ασταθή κόμβο (unstable node)
2. Ομόσημες, αρνητικές για σταθερό κόμβο (stable node)
3. Ετερόσημες για σαγματικό σημείο (saddle point)

2. Ίσες ιδιοτιμές

1. Θετικές για ασταθές αστέρι (unstable (dicritical node or star))
2. Αρνητικές για σταθερό αστέρι (stable (dicritical node or star))

B. Μιγαδικές ιδιοτιμές ($\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm ib$)

1. Πραγματικό μέρος θετικό για ασταθή εστία (unstable focus)
2. Πραγματικό μέρος αρνητικό για σταθερή εστία (stable focus)
3. Πραγματικό μέρος μηδενικό για σημείο κορυφής (vortex point)

Στο σχήμα 1.1 δείχνονται τα φασικά πορτραίτα των καταστάσεων ισορροπίας όπως περιγράφηκαν πιο πάνω, ενώ στο σχήμα 1.2 δείχνονται φυσικά συστήματα και οι αντίστοιχες καταστάσεις ισορροπίας τους.

Για το γραμμικό σύστημα δύο μεταβλητών αποδεικνύεται ότι η κατάσταση ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά σταθερή αν και μόνον αν η ορίζουσα του πίνακα A είναι θετική και το ίχνος του (trace) αρνητικό. Σε κάθε άλλη περίπτωση η κατάσταση ισορροπίας είναι ασταθής.

1.1.3.2 Μη γραμμικά δυναμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων

Ένα δυναμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων λέγεται μη γραμμικό όταν το διανυσματικό πεδίο F είναι μη γραμμικός συνδυασμός των μεταβλητών x_i ($i=1, \dots, n$). Ένα μη γραμμικό σύστημα μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.7)$$

Για τα μη γραμμικά συστήματα με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δεν υπάρχουν γενικές μέθοδοι αναλυτικών λύσεων εκτός από ειδικές περιπτώσεις. Στην περίπτωση αυτή το ενδιαφέρον επικεντρώνεται περισσότερο στην ποιοτική παρά στην ποσοτική μελέτη του συστήματος, όπως για παράδειγμα την εύρεση των σημείων ισορροπίας, πού ορίζονται όπως και στα γραμμικά συστήματα. Αυτό γίνεται ειδικότερα φανερό αν θεωρήσουμε για παράδειγμα το πρόβλημα της ροής ενός υγρού γύρο από ένα σώμα. Είναι πιο σημαντικό να απαντήσουμε στην ερώτηση όπως που δημιουργούνται οι δύνες ή πότε η ροή γίνεται τύρβη, παρά να υπολογίσουμε την θέση και την ταχύτητα ενός ξεχωριστού σωματιδίου του υγρού.

Επιπλέον, ενδιαφερόμαστε αν η συμπεριφορά του συστήματος για $t \rightarrow \infty$, η οποία μπορεί να είναι μια κατάσταση ισορροπίας, μια περιοδική λύση ή ακόμα μια ανώμαλη κίνηση, είναι ευσταθής, όπως για παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε το ηλιακό μας σύστημα του οποίου η εξέλιξη για την περίπτωση $t \rightarrow \infty$, είναι μια πρόκληση για πολλούς φυσικούς και μαθηματικούς επιστήμονες.

Ο προσδιορισμός των καταστάσεων ισορροπίας x_s καθώς και η μορφή των τροχιών στην αντίστοιχη περιοχή δίνουν μια πρώτη γενική άποψη της λύσης του μη

γραμμικού συστήματος. Για τον λόγο στο χώρο φάσεων πλησίον του σημείου \mathbf{x}_s θεωρούμε ένα σημείο \mathbf{x} , τέτοιο ώστε:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_s + \mathbf{x}' \quad \text{με} \quad |\mathbf{x}'| \ll 1 \quad (1.8)$$

Αντικαθιστώντας την (1.8) στην (1.7) και δεδομένου ότι $\dot{\mathbf{x}}_s$ κατάσταση ισορροπίας καταλήγουμε στην μελέτη του γραμμικού συστήματος

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \mathbf{A}'\mathbf{x}' \quad (1.9)$$

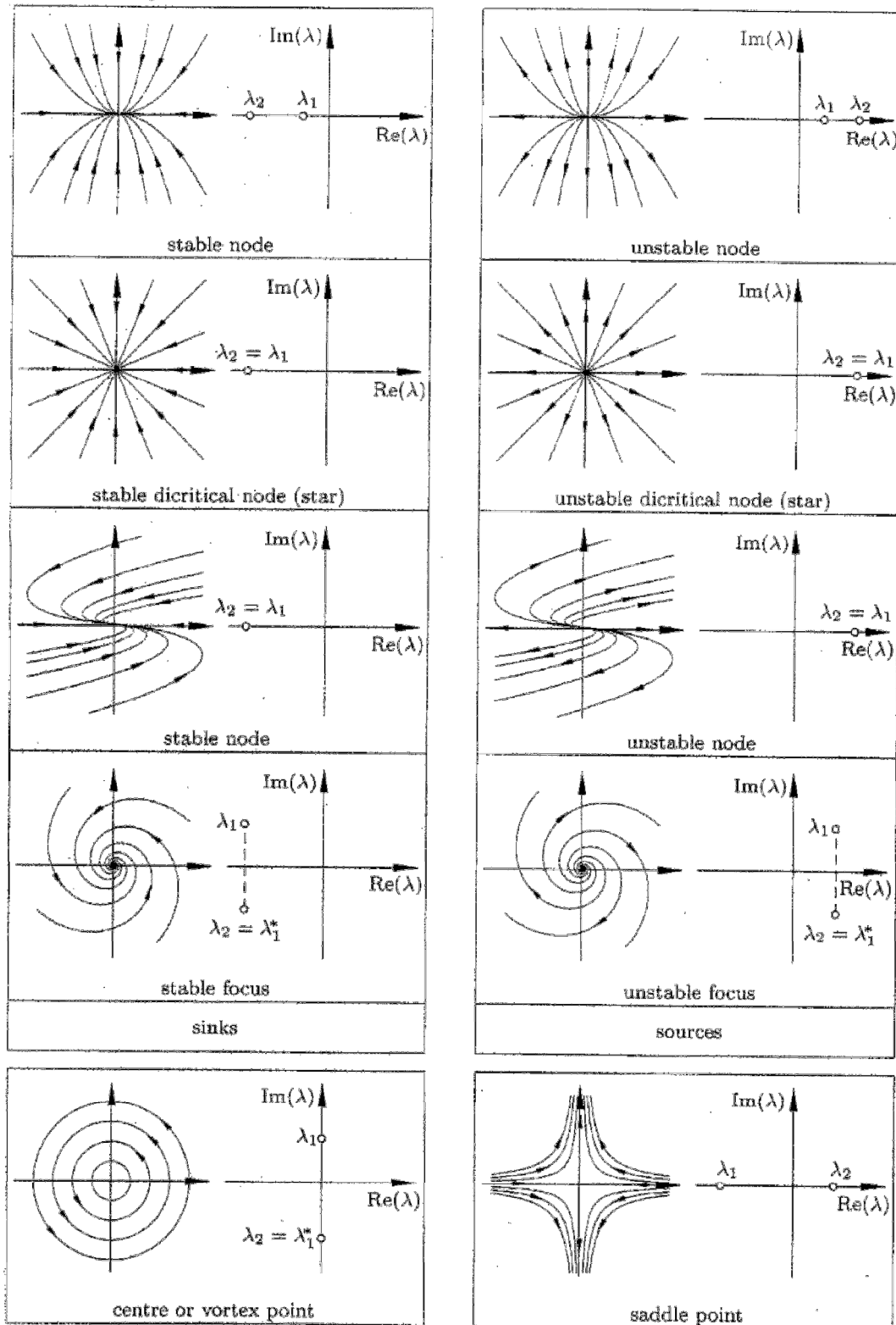
Είναι εύκολο να δειχτεί ότι ο πίνακας \mathbf{A}' ισούται με την Jacobian του διανυσματικού πεδίου \mathbf{F} εκτιμώμενη στην κατάσταση ισορροπίας \mathbf{x}_s . Οπότε οι ιδιοτιμές του \mathbf{A}' καθορίζουν την μορφή ισορροπίας (σταθερή ή ασταθής) στην περιοχή του σημείου ισορροπίας.

1.1.3.3 Απεικονίσεις

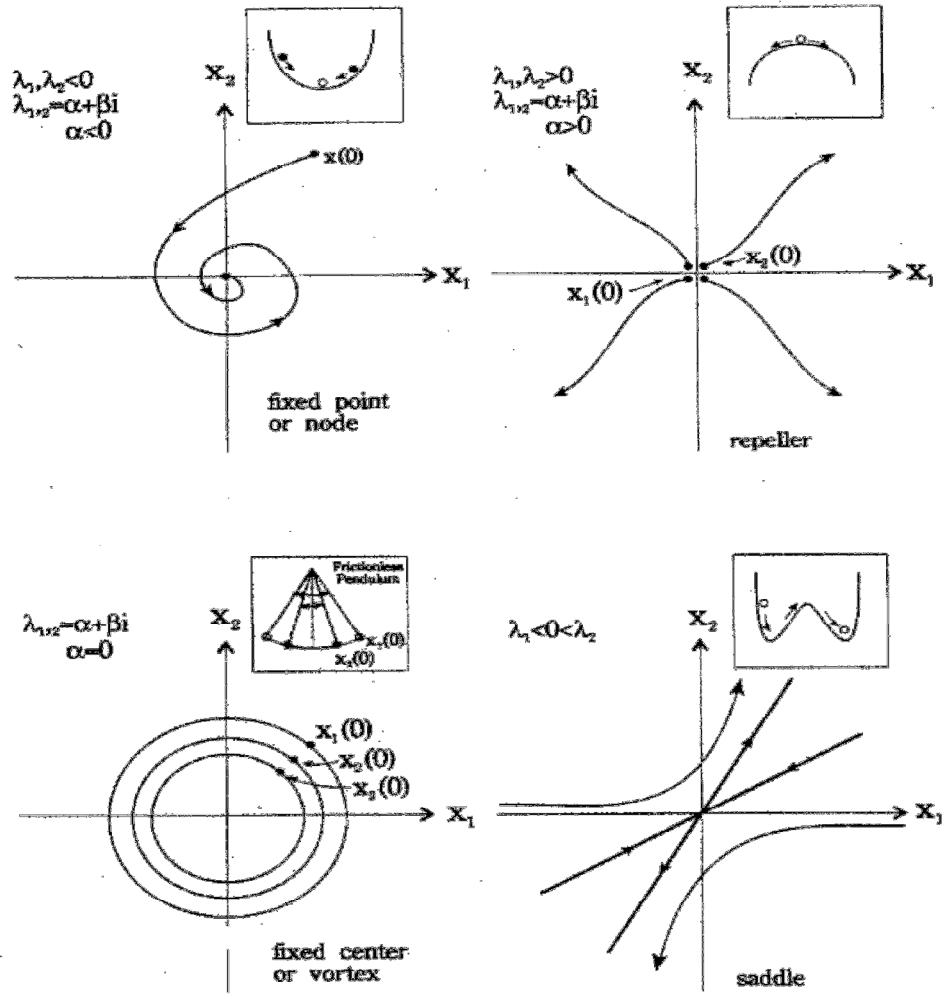
Πολλά δυναμικά συστήματα περιγράφονται από ένα σύνολο εξισώσεων διαφορών $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$, που αναφέρονται και ως απεικονίσεις [50, 123]. Για τα σημεία ισορροπίας $\bar{\mathbf{x}}$ ισχύει $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k = \bar{\mathbf{x}}$, οπότε μπορούμε να τα υπολογίσουμε από την εξίσωση ισορροπίας

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (1.10)$$

Για να προσδιορίσουμε το είδος της κατάστασης ισορροπίας, μελετάμε την χρονική εξέλιξη μικρών διαταραχών γύρω από αυτά, όπως και στην περίπτωση των ρών και καταλήγουμε σε ανάλογα συμπεράσματα.



Σχήμα 1.1 Επισκόπηση των καταστάσεων ισορροπίας στο φασικό χώρο δύο διαστάσεων, φασικά πορτραίτα και ιδιοτιμές.



Σχήμα 1.2 Φυσικά συστήματα (εντός των πλαισίων) και τα αντίστοιχα φασικά πορτραίτα.

Κεφάλαιο 2^ο

Θεωρία Του Χάους

2.1 Το Πέρασμα από την Αιτιοκρατία στο Χάος

Τον 17^ο, 18^ο και 19^ο αιώνα οι επιτυχίες των μαθηματικών στην περιγραφή φυσικών φαινομένων πραγματοποιούνται με εντυπωσιακούς ρυθμούς. Η ελαστικότητα εξηγείται αποτελεσματικά από τους Laplace και Poisson, η Υδροδυναμική και η Ηλεκτροστατική ενοποιούνται μέσω της της μαθηματικής θεωρίας Πεδίων δυναμικού και ο ηλεκτρομαγνητισμός παρουσιάζεται με άψογη κομψότητα από το ενιαίο πλαίσιο των εξισώσεων του Maxwell. Έτσι εδραιώνεται μια μηχανιστική αντίληψη για την ερμηνεία της φύσης που κυριάρχησε μέχρι το τέλος του 19^{ου} αιώνα, οπότε εμφανίστηκαν στο προσκήνιο οι θεωρίες του Boltzmann για τη χρονική εξέλιξη των φυσικών συστημάτων όπως τα αέρια που αποτελούνται από τρισεκατομμύρια τρισεκατομμυρίων μόρια ή άτομα.

Ο αρχικός στόχος του Boltzmann ήταν να εξηγήσει μέσω των νόμων της Κλασικής Μηχανικής πως είναι δυνατόν ένα αέριο να φτάνει σε μία κατάσταση ισορροπίας, όπου τα μόρια καταλαμβάνουν ομοιογενώς όλο το διαθέσιμο χώρο, σε μια κατανομή πλήρους μοριακού χάους. Δυστυχώς τα επιχειρήματα του συνάντησαν σοβαρές αντιρρήσεις από πολλούς φυσικούς της εποχής του, τις οποίες θα μπορούσαμε να συνοψίσουμε ως εξής:

- Αν η ισορροπία είναι το μοιραίο επακόλουθο της δυναμικής ενός αερίου, τότε αν αντιστρέψαμε τις ταχύτητες όλων των μορίων, αυτά θα έπρεπε να κινηθούν πάλι προς την ομοιογενή κατανομή. Όμως οι εξισώσεις Της Κλασικής Μηχανικής παραμένουν ίδιες όταν ο χρόνος γίνει αρνητικός και έτσι μία αλλαγή ταχυτήτων σαν αυτή που αναφέραμε θα οδηγούσε τα μόρια πίσω στην αρχική τους κατάσταση αντί για την ισορροπία. Μάλιστα η ιδιότητα αυτή της αντιστρεψιμότητας δείχνει ότι οι εξισώσεις δεν διακρίνουν μεταξύ της θετικής και αρνητικής φοράς του χρόνου και επομένως δεν μπορούν να ξεχωρίσουν το μέλλον απ' το παρελθόν όπως απαιτούσε η θεώρηση του Boltzmann.
- Μία άλλη σοβαρή αντίρρηση βασίστηκε στο γεγονός ότι οι νόμοι της Μηχανικής υποχρεώνουν ένα αέριο που βρίσκεται σε ένα κλειστό χώρο να επιστρέφει – μετά από μεγάλα χρονικά διαστήματα- όσο κοντά θέλουμε στην αρχική του κατάσταση, πράγμα που επίσης αποκλείει την τελική του μετάβαση σε μια σταθερή ισορροπία, όπως ήθελε να αποδείξει ο Boltzmann.

Έτσι η επιστήμη της φυσικής εισήλθε στον 20^ο αιώνα συνοδευόμενη από ένα πολύ σοβαρό ερώτημα Πως είναι δυνατόν να συμβιβάσουμε τους νόμους της της Θερμοδυναμικής και της Κλασικής Μηχανικής; Πως Μεταβαίνουμε από την αντιστρέψιμη δυναμική των 2-3 σωμάτων στη στατιστική δυναμική των δισεκατομμυρίων μορίων ενός αερίου;

Ουσιαστικά η απάντηση στο ερώτημα αυτό είχε δοθεί λίγο πριν την εκπνοή του 19^{ου} αιώνα από τον Γάλλο Μαθηματικό Henri Poincare. Ο Poincare προσπαθώντας να λύσει το πρόβλημα των τριών σωμάτων , Γη, Ήλιος, Σελήνη που τέθηκε σε ένα διαγωνισμό από τον βασιλιά Όσκαρ της Σουηδίας ανακάλυψε κάτι πραγματικά εντυπωσιακό: ότι δηλαδή οι εξισώσεις της κλασικής Μηχανικής για το πρόβλημα αυτό ήταν αδύνατον να λυθούν αναλυτικά με τις ως τότε γνωστές μαθηματικές μεθόδους!

Η ανακάλυψη του Poincare ήταν πολύ πιο σημαντική από την απόδειξη της μη επιλυσιμότητας του προβλήματος των 3 σωμάτων: το συγκλονιστικό αποτέλεσμα που απέδειξε ο Poincare ήταν ότι και στα πιο απλα προβλήματα της μηχανικής και της Αστρονομίας υπάρχουν λύσεις (ή τροχιές) που εξαρτώνται τόσο ευαίσθητα από τις αρχικές τους συνθήκες ώστε η εξέλιξη τους στο χρόνο να είναι για μεγάλα διαστήματα εντελώς απρόβλεπτες.

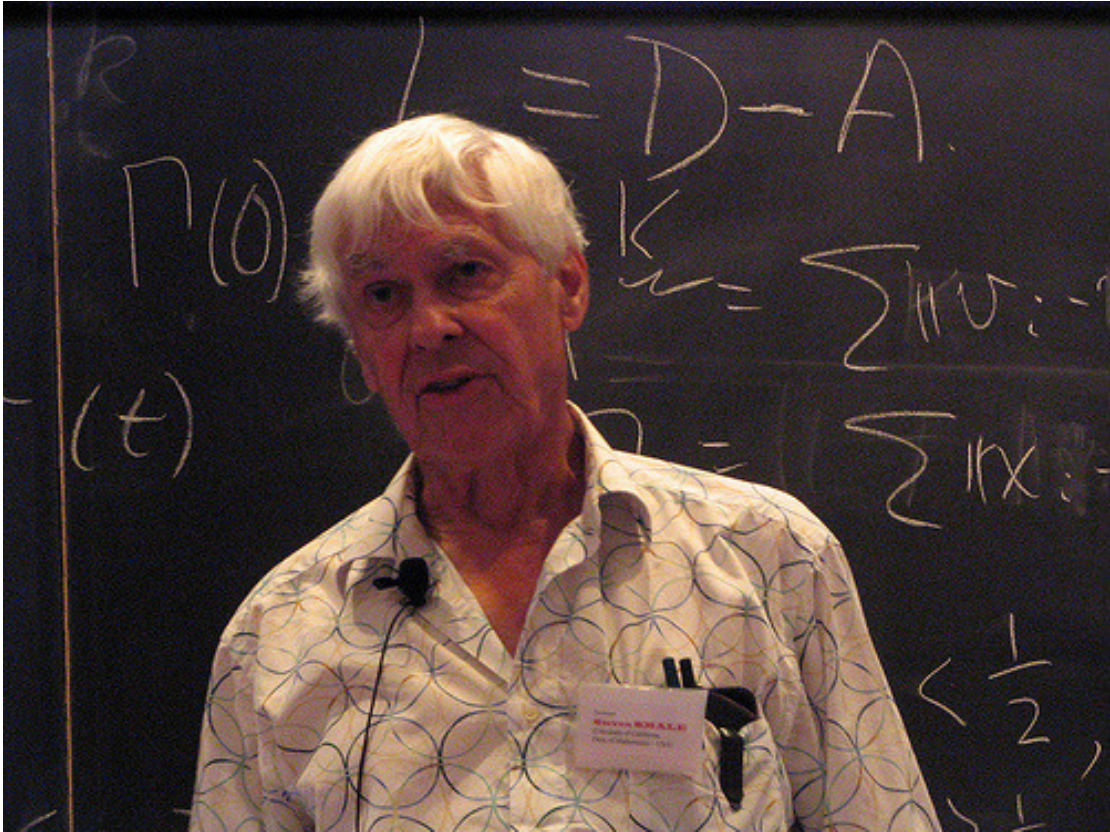
Με δύο λόγια λοιπόν, ακόμα και τα απλούστερα ντετερμινιστικά συστήματα της Φυσικής που περιγράφονται από τις μη γραμμικές εξισώσεις και κινούνται σε ένα χώρο τριών τουλάχιστον διαστάσεων, έχουν περιοχές όπου οι τροχιές τους είναι τόσο ασταθείς, ώστε ακόμα και ελάχιστες μετατοπίσεις της αρχικής τους κατάστασης να οδηγούν σε τεράστιες αλλαγές στην εξέλιξη της κίνησης. Οι περιοχές αυτές, 70 χρόνια αργότερα, ονομάστηκαν χαοτικές και η έντονη αστάθεια που τις χαρακτηρίζει, χάος.



Εικόνα 2.1 Henri Poincare

Έπρεπε λοιπόν να περάσουν πολλά χρόνια για να γίνουν αποδεκτές οι ανακαλύψεις του Poincare. Συγκεκριμένα περίπου στα 1960 ο μεγάλος Αμερικανός τοπολόγος S. Smale απέδειξε χρησιμοποιώντας απλά γεωμετρικά παραδείγματα,

ότι ένα μεγάλο πλήθος τρισδιάστατων δυναμικών συστημάτων εμπεριέχουν λύσεις με ιδιότητες τόσο τυχαίες, όσο και η ρίψη ενός νομίσματος ή το παιχνίδι της ρουλέτας.



Εικόνα 2.2 S. Smale

Εν τω μεταξύ ο Αμερικανός μετεωρολόγος E. Lorentz δημοσίευσε μία πολύ σημαντική εργασία στην οποία περιέγραφε την εκπληκτική διαπίστωση ότι οι λύσεις ενός απλού ντετερμινιστικού μοντέλου τριών διαφορικών εξισώσεων, αν και διακρίνονταν από την εξαιρετικά ευαίσθητη εξάρτησή τους από τις αρχικές συνθήκες που αναφέραμε πιο πάνω, τελικά συγκεντρωνόντουσαν όλες σε ένα πολύπλοκο σύνολο στο χώρο των φάσεων που ονομάστηκε παράξενος ελκυστής.

Ο ελκυστής του Lorentz παρουσιάζει μία τόσο σύνθετη δομή υπό συνεχείς μεγεθύνσεις, που δίνει την εντύπωση ότι εκτείνεται πέραν των δύο διαστάσεων χωρίς όμως να γεμίζει ένα τμήμα του τρισδιάστατου χώρου.



Εικόνα 2.3 Edward Norton Lorentz

2.2 Γενικά στοιχεία της Θεωρίας του Χάους

Η **Θεωρία του Χάους** είναι ένας τομέας στα μαθηματικά, με διάφορες εφαρμογές σε κλάδους επιστημών όπως η φυσική, η μηχανολογία, τα οικονομικά και η βιολογία. Η θεωρία του Χάους μελετά τη συμπεριφορά ορισμένων μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, που είναι ιδιαίτερα ευαίσθητα στις αρχικές συνθήκες, ένα αποτέλεσμα το οποίο ευρέως αναφέρεται ως το φαινόμενο της πεταλούδας. Μικρές διαφορές στις αρχικές συνθήκες (όπως αυτές που οφείλονται σε σφάλματα στρογγυλοποίησης σε αριθμητικούς υπολογισμούς) αποδίδουν πολύ διαφορετικά αποτελέσματα για τα δυναμικά συστήματα, καθιστώντας τη μακροπρόθεσμη πρόβλεψη αδύνατη σε γενικές γραμμές. Αυτό συμβαίνει παρ' όλο που αυτά τα συστήματα είναι αιτιοκρατικά ("ντετερμινιστικά"), πράγμα που σημαίνει ότι η μελλοντική συμπεριφορά τους καθορίζεται πλήρως από τις αρχικές συνθήκες τους, χωρίς να εμπλέκονται τυχαίες παράμετροι. Με άλλα λόγια, η ντετερμινιστική φύση αυτών των συστημάτων δεν τα κάνει προβλέψιμα. Αυτή η συμπεριφορά είναι γνωστή ως ντετερμινιστικό χάος, ή απλά χάος. Αυτό συνοψίζεται από τον Έντουαρντ Λόρεντζ ως εξής:

Χάος: Όταν το παρόν καθορίζει το μέλλον, αλλά η προσέγγιση του παρόντος δεν προσδιορίζει κατά προσέγγιση το μέλλον.

Χαοτική συμπεριφορά μπορεί να παρατηρηθεί σε πολλά φυσικά συστήματα, όπως ο καιρός, η ατμόσφαιρα, το ηλιακό σύστημα, οι τεκτονικές πλάκες, τα οικονομικά συστήματα και η εξέλιξη (μεταβολή) των πληθυσμών.

Επεξήγηση μιας τέτοιας συμπεριφοράς μπορεί να επιδιωχθεί μέσω της ανάλυσης ενός χαοτικού μαθηματικού μοντέλου, ή μέσω αναλυτικών τεχνικών όπως recurrence plots (οικόπεδα υποτροπής) και χάρτες Πουανκαρέ.

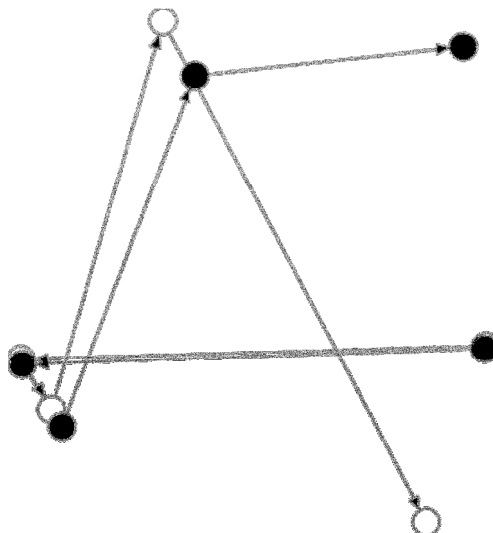
Τα συστήματα που παρουσιάζουν μαθηματικό χάος είναι ντετερμινιστικά και επομένως εύτακτα υπό μια έννοια. Αυτή η τεχνική χρήση του όρου "χάος" διαφωνεί με την καθομιλουμένη, στην οποία το χάος υποδηλώνει την παντελή έλλειψη τάξης. Όταν λέγεται ότι η θεωρία του χάους μελετά ντετερμινιστικά συστήματα, είναι απαραίτητο να αναφέρεται και το συγγενές πεδίο της φυσικής που λέγεται κβαντική θεωρία του Χάους και μελετά μη αιτιοκρατικά συστήματα σύμφωνα με τους νόμους της κβαντομηχανικής.

2.3 Χαοτική δυναμική

Στην γενική χρήση, "χάος" σημαίνει "μια κατάσταση διαταραχής". Ωστόσο, στην θεωρία του χάους, ο όρος αυτός ορίζεται με μεγαλύτερη ακρίβεια. Αν και δεν υπάρχει καθολικά αποδεκτός μαθηματικός ορισμός του χάους, ένας κοινά αποδεκτός ορισμός (Devaney) λέει ότι, για να χαρακτηριστεί η συμπεριφορά ενός συστήματος ως χαοτική, πρέπει να έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. πρέπει να παρουσιάζει *ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες*
2. πρέπει να είναι *τοπολογικά μεταβατικό*
3. πρέπει να εμφανίζει ένα *πυκνό σύνολο (dense set)* που αποτελείται από όλες τις περιοδικές τροχιές του συστήματος

Η απαίτηση για ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες συνεπάγεται ότι υπάρχει μια σειρά από αρχικές συνθήκες με θετικό μέτρο που δεν συγκλίνουν σε μία περίοδο οποιουδήποτε μήκους.



Σχήμα 2.1 Εδώ δύο σειρές τιμών x και y , με μια μικρή αρχική διαφορά, αποκλίνουν σημαντικά με την πάροδο του χρόνου διότι το σύστημα εμφανίζει ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες.

Ο χάρτης ορίζεται από $x \rightarrow 4x(1-x)$ και $y \rightarrow x+y$ όταν $x+y < 1$ (αλλιώς $x+y-1$)

2.3.1 Ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες

Ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες σημαίνει ότι το κάθε σημείο σε ένα τέτοιο σύστημα είναι αυθαίρετα στενά προσεγγίσιμο από άλλα σημεία με σημαντικά διαφορετικές μελλοντικές τροχιές. Έτσι, μια αυθαίρετα μικρή διαταραχή της τρέχουσας τροχιάς μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικά διαφορετική μελλοντική συμπεριφορά. Ωστόσο, έχει αποδειχθεί ότι οι δύο τελευταίες ιδιότητες στην παραπάνω λίστα συνεπάγονται πράγματι ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες και εάν η προσοχή περιοριστεί στα χρονικά διαστήματα τότε η δεύτερη ιδιότητα υποδηλώνει τις άλλες δύο (ένας εναλλακτικός, και γενικά ασθενέστερος, ορισμός του χάους χρησιμοποιεί μόνο τις πρώτες δύο ιδιότητες της παραπάνω λίστας). Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι η πρακτικά πιο σημαντική προϋπόθεση, αυτή της ευαισθησίας στις αρχικές συνθήκες, είναι στην ουσία περιττή στον ορισμό, αφού υπονοείται από δύο (ή για τα χρονικά διαστήματα, μία) καθαρά τοπογραφικές συνθήκες, οι οποίες είναι ως εκ τούτου μεγαλύτερου ενδιαφέροντος για τους μαθηματικούς.

Η ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες είναι γνωστή ως το "φαινόμενο της πεταλούδας", που ονομάζεται έτσι εξαιτίας της εργασίας που παρέδωσε ο Έντουαρντ Λόρεντζ το 1972 στην Αμερικανική Ένωση για την Πρόοδο της Επιστήμης (American Association for the Advancement of Science) στην Ουάσιγκτον, Π.Κ., με τίτλο "Προβλεψιμότητα: Μήπως το χτύπημα των φτερών μιας πεταλούδας στη Βραζιλία, μπορεί να προκαλέσει έναν τυφώνα στο Τέξας;". Το χτύπημα των φτερών αντιπροσωπεύει μια μικρή αλλαγή στην αρχική κατάσταση του συστήματος, η οποία προκαλεί μια αλυσίδα γεγονότων που οδηγούν σε μεγάλης κλίμακας φαινόμενα. Αν δεν είχε χτυπήσει τα φτερά της η πεταλούδα, η τροχιά του συστήματος θα μπορούσε να ήταν πολύ διαφορετική

Μια συνέπεια της ευαισθησίας στις αρχικές συνθήκες είναι ότι αν αρχίσουμε με μόνο μια πεπερασμένη ποσότητα πληροφοριών σχετικά με το σύστημα (όπως γίνεται συνήθως στην πράξη), τότε, πέρα από ένα ορισμένο χρονικό διάστημα, το σύστημα δεν θα είναι πια προβλέψιμο. Αυτό είναι πλέον οικείο στην πρόβλεψη του καιρού, η οποία είναι γενικώς δυνατή μόνο περίπου μια εβδομάδα πριν.

Ο εκθέτης Lyapunov χαρακτηρίζει την έκταση της ευαισθησίας στις αρχικές συνθήκες. Ποσοτικώς, δύο τροχιές εντός του χώρου φάσης με αρχικό διαχωρισμό δZ_0 αποκλίνουν

$$|\delta Z(t)| \approx e^{\lambda t} |\delta Z_0| \quad (2.1)$$

όπου λ είναι ο εκθέτης Lyapunov. Ο ρυθμός διαχωρισμού μπορεί να είναι διαφορετικός για διαφορετικούς προσανατολισμούς του αρχικού φορέα διαχωρισμού. Έτσι, υπάρχει ένα ολόκληρο φάσμα από εκθέτες Lyapunov - ο αριθμός των οποίων είναι ίσος με τον αριθμό των διαστάσεων του χώρου φάσης. Είναι σύνηθες να αναφέρεται μόνο ο μεγαλύτερος, δηλαδή ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov (ΜΕΛ), διότι αυτός καθορίζει τη συνολική προβλεψιμότητα του συστήματος. Ένας θετικός μέγιστος εκθέτης Lyapunov συνήθως λαμβάνεται ως ένδειξη ότι το σύστημα είναι χαοτικό.

2.3.2 Τοπολογική Μεταβατικότητα

Τοπολογική μεταβατικότητα (ή τοπολογική ανάμειξη), σημαίνει ότι το σύστημα θα εξελιχθεί με την πάροδο του χρόνου, έτσι ώστε κάθε συγκεκριμένη περιοχή ή ανοιχτό σύνολο του χώρου φάσης τελικά θα συμπίπτει με οποιαδήποτε άλλη περιοχή. Αυτή η μαθηματική έννοια της "ανάμειξης" αντιστοιχεί στην κοινή διαίσθηση, και η ανάμειξη των έγχρωμων βαφών ή υγρών είναι ένα παράδειγμα ενός χαοτικού συστήματος.

Η τοπολογική ανάμειξη συχνά παραλείπεται από διαδομένες περιγραφές του χάους, που εξισώνουν το χάος με την ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες. Ωστόσο, η ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες δεν δίνει από μόνη της το χάος. Για παράδειγμα, σκεφτείτε το απλό σύστημα δυναμικών που παράγεται διπλασιάζοντας επανειλημμένα την αρχική τιμή. Αυτό το σύστημα έχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες παντού, δεδομένου ότι κάθε ζεύγος κοντινών σημείων τελικά θα διαχωριστεί διεξοδικά. Ωστόσο, αυτό το παράδειγμα δεν έχει τοπολογική ανάμειξη, και ως εκ τούτου δεν έχει κανένα χάος. Πράγματι, έχει εξαιρετικά απλή συμπεριφορά: όλα τα σημεία, εκτός από το 0 θα τείνουν προς το θετικό ή αρνητικό άπειρο.

2.3.3 Πυκνότητα των περιοδικών τροχών

Η πυκνότητα των περιοδικών τροχών σημαίνει ότι κάθε σημείο στο χώρο προσεγγίζεται αυθαίρετα στενά από περιοδικές τροχιές. Η μονοδιάστατη λογιστική απεικόνιση που ορίζεται από $x \rightarrow 4x(1-x)$ είναι ένα από τα απλούστερα συστήματα με πυκνότητα των περιοδικών τροχών. Για παράδειγμα, $\frac{5-\sqrt{5}}{8} \rightarrow \frac{5+\sqrt{5}}{8} \rightarrow \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ (ή περίπου $0,3454915 \rightarrow 0,9045085 \rightarrow 0,3454915$) είναι μία (ασταθής) τροχιά περιόδου 2, και παρόμοιες τροχιές υπάρχουν για περιόδους 4, 8, 16, κλπ. (μάλιστα, για όλες τις περιόδους που καθορίζονται από το θεώρημα του Sharkovskii).

Το θεώρημα Sharkovskii είναι η βάση της απόδειξης των Li και Yorke (1975) ότι κάθε μονοδιάστατο σύστημα το οποίο παρουσιάζει τακτικό κύκλο της περιόδου 3, θα εμφανίσει επίσης τακτικούς κύκλους για κάθε άλλο μήκος περιόδου, καθώς επείσης και εντελώς χαοτικές τροχιές.

2.3.4 Ελκυστές

Ένας τρόπος να παρουσιάσουμε οπτικά την χαοτική κίνηση ή οποιαδήποτε άλλη κίνηση, είναι η κατασκευή ενός διαγράμματος φάσης της κίνησης. Σε ένα τέτοιο διάγραμμα υπεισέρχεται σιωπηρά ο χρόνος και σε κάθε άξονα αναπαρίσταται μια μεταβλητή της κατάστασης. Για παράδειγμα, θα μπορούσε κάποιος να αναπαραστήσει την θέση ενός εκκρεμούς σε σχέση με την ταχύτητά του. Ένα εκκρεμές σε ακινησία θα σχεδιαστεί ως ένα σημείο και ένα σε περιοδική κίνηση θα σχεδιαστεί ως απλή κλειστή καμπύλη. Όταν ένα τέτοιο σχέδιο σχηματίζει κλειστή καμπύλη, η καμπύλη λέγεται τροχιά. Το εκκρεμές μπορεί να παρουσιάσει άπειρες τέτοιες τροχιές. Συχνά τα διαγράμματα φάσης αποκαλύπτουν ότι στην πλειοψηφία τους οι τροχιές καταλήγουν να πλησιάζουν ένα κοινό όριο. Το σύστημα τελικά εκτελεί την ίδια κίνηση για όλες τις αρχικές καταστάσεις σε μια περιοχή γύρω από την κίνηση, σχεδόν σαν να έλκεται το σύστημα σε αυτή την κίνηση. Μια τέτοια ελκυστική κίνηση καλείται ελκυστής του συστήματος.

2.3.5 Παράξενοι Ελκυστές

Μερικά δυναμικά συστήματα, όπως η μονοδιάστατη λογιστική απεικόνιση που ορίζεται από $x \rightarrow 4x(1-x)$, είναι χαοτικά παντού, αλλά σε πολλές περιπτώσεις η χαοτική συμπεριφορά παρουσιάζεται μόνο σε ένα υποσύνολο του χώρου φάσεων. Οι περιπτώσεις μεγαλύτερου ενδιαφέροντος προκύπτουν όταν η χαοτική συμπεριφορά λαμβάνει χώρα πάνω σε ένα ελκυστή. Σε αυτή την περίπτωση ένα μεγάλο μέρος των αρχικών συνθηκών θα οδηγήσει σε τροχιές που συγκλίνουν σε αυτή την χαοτική περιοχή.

Ένας εύκολος τρόπος για να απεικονιστεί ένας χαοτικός ελκυστής είναι ξεκινώντας με ένα σημείο στη λεκάνη της έλξης του ελκυστή και συνεχίζοντας με τον απλό σχεδιασμό της μετέπειτα τροχιάς του. Λόγω της κατάστασης της τοπολογικής μεταβατικότητας, αυτό είναι πιθανό να παράγει μια εικόνα ολόκληρου του τελικού ελκυστή, και μάλιστα και οι δύο τροχιές που απεικονίζονται στα δεξιά δίνουν μια εικόνα του γενικού σχήματος του ελκυστή Λόρεντζ. Αυτός ο ελκυστής είναι αποτέλεσμα ενός απλού τρισδιάστατου μοντέλου του καιρικού συστήματος του Λόρεντζ. Ο ελκυστής Λόρεντζ είναι ίσως ένα από τα πιο γνωστά χαοτικά διαγράμματα συστήματος, πιθανώς επειδή δεν ήταν απλά ένα από τα πρώτα, αλλά είναι επίσης ένα από τα πιο πολύπλοκα και ως εκ τούτου οδηγεί σε ένα πολύ ενδιαφέρον μοτίβο που μοιάζει με τα φτερά μιας πεταλούδας.

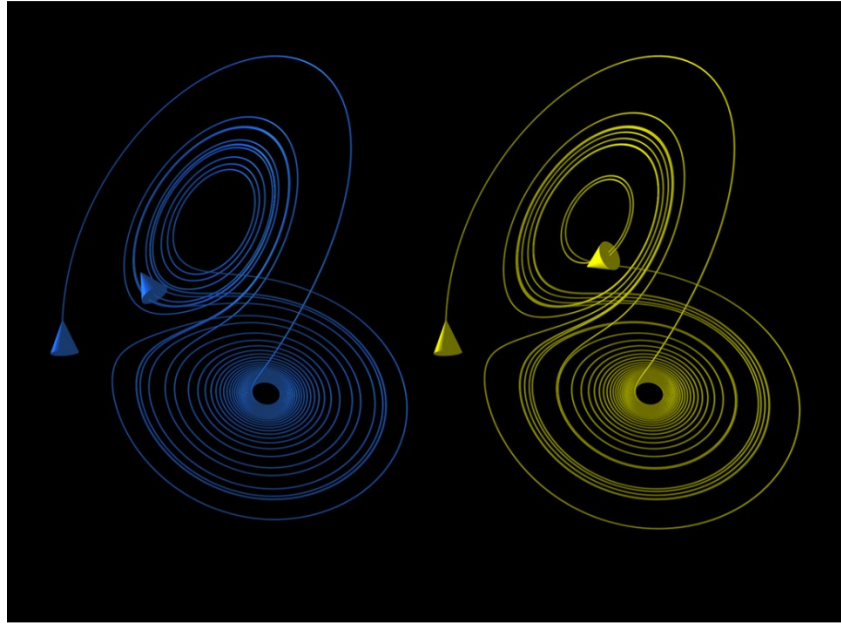
Σε αντίθεση με τους ελκυστές σταθερού σημείου και τους οριακούς κύκλους, οι ελκυστές που προκύπτουν από τα χαοτικά συστήματα, που είναι γνωστοί ως παράξενοι ελκυστές, έχουν μεγάλη λεπτομέρεια και πολυπλοκότητα. Παράξενοι ελκυστές συμβαίνουν και στα συνεχή δυναμικά συστήματα (όπως το σύστημα Λόρεντζ) και σε ορισμένα διακριτά συστήματα (όπως ο χάρτης Hénon). Άλλα διακριτά δυναμικά συστήματα έχουν μία απωθητική δομή που ονομάζεται σύνολο Τζούλια που διαμορφώνεται στο όριο μεταξύ των λεκανών έλξης των σταθερών σημείων - τα σύνολα Τζούλια μπορούν να θεωρηθούν ως παράξενοι ελκυστές. Τόσο οι παράξενοι ελκυστές όσο και τα σύνολα Τζούλια έχουν συνήθως μια φράκταλδομή, και μία μορφοκλασματική διάσταση μπορεί να υπολογιστεί για αυτούς.

2.3.6 Ελάχιστη πολυπλοκότητα ενός χαοτικού συστήματος

Διακριτά χαοτικά συστήματα, όπως η λογιστική απεικόνιση, μπορούν να εμφανίζουν περίεργους ελκυστές ανεξαρτήτως του αριθμού των διαστάσεων τους. Αντίθετα, για τα συνεχή δυναμικά συστήματα, το θεώρημα Πουανκαρέ-Μπέντιξον (Poincaré-Bendixson) δείχνει ότι ένας παράξενος ελκυστής μπορεί να προκύψει μόνο σε τρεις ή περισσότερες διαστάσεις. Γραμμικά συστήματα πεπερασμένων διαστάσεων δεν είναι χαοτικά για να εμφανίσει ένα δυναμικό σύστημα χαοτική συμπεριφορά πρέπει να είναι είτε μη γραμμικό είτε απειροδιάστατο.

Το θεώρημα Πουανκαρέ-Μπέντιξον δηλώνει ότι μία δισδιάστατο διαφορική εξίσωση έχει πολύ συνηθισμένη συμπεριφορά. Ο ελκυστής Λόρεντζ που συζητήθηκε ανωτέρω παράγεται από ένα σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων με συνολικά επτά όρους στη δεξιά πλευρά, πέντε από τους οποίους είναι γραμμικοί όροι και δύο από τους οποίους είναι τετραγωνικοί (και συνεπώς μη γραμμικοί). Ένας άλλος πολύ γνωστός χαοτικός ελκυστής παράγεται από τις εξισώσεις Rossler με επτά όρους στη δεξιά πλευρά, μόνο ένας από τους οποίους είναι (τετραγωνικά) μη γραμμικός. Ο Sprott βρήκε ένα τρισδιάστατο σύστημα με μόλις πέντε όρους στη δεξιά πλευρά, και με έναν μόνο τετραγωνικό μη γραμμικό, το οποίο παρουσιάζει το χάος για ορισμένες τιμές των παραμέτρων. Οι Zhang και Heidel έδειξαν ότι, τουλάχιστον για dissipative και συντηρητικά τετραγωνικά συστήματα, τρισδιάστατα τετραγωνικά συστήματα με μόνο τρεις ή τέσσερις όρους στη δεξιά πλευρά δεν μπορούν να εμφανίζουν χαοτική συμπεριφορά. Αυτό συμβαίνει διότι, με απλά λόγια, οι λύσεις σε τέτοια συστήματα είναι ασυμπτωτικές σε μία δισδιάστατη επιφάνεια και ως εκ τούτου οι λύσεις συμπεριφέρονται καλά.

Ενώ το θεώρημα Πουανκαρέ-Μπέντιξον σημαίνει ότι ένα συνεχές δυναμικό σύστημα στο Ευκλείδειο επίπεδο δεν μπορεί να είναι χαοτικό, συνεχή συστήματα δύο διαστάσεων με μη-Ευκλείδεια γεωμετρία μπορεί να εμφανίζουν χαοτική συμπεριφορά. Ίσως απρόσμενα, το χάος μπορεί να προκύψει και σε γραμμικά συστήματα, υπό την προϋπόθεση ότι είναι απειροδιάστατα. Μια θεωρία του γραμμικού χάους αναπτύσσεται σε έναν κλάδο της μαθηματικής ανάλυσης γνωστό ως συναρτησιακή ανάλυση.



Σχημα 2.2 Ο ελκυστής Λόρεντζ παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά. Οι δύο αυτές πλοκές αποδεικνύουν την ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες εντός της περιοχής του χώρου φάσεων που καταλαμβάνεται από τον ελκυστή.

2.4 Η Διάσκριση Τυχαίων Από Χαοτικών Δεδομένων

Μπορεί να είναι δύσκολο να ειπωθεί από τα δεδομένα εάν μία φυσική ή άλλη διαδικασία που παρατηρείται είναι τυχαία ή χαοτική, διότι στην πράξη οι χρονοσειρές δεν αποτελούνται από καθαρό «σήμα». Πάντα θα υπάρχει κάποια μορφή διαβρωτικού θορύβου, ακόμη και αν αυτό είναι αποτέλεσμα στρογγυλοποίησης ή σφάλματος αποκοπής. Έτσι, οποιαδήποτε πραγματική χρονοσειρά, ακόμη και αν είναι ως επί το πλείστον ντετερμινιστική, θα περιέχει κάποια τυχειότητα.

Όλες οι μέθοδοι για τη διάκριση αιτιοκρατικών και στοχαστικών διαδικασιών βασίζονται στο γεγονός ότι ένα ντετερμινιστικό σύστημα εξελίσσεται πάντα με τον ίδιο τρόπο από ένα δεδομένο σημείο εκκίνησης. Έτσι, για να εξεταστεί αν μία χρονοσειρά είναι αιτιοκρατική, μπορεί κανείς να:

- Να επιλέξει μια κατάσταση δοκιμής
- Να αναζητήσει τις χρονοσειρές για παρόμοιες ή «κοντινές» κατάστασεις και
- Να συγκρίνει τις αντίστοιχες χρονικές τους εξελίξεις.

Ορίστε το σφάλμα ως τη διαφορά μεταξύ της εξέλιξης του χρόνου της «δοκιμαστικής» κατάστασης και της χρονικής εξέλιξης της γειτονικής κατάστασης. Ένα αιτιοκρατικό σύστημα θα έχει ένα σφάλμα που είτε παραμένει μικρό (σταθερή, κανονική λύση) ή αυξάνεται εκθετικά με το χρόνο (το χάος). Ένα στοχαστικό σύστημα θα έχει ένα τυχαίως καταναμημένο σφάλμα.

Ουσιαστικά όλες οι μετρήσεις του ντετερμινισμού που λαμβάνονται από χρονοσειρές βασίζονται στην εύρεση των πιο κοντινών καταστάσεων σε μια συγκεκριμένη «δοκιμαστική» κατάσταση (π.χ., διάσταση συσχέτισης, εκθέτες Lyapunov, κ.λπ.). Ο προσδιορισμός της κατάστασης ενός συστήματος συνήθως στηρίζεται στις μεθόδους ενσωμάτωσης του χώρου των φάσεων. Συνήθως επιλέγει κανείς μια διάσταση ενσωμάτωσης, και ερευνά τη διάδοση του σφάλματος μεταξύ δύο κοντινών καταστάσεων. Εάν το σφάλμα φαίνεται τυχαίο, τότε αυξάνει την διάσταση. Αν μπορείτε να αυξήσετε τη διάσταση για να αποκτηθεί σφάλμα που μοιάζει ντετερμινιστικό, τότε είστε έτοιμοι. Αν και μπορεί να ακούγεται απλό, δεν είναι. Μία περιπλοκή είναι ότι καθώς η διάσταση αυξάνεται, η αναζήτηση για μία κοντινή κατάσταση απαιτεί πολύ περισσότερο χρόνο υπολογισμού και πολλά στοιχεία (η ποσότητα των δεδομένων που απαιτείται αυξάνεται εκθετικά με την ενσωμάτωση της διάστασης) για να βρείτε μία κατάλληλη κοντινή υποψήφια. Εάν η διάσταση της ενσωμάτωσης (σειρά μέτρων ανά κατάσταση) επιλεγεί πολύ μικρή (μικρότερη από την «πραγματική» αξία) ντετερμινιστικά στοιχεία μπορεί να φαίνονται να είναι τυχαία, αλλά θεωρητικά δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα να επιλεγεί πολύ μεγάλη τη διάσταση — η μέθοδος θα λειτουργήσει.

Όταν ένα μη γραμμικό ντετερμινιστικό σύστημα συνοδεύεται από εξωτερικές διακυμάνσεις, οι τροχιές του παρουσιάζουν σοβαρές και μόνιμες στρεβλώσεις. Επιπλέον, ο θόρυβος ενισχύεται λόγω της εγγενούς μη γραμμικότητας και αποκαλύπτει εντελώς νέες δυναμικές ιδιότητες. Στατιστικά τεστ που προσπαθούν να διαχωρίσουν τον θόρυβο από το ντετερμινιστικό σκελετό ή αντιστρόφως να απομονώσουν το μέρος της αιτιοκρατικής αποτυχίας αποτυγχάνουν. Τα πράγματα είναι χειρότερα όταν το ντετερμινιστικό συστατικό είναι ένα μη γραμμικό σύστημα ανάδρασης. Με την παρουσία των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των μη γραμμικών ντετερμινιστικών στοιχείων και του θορύβου, η προκύπτουσα γραμμική σειρά μπορεί να εμφανίσει δυναμικά που οι παραδοσιακοί έλεγχοι για μη γραμμικότητα μερικές φορές αδυνατούν να συλλάβουν.

Το ζήτημα του πώς να διακριθεί ένα ντετερμινιστικό χαοτικό σύστημα από ένα στοχαστικό σύστημα έχει επίσης συζητηθεί στη φιλοσοφία. Φαίνεται ότι θα μπορούσαν να είναι παρατηρησιακά ισοδύναμα.

2.5 Εφαρμογές Του Χάους

Η θεωρία του Χάους εφαρμόζεται σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους, όπως οι εξής: γεωλογία, μαθηματικά, μικροβιολογία, βιολογία, πληροφορική, οικονομικά, επιστήμες μηχανικών, χρηματοοικονομικά, αλγοριθμικές συναλλαγές, μετεωρολογία, φιλοσοφία, φυσική, πολιτική, πληθυσμιακή δυναμική, ψυχολογία, και ρομποτική (BEAM robotics).

Χαοτική συμπεριφορά έχει παρατηρηθεί στο εργαστήριο σε μία ποικιλία συστημάτων, συμπεριλαμβανομένων των ηλεκτρικών συστημάτων, λείζερ, ταλαντώσεων, χημικών αντιδράσεων, υδροδυναμικής, και οι μηχανικές και μαγνητο-μηχανικές συσκευές, καθώς και τα υπολογιστικά μοντέλα των χαοτικών διαδικασιών. Οι παρατηρήσεις της χαοτικής συμπεριφοράς στη φύση περιλαμβάνουν

νουν αλλαγές τις καιρικές συνθήκες, τη δυναμική των δορυφόρων στο ηλιακό σύστημα, τη χρονική εξέλιξη του μαγνητικού πεδίου των ουρανίων σωμάτων, την αύξηση του πληθυσμού στην οικολογία, τη δυναμική των δυναμικών ενέργειας στον νευρώνα και τη μοριακή δόνηση. Υπάρχει κάποια διαμάχη για την ύπαρξη χαοτικού δυναμικού στις τεκτονικές πλάκες [εκκρεμεί παραπομπή] και στα οικονομικά.

Η θεωρία του χάους επί του παρόντος εφαρμόζεται σε ιατρικές μελέτες πάνω στην επιληψία, συγκεκριμένα για την πρόβλεψη των φαινομενικά τυχαίων κρίσεων παρατηρώντας τις αρχικές συνθήκες.

Η θεωρία του κβαντομένου χάους μελετά το πώς η αντιστοιχία μεταξύ της κβαντικής μηχανικής και της κλασικής μηχανικής λειτουργεί στο πλαίσιο των χαοτικών συστημάτων. Το σχετικιστικό χάος περιγράφει χαοτικά συστήματα υπό την γενική σχετικότητα.

Η κίνηση ενός συστήματος τριών ή περισσότερων αστερών που αλληλεπιδρούν βαρυτικά (το βαρυτικό πρόβλημα του Ν-σώματος) είναι γενικά χαοτική.

Στην ηλεκτρολογική μηχανική, τα χαοτικά συστήματα που χρησιμοποιούνται στις επικοινωνίες, στις γεννήτριες τυχαίων αριθμών και στα κρυπτογραφικά συστήματα.

Στην Αριθμητική ανάλυση, η μέθοδος Νιούτον-Ράφσον προσέγγισης μιας ρίζας της συνάρτησης μπορεί να οδηγήσει σε χαοτικές επαναλήψεις εάν η συνάρτηση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Κεφάλαιο 3^ο

Εφαρμογές Των Μη Γραμμικών δυναμικών Συστημάτων

3.1 Εισαγωγικά

Από την ανακάλυψη τους μέχρι σήμερα τα χαστικά μη γραμμικά δυναμικά συστήματα εφαρμόζονται ευρέως σε πολλούς τομείς τις καθημερινότητας όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο. Σε αυτή την εργασία όμως σκοπός είναι η μελέτη όσον αφορά στην εφαρμογή τους στην Μαθηματική Φυσική, στις Τηλεπικοινωνίες, και στην ηλεκτρονική. Θα παρουσιάσω ένα παράδειγμα χρήσης των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων στην πρόβλεψη του καιρού, ένα στην κρυπτογράφηση και ένα στην ηλεκτρονικό κύκλωμα.

Ιδιαίτερα το παράδειγμα που θα παρουσιάσω στην κρυπτογραφία είναι ακόμα σε πειραματικό στάδιο αλλά κατά τη γνώμη μου αξίζει αναφοράς διότι είναι ένα πρότζεκτ που έχει αναλάβει να φέρει εις πέρας το Μετσόβιο Πολυτεχνείο από το 2006.

3.2 Εφαρμογή Στην Πρόβλεψη Του Καιρού

Ένα ενδιαφέρον παράδειγμα μιας τέτοιας εφαρμογής είναι και το αποτέλεσμα μιας Ελληνικής ερευνητικής ομάδας για την πρόβλεψη της θερμοκρασίας του λεκανοπεδίου Αττικής όπως αυτά δημοσιεύτηκαν στο διεθνούς κύρους επιστημονικό περιοδικό *Annals of Geophysics*. Στη μελέτη αυτή οι εν λόγω ερευνητές ανάλυσαν με μεθόδους μη γραμμικής δυναμικής και γενικευμένων διαστάσεων μία χρονοσειρά ωριαίων θερμοκρασιών της αθήνας

$$\{T(\tau_0), T(\tau_0+\Delta\tau), T(\tau_0+\Delta\tau), \dots, T(\tau_0+N-1)\} \quad (3.1)$$

$\Delta\tau = 1$ ώρα που είχαν καταγραφεί από το αστεροσκοπείο Αθηνών από τον Ιανουάριο του 1984 μέχρι τον Δεκέμβριο του 1990. Έτσι το τ_0 στην (3.1) είναι πχ 1 Ιανουαρίου του 1984 μέχρι 12 το μεσημέρι ενώ το $N=61320$.

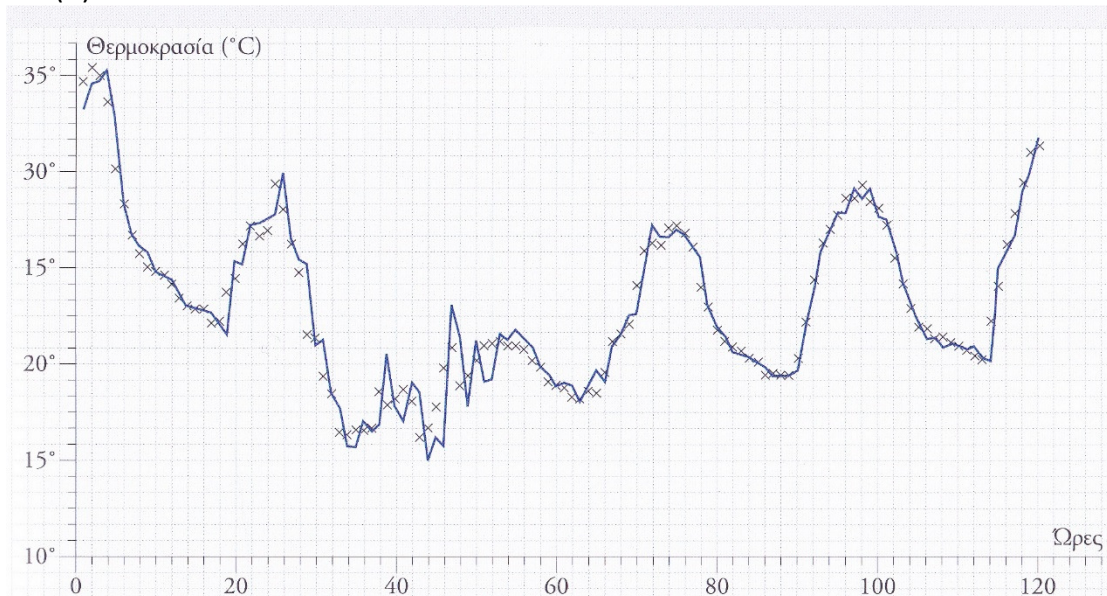
Στην αρχή η εκτιμήθηκε διάσταση συσχέτισης για την χρονοσειρά (3,1). Υπολογίζοντας δηλαδή τις τιμές της $D_2(m)$ συναρτήσεως του m βρέθηκε ότι σύμφωνα με το θεώρημα του Takens και τη μέθοδο των Grassberger και Procaccia

$$D_2(m) \rightarrow D_2 \approx 3,8, m \rightarrow d=5 \text{ ή } 6 \quad (3.2)$$

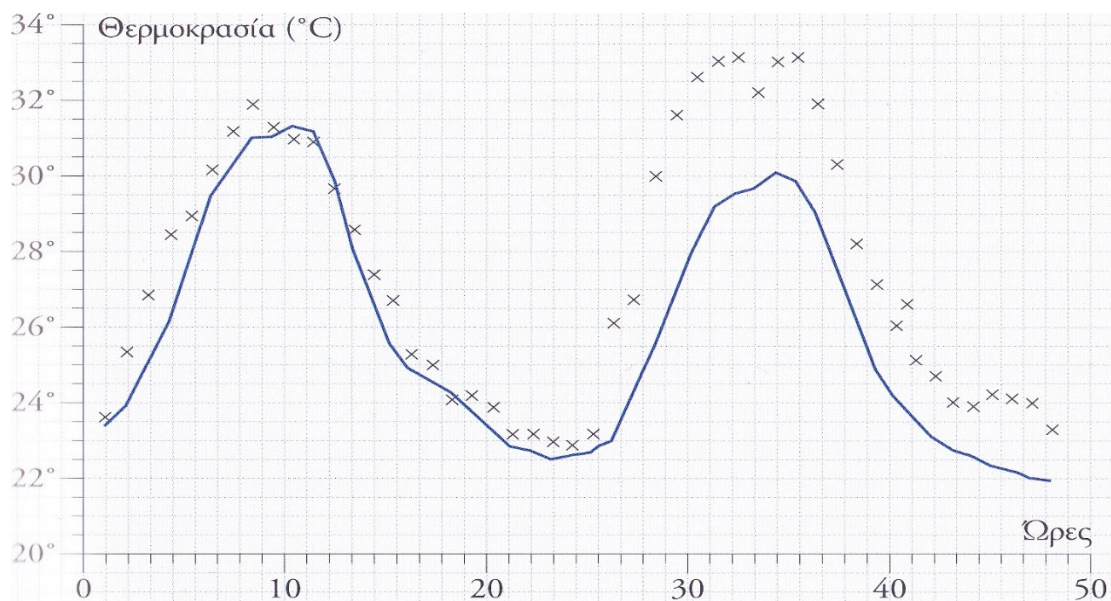
Ενώ η τιμή του D_2 δεν φάνηκε να αλλάζει για $m > 6$. Βέβαια τα αποτελέσματα αυτά είναι προσεγγιστικά, αφού γνωρίζουμε ότι η μεταβολή της θερμοκρασίας σε μία περιοχή δεν είναι εντελώς αιτιοκρατική: Ακόμα και για το λεκανοπαίδιο Αττικής, η εμπειρία δείχνει ότι εκτός από τα γνωστά τοπικά μετεωρολογικά μεγέθη υπάρχουν πολλές άλλες μεταβλητές γειτονικών μεταβλητών συστημάτων που την επηρεάζουν.

Οι υπολογισμοί πάντως έδειξαν ότι υπάρχει στη χρονοσειρά (3.1) ένα έντονο στοιχείο ντετερμινισμού, η δε δυναμική της εξαρτάται κατά κύριο λόγο από 5 ή 6 βασικά μεγέθη της μετεωρολογίας. Τα αποτελέσματα αυτά επέτρεψαν στους παραπάνω ερευνητές να προχωρήσουν στην πρόβλεψη της θερμοκρασίας εφαρμόζοντας τις γεωμετρικές μεθόδους των Farmer και Sidorovic σε ένα χώρο $d=5$ διαστάσεων σχήμα 3.1.

(α)



(β)



Σχήμα 3.1 (α) Θεωρώντας ως γνωστές N προηγούμενες ωριαίες θερμοκρασίες προβλέπουμε την επόμενη θερμοκρασία $N+1$ ώρας. Με συνεχή γραμμή σημειώνεται η πρόβλεψη και με χ η (γνωστή) πραγματική τιμή.

(β) Θεωρώντας γνωστές N προηγούμενες θερμοκρασίες προβλέπουμε τις θερμοκρασίες των επόμενων ωρών $N+1, N+2, N+3, \dots, N+n$.

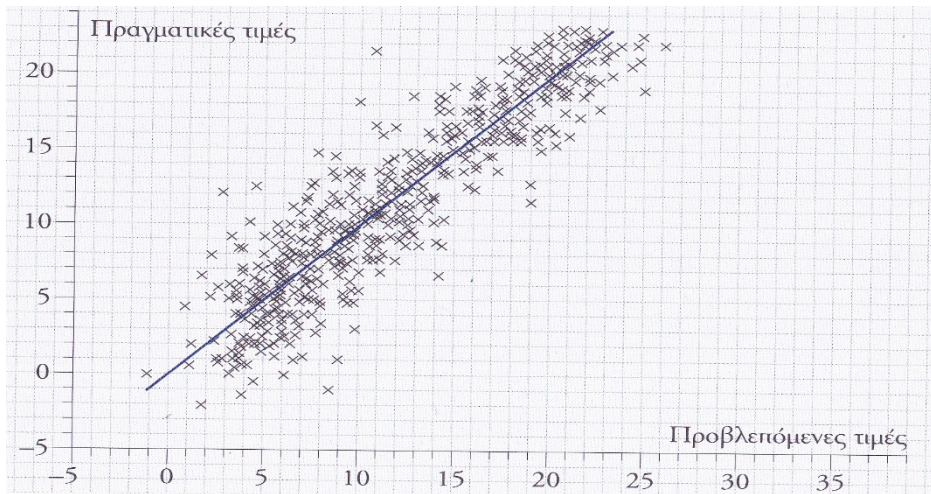
Παρατηρήστε ότι η πρόβλεψη (συνεχής γραμμή) αποκλίνει της πραγματικής τιμής (χ) καθώς αυξάνει το n .

Στην αρχή χρησιμοποιήθηκε ένας αριθμός N ωριαίων μετρήσεων για να προβλεφθεί η θερμοκρασία της αμέσως επόμενης ώρας, $N+1$, που θεωρήτε άγνωστη. Έτσι συγκρίνοντας στο σχήμα 3.1 (α) την προβλεπόμενη τιμή (που σημειώνουμε με συνεχή γραμμή) με την πραγματική (που σημειώνεται με χ) παρατηρούμε ότι γενικά η πρόβλεψη είναι πολύ ικανοποιητική. Μερικές φορές βέβαια λόγω κλιματικών αλλαγών μικρής χρονικής κλίμακας (π.χ. ξαφνικό ρεύμα αέρα, κάλυψη του ήλιου από σύννεφα κ.τ.λ.) οι προβλέψεις αποκρίνουν σημαντικά, ενώ σε άλλες περιπτώσεις είναι ιδιαίτερα επιτυχείς.

Χρησιμοποιώντας κατόπιν τις έννοιες των γενικευμένων διαστάσεων για μακροχρόνια πρόβλεψη, προκύπτουν εικόνες όπως αυτή που σχεδιάζουμε στο σχήμα 3.1 (β). Συγκεκριμένα θεωρώντας γνωστές N ωριαίες θερμοκρασίες, επιχειρεί κανείς να εκτιμήσει τις θερμοκρασίες όλων των ωρών που ακολουθούν $N+1, N+2, N+3, \dots, N+n$. Όπως βλέπουμε στο 3.1(β), οι προβλέψεις (με συνεχή γραμμή) για τις πρώτες 24 ώρες δεν διαφέρουν πολύ από τις πραγματικές τιμές (χ). Καθώς μεγαλώνει όμως ο ορίζοντας πρόβλεψης οι τιμές αρχίζουν να αποκλίνουν σημαντικά.

Η ερευνητική αυτή μελέτη επεκτάθηκε και στην πρόβλεψη της ελάχιστης και της μέγιστης θερμοκρασίας της επόμενης μέρας, κάτι που είναι ιδιαίτερα χρήσιμο και ανακοινώνεται από την Ε.Μ.Υ. καθημερινά μέσω των ΜΜΕ. Τα αποτελέσματα ήταν πολύ εντυπωσιακά και αναφέρονται στο παρακάτω σχήμα 3.2: Οι γεωμετρικές μέθοδοι των γενικευμένων διαστάσεων είχαν περίπου 92% επιτυχία στην πρόβλεψη της ελάχιστης θερμοκρασίας της επόμενης ημέρας κατά μέσο όρο για το διάστημα ενός έτους. Το ποσοστό αυτό θεωρείται αρκετά ικανοποιητικό. Αν συγκριθεί με το 96% περίπου επιτυχίας των αντίστοιχων προβλέψεων

της Ε.Μ.Υ., που χρησιμοποιεί πολύ περισσότερες μεταβλητές και μεγαλύτερο αριθμό δεδομένων, από την απλή χρονοσειρά στην οποία βασίστηκε η δική μας ανάλυση.



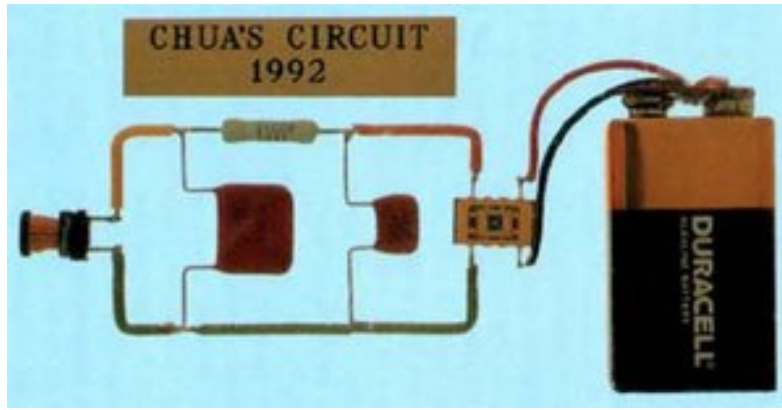
Σχήμα 3.2 Η σχετικά μικρή διασπορά των σημείων γύρω από τη διαγώνιο (τέλεια πρόβλεψη) δείχνει ότι η πρόβλεψη των μεθόδων της χαοτικής δυναμικής είναι αρκετά επιτυχής. Εδώ απεικονίζονται οι προβλέψεις της ελάχιστης θερμοκρασίας της επόμενης μέρας σε σχέση με τις πραγματικές.

Η μελέτη γενικευμένων διαστάσεων έχει μέχρι σήμερα χρησιμοποιηθεί ευρύτατα από πολλές ερευνητικές ομάδες για την πρόβλεψη πειραματικών χρονοσειρών. Η διεθνής βιβλιογραφία στο θέμα είναι εκτενέστατη και οι μέθοδοι πρόβλεψης που περιγράψαμε παραπάνω θεωρούνται από τους πιο αποτελεσματικούς σε όλες τις εφαρμοσμένες επιστήμες.

Δεν πρέπει να ξεχνάμε όμως ότι η πραγματικότητα είναι πολύ πιο σύνθετη απ' ό,τι νομίζουμε. Υπάρχουν πολλά συστήματα της φύσης και της ζωής με υψηλό βαθμό πολυπλοκότητας που δεν μας επιτρέπουν να τα χαρακτηρίσουμε αιτιοκρατικά και να τα κατανοήσουμε με τις μεθόδους που αναφέραμε παραπάνω. Παραδείγματα αυτών των φαινομένων είναι το χρηματιστήριο, η σεισμική δραστηριότητα, και η λειτουργία των εγκεφαλικών κυττάρων. Το ποσοστό του Θορύβου ή ο βαθμός τυχαιότητας που περιέχουν τα συστήματα αυτά είναι απαγορευτικός για να κάνουμε προβλέψεις με μεγάλη πιθανότητα επιτυχίας. Όμως και σε τέτοιες περιπτώσεις υπάρχει η δυνατότητα υπολογισμού και αφαίρεσης του θορύβου με τεχνικές 'φιλτραρίσματος'. Έτσι μπορούμε να μελετήσουμε τον ντετερμινιστικό χαρακτήρα της φιλτραρισμένης δυναμικής που μένει, ώστε να εφαρμόσουμε τη θεωρία γενικευμένων διαστάσεων και να πάρουμε χρήσιμα αποτελέσματα.

3.3 Εφαρμογή Στην Ηλεκτρονική: Κύκλωμα Chua

3.3.1 Εισαγωγή στο κύκλωμα Chua



Σχήμα 3.3 Πραγματικό κύκλωμα Chua

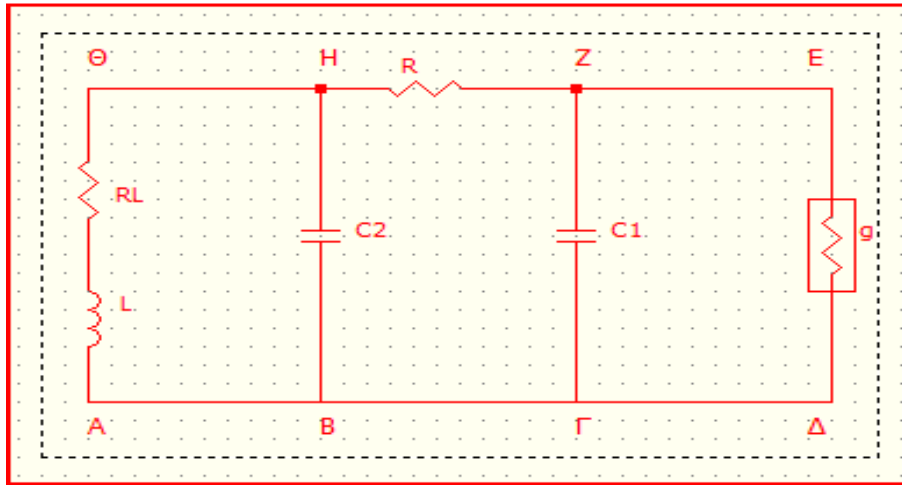
Στο σχήμα 3.3 δείχνεται το πραγματικό κύκλωμα Chua. Περιγράφει ένα απλό μη γραμμικό ηλεκτρονικό κύκλωμα που αποτελείται από 4 γραμμικά στοιχεία (2 πυκνωτές, ένα πηνίο, και μία ωμική αντίσταση) και από μία μη γραμμική αντίσταση, η οποία καλείται δίοδος του Chua.

Το κύκλωμα Chua είναι ένα απλό ηλεκτρονικό κύκλωμα που παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά. Ανακαλύφθηκε το 1983 από τον Ong Leon Chua ο οποίος εκείνο το χρόνο ήταν επισκέπτης καθηγητής στο πανεπιστήμιο Waseda της Ιαπωνίας. Η εύκολη κατασκευή του κυκλώματος το έχει καταστήσει ως ένα από τα αδιαμφισβήτητα παραδείγματα χαοτικών συστημάτων ώστε από πολλούς να δηλώνεται ως «ένα παράδειγμα του χάους».

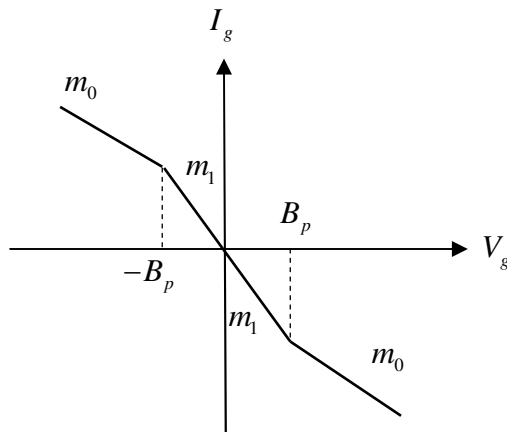
Ο εφευρέτης του κυκλώματος Chua ο Δρ Ong Leon Chua είναι ένας καθηγητής της ηλεκτρολογίας και της επιστήμης των υπολογιστών στο πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας στο Berkeley. Αναγνωρίζεται ευρέως ως ο πατέρας της θεωρίας του μη γραμμικού κυκλώματος. Εύστοχα ονομάστηκε το κύκλωμα Chua και χρησιμοποιείται από πολλούς ερευνητές για το σχεδιασμό ασφαλή συστημάτων επικοινωνιών που βασίζονται στο χάος.

Αποτελεί κλασσικό χαοτικό σύστημα γιατί σ' αυτό μπορεί να συναντήσει κανείς όλες τις ιδιότητες των χαοτικών συστημάτων και για αυτό το λόγο έχει ερευνηθεί εκτεταμένα.

3.3.2 Εξισώσεις του συστήματος Chua



Σχήμα 3.4 Το ηλεκτρικό κύκλωμα του συστήματος Chua



Σχήμα 3.5 Απόκριση της μη γραμμικής αντίστασης

Όπως δείχνεται στο σχήμα 3.4 το κύκλωμα Chua αποτελείται από έναν γραμμικό αντιστάτη με ωμική αντίσταση R , δύο γραμμικούς πυκνωτές με χωρητικότητες C_1 και C_2 , ένα γραμμικό πηνίο αυτεπαγωγής L και ωμικής αντίστασης R_L και ένα μη γραμμικό στοιχείο, την δίοδο Chua με ωμική αντίσταση R_g .

Στο σχήμα 3.5 δείχνεται η μη γραμμική, γραμμική κατά τμήματα της τάσης, απόκριση της δίοδου Chua.

Στην συνέχεια αποδεικνύονται οι εξισώσεις που περιγράφουν το κύκλωμα $Chua$ ως προς τα μεγέθη U_1 , U_2 και I_L που είναι αντίστοιχα οι τάσεις στους πυκνωτές C_1 , C_2 και η ένταση του ρεύματος στο πηνίο.

Από το κόμβο Z προκύπτει ότι

$$I_R = I_1 + I_g \Rightarrow I_R = \frac{dQ_1}{dt} + I_g \Rightarrow I_R = \frac{C_1 dU_1}{dt} + I_g \quad (3.3)$$

Από το κόμβο H προκύπτει ότι

$$I_L = I_R + I_2 \Rightarrow I_L = I_R + \frac{dQ_2}{dt} \Rightarrow I_L = I_R + \frac{C_2 dU_2}{dt} \quad (3.4)$$

Από το βρόγχο ΒΓΖΗ προκύπτει ότι

$$U_1 - U_2 + I_R R = 0 \Rightarrow I_R = \frac{U_2 - U_1}{R} \quad (3.4)$$

Από το βρόγχο ΑΒΗΘ προκύπτει ότι

$$U_2 - U_L + I_L R_L = 0 \Rightarrow -U_L = -U_2 - I_L R_L \Rightarrow -(-L \frac{dI_L}{dt}) = -U_2 - I_L R_L \Rightarrow$$

$$L \frac{dI_L}{dt} = -U_2 - I_L R_L \quad (3.5)$$

Επίσης για το ρεύμα της μη γραμμικής διόδου ισχύει η παρακάτω σχέση

$$I_g = G_b U_1 + \frac{1}{2} (G_a - G_b) (|U_1 + B_p| - |U_1 - B_p|) \quad (3.6)$$

Οι εξισώσεις (2.1) έως (2.5) αποτελούν σύστημα εξισώσεων με πέντε αγνώστους που είναι I_R , I_g , I_L , U_1 , U_2 .

Στην συνέχεια με απαλοιφή των μεγεθών I_R , I_g καταλήγουμε σε ένα σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων με αγνώστους I_L , U_1 , U_2 . Συγκεκριμένα έχουμε ότι από τις σχέσεις (2.1), (2.3)

$$\frac{U_2 - U_1}{R} = C_1 \frac{dU_1}{dt} + I_g \Rightarrow C_1 \frac{dU_1}{dt} = \frac{U_2 - U_1}{R} - I_g \quad (3.7)$$

Από τις σχέσεις (2.2), (2.3) προκύπτει ότι

$$I_L = \frac{U_2 - U_1}{R} + C_2 \frac{dU_2}{dt} \Rightarrow C_2 \frac{dU_2}{dt} = \frac{U_1 - U_2}{R} + I_L \quad (3.8)$$

Με αντικατάσταση του I_g από τη σχέση (2.5) στην σχέση (2.6) προκύπτει η σχέση

$$C_1 \frac{dU_1}{dt} = \frac{U_2 - U_1}{R} - [G_b U_1 + \frac{1}{2}(G_a - G_b)(|U_1 + B_p| - |U_1 - B_p|)] \quad (3.9)$$

Οπότε το τελικό σύστημα των τριών διαφορικών εξισώσεων με αγνώστους τα μεγέθη I_L , U_1 , U_2 είναι

$$C_1 \frac{dU_1}{dt} = \frac{U_2 - U_1}{R} - [G_b U_1 + \frac{1}{2}(G_a - G_b)(|U_1 + B_p| - |U_1 - B_p|)] \quad (3.10)$$

$$C_2 \frac{dU_2}{dt} = \frac{U_1 - U_2}{R} + I_L \quad (3.11)$$

$$L \frac{dI_L}{dt} = -U_2 - I_L R_L \quad (3.12)$$

Στην συνέχεια εφαρμόζονται μετασχηματισμοί μεγεθών ώστε να προκύψουν ισοδύναμα αδιάστατα μεγέθη για την αριθμητική ανάληψη των παραπάνω τριών εξισώσεων του συστήματος.

ΑΝ ΤΕΘΕΙ $R = \frac{1}{G}$, $I_L = I_3$, $R_L = \frac{1}{G_L}$ ΤΟΤΕ ΑΠΟ ΤΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ (3.10), (3.11), (3.12) ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΟΤΙ

$$C_1 \frac{dU_1}{dt} = G(U_2 - U_1) - [G_b U_1 + \frac{1}{2}(G_a - G_b)(|U_1 + B_p| - |U_1 - B_p|)] \quad (3.13)$$

$$C_2 \frac{dU_2}{dt} = G(U_1 - U_2) + I_3 \quad (3.14)$$

$$L \frac{dI_3}{dt} = -U_2 - I_3 \frac{1}{G_L} \quad (3.15)$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (3.13), (3.14), (3.15) με B_p για να πάρουμε αδιάστατα μεγέθη προκύπτει ότι

$$\frac{C_1}{B_p} \frac{dU_1}{dt} = \frac{G(U_2 - U_1)}{B_p} - [G_b \frac{U_1}{B_p} + \frac{1}{2}(G_a - G_b)(|\frac{U_1}{B_p} + 1| - |\frac{U_1}{B_p} - 1|)] \quad (3.16)$$

$$\frac{C_2}{B_p} \frac{dU_2}{dt} = \frac{G(U_1 - U_2)}{B_p} + \frac{I_3}{B_p} \quad (3.17)$$

$$\frac{L}{B_p} \frac{dI_3}{dt} = -\frac{U_2}{B_p} - I_3 \frac{1}{B_p G_L} \quad (3.18)$$

Αν τεθεί $x = \frac{U_1}{B_p}$, $y = \frac{U_2}{B_p}$ προκύπτει ότι

$$C_1 \frac{dx}{dt} = G(y - x) - [G_b x + \frac{1}{2}(G_a - G_b)(|x + 1| - |x - 1|)] \quad (3.19)$$

$$C_2 \frac{dy}{dt} = G(x - y) + \frac{I_3}{B_p} \quad (3.20)$$

$$\frac{L}{B_p} \frac{dI_3}{dt} = -y - \frac{I_3}{B_p G_L} \quad (3.21)$$

Αν οι σχέσεις (3.19), (3.20) διαιρεθούν με G προκύπτει ότι

$$\frac{C_1}{G} \frac{dx}{dt} = (y - x) - [\frac{G_b x}{G} + \frac{1}{2}(\frac{G_a}{G} - \frac{G_b}{G})(|x + 1| - |x - 1|)] \quad (3.22)$$

$$\frac{C_2}{G} \frac{dy}{dt} = (x - y) + \frac{1}{G} \frac{I_3}{B_p} \quad (3.23)$$

$$\frac{L}{B_p} \frac{dI_3}{dt} = -y - \frac{I_3}{B_p G_L} \quad (3.24)$$

Θέτοντας στη σχέση (3.22) $m_1 = \frac{G_b}{G}$, $m_0 = \frac{G_a}{G}$ προκύπτει:

$$\frac{C_1}{G} \frac{dx}{dt} = (y - x) - [m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)] \quad (3.25)$$

Αν στην (3.25) τεθεί

$$f(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x+1| - |x-1|) \quad (3.26)$$

Προκύπτει

$$\frac{C_1}{G} \frac{dx}{dt} = (y-x) - f(x) \quad (3.27)$$

Για να απαλειφτεί ο χρόνος, εφαρμόζονται ο μετασχηματισμός

$$\tau = \frac{tG}{C_2} \Rightarrow t = \frac{\tau C_2}{G} \Rightarrow dt = \frac{G d\tau}{G} \quad (3.28)$$

Αντικαθιστώντας το dt από τη σχέση (3.28) στις σχέσεις (3.23), (3.24), (3.27) προκύπτει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$\frac{C_1}{C_2} \frac{dx}{d\tau} = (y-x) - f(x) \quad (3.29)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = (x-y) + \frac{1}{G} \frac{I_3}{B_p} \quad (3.30)$$

$$\frac{L}{B_p} \frac{G dI_3}{C_2 d\tau} = -y - \frac{I_3}{B_p G_L} \quad (3.31)$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό

$$z = \frac{I_3}{GB_p} \Rightarrow I_3 = GB_p z \Rightarrow dI_3 = GB_p dz \quad (3.32)$$

και αντικαθιστώντας την (3.31) προκύπτει το παρακάτω σύστημα των τριών διαφορικών εξισώσεων ως προς τα αδιάστατα μεγέθη x, y, z .

$$\frac{C_1}{C_2} \frac{dx}{d\tau} = (y-x) - f(x) \quad (3.33)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = (x-y) + z \quad (3.34)$$

$$\frac{LG^2}{C_2} \frac{dz}{d\tau} = -y - \frac{Gz}{G_L} \quad (3.35)$$

Από τις σχέσεις (3.33), (3.34), (3.35) λύνοντας ως προς $\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{dz}{d\tau}$ προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα εξισώσεων

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{C_2}{C_1} [(y-x) - f(x)] \quad (3.36)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = (x-y) + z \quad (3.37)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -\frac{C_2}{LG^2} y - \frac{C_2 z}{LGG_L} \quad (3.38)$$

Τελικά θέτοντας $\frac{C_2}{C_1} = \alpha$, $\frac{C_2}{LG^2} = \beta$, $\frac{C_2}{LGG_L} = \gamma$ από τις σχέσεις (3.36), (3.37), (3.38)

προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις με τα αδιάστατα μεγέθη x, y, z που περιγράφουν το κύκλωμα Chua

$$\frac{dx}{d\tau} = \alpha [y - x - f(x)] \quad (3.39)$$

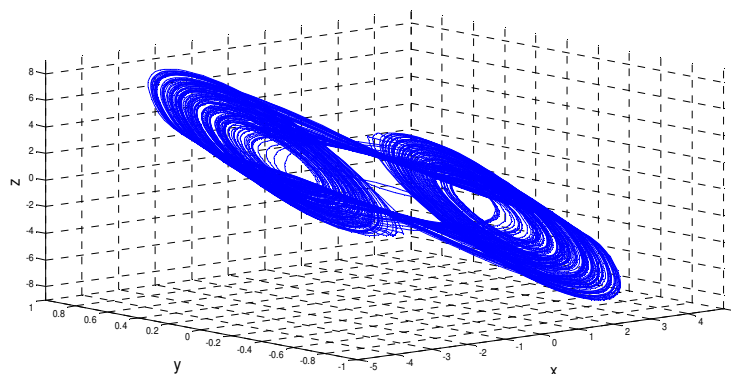
$$\frac{dy}{d\tau} = x - y + z \quad (3.40)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -\beta y - \gamma z \quad (3.41)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (3.39), (3.40), (3.41) αναφέρεται στη διεθνή βιβλιογραφία ως σύστημα του κυκλώματος Chua και γενικά λύνεται μόνο με αριθμητικές μεθόδους.

Ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων α, β, γ και των αρχικών τιμών x_0, y_0, z_0 η λύση μπορεί να είναι χαοτική, ημπεριοδική, περιοδική και σταθερή.

3.3.3 Χαοτική συμπεριφορά του κυκλώματος Chua



Σχήμα 3.6 Χαοτικός ελκυστής Chua

Το σύστημα των εξισώσεων (3.39), (3.40), (3.41) που περιγράφουν το κύκλωμα Chua για ένα πλήθος των παραμέτρων παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά και δεν επιλύεται αναλυτικά. Στο σχήμα 3.6 δείχνεται η τροχιά του χαοτικού ελκυστή που προκύπτει όταν επιλυθεί αριθμητικά το σύστημα των εξισώσεων για τις τιμές των παραμέτρων που δείχνονται στον Πίνακα 1 και για βήμα επίλυσης $\Delta t=0,05$.

Πίνακας 1

$x_0=0$
$y_0=0.5$
$z_0=0.4$
$a=15.60062402$
$b = 28.57142857$
$c=0$

Το ορθογώνιο σύστημα των αξόνων αποτελεί τον χώρο φάσεων ενώ οι τροχιές στο χώρο φάσεων είναι ο χαοτικός ελκυστής. Παρατηρείται ότι ο ελκυστής του Chua

έχει τα γενικά χαρακτηριστικά των ελκυστών, δηλαδή η τροχιά του συστήματος καταλαμβάνει ένα πεπερασμένο τμήμα των χώρων φάσεων και είναι μη περιοδική δηλαδή δεν επανέρχεται στο ίδιο σημείο.

3.4 Εφαρμογή Χάους Στην Κρυπτογράφιση

3.4.1 Ασφάλεια Δεδομένων

Από τότε που ανακαλύφθηκε η γραφή και η αλληλογραφία υπάρχουν και αυτοί που θέλουν να κλέψουν η απλώς να διαβάσουν τις πληροφορίες που περιέχοντε σε αυτή. Έτσι δημιουργήθηκε η ανάγκη προστασίας των εκάστοτε εγγράφων. Ένας τρόπος ο οποίος είναι και ο επικρατέστερος είναι η κρυπτογράφιση.

Η λέξη **κρυπτογραφία** προέρχεται από τα συνθετικά «κρυπτός» + «γράφω» και είναι ένα διεπιστημονικό γνωστικό πεδίο που ασχολείται με τη μελέτη, την ανάπτυξη και τη χρήση τεχνικών κρυπτογράφησης και αποκρυπτογράφησης με σκοπό την απόκρυψη του περιεχομένου των μηνυμάτων.

Με τα χρόνια η κρυπτογράφιση άλλαξε και ειδικότερα από την ανακάλυψη και εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών και του ίντερνετ όπου έχουν αυξηθεί και οι πληροφορίες που θέλουμε να παραμένουν κρυφές καθώς δεν είναι μόνο η ηλεκτρονική αλληλογραφία αλλά και άλλα προσωπικά δεδομένα όπως κωδικοί πιστωτικών καρτών, κάθε είδους ηλεκτρονικοί λογαριασμοί αλλά και πολύ σημαντικότερες πληροφορίες όπως δεδομένα εθνικής ασφάλειας κ.τ.λ.

Έχουν εφευρεθεί πάρα πολλοί τρόποι για την κρυπτογράφιση των δεδομένων με διάφορους αλγόριθμους, με γεννήτριες παραγωγής τυχαίων αριθμών και άλλα. Το 2006 όμως ξεκίνησε από ερευνητές 7 χωρών και με συντονιστή το Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών του Πανεπιστημίου Αθηνών ένα project για ένα διαφορετικό είδος κρυπτογράφησης το Picasso (Photonic Integrated Components Applied to Secure chaos encoded Optical communications systems). Στόχος του είναι η δημιουργία Ένός κρυπτογραφικού συστήματος που μεταδίδει δεδομένα κρύβοντάς τα μέσα σε χάος.

3.4.2 Λίγα Λόγια για Το Picasso

Το PICASSO ξεκίνησε το Γενάρη του 2006, με προϋπολογισμό της τάξεως των 3,5 εκατ. €, εκ των οποίων περίπου 500.000 € στο μερίδιο του συντονιστή, και διάρκεια τριών χρόνων. Τα ως τώρα αποτελέσματά του κρίνονται ως απολύτως ικανοποιητικά, προκαλώντας μεγάλο διεθνές ενδιαφέρον και δημοσιεύματα, ανάμεσά τους κι ένα στο έγκριτο επιστημονικό περιοδικό το Nature.

Το σύστημα δοκιμάστηκε υπό πραγματικές συνθήκες το 2007. Χρησιμοποιώντας το μητροπολιτικό δίκτυο οπτικών ινών των «Αττικών Επικοινωνιών» στην Αθήνα σχήμα 3.7 το κωδικοποιημένο σήμα διέτρεξε διαδρομή 120 χιλιομέτρων με αφετηρία και τέρμα το Εργαστήριο του τμήματος, στην Πανεπιστημιούπολη του Ζωγράφου, όπου παραλήφθηκε ακέραια η πληροφορία.



Σχήμα 3.7 μητροπολιτικό δίκτυο οπτικών ινών των «Αττικών Επικοινωνιών»

3.4.3 Στόχος του Προγράμματος

Ο βασικός στόχος του PICASSO είναι η ανάπτυξη φωτονικών διατάξεων και υποσυστημάτων για την επίδειξη οπτικών επικοινωνιακών συστημάτων που βα-

σίζονται στο χάος. Μονολιθικά και υβριδικά ολοκληρωμένα κυκλώματα θα σχεδιαστούν και θα αναπτυχθούν ώστε να πραγματοποιηθούν χαοτικοί πομποδέκτες. Ενδεδειγμένος έλεγχος της ασφάλειας και αξιοπιστίας των χαοτικών συστημάτων θα πραγματοποιηθεί στο πλαίσιο του έργου.

3.4.4 Αρχή Λειτουργίας

Στα συμβατικά τηλεπικοινωνιακά συστήματα ένας οπτικός ταλαντωτής (ημιαγωγικό λέιζερ), παράγει ένα συνεκτικό οπτικό φορέα στον οποίο κρυπτογραφείτε η πληροφορία χρησιμοποιώντας ένα απ' τα πολλά διαθέσιμα συστήματα διαμόρφωσης. Στην συγκεκριμένη προσέγγιση ένας πομπός περιέχει ένα λέιζερ τροποποιημένο έτσι ώστε να λειτουργεί υπό χαοτικό καθεστώς, παράγοντας έτσι ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία μεγάλου φασματικού εύρους. Η ακτινοβολία κωδικοποιήτε σε αυτόν τον χαοτικό φορέα χρησιμοποιώντας διάφορες τεχνικές. Είναι πρακτικά αδύνατο να αφαιρεθεί η κωδικοποιημένη πληροφορία χρησιμοποιώντας συμβατικές τεχνικές όπως το γραμμικό φιλτράρισμα, ανάλυση συχνοτήτων τομέα και χωροφασική ανασυγκρότηση γιατί υπάρχει υψηλή πολυπλοκότητα στο σήμα-φορέα και το πλάτος του μηνύματος δεν υπερβαίνει ένα μικρό ποσοστό του πλάτους του χαοτικού φορέα. Στη μεριά του δέκτη χρησιμοποιείται ένας δεύτερος χαοτικός ταλαντωτής οποίος πρέπει να είναι πανομοιότυπος με τον πομπό. Η ομοιότητες πρέπει να είναι στα παρακάτω:

- Ημιαγωγικό λέιζερ, εκπομπή(μήκος κύματος εκπομπής, κλίση αποδοτικότητας, όριο ρεύματος κ.λ.π), εγγενείς παράμετροι(διάρκεια ζωής φωτονίου, μη γραμμική ευαισθησία κ.λ.π).
- Χαρακτηριστικά βρόγχου ανάδρασης(μήκος κοιλότητας, απώλειες κοιλότητας, πιθανή μη γραμμικότητα κ.λ.π)
- Παράμετροι λειτουργίας (ρεύμα πόλωσης, Δύναμη ανάδρασης κ.λ.π)



Σχήμα 3.8 Διάγραμμα χαστικής κρυπτογράφησης και αποκρυπτογράφησης του PICASSO

3.4.5 Στόχοι του PICASSO

- “Να σχεδιάσει και να κατασκευάσει μονολιθικά φωτονικά ενσωματωμένα κυκλώματα για την πραγματοποίηση των χαστικών πομπών και δεκτών.”

Δύο τύποι φωτονικών ICs θα κατασκευασθούν τα οποία θα αντιστοιχούν σε όλη την οπτική και ηλεκτρο-οπτική προσέγγιση. Η πρώτη θα περιλαμβάνει DFB λέιζερ(distributed feedback laser) σε συνδυασμό με ενεργούς ή παθητικούς κυματοδηγούς με υψηλή αντανακλαστική έκφανση τέλους. Ένας μεταβλητός οπτικός εξασθενητής και ένας ηλεκτρο οπτικός διαμορφωτής θα πρέπει να περιλαμβάνονται στη δομή κυματοδηγού και κατά την έξοδο του λέιζερ DFB αντίστοιχα.

Ο δεύτερος τύπος θα περιλαμβάνει ένα λέιζερ DFB συζευγμένο σε ένα κλειστό ηλεκτρο-οπτικό βρόχο ανάδρασης που αποτελείται από έναν ηλεκτρο-οπτικό διαμορφωτή, μία υψηλή ταχύτητα φωτοδιόδου και έναν ηλεκτρονικό ενισχυτή. Οι παράμετροι σχεδιασμού των συσκευών θα πρέπει να υπολογιστούν σωστά, ώστε να οδηγήσουν στην παραγωγή εξαιρετικά πολύπλοκων, χαστικών ευρυζωνικών φορέων.

- "Για την ανάπτυξη της τεχνολογίας και τα στοιχεία για υβριδικά ενσωματωμένους χαστικούς πομπούς και δέκτες."

Ο στόχος της δραστηριότητας αυτής είναι διττός: Η ανάπτυξη του χαμηλού κόστους, ο ενιαίος τρόπος σύζευξης ζευγών των λέιζερ ημιαγωγών και η ανάπτυξη των πολυλειτουργικών συσκευών ινών από μικροσκοπική κατασκευή χρησιμοποιώντας το εφήμερο του τεχνολογικού τομέα. Η υβριδική σύζευξη αυτών των δύο συσκευών θα οδηγήσει σε ένα μικρό αποτύπωμα χαστικών πομπών και δέκτη για να χρησιμοποιηθεί όπως οι εύκαμπτες

πλατφόρμες για τη δοκιμή ασφάλειας και τη βαθμονόμηση, αλλά και ως υποσυστήματα που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν στην πρώτη φάση του συστήματος των πειραμάτων.

- "Για τον προσδιορισμό του βαθμού ασφάλειας του προτεινόμενου συστήματος και για να προτείνει μεθόδους για την περαιτέρω αύξησή της".

Εκτεταμένες δοκιμές ασφαλείας, έλεγχος και βαθμονόμηση του χαστικού κωδικοποιημένου συστήματος επικοινωνίας θα πραγματοποιηθούν. Διαφορετικοί τύποι των διόδων λέιζερ θα κατασκευαστούν και η εγκυρότητα των υποθέσεων ασφάλειας θα αποδειχθεί πειραματικά. Διαφορετικά σχέδια συσκευών θα δοκιμαστούν για την περαιτέρω ενίσχυση της ασφάλειας που στοχεύει κυρίως στην αυξημένη πολυπλοκότητα του χάους και ελαχιστοποιεί την ανοχή μεταξύ του πομπού και του δέκτη.

- "Για να αναπτυχθεί ένα πλήρες δίκτυο διαδηλωτή στην εγκατάσταση δικτύου οπτικών ινών WDM."

Πλήρως λειτουργικές μονάδες πομπών και δεκτών θα αναπτυχθούν σε τέσσερα γειτονικά μήκη κύματος του δικτύου ITU (100 GHz απόσταση) στη ζώνη C της λειτουργίας παραθύρου τηλεπικοινωνιών σε 2.4 και 10 Gb / s. Η συμβατότητα με την υπάρχουσα υποδομή θα δοκιμαστεί εξαντλητικά και οι πιθανές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των χαστικών κωδικοποιημένων καναλιών και των συμβατικών γειτονικών καναλιών θα πρέπει να διερευνηθούν.

3.4.6 Περίληψη των αποτελεσμάτων

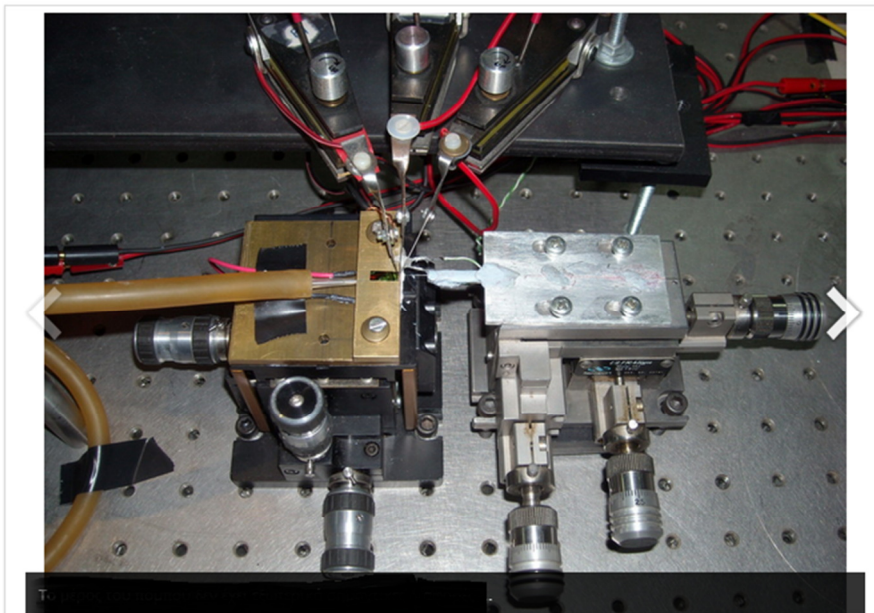
Ο πρώτος κύριος στόχος του έργου PICASSO ήταν να σχεδιάσει και να κατασκευάσει μονολιθικά φωτονικά ενσωματωμένα κυκλώματα για την πραγματοποίηση των χαστικών πομπών και δεκτών.

Το έργο PICASSO κατάφερε να σχεδιάσει και να κατασκευάσει τρεις διαφορετικούς τύπους μονολιθικών ολοκληρωμένων χαστικών πομπών και δεκτών. Οι δύο πρώτοι τύποι βασίζονται στην αρχή της δημιουργίας χάους συνδέοντας μια εξωτερική κοιλότητα σε ένα τυπικό λέιζερ ημιαγωγού.

Η πρώτη προσέγγιση, στην οποία δόθηκε το όνομα της ευθείας προσέγγισης κυματοδηγού, συνδυάζει ένα λέιζερ, ένα μέσο κέρδους / απορρόφησης, ένα τμήμα φάσης και ένα παθητικό κυματοδηγό με ένα ιδιαίτερα αντανακλαστικό τέλος στο ίδιο τσιπ. Η δυνατότητα της μεταβολής του ποσού της ανάδρασης από τον σωστό έλεγχο του μέσου κέρδους / απορρόφησης και η φάση του φωτός που εισέρχεται ξανά στο

Λείζερ επιτρέπει την επίτευξη μιας ευρείας δυναμικής περιοχής που παρατηρήθηκε στα πειράματα. Η συσκευή αποδείχθηκε ότι είναι πολύ αποτελεσματική στην κάλυψη μηνυμάτων σε Gb / s, σε συγχρονισμό με άλλες παρόμοιες συσκευές και στην αποκωδικοποίηση του καλά κρυμμένου χαοτικού σήματος μετά από εκατοντάδες χιλιόμετρα μετάδοσης με ίνες.

Η δεύτερη προσέγγιση εκμεταλλεύομενη από όλες τις οπτικές τις ιδιότητες των λέιζερ που υποβάλλονται σε οπτική ανάδραση ήταν η λεγόμενη προσέγγιση διάκενου αέρος. Η προσέγγιση διάκενου αέρος συνδυάζει ένα λέιζερ που ακολουθείται από δύο παθητικούς κυματοδηγούς που χωρίζονται από ένα κενό αέρος και είναι εξοπλισμένοι ο καθένας με ένα τμήμα φάσης. Η προσέγγιση αυτή στόχευε στην ανάπτυξη μιας πιο πολύπλοκης γεννήτρια χάους που αποτελείται από δύο εξωτερικές κοιλότητες. Οι δύο εξωτερικές κοιλότητες που σχηματίζονται ως αποτέλεσμα του γεγονότος ότι ένα τμήμα του φωτός που φθάνει στην πλευρά του πρώτου κυματοδηγού αντανακλάται πίσω στο λέιζερ και η υπόλοιπη ενέργεια ταξιδεύει διαμέσου του δεύτερου κυματοδηγού και ανακλάται πίσω στο λέιζερ αφού διαδίδεται κατά μήκος και των δύο κυματοδηγών. Αυτή η συσκευή σχεδιάστηκε, κατασκευάστηκε και έχει αποδειχθεί ότι παρέχει ενδιαφέρουσες μη γραμμικές δυναμικές που είναι λιγότερο πολύπλοκες από εκείνες που προβλέπονται από την ευθεία προσέγγιση κυματοδηγού. Ο κύριος λόγος για αυτό είναι η δυνατότητα διαφοροποίησης του επιπέδου ανάδρασης στην ευθεία προσέγγιση κυματοδηγού που δεν ήταν μια επιλογή για το αντίστοιχο διάκενο αέρος.



Σχήμα 3.9 Στην εικόνα απεικονίζονται ο πομπός και ο δέκτης της χαοτικής κρυπτογράφησης. Το μέρος του πομπού δεν έχει σημαντικές διαφορές από εκείνο του δέκτη, καθώς οι δύο μονάδες είναι πανομοιότυπες όχι μόνο στην εμφάνιση αλλά και στις προδιαγραφές τους.

Η τρίτη προσέγγιση στηρίχθηκε σε μία διαφορετική αντίληψη για την οδήγηση ενός λέιζερ σε χαοτική λειτουργία. Ο υποκείμενος μηχανισμός είναι η οπτική έγχυση η οποία είναι η έγχυση του φωτός από ένα λέιζερ σε ένα δεύτερο το οποίο οδηγείται σε χαοτική λειτουργία υπό συγκεκριμένες συνθήκες. Στο έργο PICASSO, δύο τμήματα λέιζερ σχεδιάστηκαν και κατασκευάστηκαν τα οποία είναι ανάλογα με ένα σύστημα όπου δύο λέιζερ έχουν αμοιβαία έγχυση. Το σύστημα αυτό αποδείχθηκε ότι παρέχει ενισχυμένες μη γραμμικές δυναμικές για το συγκεκριμένο συνδυασμό των ρευμάτων πόλωσης των δύο λέιζερ, ωστόσο, δεν είναι τόσο περίπλοκο όπως εκείνες που παρέχονται από την ευθεία προσέγγιση κυματοδηγού. Αυτό είναι ένα γενικό χαρακτηριστικό των χαοτικών συστημάτων που βασίζονται σε οπτικές εγχύσεις παραγωγής χάους.

Ο δεύτερος κύριος στόχος του PICASSO ήταν να αναπτύξει την τεχνολογία και τα στοιχεία για υβριδικά ενσωματωμένους χαοτικούς πομπούς και δέκτες, συμπεριλαμβανομένης της ανάπτυξης του χαμηλού κόστους, το ενιαίο τρόπο των ταιριαστών ζευγών των λέιζερ ημιαγωγών και την ανάπτυξη πολυλειτουργικών συσκευών ινών από μικροσκοπική κατασκευή χρησιμοποιώντας το εφήμερο του τεχνολογικού τομέα.

Αυτός ο στόχος εκπληρώθηκε κατά τη διάρκεια του PICASSO επιτυγχάνοντας την κατασκευή μίας μικρογραφίας μίας υβριδικά ενσωματωμένης εξωτερικής κοιλότητας η οποία περιλαμβάνει ένα τμήμα φάσης και ένα μεταβλητό οπτικό εξασθενητή που είναι και οι δύο θερμικά συντονισμένοι. Πομποί χάους με ενισχυμένες και ελεγχόμενες δυναμικές καταδεικνύονται από το συνδυασμό τυπικών λέιζερ DFB ημιαγωγών με την υβριδικά ενσωματωμένη κοιλότητα. Παρατηρήθηκε ο συγχρονισμός μεταξύ παρόμοιων συσκευών και η κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση μηνυμάτων σε τιμές Gb / s. Επίσης εκμεταλλεύτηκε η υβριδικά ενσωματωμένη τεχνολογία, προκειμένου να υποστηρίξει ένα νέο σύστημα για τη δημιουργία χάους κατά τη φάση του φωτός που πρώτη φορά εξετάζεται στο πλαίσιο του Πικάσο. Το ηλεκτροοπτικό σύστημα για την παραγωγή χαοτικής φάσης αναπτύχθηκε με διακριτά εξαρτήματα και χρησιμοποιήθηκαν συμβολόμετρα καθυστέρησης που είναι υβριδικά ενσωματωμένα σε ίνες προκειμένου να εκτελέσουν τη φάση στους κατά πλάτος μετασχηματισμούς.

Ο τρίτος στόχος του PICASSO ήταν να προσδιορίσει το βαθμό της ασφάλειας του προτεινόμενου συστήματος και να προτείνει μεθόδους για την περαιτέρω αύξησή του.

Το έργο PICASSO επένδυσε ένα μεγάλο μέρος της προσπάθειας για την αναγνώριση της ασφάλειας των χαοτικών επικοινωνιών που χρησιμοποιούν ως παραμέτρους

αξιολόγησης της ασφάλειας, το ποσοστό σφάλματος του δικτύου (BER) του μηνύματος που εξάγεται προς το δέκτη είτε του νόμιμου χρήστη ή αυτό του ωτακουστή.

Το PICASSO στόχευε στον αποκλεισμό του ωτακουστή από το να έχει πρόσβαση στις πληροφορίες αξιοποιώντας μικρού πλάτους μηνύματα σε βάρος της απόδοσης του νόμιμου δέκτη. Για το λόγο αυτό, το σύστημα μετάδοσης ήταν εξοπλισμένο με μπροστινή διόρθωση λάθους προκειμένου να επιτευχθούν χωρίς σφάλματα απόδοσης για μέτριες τιμές BER (10^{-3}).

Εκτός από τον ορισμό της ασφάλειας και της ποσοτικοποίησης, το PICASSO εκπόνησε νέες ιδέες που ενισχύουν την έννοια της κρυπτογράφησης του χάους που περιορίζουν την πρόσβαση των επιθέσεων υποκλοπών. Οι νέες ιδέες που σχετίζονται με νέα συστήματα διαμόρφωσης που είναι πιο ανεκτικά στο να κατευθύνουν τεχνικές ανίχνευσης υποκλοπής και πιο ευαίσθητα στην αναντιστοιχία παραμέτρων, αποκλείοντας έτσι την υποκλοπή του μηνύματος χρησιμοποιώντας ένα αυθαίρετο λέιζερ για να συγχρονιστεί με το μεταδιδόμενο χαοτικό σήμα.

Επιπλέον, προτάθηκαν νέα σενάρια που αποδεικνύουν τη δυνατότητα αξιοποίησης των πλήκτρων υλικού προκειμένου να καταστεί η κρυπτογράφηση του χάους πιο συμβατή με τη συμβατική κρυπτογράφηση. Τα σενάρια δείχνουν ότι με την κατάλληλη αλλαγή της φάσης που βιώθηκε από το φως μέσα στην εξωτερική κοιλότητα ή την καθυστέρηση του ηλεκτρο-οπτικού συστήματος, η υποκλοπή μηνυμάτων εμποδίζεται και η ταυτότητα προέλευσης και η προστασία της ακεραιότητας των δεδομένων επιτυγχάνονται.

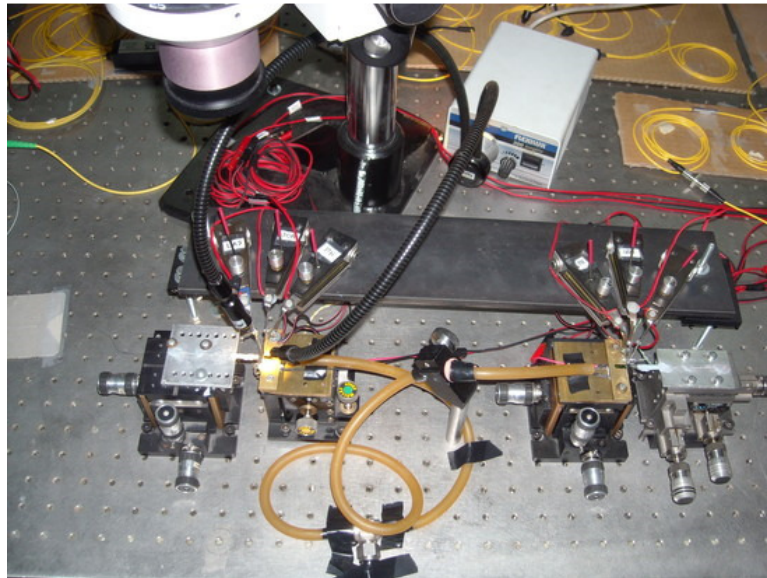
Τέλος, το νέο ηλεκτρο-οπτικό σύστημα που παρέχει το χάος κατά τη φάση του φωτός είναι εξαιρετικά ευαίσθητο σε αντίστοιχες παραμέτρους περιορίζοντας τη δυνατότητα ενός ωτακουστή να αναπαράγει το δέκτη ενός νόμιμου χρήστη.

Ο τελικός στόχος του Πικάσο ήταν να αναπτύξει ένα πλήρες δίκτυο διαδηλωτή στο εγκατεστημένο δίκτυο οπτικών ινών WDM.

Οι μονολιθικοί και υβριδικά ενσωματωμένοι πομποί και δέκτες χάους που αναπτύχθηκαν κατά τη διάρκεια των τριών ετών του έργου PICASSO χρησιμοποιήθηκαν σε ένα πείραμα WDM (Wavelength Division Multiplexing) στην εγκαταστημένη υποδομή οπτικών ινών που παρέχεται από την Αττική και απέδειξαν τις δυνατότητές τους για την υποστήριξη μετάδοσης μηνυμάτων σε Gb / s και την αποκωδικοποίηση μετά από 120km μετάδοσης.

Πλήρως λειτουργικοί πομποί και δέκτες μονάδων αναπτύχθηκαν σε τέσσερα γειτονικά μήκη κύματος του ITU δικτύου (100 GHz απόσταση) στη ζώνη C του παραθύρου τηλεπικοινωνιών που λειτουργούν έως και 2,4 Gb / s ανά κανάλι. Η ηλεκτρο-οπτικό

προσέγγιση αποδείχθηκε επίσης ότι παρέχει μόνο ένα κανάλι μετάδοσης και αποτελεσματική αποκωδικοποίηση στα 10 Gb/s. Η ανάλυση έδειξε την ευαισθησία των χασοτικών κυμάτων σε μη γραμμικά φαινόμενα τα οποία στρεβλώνουν τη φάση των κυμάτων διάδοσης και την ισχυρή επίδραση του θορύβου στην αποτελεσματικότητα του συγχρονισμού.



Σχήμα 3.10 Το ολοκληρωμένο σύστημα πομπού δέκτη είναι αρκετά μεγάλο στην πειραματική του μορφή, όμως στόχος είναι κάθε τσιπ να έχει, στην εμπορική του μορφή, μέγεθος λίγων δέκατων του χιλιοστού.

3.4.7 Επιτεύγματα ανά Τομέα Έρευνας

Το PICASSO είναι χωρισμένο σε 7 τομείς εργασίας τους οποίους παραθέτω παρακάτω μαζί με τους στόχους και τα επιτεύγματα του κάθε τομέα.

Τομέας 1^{ος}: Θεωρητικά-Καθορισμός Επιδόσεων που Επιδιώκονται

Η έρευνα που έγινε σε αυτόν τον τομέα αποτελείται από τα τρία θέματα παρακάτω:

- Αναφορά στη μη γραμμική δυναμική των ενσωματωμένων και υβριδικών συσκευών.
- Αναφορά στο σχεδιασμό και την αριθμητική εκτίμηση της χασοτικής κρυπτογράφησης στα επικοινωνιακά συστήματα.

- Αξιολόγηση του συστήματος επικοινωνίας που λειτουργεί με χαοτική κρυπτογράφηση.

Περιέχει επίσης τα 4 παρακάτω ορόσημα:

- Πρώτο σετ προδιαγραφών για την ενίσχυση της μη γραμμικής δυναμικής
- Κριτήρια αξιολόγησης και στόχος επιδόσεων αναγνώρισης του συγχρονισμού ανάμεσα σε ενσωματωμένους χαοτικούς ταλαντωτές.
- Προσημείωση της απόδοσης του χαοτικά κρυπτογραφημένου συστήματος μεταφοράς.
- Ανοχή ανάλυση της ασφάλειας / συγχρονισμού με σεβασμό στην αναντιστοιχία παραμέτρων ανάμεσα στις συσκευές πομπού και δέκτη.

Στα τελειώματα του έργου PICASSO οι ερευνητές που πήραν μέρος στον πρώτο τομέα επικεντρώθηκαν στην πιστοποίηση ασφαλείας και την αποτελεσματικότητα που παρέχει η χαοτική κρυπτογράφηση, σε σχέση με το πλάτος των κρυπτογραφημένων δεδομένων μηνύματος, το είδος του δέκτη κ.α.

Αναλυτικά: εφαρμόστηκαν γραμμικές και μη γραμμικές τεχνικές φιλτραρίσματος στα κρυπτογραφημένα μηνύματα με σκοπό να προσπαθήσουν να αποσπάσουν χρήσιμες πληροφορίες. Για το σύστημα CM που υιοθετείται ως βασική τεχνική διαμόρφωσης στην υλοποίηση των συστημάτων επικοινωνίας στο πλαίσιο του έργου PICASSO, απαιτούνται πλάτη τόσο μεγάλα όσο 20% προκειμένου να παραχθεί ένα σημαντικό αποτέλεσμα έτσι ώστε οι τιμές της εντροπίας και της πολυπλοκότητας να είναι στατιστικά διακριτές. Οι διακρίσεις ανάμεσα στους εξουσιοδοτημένους και μη εξουσιοδοτημένους δέκτες χρησιμοποιήθηκαν προκειμένου να παραχθεί ένας ορισμός της ασφάλειας και να οριστούν οι προϋποθέσεις για τη δημιουργία ενός ασφαλούς συστήματος. Επιπλέον, μια σύγκριση στην επίδοση μεταξύ δεκτών ανοικτού και κλειστού κυκλώματος στα συστήματα επικοινωνίας χρησιμοποιήθηκε επίσης για να συνεισφέρει στις πτυχές ασφαλείας των συστημάτων αυτών.

Τα τελικά αποτελέσματα δείχνουν σαφώς ότι το κλειστό κύκλωμα αποδίδει πολύ καλύτερα όταν φτάνει πολύ υψηλότερους Q-παράγοντες (μεγαλύτε-

ρους από 10) ακόμα και για πλάτος τόσο μικρό όσο 2,5%. Απ' την άλλη το ανοιχτό κύκλωμα μπορεί να φτάσει Q-παράγοντες της τάξεως ~ 5 για πλάτος μηνυμάτων της τάξεως του 15% που είναι πολύ μεγάλο για να κρυπτογραφήσεις ένα μήνυμα αφού μία διαδικασία γραμμικού φιλτραρίσματος θα μπορούσε να ανακτήσει τις ίδιες πληροφορίες από το δέκτη.

Εν κατακλείδι, οι ερευνητές που ασχολήθηκαν με αυτόν τον τομέα έχουν αναλύσει αριθμητικά πολλές πτυχές των τηλεπικοινωνιακών συστημάτων που βασίζονται στο χάος επικεντρώνοντας την προσοχή τους κυρίως στις δυναμικές ιδιότητες των ενσωματωμένων και υβριδικών συσκευών που υπόκεινται σε όλες τις οπτικές αναδράσης. Τα κύρια συμπεράσματα που μπορούμε να βγάλουμε από αυτή την ανάλυση είναι:

- Ενσωματωμένα χαοτικά κυκλώματα με βελτιωμένη δυναμική είναι πιθανό να παρέχονται έτσι ώστε ο χρόνος μετάβασης μετ' επιστροφής στην εξωτερική κοιλότητα να μην είναι μεγαλύτερος από 200ps (\sim Μήκους 1 cm από ημιαγωγίμο υλικό).
- Μηνύματα με πλάτος της τάξεως του $\sim 2-4\%$ είναι ζωτικής σημασίας για να κρύψουμε το την κωδικοποιημένη πληροφορία στον χαοτικό φορέα. Διαφορετικά ούτε γραμμικές ούτε μη γραμμικές μέθοδοι θα μπορούν αφαιρέσουν την πληροφορία.
- Η χρήση κλειστών κυκλωμάτων είναι απαραίτητη για αυτό το σκοπό.
- Η διαμόρφωση του υποφορέα έχει τη δυνατότητα να κρύψει πολύ μεγαλύτερα μηνύματα σε σύγκριση με την βασική προσέγγιση.
- Προβλήματα μετάδοσης υποβαθμίζουν το SNR κατά τη διάρκεια διάδοσης ειδικά ενισχυμένης εκπομπής λόγω οπτικών ενισχυτών σε συνδυασμό με μη γραμμικά φαινόμενα που διαταράσσουν τη φάση των χαοτικών σημάτων.
- Γενικότερα για μια επιτυχημένη εξαγωγή μηνύματος απαιτούνται ταιριαστά ζευγάρια (μέσα σε μικρό ποσοστό αναντιστοιχιών) με οπτικο-ηλεκτρικό σύστημα ανάδρασης να είναι πιο ευαίσθητο στις αναντιστοιχίες παραμέτρων σε σχέση με την προσέγγιση στα αμιγώς οπτικοί ανάδραση.

- Νέες έννοιες που εκμεταλλεύονται την φάση ευαισθησίας της φύσης του συγχρονισμού στα κλειστά κυκλώματα μπορούν να ενισχύσουν τις δυνατότητες την έννοια του χαοτικού συγχρονισμού από πλευράς ασφάλειας και πιστοποίησης.

Τομέας 2^{ος}: Σχεδιασμός Συσκευών

Κατά την διάρκεια του πρότζεκτ ο 2^{ος} τομέας ανέλαβε όλες τις δραστηριότητες που σχετίζονται με τον σχεδιασμό όλων των παραλλαγών των χαοτικών συσκευών που κατασκευάζονται στο πλαίσιο του PICASSO. Σε αυτό τον τομέα διεξήχθησαν λεπτομερείς αριθμητικές προσημειώσεις και σχεδιάστηκαν εφαρμογές με σκοπό την αξιολόγηση και βελτιστοποίηση της απόδοσης των ρυθμίσεων που χρησιμοποιήθηκαν στο πρότζεκτ. Ονομαστικά: αμιγώς οπτικά ενσωματωμένα και υβριδικά ενσωματωμένα λέιζερ, οπτικο-ηλεκτρική διάταξη.

Για την προσέγγιση του ολοκληρωμένου υβριδικού λέιζερ αμιγώς οπτικής ανάδρασης:

- Προτάθηκαν τρία είδη ημιαγωγικών λέιζερ με υψηλή ευαισθησία στην οπτική **ανάδραση**. Το πρώτο είναι ένα συνηθισμένο ενός τμήματος DFB λέιζερ και το δεύτερο είναι ένα δύο τμημάτων λέιζερ που περιλαμβάνει ένα ενεργό DFB και ένα παθητικό Μετατροπέα μέγεθους κηλίδας. Το προτεινόμενο σχέδιο αφορά ημιαγωγούς κορυφογραμμών κυματοδηγού διόδων λέιζερ με **Fabry-Perot (FP)** γεωμετρικές κοιλότητες η οποία με την εφαρμογή ενός μικρού αριθμού των τοπικών ανωμαλιών του δείκτη διάθλασης κατά μήκος της κοιλότητας, μετατρέπονται σε μονότροπα λέιζερ. Η μετέπειτα επεξεργασία αυτού του τύπου πάνω από το πρότυπο DFB / DBR τεχνολογία που απαιτεί περαιτέρω στάδια της ανάπτυξης του.
- Ο σχεδιασμός της κοιλότητας με βάση την ίνα οδηγεί προς μία «ολοκληρωμένη» μονάδα ίνας για να επικοινωνεί απευθείας με το λέιζερ παράγοντας μία ενιαία ενότητα λέιζερ/κοιλότητας. Η ιδέα κλειδί είναι να χρησιμοποιηθεί μία τεχνολογία οπτικής ίνας περιοδικού πεδίου για να παραχθούν όλα τα απαραίτητα εξαρτήματα που απαιτούντε για την παραγωγή χάους και ελέγχου. Η τεχνολογία έχει πρόσβαση σε περιοδικά πεδία του κύματος μετάδο-

σης μέσω ίνας αφαιρώντας την επένδυση κατά ένα μικρό μήκος της ίνας με ακρίβεια με λίγων μικρομέτρων του πυρήνα.

Για την προσέγγιση του ολοκληρωμένου μονολιθικού λέιζερ αμιγώς οπτικής ανάδρασης:

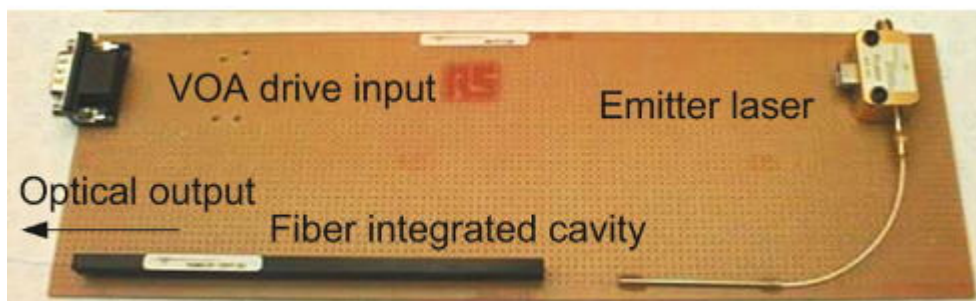
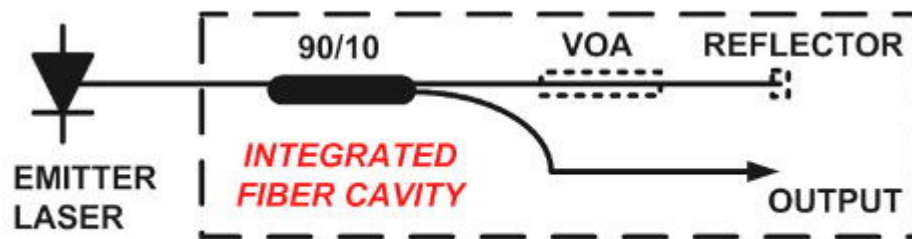
- Σχεδιάστηκε μία αμιγώς οπτική ανάδραση «ευθύ κυματοδηγού» βασισμένη σε θαμμένο ετερόδρομο DFB λέιζερ συμπεριλαμβανομένου ενός μεταβλητού οπτικού εξασθενητή, ενός μεταγωγέα φάσης, και ενός τμήματος παθητικού κυματοδηγού με μήκος 1 εκ που σχηματίζουν τον εσωτερικό ταλαντωτή.
- Παρουσιάστηκε η αμιγώς οπτική ανάδραση «διάκενου αέρος» βασισμένη σε θαμμένο ετερόδρομο DFB λέιζερ συμπεριλαμβανομένου ένα 5 mm παθητικό κυματοδηγό με ένα τμήμα φάσης μεταξύ ενός διάκενου αέρος και ενός δεύτερου τμήματος φάσης 5 mm μακρύ παρουσιάστηκαν σαν μία νέα προηγμένη έννοια σε όρους της ενισχυμένης χαστικής πολυπλοκότητας. Σχετικά με την εναλλακτική προσέγγιση διάκενο αέρος, η μάσκα σχεδιάστηκε για να δείχνει τους δύο χωριστούς κυματοδηγούς που επάγουν τις δύο διαφορετικές χρονικές καθυστερήσεις. Μεγαλύτερη προσοχή δόθηκε στο διάκενο αέρα και το μήκος του με λεπτομερείς προσομοιώσεις όσον αφορά την αποτελεσματικότητα εναντίον της σύζευξης του πλάτους διακένου αέρος μαζί με την επίδραση του βάθους χάραξης και το μήκος του τελευταίου. Η προαναφερθέντα προσομοιώθηκαν και σχεδιάστηκαν έτσι ώστε να οδηγήσουν σε επαρκή σύζευξη ανάμεσα στον δεύτερο κυματοδηγό και στο διάκενο αέρος.

Για την προσέγγιση του ολοκληρωμένου μονολιθικού λέιζερ ηλεκτρο-οπτικής ανάδρασης:

- Όσον αφορά την ηλεκτρο-οπτική περίπτωση αποφασίστηκε να κατασκευαστεί και να δοκιμαστεί ένα ολοκληρωμένο τσιπ το οποίο να περιλαμβάνει τρία διαφορετικά στοιχεία του εκπομπού: το dfb λέιζερ, η φάση χαστικού μεταλλάκτη, το μήνυμα φάσης μεταλάκτη. Αποφασίστηκε η εφαρμογή ενός απ' τα στοιχεία κλειδιά της διαδικασίας φάσης παραγωγής χάους, το ισόρροπο συμβολόμετρο που εκτελεί τη μη γραμμική φάση για την μετατροπή

της έντασης. Η μάσκα έχει σχεδιαστεί με τους δύο διαμορφωτές φάσεως και το λέιζερ και τελικώς διαφορετικές υλοποιήσεις έχουν σχεδιαστεί για την βασισμένη σε ένα μη γραμμική φάση στην ένταση μη γραμμικής μετατροπής. Η διαδικασία κατασκευής έδειξε την αυξημένη δυσκολία της ενσωμάτωσης των δύο διαμορφωτών φάσης, μαζί με ένα ημιαγωγικό λέιζερ στο ίδιο τσιπ και επειδή η συσκευή δεν θα είναι εξ ολοκλήρου ενσωματωμένη, αποφασίστηκε να αποδειχθεί το καθεστώς αυτό με διακριτά στοιχεία. Η καθυστέρηση συμβολόμετρων του συστήματος ΕΟ είχαν κατασκευαστεί από PhX αξιοποιώντας την τεχνολογία οπτικών ινών αποσβενόμενου τομέα.

- Το λέιζερ δύο περιοχών σχεδιάστηκε σύμφωνα με αριθμητικές προσομοιώσεις / προβλέψεις που αφορούν πρώτον την αναλογία των δύο μηκών κοιλότητας. Επίσης, η διαφορά χαρακώματος σχεδιάστηκε και αυτή έτσι ώστε να έχει ως αποτέλεσμα την μέγιστη σύζευξη και τη δύναμη ανάδρασης που θα μεταδόση το σύστημα ευκολότερα στα μη γραμμικά καθεστάτα. Επίσης, θεωρήθηκαν εναλλακτικές έννοιες σχετικά με τη μια από τις δύο περιοχές έτσι ώστε να είναι ένα FP ή μία περιοχή DM.

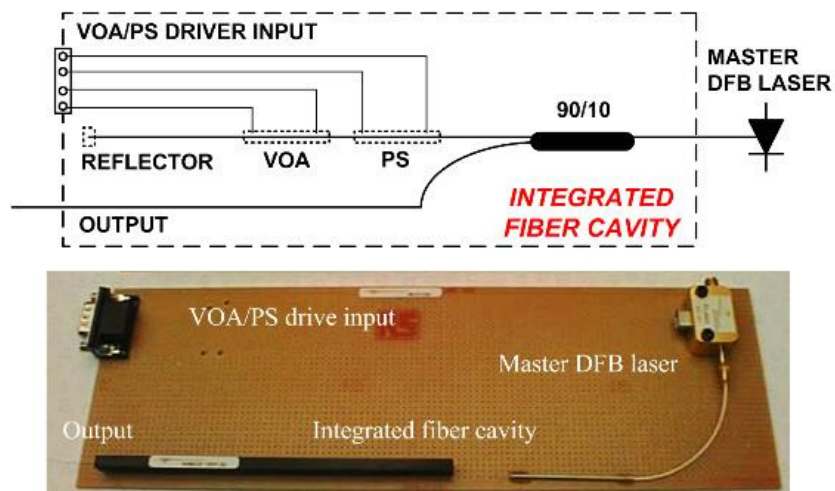


Σχήμα 3.11 Εικόνα πομπού λέιζερ

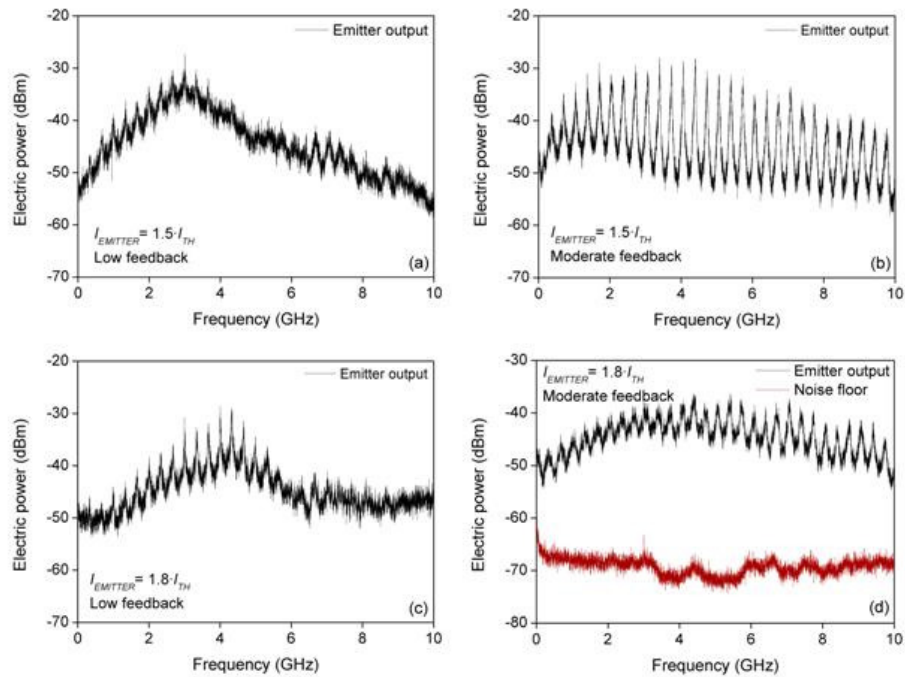
Τομέας 3^{ος} : Ανάπτυξη Συσκευών Και Κατασκευή Ολοκληρωμένων Υβριδικών Κυκλωμάτων.

ο 3^{ος} τομέας έρευνας επικεντρώθηκε στην παραγωγή των διακριτών συσκευών λέιζερ και των μικροσκοπικών κοιλοτήτων ίνας του πειραματικού χαρακτηρισμού των πρώτων παρεχόμενων υβριδικών χασοτικών γεννητριών.

Κατασκευάστηκαν συσκευές προ χαρακτηρισμένες, επιλεγμένες και τελικά συσκευασμένες σε ενότητες μέχρι το τέλος του πρώτου έτους. Δόθηκαν επιπλέον συσκευές για τα πειράματα αξιολόγησης της ασφάλειας που ολοκληρώθηκαν κατά τη διάρκεια του τρίτου έτους. Επιπλέον, τα δύο πρώτα σετ Eblana λέιζερ με βαθμιαία αποκλινοόμενα μακροσκοπικά χαρακτηριστικά που συσκευάζονται έτσι ώστε να ενσωματωθεί με την υβριδική κοιλότητα εκπονήθηκε από ΡΗΧ.



Σχήμα 3.12 Σχηματική αναπαράσταση (επάνω) και φωτογραφιών (κάτω) ενός υβριδικού ολοκληρωμένου πομπού με ένα DFB-QW λέιζερ και όλες τις οπτικές ανάδραση.



Σχήμα 3.13 Πειραματικά φάσματα μικροκυμάτων της υβριδικής συσκευής οπτικής εξόδου για διάφορες τρέχουσες τιμές λέιζερ και πλεονεκτήματα οπτικής ανάδρασης.

Οι κοιλότητες ινών χτίστηκαν και βελτιστοποιήθηκαν σύμφωνα με τις παρατηρήσεις που πραγματοποιούνται μέσω του 5^{ου} τομέα έρευνας και με βάση τις κατευθυντήριες γραμμές για το σχεδιασμό του 2^{ου} τομέα έρευνας.

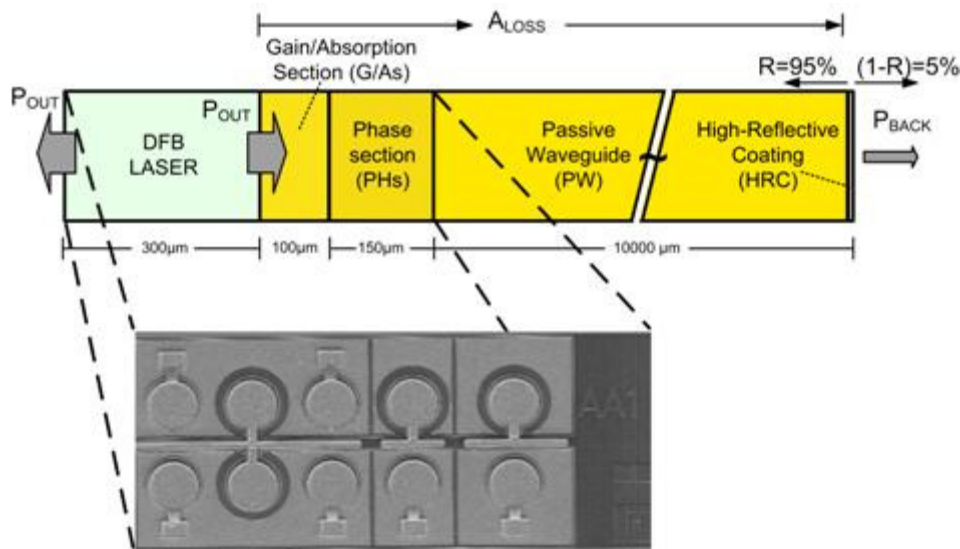


Σχήμα 3.14 Φωτογραφία του ζεύγους του υβριδικού ολοκληρωμένου πομπού / δέκτη με ταιριαστά DFB-QW λείζερ.

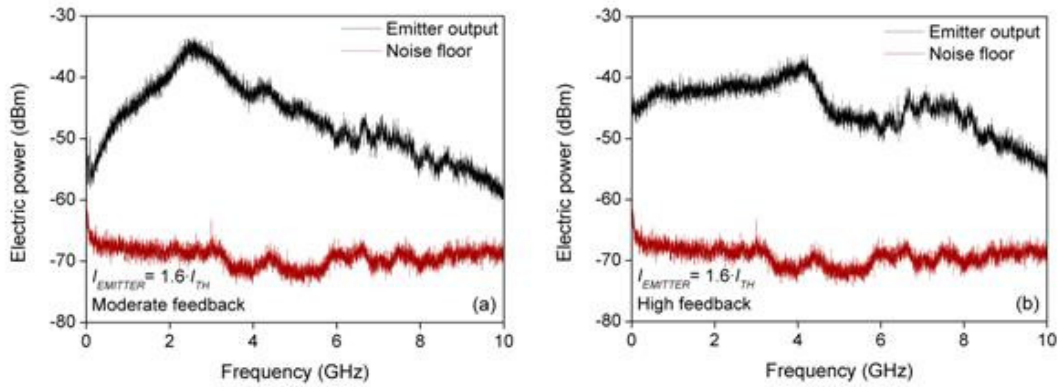
Τέλος, τα συμβολόμετρα Michelson που απαιτούνται στην ηλεκτρο-οπτική γεννήτρια φάσης χάους κατασκευάστηκαν και δοκιμάστηκαν με επιτυχία όσον αφορά τον λόγο σύζευξης και τον συντελεστή ανισορροπίας.

Τομέας 4^{ος} : Ανάπτυξη Συσκευών Και Κατασκευή Ολοκληρωμένων Μονολιθικών Κυκλωμάτων.

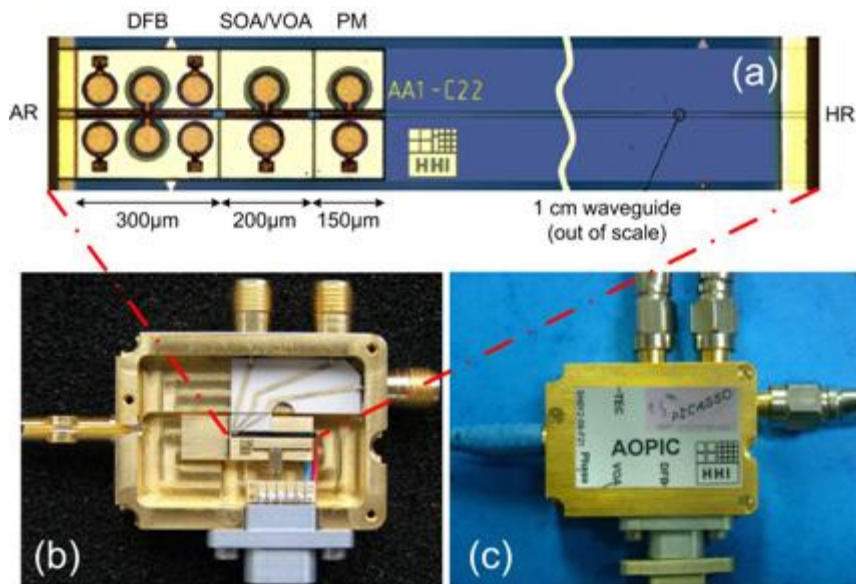
Διάφορα πλακίδια που περιέχουν την ευθεία κυματοδηγού ~ και η προσέγγιση διάκενου αέρος έχουν κατασκευαστεί και στη συνέχεια παραδόθηκαν στους ερευνητές επιτυχώς. Ειδική προσοχή δόθηκε στην αξιόπιστη και επαναλήψιμη διαδικασία κατασκευής. Μια τροποποιημένη μάσκα επέτρεψε την κατασκευή των πολύ συμπαγών διάκενων αέρος στην κλίμακα των προβαλλόμενων μικρομέτρων σύμφωνα με τους κανόνες σχεδιασμού του 2^{ου} τομέα έρευνας. Εταίροι από την ΗΗΙ ήταν υπεύθυνοι τον τελευταίο χρόνο για τη μονάδα συναρμολόγησης. Δύο ζεύγη ειδικά επιλεγμένων συσκευών - με ευθύ κυματοδηγό - ήταν στριφογυρίστηκαν και συσκευάστηκαν σε ενότητες για να επιτραπεί η χρήση τους σε ένα πείραμα του συστήματος. Ακόμα κι αν είναι δύσκολο για ένα ερευνητικό ινστιτούτο, έγινε μια προσπάθεια παροχής απόδοσης και το κόστους για τις συνθετικές ενότητες.



Σχήμα 3.15 Σχηματικό διάγραμμα (επάνω) και φωτογραφία (κάτω) του μονολιθικού PIC που περιλαμβάνει: ένα InGaAsP DFB λείζερ, ένα 100μm κέρδους / απορρόφησης τμήμα, ένα τμήμα φάσης και 1 εκατοστό παθητικού κυματοδηγού. Το άκρο του κυματοδηγού είναι υψηλής αντανάκλασης επίστρωση.



Σχήμα 3.16 Πειραματικό Φάσμα μικροκυμάτων της μονολιθικής συσκευής PIC οπτικής εξόδου για δύο διαφορετικά επίπεδα ισχύος οπτικής ανάδρασης: ~ 3,3% (a) και ~ 5% (b).



Σχήμα 3.17 Ενσωματωμένη Φωτονική μονολιθική Γεννήτρια: (b) Η συσκευή αποτελείται από ένα λέιζερ DFB που σχηματίζει μια εξωτερική οπτική κοιλότητα με την οπίσθια όψη του PIC που είναι ιδιαίτερα ανακλαστική επίστρωση (IA), η κοιλότητα περιλαμβάνει επίσης διάφορες ενεργές / παθητικές περιοχές, όπως μία περιοχή μεταβλητού κέρδους/απορρόφησης (SOA / VOA), ένα τμήμα φάσης (PM) και ένα κυματοδηγό μήκους 1 εκατοστό. Η έξοδος του οπτικού σήματος εκπέμπεται από την εμπρόσθια αντί-ανακλαστική (AA) όψη του DFB λέιζερ. (b) Η εσωτερική δομή της μονάδας συσκευασίας: Μικρο-ταινίες γραμμές συνδέουν τα διαφορετικά ενεργά τμήματα του PIC με θύσματα SMA, ενώ η θερμοηλεκτρική ψύξη της συσκευής παρέχει εξαιρετικά σταθερό έλεγχο θερμοκρασίας. (c) Συσκευασμένο μονάδα.

Τομέας 5^{ος}: Χαρακτηρισμός των συσκευών και την αξιολόγηση της απόδοσης συγχρονισμού.

Το έτος 1 του έργου τρεις εργολήπτες, ΝΚΥΑ, UWB και UNIPV-DE ανέλαβαν τον εκτεταμένο χαρακτηρισμό των λέιζερ όπως οι εξής:

- Χαρακτηρισμός της υβριδικής ενσωματωμένης κοιλότητας αναπτύχθηκε από ΡΗΧ.
- Μελέτη παραγωγής χάους των λέιζερ συζευγμένο με την κοιλότητα ΡΗΧ.
- Μελέτη της αποτελεσματικότητας παραγωγής χάους στον ανοιχτό βρόχο διαμόρφωσης.
- Χαρακτηρισμός των λέιζερ και εξαγωγή των παραμέτρων.
- Χαρακτηρισμός των σταδιακά αποκλίνοντων λέιζερ και εξαγωγή των παραμέτρων.

Οι δραστηριότητες αφιερώθηκαν στο χαρακτηρισμό των δύο οικογενειών laser - τα DFB λέιζερ που παρέχονται από FHG (HHI) και τα μονότροπα Fabry-Perot λέιζερ που παρέχονται από EBL. Οι κύριες παράμετροι αυτών των συσκευών έχουν μετρηθεί. Επίσης, αυτά τα λέιζερ έχουν δοκιμαστεί ως γεννήτριες χάους σε μια καθυστερημένη οπτική διαμόρφωση ανάδρασης. Τέλος, ορισμένες προκαταρκτικές δοκιμές συγχρονισμού μερικών ζευγών λέιζερ των ανωτέρω τύπων έχουν πραγματοποιηθεί σε ένα κλειστό βρόχο, μικρή κοιλότητας ρύθμιση, καθώς επίσης και σε ένα ανοικτό βρόχο, υβριδικά ολοκληρωμένο πλαίσιο κοιλότητας. Στην περίπτωση του λέιζερ HHI, η ποιότητα συγχρονισμού έχει δοκιμαστεί σε διαφορετικά ζεύγη με παραμέτρους που αποκλίνουν βαθμιαία. Έχει βρεθεί ότι για τα λέιζερ που προέρχονται από το ίδιο πλακίδιο η διαφορική αποτελεσματικότητα (κλίση P εναντίον της I καμπύλης) αποτελεί τη βασική παράμετρο που πρέπει να ταιριάζει για να επιτευχθεί συγχρονισμός.

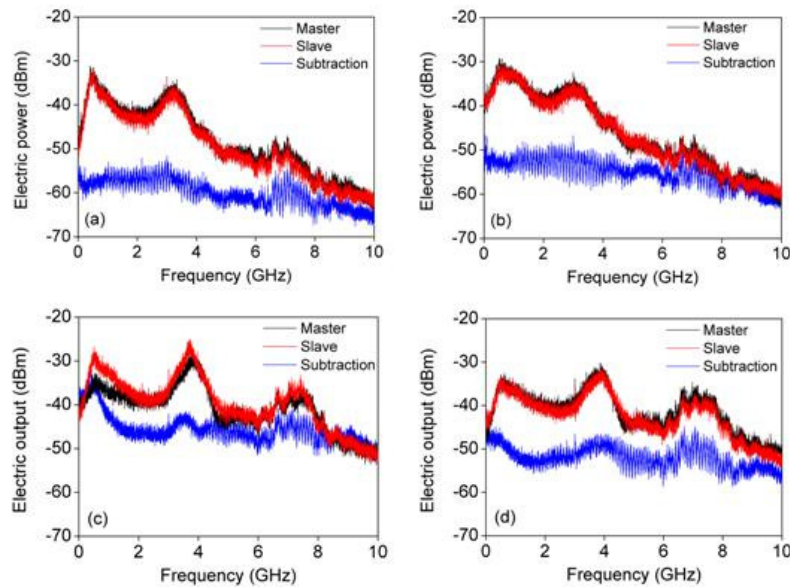
Η ουσία του δεύτερου έτους του σχεδίου αφορούσε τους πλήρεις χαρακτηρισμούς των ενσωματωμένων εξαρτημάτων και τα δομικά στοιχεία τους επικεντρώνοντας στις ιδιότητες συγχρονισμού των συζευγμένων συστημάτων.

Στο πλαίσιο αυτό εισφορές από τους εταίρους ήταν επικείμενη ως εξής:

- NKUA, UWB και UNIPV-DE συνέβαλαν στις δραστηριότητες χαρακτηρισμού των λέιζερ που χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση της υβριδικής ενσωματωμένης.
- UWB και UNIPV-DE συνέβαλαν με τις μετρήσεις συγχρονισμού μεταξύ *σολιτονικών* συσκευών λέιζερ που παρέχονται από την HHI και EBL εταίρους.
- NKUA συνέβαλε επίσης στις μετρήσεις συγχρονισμού για τα λέιζερ που συνδέονται με τις υβριδικές κοιλότητες καταγράφοντας ελπιδοφόρα αποτελέσματα όσον αφορά την παραγωγή χάους και συγχρονισμού.

- ΝΚΥΑ και UNIPV-DE συνέβαλαν επίσης στις ιδιότητες χαρακτηρισμού και συγχρονισμού μεταξύ μονολιθικών ενσωματωμένων συσκευών που παρέχονται από την ΗΗΙ. Τα πειραματικά αποτελέσματα δείχνουν ότι ο σχεδιασμός και η κατασκευή των μονολιθικών ενσωματωμένων χαοτικών συσκευών είναι επιτυχής έχοντας επιτύχει ευρεία ποικιλία στη μη γραμμική δυναμική και ισχυρό συγχρονισμό μεταξύ ταιριαστών συσκευών.

- Η UFC συνέβαλε στις μετρήσεις χαρακτηρισμού σχετικά με τις ηλεκτροπτικές συσκευές που κατασκευάζονται από την ΗΗΙ. Έχουν προκύψει θέματα που αφορούν την ηλεκτρική και οπτική απόδοση των κατασκευασμένων συσκευές.



Σχήμα 3.18 Συγχρονισμός μεταξύ χαοτικών φορέων που εκπέμπονται από το αντίστοιχο ζεύγος PICs: Φασματική κατανομή των χαοτικών σημάτων που εκπέμπονται από PIC του πομπού (μαύρο), το PIC του δέκτη (κόκκινο) και η αφαίρεση τους στο δέκτη (μπλε) για με διάφορες καταστάσεις λειτουργίας: (a) $I_L, M=30\text{mA}$, $I_L, S=26.5\text{mA}$, $VVOA, M, S=0\text{V}$, $IPH, M=3\text{mA}$, $IPH, S=0\text{mA}$. (b) $I_L, M=30\text{mA}$, $I_L, S=26.5\text{mA}$, $VVOA, M, S=0\text{V}$, $IPH, M=4.8\text{mA}$, $IPH, S=0.2\text{mA}$. (c) $I_L, M=25\text{mA}$, $I_L, S=22.7\text{mA}$, $ISOA, M, S=0.1\text{mA}$, $IPH, M=3.8\text{mA}$, $IPH, S=0\text{mA}$. (d) $I_L, M=25\text{mA}$, $I_L, S=22.7\text{mA}$, $ISOA, M=0.1\text{mA}$, $ISOA, S=1.1\text{mA}$, $IPH, M=3.6\text{mA}$, $IPH, S=0\text{mA}$. (I_L , i : ρεύμα DFB λέιζερ, $VVOA$, i : απορροφητής αντίστροφης τάσης, $ISOA$, i : ενισχυτικό τμήμα ρεύματος, IPH , i : το τμήμα τριφασικού ρεύματος, M (master), S (σκλάβος)).

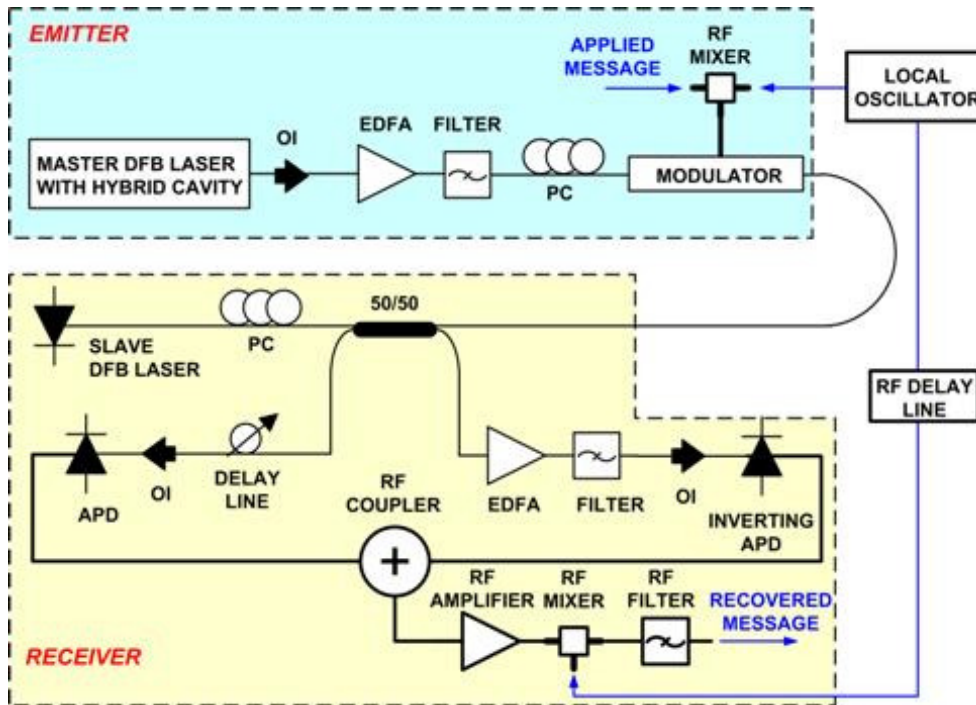
Τα τελικά επιτεύγματα του τρίτου έτους στον 5^ο τομέα έρευνας αναφέρονται στους πλήρεις χαρακτηρισμούς των ενσωματωμένων εξαρτημάτων και την επιλογή των πλέον κατάλληλων για τη συσκευασία ζευγών συσκευών. Η επιλογή αυτή βασίζεται

όχι μόνο για τις εγγενείς παραμέτρους τους και τα λειτουργικά χαρακτηριστικά τους, αλλά και στην απόδοση συγχρονισμού τους. Επιπλέον, έχουν γίνει μετρήσεις για το συγχρονισμό και την κρυπτογράφηση / εξαγωγή των δεδομένων χρησιμοποιώντας μη-ταυτόσημους δέκτες (απαράμιλλες ενσωματωμένες συσκευές και εντελώς διαφορετικά λέιζερ από άλλους προμηθευτές) προκειμένου να εκτιμηθεί η ασφάλεια που προσφέρει η τεχνική χαοτικής κρυπτογράφησης χρησιμοποιώντας τις ενσωματωμένες μονάδες.

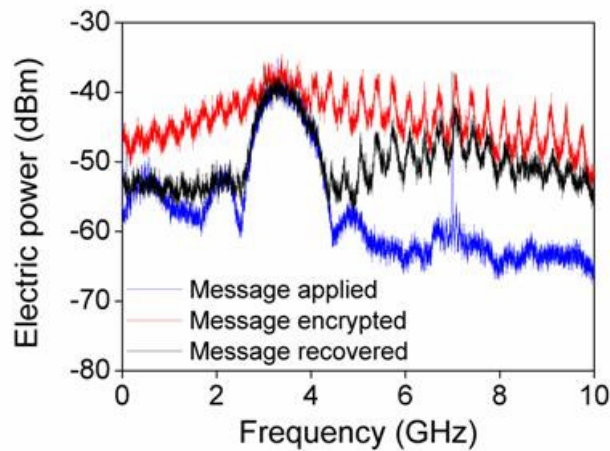
Τομέας 6^{ος} : Ανάπτυξη του συστήματος και μονοσάνδαλης λειτουργίας

Στο πλαίσιο των δραστηριοτήτων του 6^{ου} τομέα για το τρίτο έτος πραγματοποιήθηκαν , η ανάπτυξη του πομπού και του δέκτη του υποσυστήματος - με βάση τα ενσωματωμένα υβριδικά, ενσωματωμένα μονολιθικά αμιγώς-οπτικά και ηλεκτροοπτικές διαμορφώσεις -, η ανάπτυξη των συστημάτων επικοινωνίας, καθώς και point-to-point μονοκάναλη λειτουργία των συστημάτων αυτών χρησιμοποιώντας ένα σύνδεσμο ίνας μετάδοσης.

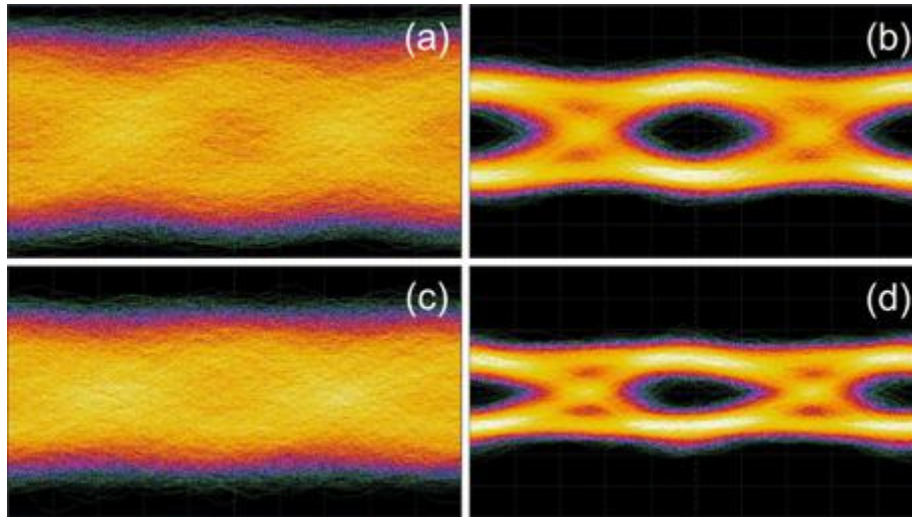
- ΝΚΥΑ ανέπτυξε ένα υβριδικό υποσύστημα πομπού / δέκτη, με λέιζερ που παρέχονται από την EBL και ΗΗΙ. Επιχειρήθηκε ο συγχρονισμός των υβριδικών υποσυστημάτων πομπού / δέκτη για τις κοιλότητες με τα ΗΗΙ λέιζερ και επιτεύχθηκε αποτελεσματική κρυπτογράφηση / αποκρυπτογράφηση μηνυμάτων σε ανοικτή διαμόρφωση βρόχου. Χρησιμοποιήθηκε ένας υπο-μεταφορέας στις τεχνικές διαμόρφωσης για την κρυπτογράφηση / αποκρυπτογράφηση μηνυμάτων ως μια πιο αποτελεσματική μέθοδο αποδεικνύοντας για πρώτη φορά αποκωδικοποιημένα μήνυμα χωρίς λάθη για 1Gb / s μήνυμα (BER <10⁻¹¹) σε συνδυασμό με την τέλεια επικάλυψη του μηνύματος εντός του εκπεμπόμενου χαοτικού σήματος.



Σχήμα 3.19 Πειραματική διάταξη για το επί τόπου χαοτικό σύστημα οπτικής επικοινωνίας χρησιμοποιώντας μια τεχνική υποφέρουσας διαμόρφωσης. ΟΙ: οπτικό μονωτή, 90/10 και 50/50: οπτικών ζευκτών, Τ.Κ.: ελεγκτής πόλωσης, EDFA: έρβιο-ενισχυμένος ενισχυτής ινών, APD: οπτικός δέκτης τεχνολογίας χιονοστοιβαδος



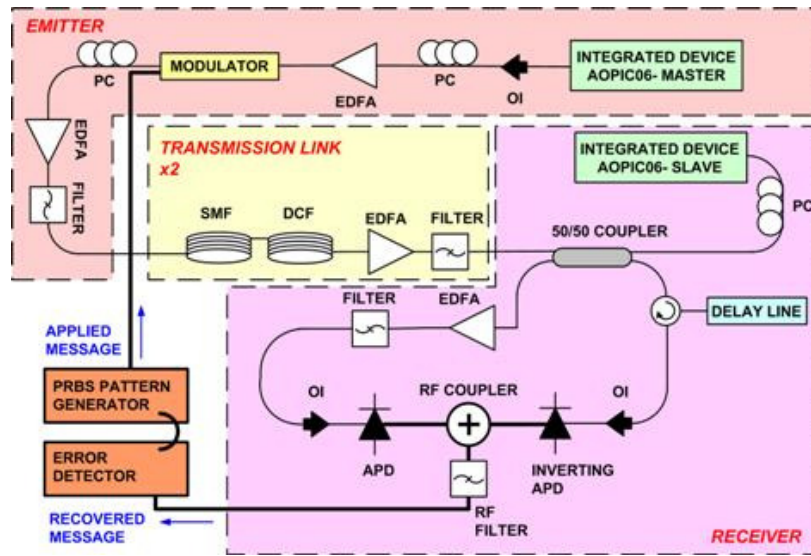
Σχήμα 3.20 Φασματική κατανομή του εφαρμοσμένου ($BER \sim 10^{-12}$), κρυπτογραφημένου ($BER \sim 10^{-1}$) και ανακτημένου ($BER \sim 10^{-11}$) 1Gbps μηνύματος χρησιμοποιώντας υποφέρουσα διαμόρφωση στα 3.5GHz.



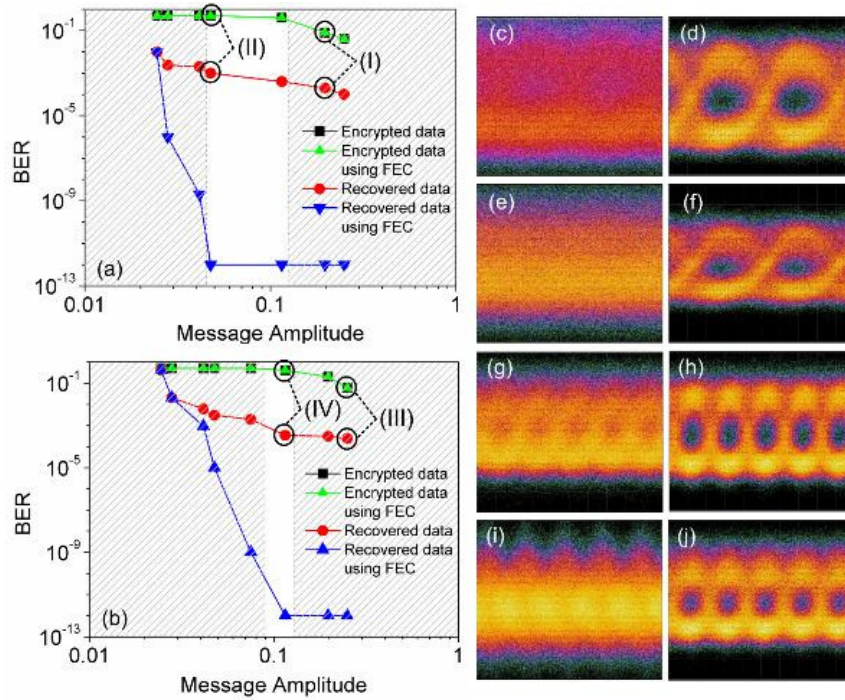
Σχήμα 3.21 Διαγράμματα ματιού του 1Gb / s υποφέροντος κρυπτογραφημένου μήνυμα τος με το αρχικό SNR (a) 22dB ($BER \sim 10^{-2}$) και (c) 20dB ($BER \sim 10^{-1}$), και το αντίστοιχο ανακτημένο μήνυμα για τις ίδιες υποθέσεις SNR (b) 22dB ($BER \sim 10^{-12}$) και (d) 20dB ($BER \sim 10^{-11}$). (κάθετος άξονας: 50mV/div, οριζόντιος άξονας: 200ps/div).

Ενσωματωμένες μονολιθικές μονάδες πομπού / δέκτη αναλύονται διεξοδικά όσον αφορά τις επιδόσεις τους, όπως πομποδέκτες τηλεπικοινωνιακού χάους. Μετά από τον συνεπή χαρακτηρισμό των δεκάδων συσκευών των ΝΚUA και UNIPV-DE, όσον αφορά τοις λειτουργίας τους, καθώς και τα δυναμικά χαρακτηριστικά τους, δύο αντίστοιχα ζεύγη των συσκευών έχουν σταλεί για τη συσκευασία από την ΗΗΙ, προκειμένου να συμπεριληφθούν ως πομποί και δέκτες του συστήματος μετάδοσης. Αυτοί οι ενσωματωμένοι μονολιθικοί χασοτικοί (pics) πομποί / δέκτες έχουν διατεθεί για την πλήρη εφαρμογή της χασοτικής επικοινωνίας σε μονό κανάλι μετάδοσης. Το σύστημα που δοκιμάστηκε στις εγκαταστάσεις τις ΝΚUA περιλαμβάνει μετάδοση μέσω οπτικών ινών μέχρι 100km, με την απώλεια ενέργειας και την αποζημίωση διασποράς. Οι ροές δεδομένων των 1.25Gb / s και 2.5Gb / s που χρησιμοποιήσαν τεχνικές διαμόρφωσης βασικής συχνότητας έχουν εφαρμοστεί με επιτυχή ανάκτηση στο δέκτη με χρήση των forward-error-correction (FEC) τεχνικές. Επιπλέον, έχουν εφαρμοστεί υποφέρουσες τεχνικές διαμόρφωσης στα συστήματα μετάδοσης με ποσοστά bit δεδομένων έως 1Gb / s. Η μέθοδος FEC, εκτός από την βελτίωση της απόδοσης ανάκτησης στο δέκτη, χρησιμοποιήθηκε ως ένα μέσο για να ορίσει ένα "ψηφιακό κατώφλι" για την ασφάλεια του συστήματος αυτού. Οι εξουσιοδοτημένοι χρήστες με τους ίδιους δέκτες μπορούν να έχουν πρόσβαση την ανάκτηση κάτω από αυτό το όριο, και, συνεπώς, χωρίς σφάλματα λειτουργίας, ενώ η μη εξουσιοδοτημέ-

νοι χρήστες με ανάκτηση δεδομένων πάνω από αυτό το όριο θα έχουν λάθη στο κανάλι υποκλοπών τους.



Σχήμα 3.22 Τοπολογία πειραματικής χαοτικής ασφαλής μετάδοσης δεδομένων με τη χρήση PIC γεννητριών χάους: Οι ακολουθίες δεδομένων που εφαρμόζονται στο χαοτικό φορέα που δημιουργείται από PIC του πομπού (*master*) μέσω της εξωτερικής διαμόρφωσης. Μετά από 100 χιλιόμετρα μετάδοσης σε οπτικές ίνες με συνδέσμους αντισταθμιζόμενης διασποράς, 150iW του μεταδιδόμενου χαοτικού σήματος εγχύεται στο PIC του δέκτη (*σκλάβος*) αναγκάζοντας το να συγχρονιστεί με τις χαοτική δυναμική της εγχυμένης εισόδου. Η αφαίρεση μεταξύ του μεταδιδόμενου χαοτικού φορέως με το κρυπτογραφημένο μήνυμα και ο τοπικά παραγόμενος χαοτικός φορέας στο δέκτη οδηγεί σε ακύρωση του χαοτικού φορέως και την ανάκτηση ηλεκτρικών δεδομένων. (λεπτές γραμμές: οπτικές ίνες, παχιές γραμμές: ηλεκτρικά καλώδια, OI: οπτικό απομονωτή, P.C.: ελεγκτής πόλωσης, EDFA: έρβιο-ενισχυμένες ίνες ενισχυτή, SMF: μονότροπη ίνα, DCF: αντισταθμιστής διασποράς ινών, 50/50: οπτικό συζευκτή, APD: οπτικός δέκτης τεχνολογίας χιονοστοιβαδος).



Σχήμα 3.23 Η απόδοση του συστήματος όσον αφορά την κρυπτογράφηση και την ανάκτηση δεδομένων: Bit-error-rate (BER) μετρήσεις σε σχέση με δεδομένα πλάτους (a) 1,25 Gb / s και (b) 2.5Gb / s PRBS. Το διαγράμματα μάτιου για τα κρυπτογραφημένα (αριστερή στήλη) και ανακτημένα (δεξιά στήλη) δεδομένα που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις I-IV του (a) και (b) εμφανίζονται διαδοχικά ((c) - (j)). Οι περιπτώσεις II και IV επιλέγονται μέσα σε ένα παράθυρο λειτουργίας που διασφαλίζει την πλήρη κρυπτογράφηση με $BER \sim 0.5$ ((e) και (i)), ενώ τα δεδομένα που ανακτήθηκαν έχουν μια εγγενή τιμή BER κάτω των 10^{-3} ((f) και (j)), η οποία ενισχύεται από FEC μεθόδους λειτουργίας χωρίς λάθη. Για μεγαλύτερα πλάτη μηνυμάτων (περιπτώσεις I και III), η πιθανότητα σφάλματος για τα κρυπτογραφημένα δεδομένα είναι κάτω από 0,5 ((γ) και (ζ)) παρέχοντας μειωμένη ασφάλεια, διατηρώντας ωστόσο την χωρίς λάθος ανάκτηση δεδομένων.

Η ίδια ζεύξη μετάδοσης στις ίδιες εγκαταστάσεις χρησιμοποιήθηκε, προκειμένου να αναπτυχθεί ένα ενιαίο λειτουργικό σύστημα καναλιών που χρησιμοποιεί το χαοτικές οπτοηλεκτρονικές συσκευές και DPSK τεχνικές διαμόρφωσης. Το σύστημα αυτό λειτουργεί σε back-to-back διάταξη και μονοκάναλο σύνδεσμο μετάδοσης έως και 10 Gb / s ακολουθίες δεδομένων χωρίς σφάλματα κατά τη διαδικασία αποκωδικοποίησης.

Τομέας 7^{ος} : Δικτύωση

Οι δραστηριότητες του 7^{ου} τομέα αφορούσαν τη μελέτη των επιδράσεων από γειτονικά κανάλια σε μία πυκνή διάταξη WDM για τις ιδιότητες του συγχρονισμού ενός ταιριαστού χαοτικού ζεύγους πομπού / δέκτη και το αποτέλεσμα της διαδικασίας αποκωδικοποίησης BACK TO BACK και το σύστημα μετάδοσης. Χρησιμοποιήθηκε η

εγκατεστημένη δικτυακή υποδομή της ΑΤΤ, στην ευρύτερη μητροπολιτική περιοχή της Αττικής με συνολικό μήκος 116 χιλιόμετρα μετάδοσης. Δοκιμάστηκε ένα ενιαίο κανάλι χαοτικής λειτουργίας, απομονωμένο από τα άλλα της κυκλοφορίας, καθώς και μία πυκνή-WDM λειτουργία που περιελάβανε το χαοτικό κανάλι επικοινωνίας, παρουσία άλλων χαοτικών και συμβατικών 10 G / s καναλιών. Η ηλεκτρολ.-οπτική διάταξη που αναπτύχθηκε και δοκιμάστηκε σε ένα σύστημα μεταφοράς point-to-point σε εργαστηριακές συνθήκες, έως και 10GB / s ρυθμό μετάδοσης bit, έχει επίσης δοκιμαστεί σε ένα πυκνό-WDM περιβάλλον, χρησιμοποιώντας το εγκατεστημένο δίκτυο οπτικών στην Αθήνα, μετά από προσεκτική συσκευασία του ηλεκτροοπτικού πομπού και δέκτη σε δύο ξεχωριστές μεταβιβάσιμες βαλίτσες.

Αναλυτικά, τα ακόλουθα συμπεράσματα προκύπτουν από την τελική ανάλυση των συστημάτων:

- Σε διαμόρφωση WDM, διαυλοποίησης πάνω από 0.6nm και μεταξύ των καναλιών οπτικής απομόνωσης ισχύς άνω των 13dB δεν επηρεάζει τη διαδικασία αποκωδικοποίησης της χαοτικής επικοινωνίας καναλιού, υποδεικνύοντας ότι υπάρχει μια επιμέρους διαδικασία φιλτραρίσματος στο δέκτη, η οποία δραστηριοποιείται στο ταιριαστό μήκος κύματος του χαοτικού εκπομπού που μεταφέρει τις πληροφορίες, μέσω της οπτικής έγχυσης και της διαδικασίας συγχρονισμού. Μικρά πλάτη μηνύματος (τόσο χαμηλά όσο 4%) μπορούν να εξαχθούν αποτελεσματικά χρησιμοποιώντας μεθόδους FEC, για τα δεδομένα με bit rate 1.25GHz, ενώ ήταν εντελώς κρυμμένα στο μεταδιδόμενο χαοτικό φορέα (BER ~ 0.5).

Μετά τη δοκιμή της αμιγώς-οπτικής διαμόρφωση σε ένα χαοτικό σύστημα επικοινωνίας που χρησιμοποιεί baseband διαμόρφωσης χάους σε μία back-to-back διάταξη, μιας μονοκάναλης point-to-point μετάδοσης και ένα D-WDM συστήμα μεταφοράς σε ένα εγκατεστημένο δίκτυο είμαστε σε θέση να ολοκληρώσουμε με τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

- Σε μία back-to-back διάταξη, με ροή bit μέχρι 2.5Gb / s μπορούν να κρυπτογραφούνται αποτελεσματικά και χωρίς λάθη ανάκτησης. Η διαμόρφωση πλάτους για την παραπάνω απόδοση μπορεί να είναι πολύ μικρή (~ 4-5% τόσο για 1.25Gb / s και 2.5Gb / s).

- Σε ένα σύστημα μετάδοσης καναλιού των 100 χιλιομέτρων, με ροή Bit μέχρι 2.5Gb / s μπορεί να κρυπτογραφούνται επίσης αποτελεσματικά και χωρίς λάθη ανάκτησης. Η διαμόρφωση πλάτους για την πιο πάνω απόδοση διατηρείται για 1.25Gb / s σε ~ 4-5%, αλλά αυξάνεται σε ~ 12% για 2.5Gb / s.
- Στην εγκατάσταση D-WDM συστήματος μεταφοράς με 0.8nm απόσταση καναλιού, με ροή bit έως 1,25 Gb / s μπορούν να κρυπτογραφούνται αποτελεσματικά και χωρίς λάθη ανάκτησης. Αυτό περιλαμβάνει δύο παράλληλες και κάθετες πολώσεις των προσαρμοσμένων καναλιών, με την κάθετη περίπτωση να ευνοεί μια πολύ καλύτερη απόδοση.
- Στην εγκατάσταση D-WDM συστήματος μεταφοράς των ηλεκτρο-οπτικών ρυθμίσεων, για 0.8nm απόσταση καναλιού, με ροή bit στο 3Gb / s δεν θα μπορούσαν να ανακτηθούν καθόλου, μετά από αποτελεσματική κρυπτογράφηση χάους, λόγω των συνεπειών της εγκάρσιας φάσης διαμόρφωσης που επάγεται κατά μήκος του καναλιού μετάδοσης WDM.

3.4.8 Μελλοντικός Στόχος Του PICASSO

Το επόμενο βήμα για τους ερευνητές του προγράμματος είναι η υλοποίηση αυτού του συστήματος με τη μορφή ενός ζευγαριού μικροποιημένων διατάξεων, μεγέθους κάποιων δέκατων του χιλιοστού, κατάληξη στην οποία - όπως έχουν δηλώσει σε συνέντευξή τους - βρίσκονται ήδη πάρα πολύ κοντά. Η τελική επίδειξη θα γίνει πάλι στην Αθήνα στο Μητροπολιτικό δίκτυο των «Αττικών Επικοινωνιών».

Στόχος της ομάδας είναι προφανώς, η μεταφορά αυτής της τεχνολογίας σε πραγματικά συστήματα, έστω και σε «προβιομηχανικό» στάδιο, με ένα «προϊόν» που θα μπορεί να μεταφερθεί άμεσα στην παραγωγή και, κυρίως, να ενσωματωθεί στις υπάρχουσες υποδομές, χωρίς τη χρεία σημαντικών αλλαγών στην εγκατεστημένη βάση, εξασφαλίζοντας το απόρρητο κατά τη διακίνηση δεδομένων.

Καλά και ωραία, όλα αυτά, όμως, έχουν να κάνουν με το ένα σκέλος της διακίνησης, το ενσύρματο. Για την ασύρματη μετάδοση υπάρχει «φάρμακο»; Υπάρχει κι αυτό είναι ο μελλοντικός στόχος της ελληνικής ερευνητικής ομάδας, η οποία ξεκίνησε ήδη την προσπάθεια ώστε να εφαρμόσει τις ίδιες αρχές, την ίδια φιλοσοφία της χα-

οτικής κρυπτογραφίας και στις επικοινωνίες των κινητών τηλεφώνων, όπου το πρόβλημα του απορρήτου είναι μεγάλο και φλέγον.

Κι διαβεβαιώνουν οι ίδιοι τα μέχρι στιγμής αποτελέσματα είναι εξαιρετικά ενθαρρυντικά, καθώς δείχνουν ότι το απόρρητο των συνομιλιών μπορεί να εξασφαλιστεί κι εκεί και μάλιστα με σχετικά χαμηλό κόστος.

Επίλογος

Τα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα και το χάος είναι μία σχετικά νέα επιστήμη πάνω στην οποία έχουν γίνει πολλές ανακαλύψεις που άλλαξαν τον τρόπο σκέψης και τα παιδιά έρευνας πολλών επιστημονικών τομέων. Το σημαντικότερο όμως είναι ότι ακόμα ερευνάται και ανακαλύπτονται κάθε μέρα καινούρια πράγματα κυρίως στην εφαρμογή τους.

Είδαμε στο 3^ο κεφάλαιο μερικές μόνο από τις εφαρμογές των μη γραμμικών συστημάτων που όμως είναι πολύ σημαντικές στην καθημερινότητά μας αλλά και στην επιστήμη. Βλέπουμε λοιπόν πόσο σημαντική είναι η θεωρία των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων.

Ένα συμπέρασμα που βγάζω όμως εγώ και έχει εφαρμογή και στην απλή καθημερινότητα του του ανθρώπου είναι ότι τίποτα δεν είναι προβλέψιμο όσον αφορά την ζωή μας και πάντα θα υπάρχουν μικρές απρόβλεπτες λεπτομέρειες που θα αλλάξουν τα σχέδιά μας. Ίσως τελικά θα ήταν καλύτερη η ζωή μας αν απλά αφήναμε την «ροή του ποταμού» να μας παρασύρει κάποιες φορές...

"Ποτέ δεν σκέφτομαι το μέλλον. Έρχεται αρκετά σύντομα."

Albert Einstein

Βιβλιογραφικές Πηγές

Βιβλία:

- Μπουντής Αναστάσιος, *Ο Θαυμαστός Κόσμος Των Fractal*.
- Τραχανάς Στέφανος, *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*.

Διατριβές – Έρευνες

- Κουλούρης Ανδρέας, *Ιστορική Εισαγωγή Στην Επιστήμη του Χάους*
- Γεώργιος Π. Παύλος, *Ντετερμινιστικά Συστήματα – Στοιχεία Ανάλυσης Χρονοσειρών*.

Ιντερνετ

- el.wikipedia.org/wiki/Θεωρία_του_χάους
- <http://picasso.di.uoa.gr/presentation.htm>
- <http://news.pathfinder.gr/eco-science/technologein/674502.html>