Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε

Πτυχιακή Εργασία

Fuzzy Systems: Νεώτερες Εξελίξεις και Υπολογιστικές Εφαρμογές στην Εκπαίδευση

Αρτούρ Πέρο – Α.Μ 0278

Επιβλέποντες: Παντελής Αποστολόπουλος,
Βαγέλλης Μαριάτος

Αντίρριο 2014

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή

Αντίρριο, 2014

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

1. Β.Μαριάτος
2. Π.Αλεφραγκής
3. Σ.Χριστόδουλος

Στους γονείς μου

Περίληψη

Το αντικείμενο αυτής της εργασίας αφορά τα Ασαφή Συστήματα Ελέγχου και την εφαρμογή τους σε προβλήματα που ορίζουμε ως σύνθετα και πολύπλοκα. Σκοπός της σε πρώτη φάση είναι να εισάγει τον κάθε ενδιαφερόμενο σε αυτό που ονομάζεται Ασαφής Λογική, στις ιδιότητες της και τις δυνατότητές της σε σύγκριση με αυτό που αποκαλούμε κλασική λογική, παρουσιάζοντας ταυτόχρονα και κάποιες εφαρμογές της.

Το βασικό κομμάτι της πτυχιακής μελετά και εφαρμόζει σε υπολογιστικό επίπεδο, με την βοήθεια του Mathematica, ένα ασαφές σύστημα αξιολόγησης φοιτητών, το οποίο λαμβάνει ως είσοδο δεδομένα από τα αποτελέσματα των εξετάσεων καθώς και στοιχεία που σχετίζονται με τα χαρακτηριστικά (*complexity, importance*) των ερωτήσεων που τέθηκαν στην εξέταση.

Το σύστημα αποτελείται από 3 κόμβους – ασαφείς ελεγκτές, όπου ο καθένας τους επιτελεί 3 βασικές διεργασίες. Το fuzzification, στο οποιό τα εισαγόμενα δεδομένα ασαφοποιούνται μέσω τριγωνικής συνάρτησης συμμετοχής, το inference, διαδικασία εξαγωγής συμπεράσματος με την μέδοθο Mamdani και το defuzzification με το οποίο τα εξαγόμενα στοιχεία αποκωδικοποιούνται και παίρνουν την ολική τους μορφή με την μέθοδο τεταγμένης του κέντρου βάρους (center of gravity – COG).

Λέξεις κλειδιά

Ασαφοποίηση, μηχανισμός συμπερασμού, αποασαφοποίηση, COG (μέθοδος κέντρου βάρους) , συνάρτηση συμμετοχής, ασαφής ελεγκτής

Abstract

The object of this paper is Fuzzy Control Systems and their application on problems we define as complex or complicated. Our purpose, at first, is to introduce Fuzzy Logic to anyone interested, its properties and abilities in contrast with what we call classic logic, presenting and some of its applications at the same time.

The main part of this paper studies and applies in computational level, with the help of Mathematica, a fuzzy system for students' evaluation, which takes as input data from exam results, as well as data related with the qualities (*complexity, importance*) of the questions at the exam.

The system is made up of 3 nodes – fuzzy controllers, each of which accomplishes 3 basic processes. *Fuzzification*, in which input data are defuzzificated by the triangle membership function, *Inference*, a conclusion making process using the Mamdani's method, and Defuzzification, by which the outcome data is decoded and given its full form with the center of gravity method.

Keywords

fuzzification, inference, defuzzifaction, COG (center of gravity), membership function, fuzzy controller

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1 – Κλασική Θεωρία Συνόλων

1.1 Εισαγωγή

Η κλασσική θεωρία συνόλων αναπτύχθηκε και θεμελιώθηκε από τον μαθηματικό *Georg Cantor* (1845-1918) και αποτελεί μέρος της μαθηματικής Λογικής και βάση των μαθηματικών. Η όλη θεωρία βασίζεται στην αριστοτελική δίτιμη λογική, σύμφωνα με την οποία ο κόσμος αποτελείται από διακριτές και απόλυτα αντίθετες καταστάσεις ή στοιχεία. Δηλαδή κάτι μπορεί να είναι η αλήθεια ή ψέμα, κακό ή καλό, ευχάριστο ή δυσάρεστο. Συνεπώς, περιγράφοντάς το με αυστηρούς μαθηματικούς όρους της θεωρίας συνόλων, ένα στοιχείο a μπορεί να ανήκει, *απόλυτα*, σε ένα σύνολο A , $a \in A$, ή να μην ανήκει, $a \notin A$.

Η έννοια του συνόλου θεωρείται πρωταρχική και δεν μπορεί να οριστεί σε αυστηρά μαθηματικά. Ωστόσο, η διαίσθηση και η εμπειρία μας, σύμφωνα με τον Cantor, μπορούν να το περιγράψουν ως «μια συλλογή αντικειμένων, οποιαδήποτε φύσης, πεπερασμένο ή άπειρο σε πλήθος, καθορισμένων και διαφορετικών μεταξύ τους, τα οποία συνδέονται με μια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα, έτσι ώστε να τα θεωρούμε ως μια ολότητα.»

1.2 Θεμελιώδεις Έννοιες

Ένα σύνολο μπορεί να έχει πεπερασμένο ή άπειρο αριθμό στοιχείων. Για να εκφράσουμε τη σχέση μεταξύ στοιχείων και συνόλου χρησιμοποιούμε μαθηματικά σύμβολα. Συνεπώς, όταν θέλουμε να δείξουμε ότι ένα στοιχείο x ανήκει ή είναι μέλος ενός συνόλου A, γράφουμε $x \in A$, σε διαφορετική περίπτωση γράφουμε $x \notin A$.

Το σύνολο όλων των συνόλων, *σύνολο αναφοράς*, μπορούμε να το συμβολίσουμε με S. Όταν ένα σύνολο δεν περιέχει κανένα στοιχείο λέμε ότι το σύνολο αυτό είναι *κενό σύνολο* και το συμβολίζουμε με $\varnothing$ ή $\{\ \}$.

Το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου το ονομάζουμε *πληθάριθμο* και το συμβολίζουμε με $|A|$

Συνεπώς, έστω για παράδειγμα θέλουμε να εξετάσουμε το ύψος των παιχτών του επαγγελματικού μπάσκετ. Το S στην συγκεκριμένη περίπτωση θα συμβολίζει το σύνολο όλων των παιχτών του επαγγελματικού μπάσκετ, δηλαδή αποτελεί σύνολο αναφοράς με στοιχεία του να είναι οι παίχτες.

Είναι φανερό ότι η κάθε ομάδα από μονή της αποτελεί σύνολο καθώς και στοιχείο του καθολικού συνόλου S.

Αυτό που μας ενδιαφέρει να παρατηρήσουμε όμως κυρίως, είναι ότι ο κάθε παίχτης είτε ανήκει σε μια συγκεκριμένη ομάδα είτε δεν ανήκει. Σε κάθε περίπτωση ένας παίχτης δεν μπορεί να ανήκει σε δύο ομάδες ή σύνολα ταυτόχρονα.

Για να περιγράψουμε ένα σύνολο μπορούμε είτε να γράψουμε τα στοιχεία που το αποτελούν, είτε να περιγράψουμε τις ιδιότητες των στοιχείων αυτών. Σε κάθε περίπτωση η τυπική σχέση συνόλου και των στοιχείων του μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$A = \{x, P(x)\},$$

όπου το κατηγόρημα $P(x)$ εκφράζει τις ιδιότητες των στοιχείων του συνόλου.

1.2.1 Σχέσεις Συνόλων

Υποσύνολο

Λέμε ότι το σύνολο A είναι υποσύνολο του B *αν και μόνο αν* κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο του B. Δηλαδή:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x, \text{ αν } x \in A \text{ τότε } x \in B$$

Γνήσιο Υποσύνολο

Λέμε ότι το σύνολο A είναι γνήσιο υποσύνολο του B αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο του B, αλλά υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του B που δεν είναι στοιχείο του A.

Ισότητα

Λέμε ότι το σύνολο A είναι ίσο με το B αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο του B και αντίστροφα. Δηλαδή $A = B$ εφόσον ισχύει ότι $x \in A \rightarrow x \in B$ και $x \in B \rightarrow x \in A$.

1.3 Πράξεις Συνόλων

Ένωση

Αν S το σύνολο αναφοράς και A, B δύο υποσύνολά του, τότε η ένωση τους, $A \cup B$, περιλαμβάνει μόνο εκείνα τα στοιχεία που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα δύο υποσύνολα. Η πράξη αυτή στην Άλγεβρα Boole περιγράφεται από το OR

Έτσι για παράδειγμα αν $S = \{πολύ\, κακός, κακός, μέτριος, καλός, πολύ\, καλός, τέλειος\}$

$A = \{κακός, μέτριος, καλός, πολύ\, καλός\}$, $B = \{πολύ\, κακός, μέτριος, καλός, τέλειος\}$

Τότε:

$A \cup B = \{πολύ\, κακός, κακός, μέτριος, καλός, πολύ\, καλός, τέλειος\}$

Τομή

Η τομή, από την άλλη πλευρά μας δίνει μόνο εκείνα τα στοιχεία που μπορούμε να τα βρούμε και στα δύο σύνολα. Δηλαδή αποτελούν κοινά στοιχεία των συνόλων A και B. Είναι η αντίστοιχη πράξη AND της Άλγεβρας Boole.

Έτσι με βάση το παραπάνω παράδειγμα έχουμε: $A \cap B = \{μέτριος, καλός\}$

Συμπλήρωμα

Το συμπλήρωμα το συμβολίζουμε ως A' και περιλαμβάνει εκείνα τα στοιχεία του S που δεν ανήκουν στο A σύνολο: $A' = \{πολύ\, κακός,\ τέλειος\}$

Διαφορά Συνόλων

Η διαφορά συνόλων $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ περιλαμβάνει εκείνα τα στοιχεία του S που ανήκουν στο A και δεν ανήκουν στο B : $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \{κακός,\ πολύ\, καλός\}$

Ισοδύναμα Σύνολα

Ονομάζουμε τα σύνολα τα οποία έχουν ίδιο πληθικό αριθμό, δηλαδή ίσο πλήθος στοιχείων.

1.3.1 Ιδιότητες των πράξεων συνόλων

Ανύψωση	$\overline{\overline{A}} = A$
Αντίθεση – Σύνθεση	$(A \cup B) \cap C) = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $(A \cap B) \cup C) = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
Αντιμεταθετικότητα	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Προσεταιρεστικότητα	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Επιμεριστικότητα	$(A \cup B) \cap C) = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $(A \cap B) \cup C) = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
Αυτοδυναμία	$A \cup A = A$, $A \cap A = A$
Ο κανόνας De Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Κεφάλαιο 2 - Ασαφής Λογική

"Όταν οι νόμοι των μαθηματικών ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα, δεν είναι σαφείς, και όταν είναι σαφείς, δεν ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα."

Albert Einstein

2.1 Εισαγωγή

Η ασαφής λογική αποτελεί την προέκταση της αριστοτέλειας λογικής, η οποία όπως είπαμε στο πρώτο κεφάλαιο χαρακτηρίζεται από έναν δυισμό όπου οι καταστάσεις παρουσιάζονται ως άσπρο ή μαύρο, 0 ή 1, αποκλείοντας με αυτό τον τρόπο οποιαδήποτε απόχρωση ή άλλη τιμή. Η *χαρακτηριστική συνάρτηση* μια τέτοιας μονοσήμαντης σχέσης έχει την εξής μορφή:

$$X_A(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1, & for \quad x \in A \\ 0, & for \quad x \notin A \end{cases}$$

Η συγκεκριμένη συνάρτηση μας δίνει τα στοιχεία εκείνα του συνόλου αναφοράς X τα οποία ανήκουν ή δεν ανήκουν στο σύνολο A.

Σε αντίθεση με την κλασσική λογική, η ασαφής εισχωρεί και διευρύνει τα όρια της πρώτης λέγοντας μας ότι ανάμεσα στο μαύρο και το άσπρο υπάρχει το γκρι, ανάμεσα στο 0 και το 1 υπάρχουν άπειρες δυνατές *ποσοτικές* τιμές αλήθειας ή ψεύδους.

Η σημαντική σύλληψη και καταγραφή αυτής της ιδέας πρόεκυψε από τις εργασίες του μαθηματικού Lotfi A.Zadeh πάνω στα ασαφή σύνολα τα οποία και μελετάμε παρακάτω.

2.2 Η έννοια της ασάφειας

Η καθημερινή ανθρώπινη επικοινωνία επιτυγχάνεται από προτάσεις και έννοιες που χαρακτηρίζονται πολλές φορές από σχετικότητα και ασάφεια, σε αντίθεση με την μαθηματική γλώσσα που βασίζεται σε αληθείς και ψευδείς προτάσεις. Έτσι για παράδειγμα, η μαθηματική πρόταση 5+8=13 είναι μια σχέση ένα προς ένα και δεν επιδέχεται καμία αμφισβήτηση η διαφορετική ερμηνεία, είναι δηλαδή απόλυτα σαφής και ακριβής.

Τι γίνεται όμως όταν λέμε ή γράφουμε πχ ότι «ο καιρός σήμερα είναι ζεστός», «σε λίγο θα φτάσω», «Ο Κώστας είναι έντιμος άνθρωπος αλλά επιπόλαιος» κτλπ. Με απλή παρατήρηση αντιλαμβανόμαστε ότι λέξεις όπως, λίγο, έντιμος, ζεστός, επιπόλαιος εμπεριέχουν μέσα τους την έννοια της ασάφειας που μπορεί να εκδηλωθεί με την διευκρινιστική ερώτηση «πόσο». Δηλαδή πόσο ζεστός είναι ο καιρός σήμερα; Σε πόσο «λίγο» θα φτάσεις; Πόσο έντιμος και επιπόλαιος είναι ο Κώστας;

Η απάντηση, δηλαδή η επιπλέον πληροφορία που δίνουμε σε ερωτήσεις όπως αυτές, καθορίζουν τον *βαθμό* ακρίβειας ή ανακρίβειας μιας πρότασης. Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι κάτι μπορεί να είναι εν μέρει αλήθεια αλλά ταυτόχρονα και ψέμα, δημιουργώντας έτσι ένα ρήγμα στην απόλυτη διάκριση που συναντάμε στα κλασσικά-ξερά σύνολα (crisp sets).

2.3 Ασαφή σύνολα – Βασικοί ορισμοί

«Βασική αρχή ασαφών συνόλων:
Τα πάντα είναι ζήτημα βαθμού»

Τα ασαφή σύνολα είναι μια προσπάθεια να απαντηθούν προβλήματα συνόλων που σχετίζονται με λεκτικούς όρους που επιδέχονται πολλές και διαφορετικές ερμηνείες. Εκεί δηλαδή που συναντούνται έννοιες όπως *αβεβαιότητα* και *πολυπλοκότητα.*

Παράδειγμα:

Η καταγραφή των φοιτητών που έχουν περάσει ή όχι ένα συγκεκριμένο μάθημα μπορεί να λυθεί με την δημιουργία δύο κλασσικών συνόλων, A οι μαθητές που έχουν περάσει το μάθημα και B όσοι δεν το έχουν περάσει.

Αν όμως το πρόβλημα ζητούσε να ταξινομηθούν οι μαθητές ενός σχολείου με βάση το «ψηλός», «κοντός», «καλός», «κακός» βλέπουμε ότι προκύπτουν απορίες σχετικά με το ποιος και κυρίως πως, δηλαδή με ποια κριτήρια, ελέγχεται για το αν κάποιος είναι «κοντός» ή «ψηλός», «κακός» ή «καλός», κτλπ.

Η αδυναμία λοιπόν των κλασσικών συνόλων στο να εκφράσουν και να δώσουν απαντήσεις σε προβλήματα που αφορούν *αποφάσεις* σε ένα *ασαφές*, *πολύπλοκο* και *ακαθόριστο* περιβάλλον, μπορεί να αντιμετωπιστεί σε σημαντικό βαθμό από τα ασαφή σύνολα.

Η έννοια λοιπόν του ασαφούς συνόλου βασίζεται στην ιδέα ότι ένα στοιχείο δεν είναι απαραίτητο να ανήκει ή να μην ανήκει σε ένα σύνολο, αλλά μπορεί να έχει μερική συμμετοχή σε αυτό. Η μερική αυτή συμμετοχή, την οποία την περιγράφουμε ως *βαθμό συμμετοχής* ενός στοιχείου x στο αντίστοιχο σύνολο , πχ A , δίνεται από μια *συνάρτηση συμμετοχής* μ που παίρνει τιμές ανάμεσα στο διάστημα $[0,1]$.

Έτσι ο ορισμός ενός ασαφούς συνόλου A , με σύνολο αναφοράς X , έχει την παρακάτω μορφή:

$$A = \left\{ \left(x, \mu_{\mathrm{A}}(x) \right) \mid x \in X , \mu_{\mathrm{A}}(x) : X \to [0,1] \right\}$$

όπου το $\mu_{\mathrm{A}}(x)$ δηλώνει την χαρακτηριστική συνάρτηση συμμετοχής του συνόλου A .

2.4 Βασικές συναρτήσεις συμμετοχής

Κάθε ασαφές σύνολο ορίζεται από μια συγκεκριμένη συνάρτηση συμμετοχής, η οποία με την σειρά της ορίζει τον βαθμό συμμετοχής ενός στοιχείου στο αντίστοιχο ασαφές σύνολο. Ο βαθμός αυτός μας λέει πόσο περισσότερο ή λιγότερο, δηλαδή σε τι βαθμό, ανήκει ένα στοιχείο στο σχετιζόμενο σύνολο.

Ο ορισμός ή καλύτερα η κατασκευή μιας συνάρτησης συμμετοχής εξαρτάται από υποκειμενικούς παράγοντες όπως εμπειρία και γνώση του αντικειμένου που εξετάζεται καθώς και τα κριτήρια αξιολόγησης που μας ενδιαφέρουν.

Ας σκεφτούμε για παράδειγμα την περίπτωση του πεπερασμένου συνόλου $X = \{300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1100\}$, του οποίου τα στοιχεία μας δίνουν τον μηναίο μισθό μιας κοινωνικής ομάδας σε μια συγκεκριμένη γεωγραφική περιοχή. Έστω ότι θέλουμε να ορίσουμε αυτόν τον μισθό με βάση του πόσο *ικανοποιητικός* είναι.

Είναι προφανές ότι για να το κάνουμε αυτό θα χρειαστεί να συσχετίσουμε λεκτικούς όρους όπως μικρός, μέτριος, καλός με ένα σύνολο πραγματικών αριθμών που θα τα περιγράφουν. Πχ:

$$\mu\iota\kappa\rho\acute{o}\varsigma = [300, 500],\ \ \mu\acute{\varepsilon}\tau\rho\iota o\varsigma = [600, 800],\ \ \kappa\alpha\lambda\acute{o}\varsigma = [900, 1100]$$

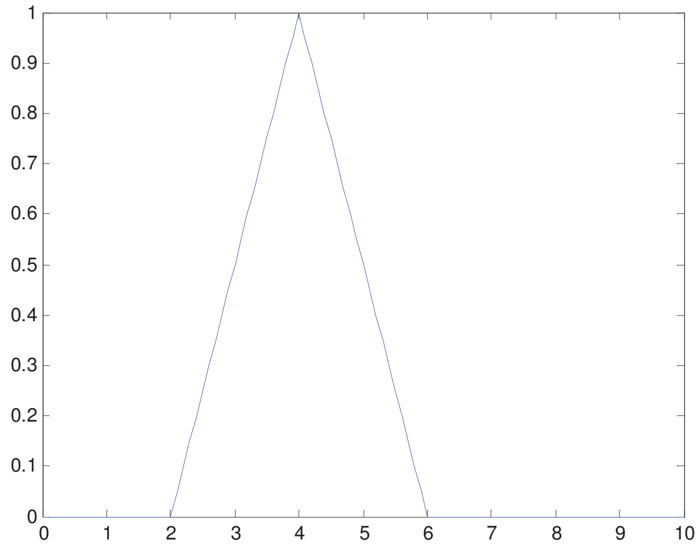
Την εργασία αυτή αναλαμβάνουν οι συναρτήσεις συμμετοχής.

Ακολουθούν μερικές από τις πιο γνωστές και χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις συμμετοχής.

2.4.1 Τριγωνική συνάρτηση συμμετοχής

Η τριγωνική συνάρτηση συμμετοχής περιλαμβάνει τρείς παραμέτρους, τους πραγματικούς αριθμούς a ,b και c . Χρησιμοποιείται αρκετά συχνά λόγω ευκολίας σε υπολογισμούς.

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & ,x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & ,a \le x \le b \\ \dfrac{c-x}{c-b} & ,b \le x \le c \\ 0 & ,c \le x \end{cases}$$



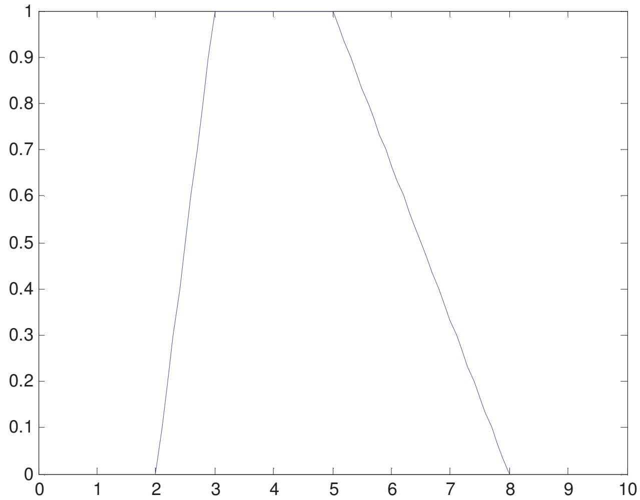
Κώδικας για αναπαράσταση σε Matlab:

```
>> x=0:0.1:10;
>> y1=trimf(x,[2  4  6]);
>> plot(x,y1)
```

2.4.2 Τραπεζοειδής συνάρτηση συμμετοχής

Κατά αναλογία με την τριγωνική, η τραπεζοειδής συνάρτηση συμμετοχής προσδιορίζεται από τέσσερις παραμέτρους $\{a, b, c, d\}$, και δίνεται από τη σχέση:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , a \le x \le b \\ 1 & , b \le x \le c \\ \dfrac{c-x}{c-b} & , c \le x \le d \\ 0 & , d \le x \end{cases}$$



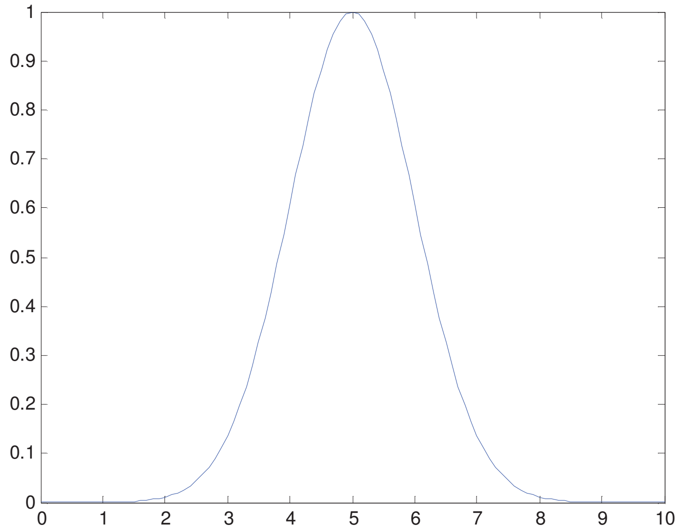
Κώδικας για αναπαράσταση σε Matlab:

```
>> x=0:0.1:10;
>> y2=trapmf(x,[2 3 5 8]);
>> plot(x,y)
```

2.4.3 Συμμετρική συνάρτηση συμμετοχής Gauss

Η συνάρτηση συμμετοχής Gauss είναι μαζί με την τριγωνική οι συχνότερα χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις συμμετοχής. Προσδιορίζεται από δύο παραμέτρους, το κέντρο c και τη διασπορά σ και δίνεται από τη σχέση :

$$\mu(x) = e^{-\frac{1(x-\sigma)^2}{2\sigma}}$$



Κώδικας για αναπαράσταση σε Matlab:

```
>> x=0:0.1:10;
>> y3=gaussmf(x,[1 5]);
>> plot(x,y)
```

2.5 Βασικές ιδιότητες ασαφών συνόλων

Όπως αναφέραμε η συμμετοχή ενός στοιχείου x , που έχει ως σύνολο αναφοράς το X, σε ένα υποσύνολο A μπορεί να εκφραστεί από την παρακάτω σχέση:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X, \mu_A(x) : X \to [0,1]\}$$

Ένας άλλο τρόπος για να ορίσουμε το ασαφές σύνολο A είναι:

$$A = \sum_{x_i \in X} \mu_A(x_i) / x_i$$, όταν το X είναι διακριτό ή

$$A = \int_X \mu_A(x) / x$$ όταν το X είναι συνεχές

Είναι προφανές ότι όσο αυξάνει η τιμή της συνάρτησης συμμετοχής $\mu_A(x)$ και προσεγγίζει το 1, τόσο πιο πολύ το στοιχείο x ανήκει στο ασαφές σύνολο A.

Το *ύψος* (height) ενός ασαφούς συνόλου A εκφράζει τον μέγιστο βαθμό συμμετοχής που λαμβάνει το οποιοδήποτε στοιχείο του συγκεκριμένου συνόλου.

$$h(A) = \sup_{x=X} = A(x)$$

Όταν το $h(A)=1$ τότε λέμε ότι το ασαφές σύνολο είναι *κανονικό* (normal), διαφορετικά το ονομάζουμε *υποκανονικό* (subnormal).

Ονομάζουμε επίσης *υποστήριξη* ή *στήριγμα*, $\mathrm{supp(A)}$, το διακριτό υποσύνολο του X , του οποίου τα στοιχεία λαμβάνουν μη μηδενικούς βαθμούς συμμετοχής στο ασαφές σύνολο A . Ενώ ασαφές *δυναμοσύνολο* (fuzzy power set), $F(x)$, ονομάζουμε το σύνολο όλων των ασαφών υποσυνόλων του X .

Έχουμε επίσης:

Υποσύνολο:

Αν $A, B \in F(\mathrm{X})$ τότε λέμε ότι το A είναι υποσύνολο του B , δηλαδή $A \subseteq B$, αν και μόνο αν (iff) $A(x) \le B(x)$.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A(x) \le B(x), \;\; x \in F(\mathrm{X})$$

<u>*Κενό ασαφές σύνολο*</u>

Ένα ασαφές σύνολο είναι κενό όταν η τιμή της συνάρτησης συμμετοχής για κάθε στοιχείο του X είναι μηδέν. Δηλαδή:

$$A \equiv \varnothing \text{ αν } \mu_A(\mathrm{x}) = 0, \; \forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{X}$$

<u>*Ισότητα ασαφών συνόλων*</u>

Δύο σύνολα είναι ίσα μεταξύ τους όταν οι συναρτήσεις συμμετοχής τους είναι ίσα σε όλο το πεδίο ορισμού τους.

$$A \equiv B \text{ αν } \mu_A(x) = \mu_B(\mathrm{x}),\ \forall x \in X$$

<u>*Σχέση εγκλεισμού (inclusion)*</u>

Λέμε ότι το ασαφές σύνολο A εγκλείεται στο B, δηλαδή $A \subseteq B$, αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$ ισχύει $A \leq B$. Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να πούμε ότι το ασαφές σύνολο A αποτελεί υποσύνολο του B .

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να ταξινομήσουμε τα ασαφή σύνολα που ορίζονται από τις παρακάτω συναρτήσεις βαθμού συμμετοχής (θεωρώντας ότι $x \geq 0$), από την σχέση εγκλεισμού (*inclusion*).

$$A(x) = \frac{1}{1+10x}\ ,\ B(x) = (\frac{1}{1+10x})^{1/2}\ ,\ C(x) = (\frac{1}{1+10x})^{2}$$

Γνωρίζουμε ότι: $A \subseteq B \leftrightarrow \mu A(x) \leq \mu B(x), \forall x \in X$. Επειδή όμως στα ασαφή σύνολα η τιμή που μπορεί να πάρει ένα στοιχείο είναι συχνά αβέβαιη, δουλεύουμε με διαστήματα τα οποία και ονομάζουμε Διαστήματα Εμπιστοσύνης (*interval of confidence*).

Στην συγκεκριμένη περίπτωση ωστόσο οι τιμές που λαμβάνει το x κινούνται στο συνεχές διάστημα $[0,\infty)$ Παρατηρούμε εύκολα λοιπόν ότι για κάθε $x \in [0,\infty)$, $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$, $\mu_A(x) \geq \mu_C(x)$, $\mu_B(x) \geq \mu_C(x)$. Συνεπώς προκύπτει ότι $A \subseteq B, C \subseteq A,$ και $C \subseteq \mathrm{B}$.

2.6 Πράξεις ασαφών συνόλων

Οι πράξεις των ασαφών συνόλων, έχοντας ως δεδομένο τα ασαφή σύνολα A, B, C με πεδίο ορισμού το X και συναρτήσεις συμμετοχής $\mu_A(x), \mu_B(x), \mu_C(x)$ είναι:

- *Η ένωση (union)*

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad \forall\, x \in X$$

- *Η τομή (intersection)*

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad \forall\, x \in X$$

- *Το συμπλήρωμα (complement)*

$$\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A(x) \quad \forall\, x \in X$$

- *Το γινόμενο(product)*

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \bullet \mu_B(x)$$

- *Αλγεβρικό άθροισμα (probor)*

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \bullet \mu_B(x) \quad \forall\, x \in X$$

2.7 Ασαφείς Κανόνες

Οι ασαφείς κανόνες περιγράφουν την διαδικασία που ακολουθείται για να βγουν κάποια συμπεράσματα με βάση την γνώση και την εμπειρία που διαθέτουμε. Η ποιο απλή μορφή ένας τέτοιου ασαφούς κανόνα είναι της μορφής:

$$if\ x\ is\ A\ then\ y\ is\ B$$

όπου κάνοντας κάποιες λογικές υποθέσεις καταλήγουμε (*συνεπαγωγή*) σε κάποια συμπεράσματα ή αποφάσεις. Παράδειγμα: **αν** το λεμόνι είναι κίτρινο **τότε** είναι ώριμο, **αν** η θερμοκρασία δωματίου είναι υψηλή **τότε** απελευθέρωσε τον αυτόματο πυροσβεστήρα, κτλπ.

Οι κανόνες αυτοί αποτελούνται από δύο βασικά μέρη, το πρώτο είναι το τμήμα της υπόθεσης (*premise part*), δηλαδή το $if\ x\ is\ A$, και το δεύτερο τμήμα απόδοσης (*consequent part*), $then\ y\ is\ B$.

Στον παραπάνω κανόνα το x περιγράφει την τιμή εισόδου η οποία σχετίζεται (*ασαφοποίηση*) με το ασαφές σύνολο A για να προκύψει (then) τελικά η έξοδος y ως συσχέτιση μεταξύ των συνόλων A και B . Όπου $A = \{(x_i, \mu_A(x_i)) \mid x_i \in X\}$ και $B = \{(y_j, \mu_B(y_j)) \mid y_j \in Y\}$

Είναι σημαντικό να ειπωθεί ότι η μορφή του παραπάνω κανόνα λέγεται τύπου mamdani, για να τιμήσει τον Ebrahim Mamdani ως έναν από τους πρωτοπόρους στην εφαρμογή της ασαφής λογικής, ο οποίος κατάφερε να κατασκευάσει ένας ασαφές σύστημα ελέγχου της ταχύτητας μιας ατμομηχανής.

Εκτός αυτού του κανόνα υπάρχουν και άλλοι όπως:

Sugeno – Takagi:

If x is A then y is c, όπου το c είναι αριθμός ή και ένα crisp ασαφές σύνολο.

Τύπου Takagi - Sugeno – Kang ή T-S-K***:***

If x is A then y is $c_0 + c_1 x$, *όπου* $c_0, c_1 \in R$.

2.9 Παραδείγματα

2.1 Παράδειγμα

Έστω ότι τα σύνολα A, B και C ορίζονται στο διάστημα $X = [0,10]$ των πραγματικών αριθμών και με τις παρακάτω συναρτήσεις βαθμού συμμετοχής.

$$A(x) = \frac{x}{x+2}\ ,\ B(x) = 2^{-x}\ ,\ C(x) = \frac{1}{1+10(x-2)^2}$$

Οι μαθηματικοί τύποι καθώς και οι γραφικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων συμμετοχής για το καθένα από τα παρακάτω σύνολα

a) $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$

b) $A \cup B, A \cup C, B \cup C$

c) $A \cap B, A \cap C, B \cap C$

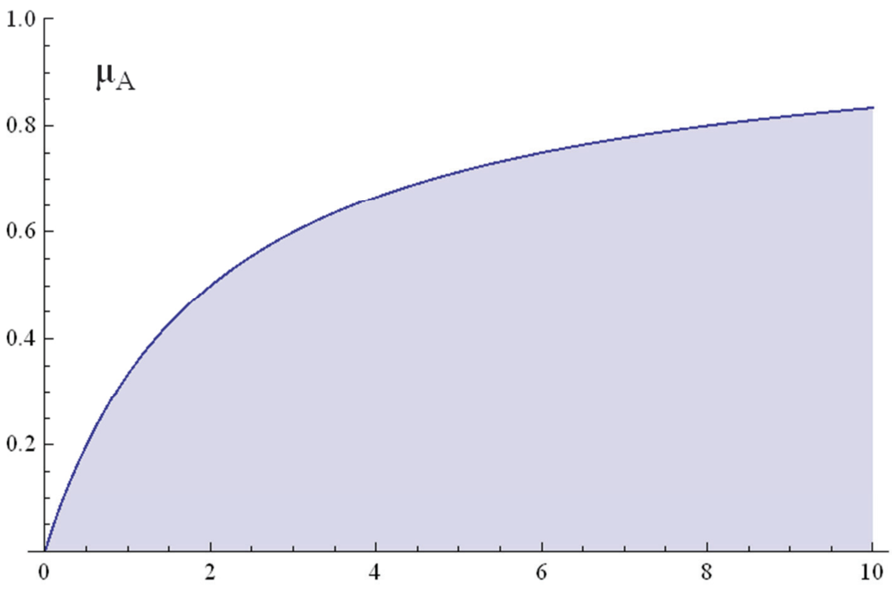
d) $A \cup B \cup C, A \cap B \cap C$

e) $A \cap \overline{C}, \overline{B \cap C}, \overline{A \cup C}$

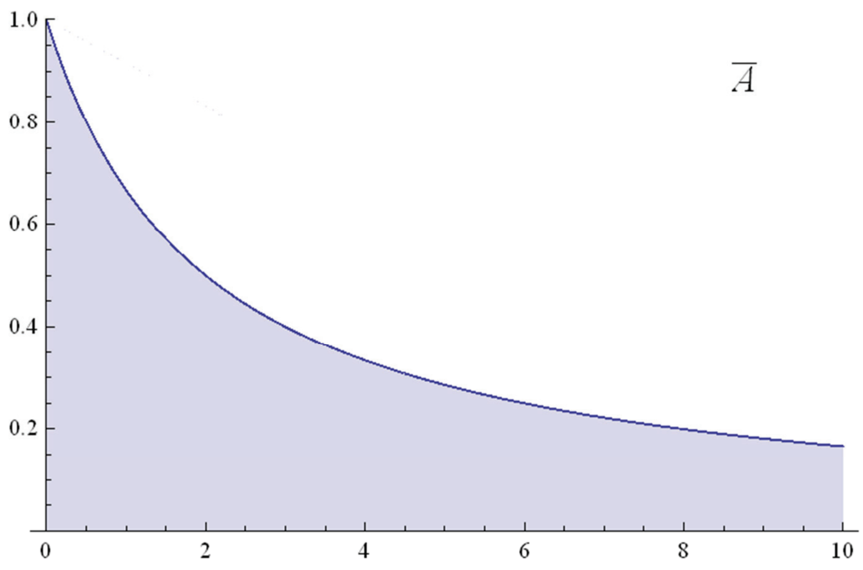
είναι:

- **a)** $\overline{A}$=1-$\mu_A(x)$, $\overline{B}$=1-$\mu_B(x)$, $\overline{C}$=1-$\mu_C(x)$
- **b)** $A \cup B$=max[A(x), B(x)] , $A \cup C$=max[A(x), C(x)] , $B \cup C$=max[B(x), C(x)]
- **c)** $A \cap B$=min[A(x), B(x)] , $A \cap C$=min[A(x), C(x)] , $B \cap C$=min[B(x), C(x)]
- **d)** $A \cup B \cup C$=max[A(x), B(x), C(x)] , $A \cap B \cap C$=min[A(x), B(x), C(x)]
- e) $A \cap \overline{C}$=min[A(x), 1-C(x)] , $\overline{B \cap C} = \overline{B} \cup \overline{C}$ =max[1-B(x), 1-C(x)] , $\overline{A \cup C} = \overline{B} \cap \overline{C}$ =min[1-A(x), 1-C(x)]

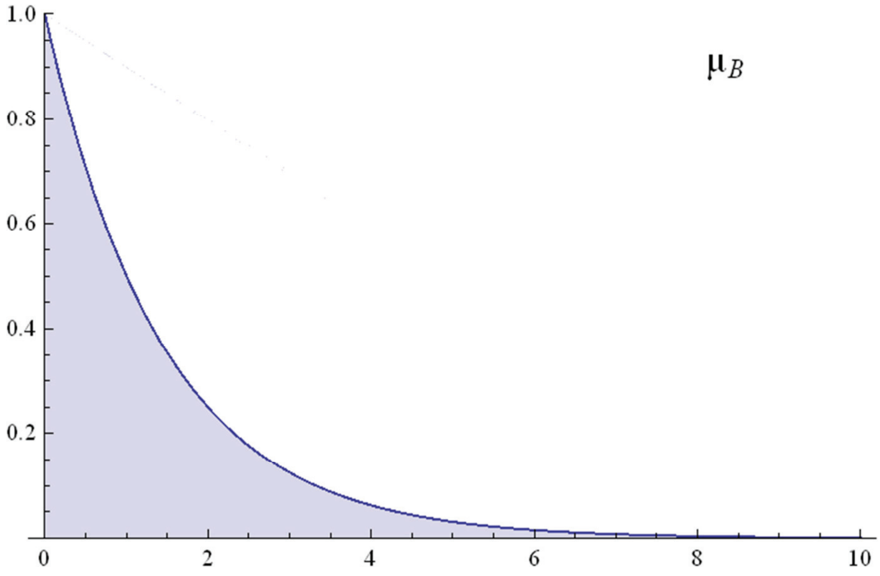
και οι γραφικές τους αναπαραστάσεις στο Mathematica:



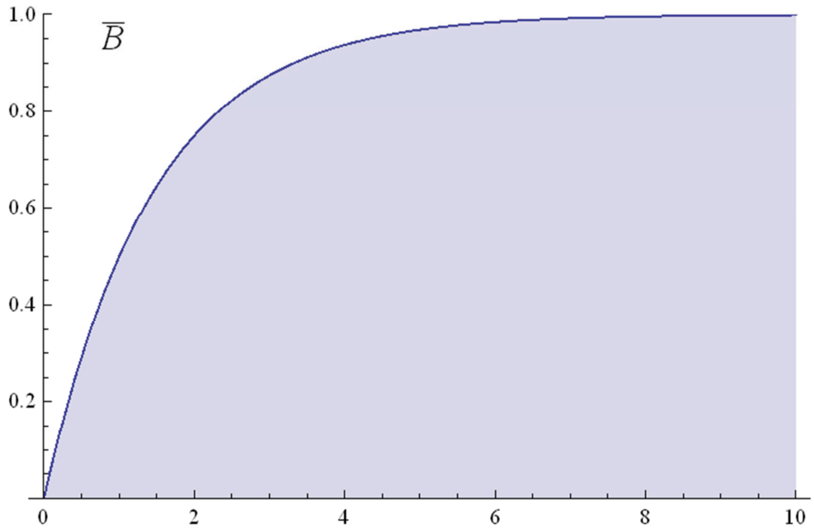
Εικόνα 2.1



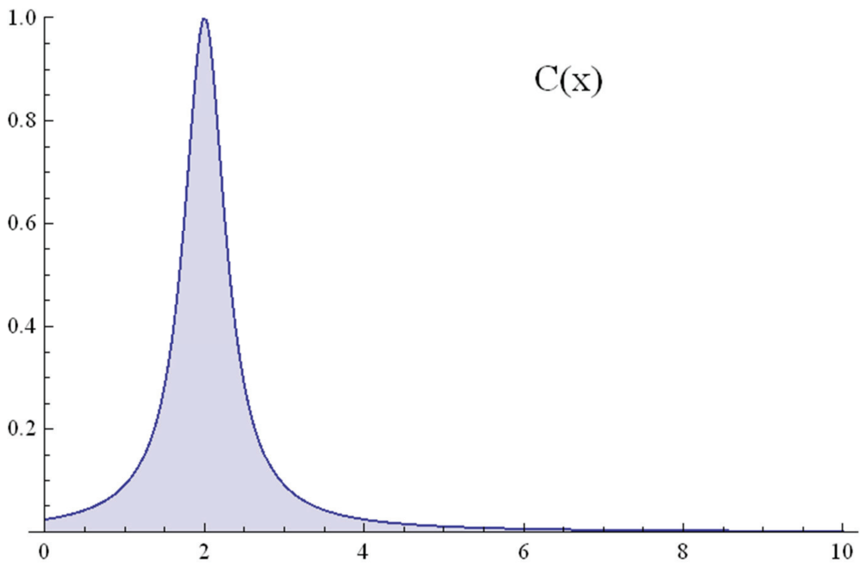
Εικόνα 2.2



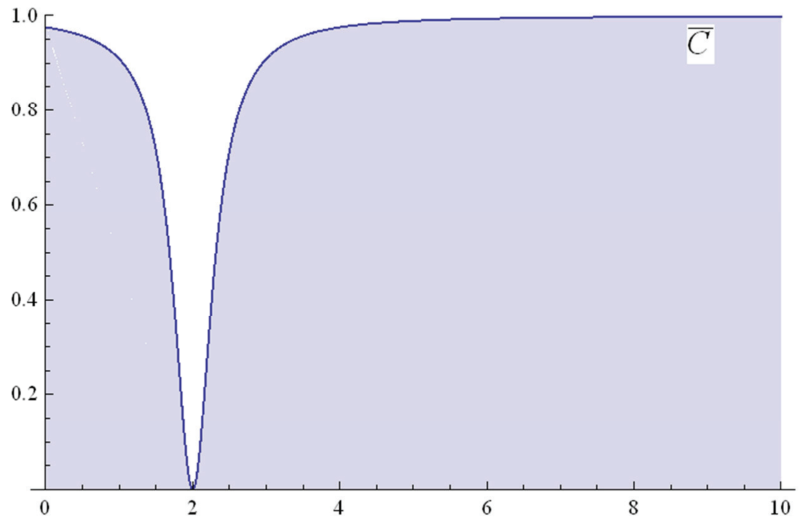
Εικόνα 2.3



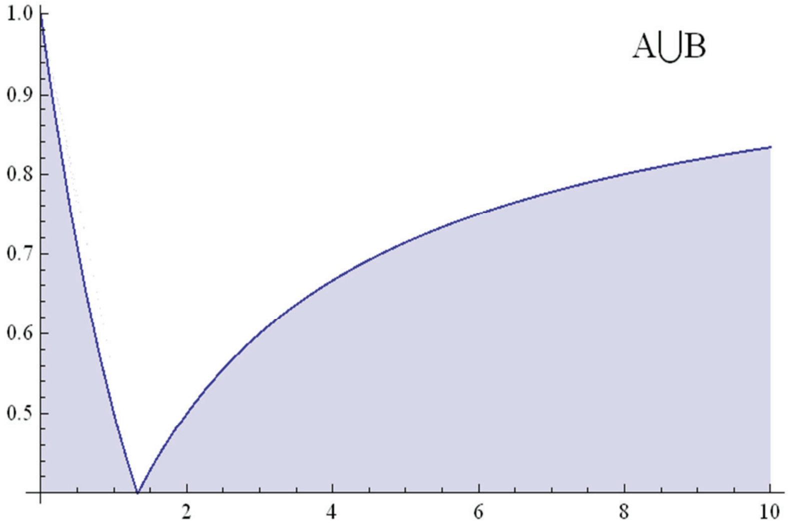
Εικόνα 2.4



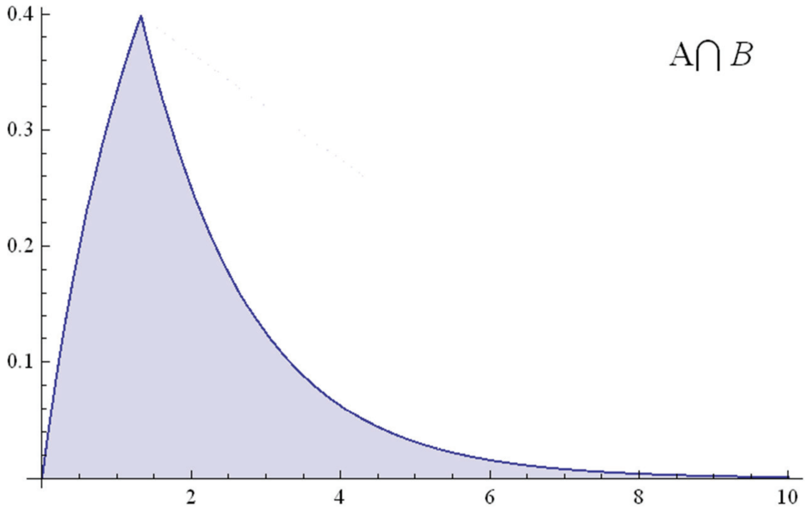
Εικόνα 2.5



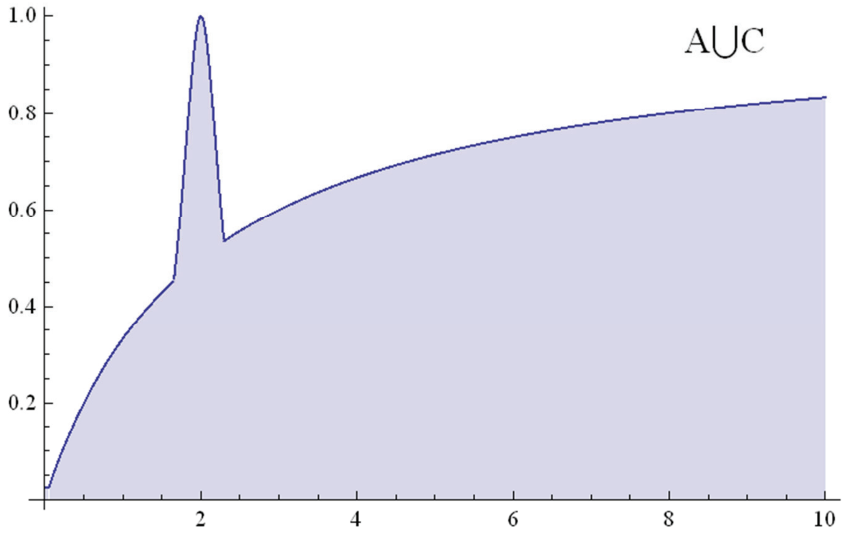
Εικόνα 2.6



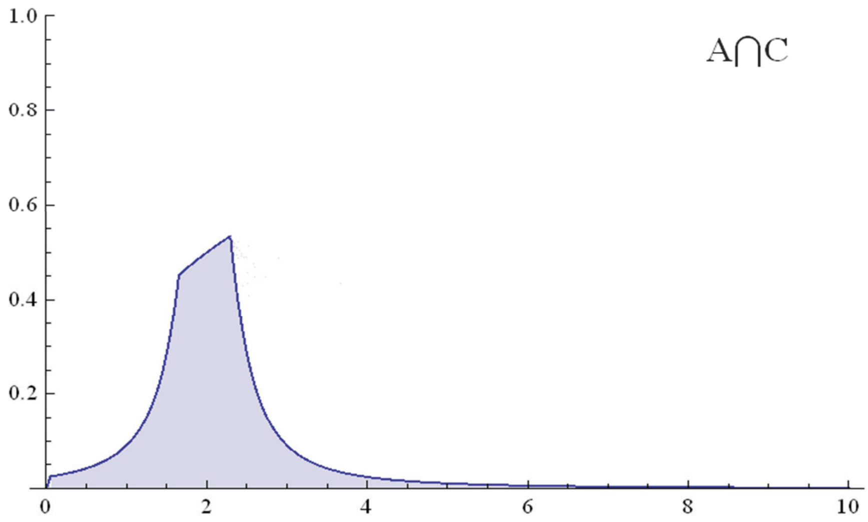
Εικόνα 2.7



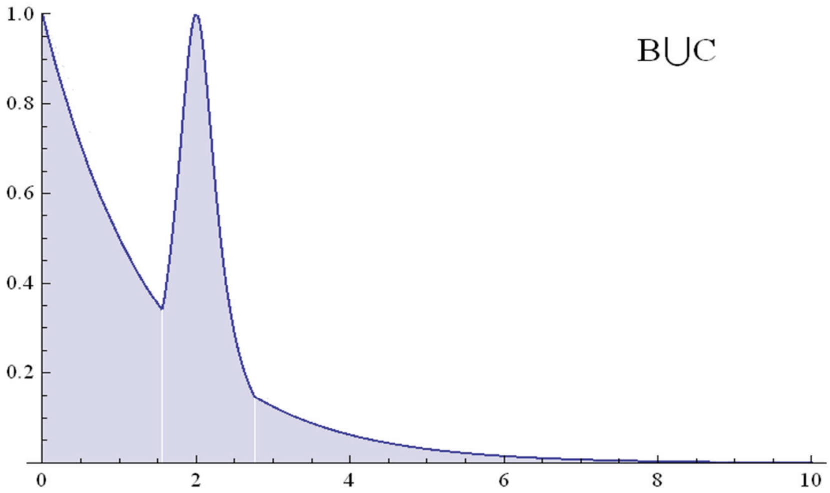
Εικόνα 2.8



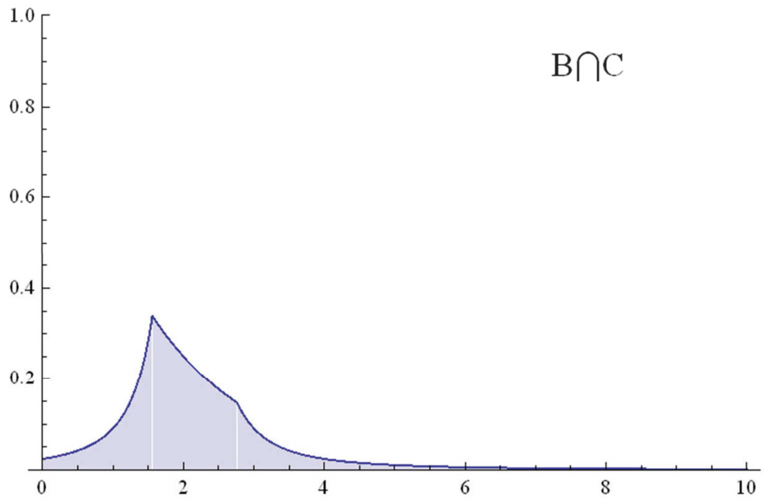
Εικόνα 2.9



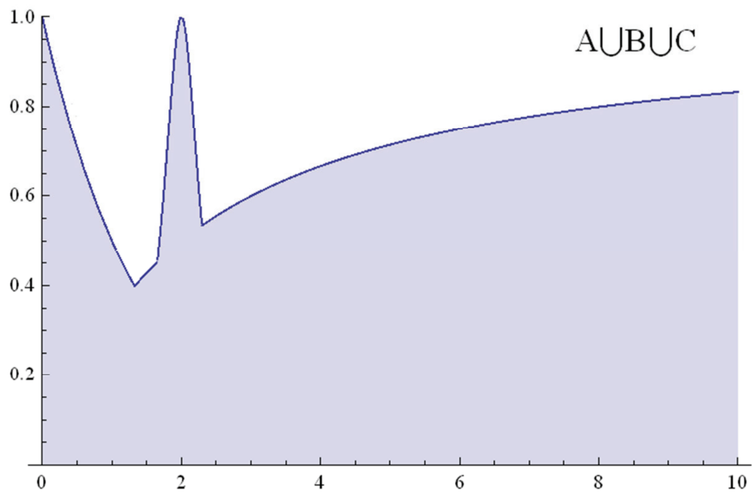
Εικόνα 2.10



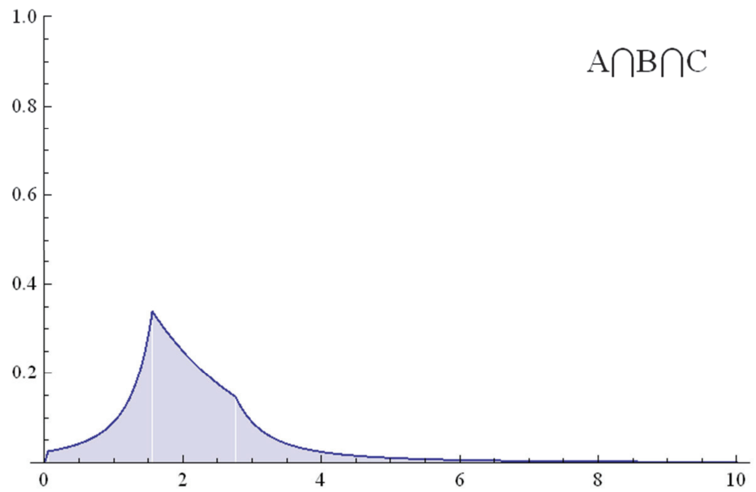
Εικόνα 2.11



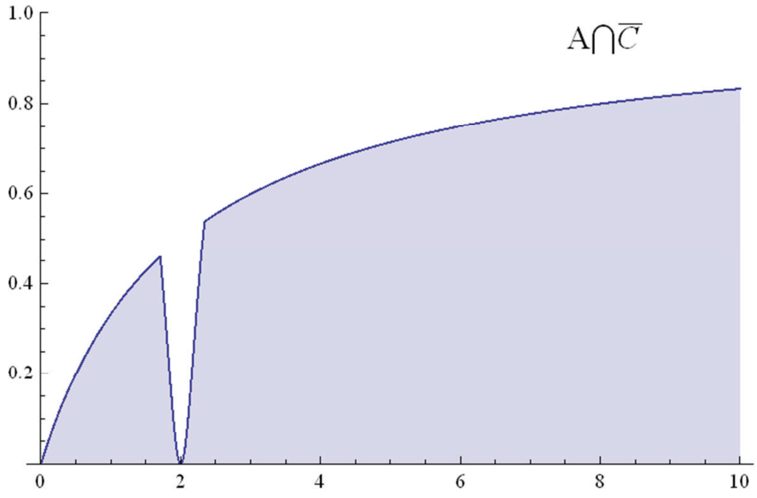
Εικόνα 2.12



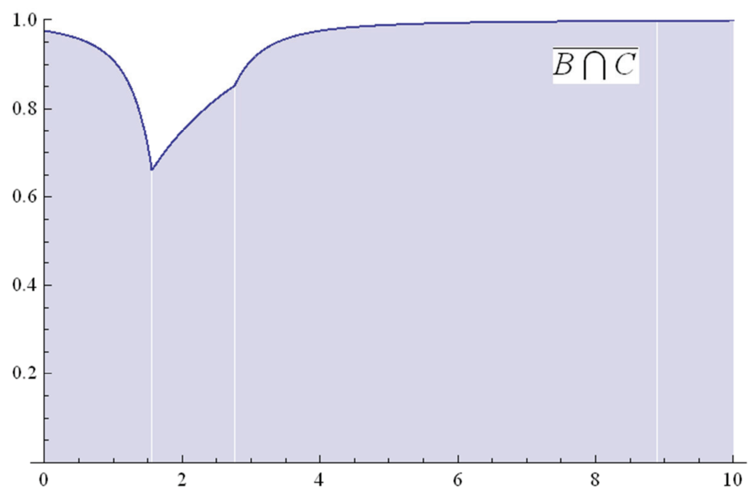
Εικόνα 2.13



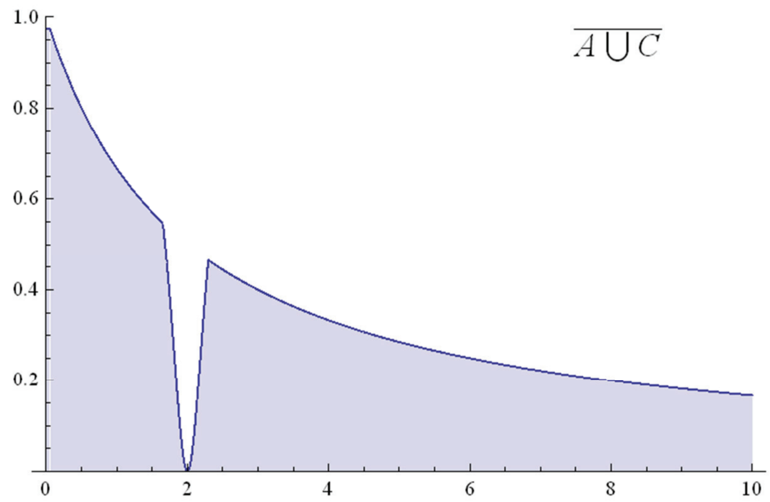
Εικόνα 2.14



Εικόνα 2.15



Εικόνα 2.16



Εικόνα 2.17

2.2 Παράδειγμα

Έστω ότι τα ασαφή σύνολα A και B ανήκουν στο καθολικό σύνολο X. Η *διαφορά* του συνόλου Α και Β ορίζεται ως:

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

ενώ η *συμμετρική διαφορά* τους:

$$A \Delta B = (\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} - A)$$

Για να αποδείξουμε ότι

a) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

b) $A \Delta B \Delta C = (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C)$

σκεφτόμαστε ότι στα ασαφή σύνολα η διαφορά μεταξύ δύο συνόλων προκύπτει από την σχέση: $A - B = A \cap \overline{B} = \min(A(x), 1 - B(x))$

Συνεπώς η συμμετρική διαφορά τους είναι:

$A \Delta B = [\min(A(x), 1 - B(x))] \cup [(\min(B(x), 1 - A(x)]$

a) $x \in A\Delta(B\Delta C)$ iff (αν και μόνο αν)

1. $x \in A$ και $x \notin B\Delta C = [\min(B(x), 1 - C(x))] \cup [(\min(C(x), 1 - B(x)]$

   ή

2. $x \in B\Delta C = [\min(B(x), 1 - C(x))] \cup [(\min(C(x), 1 - B(x)]$ και $x \notin A$

1. Αν υποθέσουμε ότι $x \notin B\Delta C = [\min(B(x), 1 - C(x))] \cup [(\min(C(x), 1 - B(x)]$ τότε συνεπάγεται ότι

i) $x \notin B$ ή $x \notin C$

ή

ii) $x \in B$ και $x \in C$

- Αν ισχύει το i τότε $x \in A - B = \min(A(x), 1 - B(x))$ και $x \notin C$
- Αν ισχύει το ii τότε $x \in C$ και $x \notin A - B == \min(A(x), 1 - B(x))$

2. Αν υποθέσουμε ότι:

$$x \in B\Delta C = [\min(B(x), 1 - C(x))] \cup [(\min(C(x), 1 - B(x)]$$

τότε συνεπάγεται ότι

i. $x \in B$ και $x \notin C$

ή

ii. $x \in C$ και $x \notin B$

- Αν ισχύει το i τότε $x \notin C$ και $x \in B - A = \min(B(x), 1 - A(x))$
- Αν ισχύει το ii τότε $x \notin B - A = \min(B(x), 1 - A(x))$ και $x \in C$

Σε κάθε περίπτωση το $x \in (A \Delta B)\Delta$

b)

$$
\begin{aligned}
&A\Delta B\Delta C = (A\Delta B)\Delta C = \\
&=[\min(A(x),1-B(x))\cup\min(B(x),1-A(x))]\Delta C \\
&=[[[\min(A(x),1-B(x))\cup\min(B(x),1-A(x))]],1-C(x)]\cup[\min C(x),1-[[\min(A(x),1-B(x))\cup\min(B(x),1-A(x))]]] \\
&=[\min(A(x),1-B(x))\cup\min(B(x),1-A(x))-C]\cup[C-\min(A(x),1-B(x))\cup\min(B(x),1-A(x))] \\
&=[\min(A(x),1-B(x))\cup\min(B(x),1-A(x))\cap\bar{C}]\cup[C\cap\overline{\min(A(x),1-B(x))\cup\min(B(x),1-A(x))}] \\
&=[\min(A(x),1-B(x))\cup\min(B(x),1-A(x))\cap\bar{C}]\cup[C\cap\overline{\min(A(x),1-B(x))}\cap\overline{\min(B(x),1-A(x)}] \\
&=[(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(B\cap\bar{A}\cap\bar{C})]\cup[C\cap((\bar{A}\cap B)\cap(\bar{B}\cap A))] \\
&=\ldots \\
&=(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(B\cap\bar{A}\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)\cup(A\cap B\cap C)
\end{aligned}
$$

2.3 Παράδειγμα

Έστω μια συνηθισμένη πραγματική συνάρτηση

$$y = F(s) = -2s^2 + 1$$

η οποία ορίζεται στο ασαφές σύνολο , με συνάρτηση συμμετοχής

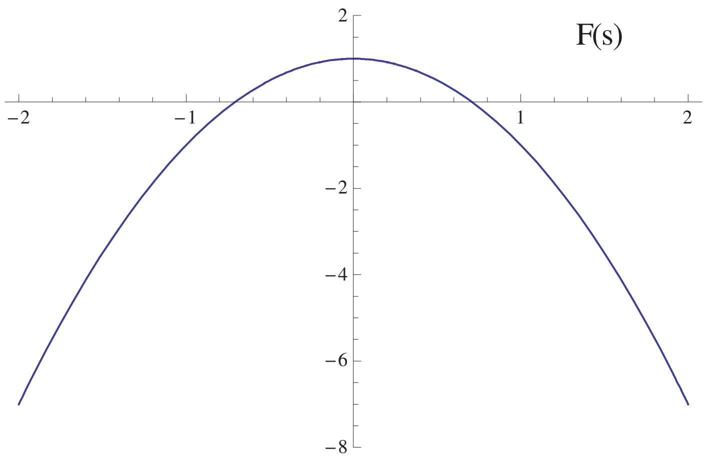
$$\mu_{s_f}(s) = 1 - \frac{1}{4}s^2 \,, \; s \in [-2,2] \; .$$

Για να βρούμε το ασαφές σύνολο Y_f, καθώς και την αντίστοιχη συνάρτηση συμμετοχής $\mu_{Y_f}(y)$ σκεφτόμαστε:

a) Το ασαφές σύνολο Yf προκύπτει από το πεδίο τιμών της y=F(s). Έχουμε

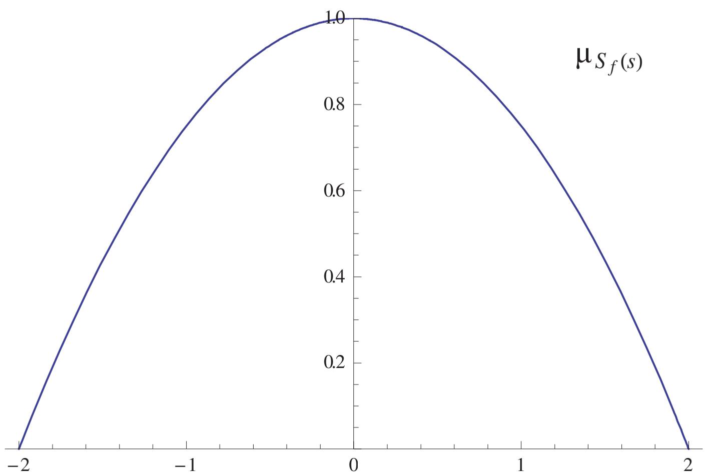
$$y' = (-2s^2 + 1)' = -4s \, .$$

s	-2	-	0	+	2
y'(s)	+		0	-	
y(s)	↗		max	↘	



Συνεπώς μελετώντας την συνάρτηση, αλλά και παρατηρώντας την γραφική της παράσταση, προκύπτει ότι το πεδίο τιμών της y=F(s) βρίσκεται στο διάστημα $[-7,1]$. Έτσι $Yf = [-7,1]$.

b) Για να βρούμε την συνάρτηση συμμετοχής που σχετίζεται με το Y_f , χρειάζεται για κάθε $y \in [-7,1]$ να βρούμε κάποια αντίστοιχα $s \in S_f$ και τα οποία να ικανοποιούν την σχέση $y = F(s)$. Παρατηρούμε ότι y=1, s=0 και για y=-7, s=-2. Συνεπώς ορίζουμε $\mu_{Y_f}(y) = \sup_{s:F(s)=y} \mu_{Y_f}(s)$ και έχουμε $\mu_{Y_f}(y) = 1 - \frac{1}{4} y^2$.



Κεφάλαιο 3 - Ασαφή Συστήματα και Εφαρμογές

3.1 Εισαγωγή

Οποιοδήποτε σύστημα εμπεριέχει ως μεταβλητές ασαφή σύνολα ονομάζεται ασαφές σύστημα. Τα ασαφή συστήματα διακρίνονται για τις εξελισσόμενες δυνατότητες τους να «σκέφτονται», δηλαδή να κρίνουν και να ελέγχουν σύμφωνα με τους σκοπούς που έχουν φτιαχτεί και στο περιβάλλον στο οποίο εφαρμόζονται (*ευφυής έλεγχος*) .

Τα συστήματα αυτά "μπολιάζονται" με ανθρώπινη γνώση και εμπειρία και κατόπιν αναπαράγουν τις ικανότητες τους σε συνθήκες και καταστάσεις όπου κυριαρχεί πολυπλοκότητα και αβεβαιότητα.

3.2 Ασαφής Έλεγχος

Ο ασαφής έλεγχος είναι η διαδικασία που υλοποιείται ώστε να μπορέσουμε να καταλήξουμε σε κάποια συγκεκριμένα αποτελέσματα ή συμπέρασμα. Την διαδικασία αυτή αναλαμβάνει ο *ασαφής ελεγκτής (fuzzy controller).* Τα βασικά δομικά συστατικά ενός ασαφή ελεγκτή αποτελούνται από τα εξής:

- Τον ασαφοποιητή (*fuzzifier*)
- Μηχανισμό Συμπερασμού (*inference engine*)
- Αποασαφοποιητή (*defuzzifier*)

3.2.1 Ασαφοποίηση

Ασαφοποίηση ονομάζουμε την διαδικασία με την οποία μετατρέπουμε πραγματικές τιμές των κλασσικών συνόλων ή λεκτικούς όρους σε ασαφείς ποσότητες. Η μετατροπή αυτή επιτυγχάνεται μέσω των συναρτήσεων συμμετοχής ή αλλιώς ασαφοποιητών (fuzzifiers).

3.2.2 Μηχανισμός Συμπερασμού

Ο *μηχανισμός συμπερασμού (inference)* είναι η διαδικασία που ακολουθούμε για να καταλήξουμε σε κάποια συμπεράσματα, έχοντας ως δεδομένο τα αποτελέσματα της ασαφοποίησης. Αυτό όπως ήδη έχουμε αναφέρει γίνεται εφικτό με μια *ασαφή βάση κανόνων (fuzzy rule base)*, που μέσω της *συνεπαγωγής* επεξεργασίας, παράγει τα συμπεράσματα ως ένα ασαφές σύνολο ή σύνολα.

Ο πιο διαδεδομένος μηχανισμός συμπερασμού είναι αυτός του *Mamdani*:

Μηχανισμός ***Mamdani min***

Στον min μηχανισμό του Mamdani η υλοποίηση γίνεται μέσω του ελάχιστου χειριστή (*minimum operator*):

$$a_{ik} = \max_{\{(l_1,l_2)|k=\Re(l_1,l_2)\}} \{\min(fa_{i,l_1}, ft_{i,l_2})\},$$

3.2.3 Αποασαφοποίηση

Αποτελεί το τελικό στάδιο της διαδικασίας ελέγχου και ουσιαστικά κάνει ακριβώς το αντίθετο από τον ασαφοποιητή. Μετατρέπει δηλαδή τα ασαφή σύνολα σε μια συγκεκριμένη και σαφή τιμή την οποία στην συνέχεια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να λάβουμε κάποιες αποφάσεις.

Όπως στην διαδικασία συμπερασμού έτσι και εδώ έχουμε πολλές εναλλακτικές μεθόδους. Μια από τις πιο γνωστές είναι ο υπολογισμός του κέντρου βάρους των συναρτήσεων συμμετοχής του ασαφούς συνόλου.

3.2.3.1 Κέντρο Βάρους (Center of Area – Centroid)

Αποτελεί μια από τις πιο διαδεδομένες τεχνικές αποασαφοποίησης. Όπως είπαμε αυτό που κάνει είναι να υπολογίζει την κεντρική τιμή των συναρτήσεων συμμετοχής του ασαφούς συνόλου και η σχέση της είναι η εξής:

$$y_i = \int_x x.\mu(x)dx \ \ / \ \int_x \mu(x)dx$$

3.3 Fuzzylite

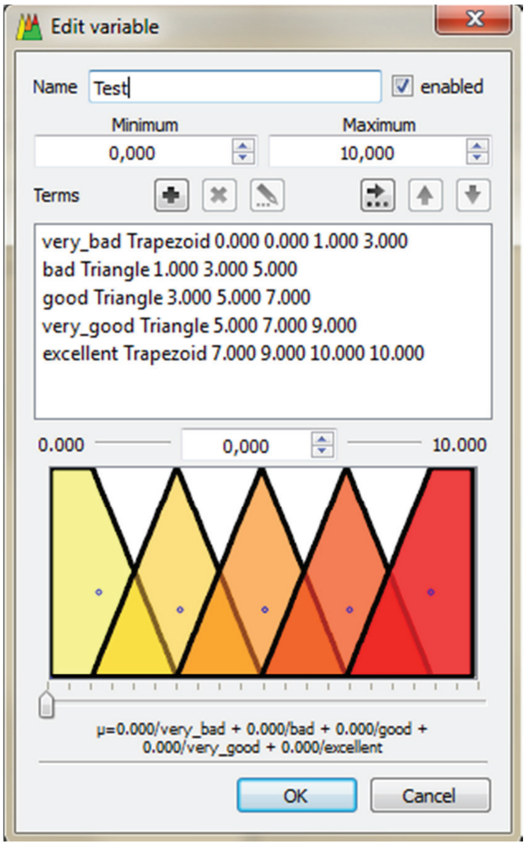
Το Fuzzylite είναι ένα ελεύθερο λογισμικό ανοιχτού κώδικα, γραμμένο σε C++, το οποίο μας δίνει την δυνατότητα να σχεδιάσουμε και να κατανοήσουμε σχηματικά για το πώς λειτουργούν οι ασαφείς ελεγκτές (fuzzy controllers).

Η χρήση του είναι απλή και έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε να μπορεί τρέχει σε πολλές πλατφόρμες (Linux, Windows, Mac OSX).

3.3.1 Παράδειγμα σχεδιασμού Fuzzy Logic Controller

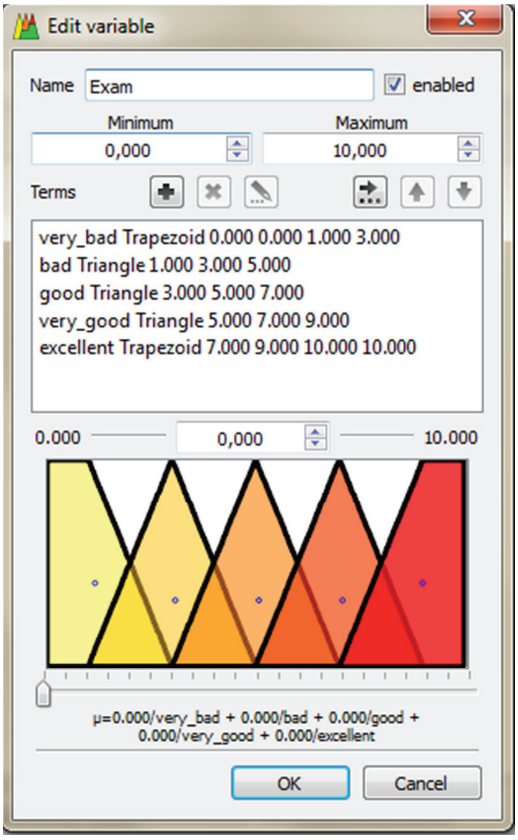
Ας θεωρήσουμε το κλασσικό πρόβλημα όπου ο τελικός βαθμός (result) ενός φοιτητή για το εκάστοτε μάθημα εξαρτάται από τον βαθμό εξέτασης του μαθήματος (exam) καθώς και από τα τεστ (test). Ας φανταστούμε επίσης ότι τόσο τα τεστ αλλά και η τελική εξέταση γίνονται και αξιολογούνται από μια σχετική εφαρμογή σε κάποιον υπολογιστή.

Ο μέγιστος βαθμός που μπορεί να πάρει ο φοιτητής για τα τεστ είναι 2 μονάδες. Οι λεκτικές μεταβλητές που περιγράφουν τον βαθμό του φοιτητή είναι το very_bad,bad,good,very_good και excellent και η καθεμία ορίζεται από την αντίστοιχη συνάρτηση συμμετοχής.

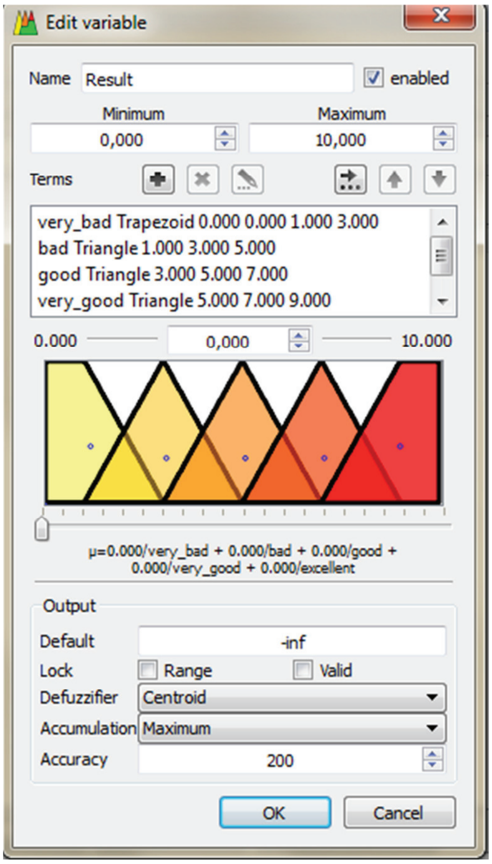


Εικόνα 3.1 Ασαφοποίηση Test

Στην Εικόνα 3.1, 3.2, 3.3, βλέπουμε με ποιο τρόπο ορίζουμε τις συναρτήσεις συμμετοχής και κάνουμε την ασαφοποίηση.



Εικόνα 3.2 Ασαφοποίηση του Exam



Εικόνα 1.3 Ασαφοποίηση του Result

Εικόνα 3.4

Στην Εικόνα 3.4 μπορούμε να παρατηρήσουμε ένα στιγμιότυπο το οποίο μας δείχνει ότι όταν η τιμή της συνάρτησης συμμετοχής του Test παίρνει τον μέγιστο βαθμό της για την μεταβλητή very_bad και τον μέγιστο βαθμό για την μεταβλητή good στο Exam, τότε η έξοδος (Result) λαμβάνει, σύμφωνα με τους κανόνες που έχουμε θέσει, τον μέγιστο και κατά συνέπεια απόλυτο βαθμό που είναι 1.


Control
Inputs
Outputs
Test
0.000
9,270
10.000
μ=0.000/very_bad + 0.000/bad + 0.000/good + 0.000/very_good + 1.000/excellent
Exam
0.000
2,370
10.000
μ=0.315/very_bad + 0.685/bad + 0.000/good + 0.000/very_good + 0.000/excellent
Result
0.000
4.467
10.000
μ=0.000/very_bad + 0.267/bad + 0.733/good + 0.000/very_good + 0.000/excellent
Rules
Minimum
Maximum
EinsteinProduct
Degree
19: if Test is very_good and Exam is very_good then Result is excellent
20: if Test is very_good and Exam is excellent then Result is excellent
21: if Test is excellent and Exam is very_bad then Result is bad
22: if Test is excellent and Exam is bad then Result is good
23: if Test is excellent and Exam is good then Result is very_good
24: if Test is excellent and Exam is very_good then Result is excellent
25: if Test is excellent and Exam is excellent then Result is excellent
0.000
0.000
0.315
0.685
0.000
0.000
0.000

Εικόνα 3.5

Εικόνα 3.6

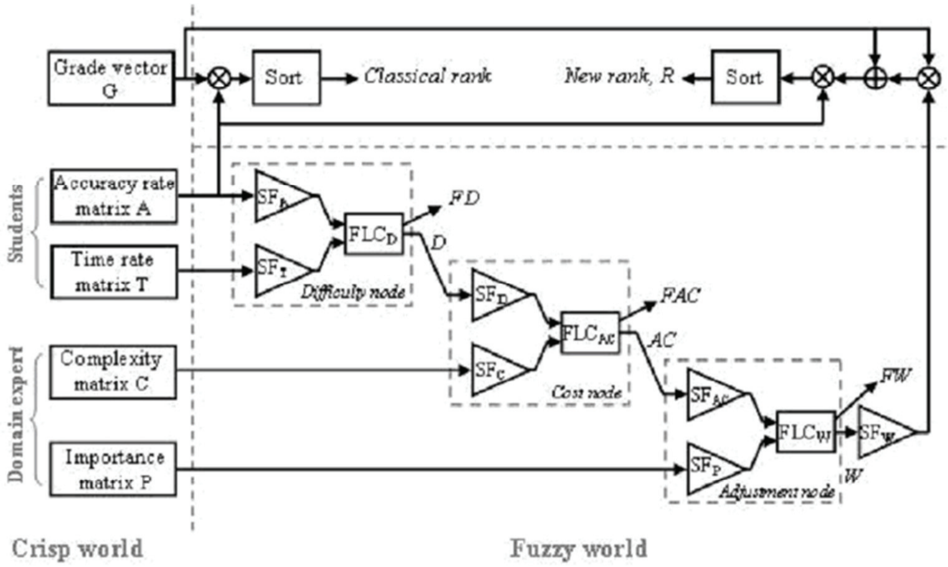
Από την άλλη στην Εικόνα 3.5 και 3.6 παρατηρούμε και τους βαθμούς μερικής συμμετοχής πλέον στα αντίστοιχα σύνολα και πως αυτοί βγάζουν ανάλογα αποτελέσματα που διακρίνονται ως ασαφή.

Κεφάλαιο 4 - Αξιολόγηση Φοιτητών και Ασαφή Συστήματα

4.1 Περιγραφή συστήματος

Η αξιολόγηση των φοιτητών που θα κάνουμε βασίζεται σε ένα σύστημα (Σχήμα 4.1) που δέχεται ως είσοδο στοιχεία τα οποία προκύπτουν από τα αποτελέσματα εξέτασης, καθώς και από ειδικούς του τομέα (*domain experts*), πχ καθηγητές αξιολόγησης.

Παίρνουμε ως δεδομένο ότι n αριθμός φοιτητών απαντάει σε m ερωτήσεις. Από τα αποτελέσματα της εξέτασης προκύπτει ένας πίνακας A (*accuracy rate matrix*) , διαστάσεων $m \times n$, ο οποίος εκφράζει τον βαθμό του φοιτητή για την κάθε ερώτηση, διαιρεμένο από τον μέγιστο βαθμό της εκάστοτε ερώτησης.



Σχήμα 4.1

Οπότε έχουμε:

n = αριθμός φοιτητών, m = ερωτήσεις, $A=[a_{ij}], m\times n$, όπου $a_{ij}\in[0,1]$ υποδηλώνει το ποσοστό ακρίβειας του φοιτητή j για την ερώτηση i.

Επίσης λαμβάνουμε έναν πίνακα T**,** διαστάσεων $m \times n$, για το ποσοστό χρόνου (*time rate matrix*). Δηλαδή τον χρόνο που χρησιμοποιεί ένας φοιτητής για να απαντήσει σε μια ερώτηση, διαιρεμένο από τον μέγιστο χρόνο που επιτρέπεται για την επίλυση της ερώτησης.

Έτσι έχουμε:

$T = [t_{ij}], m \times n$, όπου $t_{ij} \in [0,1]$ υποδηλώνει το ποσοστό χρόνου που χρειάστηκε ο φοιτητής j για να απαντήσει στην ερώτηση i.

Δίνεται επίσης και ένα διάνυσμα βαθμολογικής κλίμακας (*grade vector*) G **,** διαστάσεων $m \times 1$, όπου το $g_i \in [1,100]$ υποδηλώνει τον μέγιστο βαθμό που έχει εκχωρηθεί για την ερώτηση i , ικανοποιώντας την σχέση:

$$\sum_{i=1}^{m} g_i = 100$$

Βασιζόμενοι στον πίνακα A και T**,** λαμβάνουμε το διάνυσμα διαστάσεων $n \times 1$ για το συνολικό βαθμό (total score vector).

$$S = AG^T = [s_j], \quad n \times 1,$$

όπου $s_j \in [1,100]$ είναι ο συνολικός βαθμός του φοιτητή j. **(1)**

Για να πάρουμε την κλασσική ιεραρχική βαθμολογία θα πρέπει να ταξινομήσουμε τα στοιχεία - τιμές του S σε φθίνουσα σειρά.

Παίρνουμε λοιπόν ως δεδομένο ότι 10 φοιτητές συμμετείχαν σε ένα διαγώνισμα που περιλάμβανε 5 ερωτήσεις με τα παρακάτω αποτελέσματα.

$$A = \begin{bmatrix} 0.59 & 0.35 & 1 & 0.66 & 0.11 & 0.08 & 0.84 & 0.23 & 0.04 & 0.24 \\ 0.01 & 0.27 & 0.14 & 0.04 & 0.88 & 0.16 & 0.04 & 0.22 & 0.81 & 0.53 \\ 0.77 & 0.69 & 0.97 & 0.71 & 0.17 & 0.86 & 0.87 & 0.42 & 0.91 & 0.74 \\ 0.73 & 0.72 & 0.18 & 0.16 & 0.5 & 0.02 & 0.32 & 0.92 & 0.9 & 0.25 \\ 0.93 & 0.49 & 0.08 & 0.81 & 0.65 & 0.93 & 0.39 & 0.51 & 0.97 & 0.61 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.1 & 1 & 0.7 & 0.2 & 0.7 & 0.6 & 0.4 & 0.9 \\ 1 & 0 & 0.9 & 0.3 & 1 & 0.3 & 0.2 & 0.8 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.9 & 1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 & 0 & 1 & 1 & 0.3 & 0.4 & 0.8 & 0.7 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 1 & 1 & 0.6 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$G^T = [10\ \ 15\ \ 20\ \ 25\ \ 30]$$

Το G^T υποδηλώνει τον ανάστροφο (transpose) του G. Συνεπώς ο συνολικός βαθμός για τον εκάστοτε φοιτητή προκύπτει από τον τύπο (1) ως εξής:

$$\begin{array}{cccccccccc} s1 & s2 & s3 & s4 & s5 & s6 & s7 & s8 & s9 & s10 \end{array}$$

$$S^T = [67.60\ \ 54.05\ \ 38.40\ \ 49.70\ \ 49.70\ \ 48.80\ \ 46.10\ \ 52.30\ \ 82.35\ \ 49.70]$$

Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η ιεραρχική βαθμολογική κατάταξη των φοιτητών:

$$S9 > S1 > S2 > S8 > S4 = S5 = S10 > S6 > S7 > S3$$

όπου είναι προφανές ότι το $s_a > s_b$ υποδηλώνει ότι η συνολική *βαθμολογική επίδοση* (total score) του φοιτητή a είναι μεγαλύτερη από αυτή του φοιτητή b ή ίση όταν $s_a = s_b$

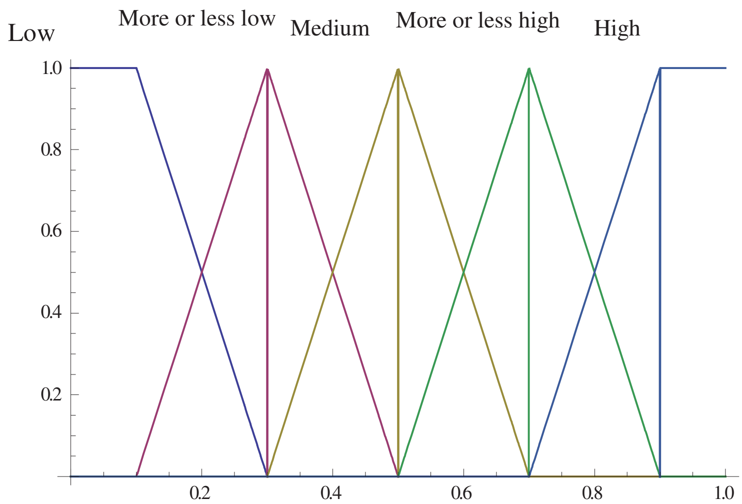
Από τους ειδικούς του τομέα (*domain experts*) παίρνουμε τον πίνακα σημαντότητας P, διαστάσεων $m \times l$, ο οποίος εκφράζει τον βαθμό σημαντότητας της κάθε ερώτησης στον ασαφή χώρο.

$$P = [p_{ik}], \quad m \times l \ ,$$

όπου το $p_{ik} \in [0,1]$ υποδηλώνει τον βαθμό σημαντότητας της ερώτησης i που ανήκει στο επίπεδο – κλίμακα k .

Για αυτό το λόγο έχουμε πέντε επίπεδα $(l=5)$ τα οποία και αναπαριστούμε με 5 ασαφή σύνολα. Όπου το $k=1$ αναπαριστά τον *λεκτικό όρο* «χαμηλός», $k=2$ «περισσότερος ή λιγότερο χαμηλός», $k=3$ «μέτριος», $k=4$ «περισσότερο ή λιγότερο υψηλός», $k=5$ «υψηλός».

Οι συναρτήσεις συμμετοχής παρουσιάζονται στην Εικόνα 1. Από την στιγμή που οι ξερές (crisp) τιμές δίνονται από τον ειδικό του τομέα (domain expert) ως ένα διάνυσμα σημαντικότητας των ερωτήσεων, οι τιμές τους ασαφούς πίνακα σημαντικότητας (p_{ik}) λαμβάνονται από την ασαφοποίηση (fuzzification).



Εικόνα 4.1 Τριγωνικές συναρτήσεις συμμετοχής για τα 5 επίπεδα

Τονίζεται ότι τα 5 ασαφή σύνολα της Εικόνας 4.1 χρησιμοποιούνται επίσης για την αναπαράσταση της ακρίβειας, για το ποσοστό χρόνου, την δυσκολία, την πολυπλοκότητα και την προσαρμογή των ερωτήσεων στον ασαφή χώρο.

Μας δίνεται επίσης από τους ειδικούς του τομέα ο πίνακας πολυπλοκότητας διαστάσεων $m \times l$, ο οποίος παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάδειξη της ικανότητας των φοιτητών να απαντάνε σωστά σε πολύπλοκες ερωτήσεις.

$$Co = [co_{ik}], \quad m \times l \ ,$$

όπου το $co_{ik} = [0,1]$ υποδηλώνει τον βαθμό πολυπλοκότητας της ερώτησης i που ανήκει στο επίπεδο πολυπλοκότητας k **.**

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.33 & 0.67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.15 & 0.85 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0.93 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Co} = \begin{bmatrix} 0 & 0.85 & 0.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.33 & 0.67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.69 & 0.31 \\ 0.56 & 0.44 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

Το πρώτο βήμα που χρειάζεται να κάνουμε είναι να βρούμε τον *μέσο όρο των εισόδων της εξέτασης* (πίνακας A) και ύστερα να τα ασαφοποιήσουμε (δηλαδή να περιγράψουμε τις αριθμητικές τιμές με λεκτικούς όρους) στα προκαθορισμένα επίπεδα (ασαφή σύνολα), Εικόνα 4.1. Ο μέσος όρος του διανύσματος βαθμού ακρίβειας (*average accuracy rate vector*) λαμβάνεται ως εξής:

$$\overline{A} = [a_{i\bullet}], \ m \times 1 \ ,$$

όπου το $a_{i\bullet}$ υποδηλώνει τον μέσο όρο βαθμού ακρίβειας (average accuracy rate) της ερώτησης i **,** το οποίο προκύπτει από την σχέση:

$$a_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} / n \qquad \textbf{(2)}$$

και ο μέσος όρος του διανύσματος βαθμού χρόνου της ίδιας διάστασης $m \times 1$ λαμβάνεται από

$$\bar{T} = [t_{i\bullet}],\ m \times 1$$

όπου το $t_{i\bullet}$ υποδηλώνει τον μέσο όρο χρόνου της ερώτησης i και η οποία με την σειρά της λαμβάνεται από την σχέση:

$$t_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} / n \qquad \textbf{(3)}$$

Ύστερα, από την διαδικασία ασαφοποίησης λαμβάνουμε τον ασαφή πίνακα μέσου όρου ακρίβειας (accuracy rate matrix) διαστάσεων $m \times l$

$$FA = [fa_{ik}],\ m \times l$$

όπου το $fa_{ik} = [0,1]$ υποδηλώνει την τιμή συμμετοχής του μέσου όρου βαθμού ακρίβειας της ερώτησης i που ανήκει στο επίπεδο k , καθώς και τον ασαφή πίνακα βαθμού χρόνου διανύσματος $m \times l$

$$FT = [ft_{ik}],\ m \times l$$

όπου εδώ το $ft_{ik} = [0,1]$ εκφράζει την τιμή συμμετοχής του μέσου όρου βαθμού χρόνου της ερώτησης i που ανήκει στο επίπεδο k αντίστοιχα.

Με αυτόν τον τρόπο χρησιμοποιώντας τους τύπους (2) και (3) λαμβάνουμε:

$$\bar{A}^T = [0.41\ \ 0.31\ \ 0.711\ \ 0.47\ \ 0.637]$$

$$\bar{T}^T = [0.57\ \ 0.48\ \ 0.31\ \ 0.50\ \ 0.57]$$

Βασιζόμενοι ύστερα στις συναρτήσεις συμμετοχής (Εικόνα 4.1) λαμβάνουμε τον ασαφή πίνακα βαθμού ακρίβειας και τον ασαφή πίνακα βαθμού χρόνου:

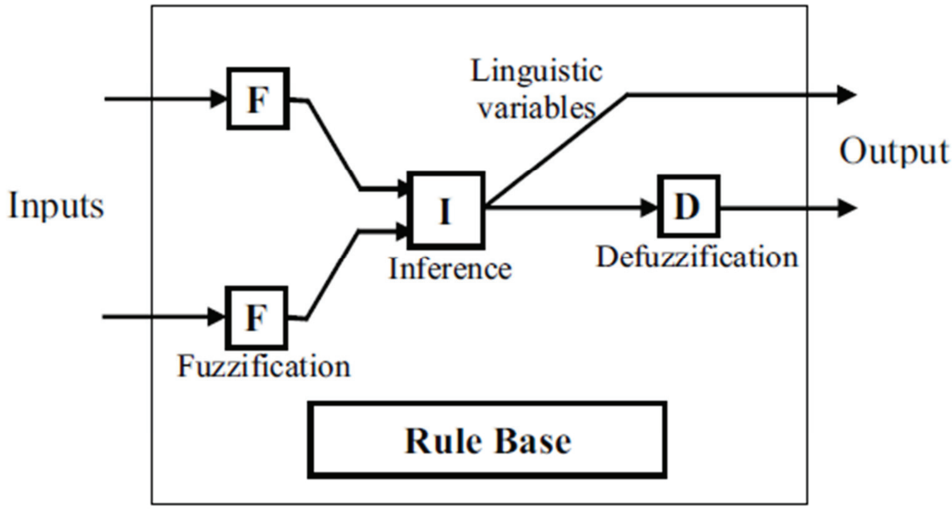
$$FA = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.945 & 0.055 \\ 0 & 0.15 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.315 & 0.685 & 0 \end{bmatrix}$$

$$FT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.65 & 0.35 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.65 & 0.35 & 0 \end{bmatrix}$$

Στον πρώτο κόμβο (*difficulty node*) οι είσοδοι δίνονται από τα αποτελέσματα της εξέτασης, ενώ στα 2 τελευταία (*cost node, adjustment node*) η μια δίνεται από την έξοδο του προηγούμενου κόμβου και η άλλη δίνεται από τους ειδικούς του τομέα. Η έξοδος του κάθε κόμβου μπορεί να είναι στην μορφή των crisp τιμών (αποσαφοποίηση) ή σε μορφή λεκτικών μεταβλητών (MFs).

Ο κάθε κόμβος έχει δύο συντελεστές κλίμακας (SFs στην Εικόνα 4.1). Μπορούμε να προσαρμόσουμε τις επιδράσεις των εισόδων αλλάζοντας τις τιμές των συντελεστών κλίμακας. Στην προκειμένη περίπτωση αφήνουμε και τους δύο συντελεστές κλίμακας να έχουν την ίδια τιμή, υποθέτοντας ότι επηρεάζουν ισότιμα την κάθε είσοδο στην έξοδο.

Ο κάθε κόμβος ακολουθεί τρία βασικά βήματα τα οποία και εξηγούμε:



Σχήμα 4.2

4.2 Διαδικασία ασαφοποίησης - Fuzzification

Σε αυτό το πρώτο βήμα, εφόσον οι είσοδοι δίνονται σε διακριτά (crisp) σύνολα , μετατρέπονται σε ασαφές τιμές συμμετοχής (Εικόνα 4.1). Η τριγωνική συνάρτηση συμμετοχής είναι εκείνη που χρησιμοποιείται πιο συχνά λόγω της απλότητας και της ευκολίας στους υπολογισμούς.

4.3 Διαδικασία συμπερασμού – Inference

Η διαδικασία για την εξαγωγή συμπεράσματος, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, βασίζεται πάνω σε κάποιους κανόνες που δίνονται και που έχουν την μορφή IF-THEN. Στην συγκεκριμένη περίπτωση χρησιμοποιούμε τον μηχανισμό συμπεράσματος του Mamdani, το οποίο είναι και το πιο διαδεδομένο όσον αφορά την παραγωγή ασαφών συνόλων για αποασαφοποίηση.

Στον max-min μηχανισμό του Mamdani η υλοποίηση γίνεται μέσω του ελάχιστου χειριστή (*minimum operator*) και τα εξαγόμενα MF συνδυάζονται με την χρήση του maximum χειριστή:

$$a_{ik} = \max_{\{(l_1,l_2)|k=\Re(l_1,l_2)\}} \{\min(fa_{i,l_1}, ft_{i,l_2})\}, \tag{4}$$

όπου το a_{ik} είναι η έξοδος του συμπεράσματος (i.e. the fire-strength) για την ερώτηση ***i*** στο ασαφές σύνολο ***k***. Τότε λαμβάνουμε έναν πίνακα διαστάσεων $m \times l$

$$a = [a_{ik}], \quad m \times l$$

4.4 Διαδικασία αποασαφοποίησης – Defuziffication

Σε αυτό το βήμα οι έξοδοι των ασαφών τιμών μετατρέπονται σε ξερές τιμές ή σε τελική απόφαση. Εδώ χρησιμοποιείται η μέθοδος **COG (center of gravity).** Η ξερή-διακριτή τιμή της ερώτησης i προκύπτει από

$$y_i = \int_x x.\mu(x)dx \;/\; \int_x \mu(x)dx \tag{5}$$

όπου τα ολοκληρώματα διατρέχουν όλο το φάσμα της εξόδου όπου το $\mu(\mathrm{x})$ προκύπτει από το δεύτερο βήμα. Η χρήση της μεθόδου αυτή (COG) μας δίνει μια υπολογίσιμη και αξιόπιστη διακριτή τιμή.

Για να μπορέσει να λάβει το διάνυσμα ρύθμισης (adjustment vector), ο κάθε ένας από τους τρεις κόμβους ακολουθεί το παραπάνω σχέδιο. Ο κόμβος δυσκολίας έχει δύο εισόδους που περιλαμβάνουν τον βαθμό ακρίβειας και τον βαθμό χρόνου, και μια έξοδο που δείχνει την δυσκολία. Ο κόμβος κόστους έχει δύο εισόδους που περιλαμβάνουν την δυσκολία και την πολυπλοκότητα, και μια έξοδο που δείχνει το κόστος. Παρομοίως, ο κόμβος ρύθμισης έχει δύο εισόδους που περιλαμβάνουν το κόστος και την σπουδαιότητα, και μια έξοδος που δείχνει το αποτέλεσμα ρύθμισης. Το διάνυσμα ρύθμισης, W , χρησιμοποιείται για να λάβουμε το ρυθμιζόμενο διάνυσμα βαθμού $m \times 1$,

$$\tilde{G} = [\tilde{g}_1],\ m \times 1$$

όπου το $\tilde{g}_1$ υποδηλώνει τον ρυθμιζόμενο βαθμό της ερώτησης i ,

$$\tilde{g} = g_i \cdot (1 + w_i) \qquad (6)$$

Ύστερα, η τιμή που λαμβάνουμε διαβαθμίζεται στον απόλυτο βαθμό της (i.e 100) με την χρήση του παρακάτω τύπου:

$$\tilde{g} = \tilde{g}_i \cdot \sum_j^m g_j \ / \ \sum_j^m \tilde{g}_j \qquad (7)$$

Τέλος, για να λάβουμε τις τελικές βαθμολογικές επιδόσεις των φοιτητών έχουμε:

$$\tilde{S} = A^T \tilde{G} \qquad (8)$$

Τότε μπορούμε να λάβουμε τους νέους και τροποποιημένους βαθμούς των φοιτητών, ταξινομώντας τις τιμές των στοιχείων του $\tilde{S}$ σε φθίνουσα σειρά.

Έτσι για παράδειγμα λαμβάνοντας υπόψη το Σχήμα 4.1, ο μέσος όρος των τιμών της A και της T στον κόμβο δυσκολίας μπορεί να υπολογισθεί από τους τύπους (2) και (3) και μετά να αποσαφοποιηθεί στο 1ο βήμα ώστε να λάβουμε του πίνακες FA και FT αντίστοιχα. Ύστερα , ως παράδειγμα για το 2ο βήμα, η έξοδος της 1ης ερώτησης στο επίπεδο 4 (fuzzy set “more or less high) υπολογίζεται σύμφωνα με τον κανόνα που δίνεται παρακάτω στον Πίνακα 4.1(α). Ο υπολογισμός γίνεται μέσω του ασαφούς μηχανισμού παρέμβασης Mamdani και προκύπτει από τον τύπο (4) ως εξής:

$$
\begin{aligned}
a_{14} &= \max_{\{(l_1,l_2)|\Re(l_1,l_2)=4\}} \{\min(fa_{1,l_1}, ft_{1,l_2})\}, \\
&= \max_{\{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4),(3,5),(4,5)\}} \{\min(fa_{1,l_1}, ft_{1,l_2})\} \\
&= \max\{\min(0,0), \min(0,0.65), \min(0.43,0.65), \min(0.43,0.35), \min(0.57,0.35), \min(0.57,0)\min(0,0) \\
&= \max\{0,0,0.43,0.35,0.35,0,0\} \\
&= 0.43
\end{aligned}
$$

Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία λαμβάνουμε την έξοδο συμπεράσματος, τον πίνακα - δύναμη πυρός της δυσκολίας

$$
a_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.57 & 0.43 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.055 & 0.945 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.85 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0.65 & 0.35 & 0.315 & 0 \end{bmatrix}
$$

Συνεχίζουμε στο 3ο Βήμα χρησιμοποιώντας το COG για να υπολογίσουμε την «ξερή» τιμή δυσκολίας της ερώτησης 1 (0.576) από τον τύπο (5). Συνεπώς υπολογίζουμε τις «ξερές» τιμές όλων των ερωτήσεων και λαμβάνουμε:

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	*Sum*
$\mu_{(x)}$	0	0	0.57	0.43	0	1
	0	0.05	0.1	0.9	0	1.05
	0.055	0.945	0	0	0	1
	0	0	0.85	0.15	0	1
	0	0.65	0.35	0.315	0	1.315
$x \cdot \mu_{(x)}$	0	0	0.285	0.301	0	0.586
	0	0.015	0.05	0.63	0	0.695
	0.0055	0.2835	0	0	0	0.289
	0	0	0.425	0.105	0	0.53
	0	0.195	0.175	0.2205	0	0.5905
$\sum \mu_{(x)} x / \sum \mu_{(x)}$						0.586
						0.661
						0.289
						0.53
						0.449

$$D^T = [0.586 \;\; 0.661 \;\; 0.289 \;\; 0.53 \;\; 0.449]$$

(a) Difficulty					
Accuracy	Time Rate				
	1	2	3	4	5
1	3	4	4	5	5
2	2	3	4	4	5
3	2	2	3	4	4
4	1	2	2	3	4
5	1	1	2	2	3

(b) Cost					
Difficulty	Complexity				
	1	2	3	4	5
1	1	1	2	2	3
2	1	2	2	3	4
3	2	2	3	4	4
4	2	3	4	4	5
5	3	4	4	5	5

(c) Adjustment					
Cost	Importance				
	1	2	3	4	5
1	1	1	2	2	3
2	1	2	2	3	4
3	2	2	3	4	4
4	2	3	4	4	5
5	3	4	4	5	5

Πίνακας 4.1 Η βάση κανόνων για την εξαγωγή της δυσκολίας (difficulty), κόστους (cost) και σημαντότητας (Importance), όπου 1:"Low", 2:"more or less low", 3:"medium", 4:"more or less high" και 5:"high"

Στον επόμενο κόμβο (cost node) και ακολουθώντας το 1ο Βήμα οι ξερές τιμές του D που προέκυψαν από τον προηγούμενο κόμβο ασαφοποιούνται έτσι ώστε να λάβουμε με αυτόν τον τρόπο τον ασαφή πίνακα δυσκολίας:

$$FD = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.622 & 0.378 & 0 \\ 0 & 0 & 0.236 & 0.764 & 0 \\ 0.003 & 0.997 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.811 & 0.189 & 0 \\ 0 & 0.221 & 0.779 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Στο 2ο Βήμα, βασιζόμενοι στον πίνακα κανόνων που μας δίνεται στον Πίνακα 4.1(b) λαμβάνουμε την έξοδο συμπερασμού του πίνακα κόστους ως συνάρτηση της δυσκολίας και πολυπλοκότητας:

$$a_E = \begin{bmatrix} 0 & 0.622 & 0.378 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0.236 & 0.67 & 0 \\ 0 & 0.003 & 0.994 & 0.31 & 0 \\ 0 & 0.56 & 0.189 & 0 & 0 \\ 0 & 0.221 & 0.7 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

Στο 3ο Βήμα λαμβάνουμε τις ξερές τιμές του κόστους:

$$C^T = [0.424 \;\; 0.642 \;\; 0.568 \;\; 0.354 \;\; 0.514]$$

Έτσι φτάνουμε στον τελευταίο κόμβο (adjustment cost), όπου για το 1ο Βήμα οι ξερές τιμές του C που προκύπτουν από την προηγούμενο κόμβο ασαφοποιούνται για να προκύψει ο ασαφής πίνακας κόστους:

$$FC = \begin{bmatrix} 0 & 0.38 & 0.62 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.289 & 0.711 & 0 \\ 0 & 0 & 0.661 & 0.339 & 0 \\ 0 & 0.733 & 0.267 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.931 & 0.069 & 0 \end{bmatrix}$$

Στο 2ο Βήμα, βασιζόμενοι στην βάση κανόνων του Πίνακα 4.1(c) λαμβάνουμε την έξοδο συμπερασμού του πίνακα ρυθμιστή (adjustment matrix) ως συνάρτηση του fuzzy cost και fuzzy importance:

$$a_W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.62 & 0 \\ 0 & 0.289 & 0.33 & 0.67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.661 & 0.339 \\ 0.733 & 0.267 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0.93 & 0.69 & 0 \end{bmatrix}$$

Στο 3ο Βήμα λαμβάνουμε τις ξερές τιμές του πίνακα ρυθμιστή:

$$W^T = [0.7 \ \ 0.552 \ \ 0.749 \ \ 0.177 \ \ 0.5]$$

Για να λάβουμε τελικά τον ασαφοποιημένο πίνακα ρυθμιστή:

$$a_W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.742 & 0.258 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.754 & 0.246 \\ 0.617 & 0.383 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002 & 0.998 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Τώρα για να μπορέσουμε να λάβουμε τους διορθωμένους βαθμούς χρησιμοποιούμε τον τύπο (8). Έτσι προκύπτει:

$$\tilde{G}^T = [17 \ \ 23.272 \ \ 34.829 \ \ 29.415 \ \ 44.990]$$

Ύστερα κάνουμε την διαβάθμιση σύμφωνα με την συνολική επίδοση (100) και έχουμε:

$$\tilde{G}^T = [11.371\ \ 15.566\ \ 23.296\ \ 19.675\ \ 30.092]$$

Και έτσι παίρνουμε τις τελικές συνολικές επιδόσεις των φοιτητών :

$$\tilde{S}^T = [67.15\ \ 53.17\ \ 42.10\ \ 52.19\ \ 48.31\ \ 51.81\ \ 48.47\ \ 49.27\ \ 85.23\ \ 51.49]$$

με την τελική, ιεραρχική βαθμολογική κατάταξη να μετατρέπεται σε:

$$S9 > S1 > S2 > S4 > S6 > S10 > S8 > S7 > S5 > S3$$

5.0 Συμπεράσματα και μελλοντικές επεκτάσεις

Σε γενικές γραμμές μπορούμε να πούμε ότι τα συστήματα ασαφούς ελέγχου, σε μια εποχή που ο κόσμος έχει ήδη γίνει πιο σύνθετος και περίπλοκος, δείχνουν το δρόμο στο πως μπορούμε να προσεγγίζουμε προβλήματα που μέχρι χθες αδυνατούσαμε ή τα προσεγγίζαμε με έναν απλοϊκό τρόπο.

Η εργασία που παρουσιάσαμε σχετικά με την αξιολόγηση φοιτητών έλαβε ως δεδομένα παραμέτρους όπως difficulty, complexity, importance τα οποία καθόρισαν και έδωσαν ένα πιο σχετικά πλήρες και δίκαιο αποτέλεσμα στην τελική βαθμολογική κατάταξη των φοιτητών σε σύγκριση με την αρχική κατάταξη.

Σημαντικό είναι ότι οι μέθοδοι που χρησιμοποιήσαμε, μηχανισμός συμπερασμού Mamdani, τον αποασαφοποιητή COG, καθώς και η επιλογή της τριγωνικής συνάρτησης δεν ήταν οι βέλτιστες δυνατές σε θεωρητικό, συνδυαστικό επίπεδο. Αυτό σημαίνει ότι τα περιθώρια για πιο ακριβή αποτελέσματα μένουν ανοιχτά και το ενδιαφέρον εστιάζεται σε μια τέτοια σύγκριση μεθόδων όπου αντί για την τριγωνική συνάρτηση θα χρησιμοποιούσαμε την Γκαουσιανή. Τέλος η εργασία αποτελεί και βάση για μια προγραμματιστική εφαρμογή.

6.0 Βιβλιογραφία

[1] Fuzzy Sets and Fuzzy Logic - Theory and Applications, George J.Klir and Bo Yuan, 1995

[2] Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control Systems, Guanrong Chen – Trung Tat Pham, 2001

[3] Fuzzy Control, Kevin M.Passino and Stephen Yurkovich, 1998

[4] Fuzzy Logic in Decision Making and Signal Processing, Sujit Nath Pant – Keith E.Holbert, http://enpub.fulton.asu.edu/powerzone/fuzzylogic/ ,2004

[5] Fuzzy Logic, A Practical Approach, F.Martin McNeill and Elen Thro, 1994

[6] Μαθηματικά, Μιχάλης Γρ. Βόσκογλου , 2009

[7] Ασαφή Συστήματα, Παπαδάκης Στέλιος και Αδαμίδης Παναγιώτης, 2004

Παράρτημα: Κώδικας σε Mathematica για την διαδικασία Ασαφοποίησης-Συμπερασμού

```
(* Step 1 : Αρχή Διαδικασίας Ασαφοποίησης*)

a = 0.1;

b = 0.3;

c = 0.5;

d = 0.7;

f = 0.9;

g = 1;

m1 = Piecewise[{{0, x > b}, {(b - x)/(b - a), a <= x <= b}, {1, x < a}}];

m2 = Piecewise[{{0, x <= a}, {(x - a)/(b - a), a < x <= b}, {(c - x)/(c - b), b < x < c}, {0, x >= c}}];

m3 = Piecewise[{{0, x <= b}, {(x - b)/(c - b), b < x <= c}, {(d - x)/(d - c), c < x < d}, {0, x >= d}}];

m4 = Piecewise[{{0, x <= c}, {(x - c)/(d - c), c < x <= d}, {(f - x)/(f - d), d < x < f}, {0, x >= f}}];

m5 = Piecewise[{{0, x < d}, {(x - d)/(f - d), d <= x <= f}, {1, f <= x <= g}}];


Plot[{m1, m2, m3, m4, m5,}, {x, 0, 1}];


mA1a = m1 /. {{x -> 0.414} , {x -> 0.31} , {x -> 0.711} , {x -> 0.47}, {x -> 0.637}};

mA2b = m2 /. {{x -> 0.414} , {x -> 0.31} , {x -> 0.711} , {x -> 0.47}, {x -> 0.637}};

mA3c = m3 /. {{x -> 0.414} , {x -> 0.31} , {x -> 0.711} , {x -> 0.47}, {x -> 0.637}};

mA4d = m4 /. {{x -> 0.414} , {x -> 0.31} , {x -> 0.711} , {x -> 0.47}, {x -> 0.637}};

mA5f = m5 /. {{x -> 0.414} , {x -> 0.31} , {x -> 0.711} , {x -> 0.47}, {x -> 0.637}};


mT1a = m1 /. {{x -> 0.57} , {x -> 0.48} , {x -> 0.31} , {x -> 0.50}, {x -> 0.57}};
```

mT2b = m2 /. {{x -> 0.57} , {x -> 0.48} , {x -> 0.31} , {x -> 0.50}, {x -> 0.57}};

mT3c = m3 /. {{x -> 0.57} , {x -> 0.48} , {x -> 0.31} , {x -> 0.50}, {x -> 0.57}};

mT4d = m4 /. {{x -> 0.57} , {x -> 0.48} , {x -> 0.31} , {x -> 0.50}, {x -> 0.57}};

mT5f = m5 /. {{x -> 0.57} , {x -> 0.48} , {x -> 0.31} , {x -> 0.50}, {x -> 0.57}};

SmA = Join[mA1a, mA2b, mA3c, mA4d, mA5f];

SmT = Join[mT1a, mT2b, mT3c, mT4d, mT5f];

SmAp = Partition[SmA, 5];

SmTp = Partition[SmT, 5];

*FA = Transpose[SmAp]; (*Ασαφής Πίνακας του μέσου όρου ακρίβειας - fuzzy accuracy rate matrix*)*

*FT = Transpose[SmTp] ; (*Ασαφής Πίνακας του μέσου όρου χρόνου - fuzzy accuracy time matrix*)*

(* Step 1 : Τέλος Διαδικασίας Ασαφοποίησης*)

(* Step 2 : Αρχή Διαδικασίας Inference (Εξαγωγή συμπεράσματος)*)

ARTA1 = Part[FA, 1];

ARFA1 = Part[FT, 1];

ARTA2 = Part[FA, 2];

ARFA2 = Part[FT, 2];

ARTA3 = Part[FA, 3];

ARFA3 = Part[FT, 3];

ARTA4 = Part[FA, 4];

ARFA4 = Part[FT, 4];

ARTA5 = Part[FA, 5];

```
ARFA5 = Part[FT, 5];

D12 = Min[Part[ARTA1, 1], Part[ARFA1, 2]];
D13 = Min[Part[ARTA1, 1], Part[ARFA1, 3]];
D23 = Min[Part[ARTA1, 2], Part[ARFA1, 3]];
D24 = Min[Part[ARTA1, 2], Part[ARFA1, 4]];
D34 = Min[Part[ARTA1, 3], Part[ARFA1, 4]];
D35 = Min[Part[ARTA1, 3], Part[ARFA1, 5]];
D45 = Min[Part[ARTA1, 4], Part[ARFA1, 5]];
D14 = Min[Part[ARTA1, 1], Part[ARFA1, 4]];
D15 = Min[Part[ARTA1, 1], Part[ARFA1, 5]];
D25 = Min[Part[ARTA1, 2], Part[ARFA1, 5]];
D11 = Min[Part[ARTA1, 1], Part[ARFA1, 1]];
D22 = Min[Part[ARTA1, 2], Part[ARFA1, 2]];
D33 = Min[Part[ARTA1, 3], Part[ARFA1, 3]];
D44 = Min[Part[ARTA1, 4], Part[ARFA1, 4]];
D55 = Min[Part[ARTA1, 5], Part[ARFA1, 5]];
D41 = Min[Part[ARTA1, 4], Part[ARFA1, 1]];
D51 = Min[Part[ARTA1, 5], Part[ARFA1, 1]];
D52 = Min[Part[ARTA1, 5], Part[ARFA1, 2]];
D21 = Min[Part[ARTA1, 2], Part[ARFA1, 1]];
D31 = Min[Part[ARTA1, 3], Part[ARFA1, 1]];
D32 = Min[Part[ARTA1, 3], Part[ARFA1, 2]];
D42 = Min[Part[ARTA1, 4], Part[ARFA1, 2]];
D43 = Min[Part[ARTA1, 4], Part[ARFA1, 3]];
D53 = Min[Part[ARTA1, 5], Part[ARFA1, 3]];
```

```
D54 = Min[Part[ARTA1, 5], Part[ARFA1, 4]];

D12a = Min[Part[ARTA2, 1], Part[ARFA2, 2]];
D13a = Min[Part[ARTA2, 1], Part[ARFA2, 3]];
D23a = Min[Part[ARTA2, 2], Part[ARFA2, 3]];
D24a = Min[Part[ARTA2, 2], Part[ARFA2, 4]];
D34a = Min[Part[ARTA2, 3], Part[ARFA2, 4]];
D35a = Min[Part[ARTA2, 3], Part[ARFA2, 5]];
D45a = Min[Part[ARTA2, 4], Part[ARFA2, 5]];
D14a = Min[Part[ARTA2, 1], Part[ARFA2, 4]];
D15a = Min[Part[ARTA2, 1], Part[ARFA2, 5]];
D25a = Min[Part[ARTA2, 2], Part[ARFA2, 5]];
D11a = Min[Part[ARTA2, 1], Part[ARFA2, 1]];
D22a = Min[Part[ARTA2, 2], Part[ARFA2, 2]];
D33a = Min[Part[ARTA2, 3], Part[ARFA2, 3]];
D44a = Min[Part[ARTA2, 4], Part[ARFA2, 4]];
D55a = Min[Part[ARTA2, 5], Part[ARFA2, 5]];
D41a = Min[Part[ARTA2, 4], Part[ARFA2, 1]];
D51a = Min[Part[ARTA2, 5], Part[ARFA2, 1]];
D52a = Min[Part[ARTA2, 5], Part[ARFA2, 2]];
D21a = Min[Part[ARTA2, 2], Part[ARFA2, 1]];
D31a = Min[Part[ARTA2, 3], Part[ARFA2, 1]];
D32a = Min[Part[ARTA2, 3], Part[ARFA2, 2]];
D42a = Min[Part[ARTA2, 4], Part[ARFA2, 2]];
D43a = Min[Part[ARTA2, 4], Part[ARFA2, 3]];
D53a = Min[Part[ARTA2, 5], Part[ARFA2, 3]];
```

```
D54a = Min[Part[ARTA2, 5], Part[ARFA2, 4]];


D12b = Min[Part[ARTA3, 1], Part[ARFA3, 2]];
D13b = Min[Part[ARTA3, 1], Part[ARFA3, 3]];
D23b = Min[Part[ARTA3, 2], Part[ARFA3, 3]];
D24b = Min[Part[ARTA3, 2], Part[ARFA3, 4]];
D34b = Min[Part[ARTA3, 3], Part[ARFA3, 4]];
D35b = Min[Part[ARTA3, 3], Part[ARFA3, 5]];
D45b = Min[Part[ARTA3, 4], Part[ARFA3, 5]];
D14b = Min[Part[ARTA3, 1], Part[ARFA3, 4]];
D15b = Min[Part[ARTA3, 1], Part[ARFA3, 5]];
D25b = Min[Part[ARTA3, 2], Part[ARFA3, 5]];
D11b = Min[Part[ARTA3, 1], Part[ARFA3, 1]];
D22b = Min[Part[ARTA3, 2], Part[ARFA3, 2]];
D33b = Min[Part[ARTA3, 3], Part[ARFA3, 3]];
D44b = Min[Part[ARTA3, 4], Part[ARFA3, 4]];
D55b = Min[Part[ARTA3, 5], Part[ARFA3, 5]];
D41b = Min[Part[ARTA3, 4], Part[ARFA3, 1]];
D51b = Min[Part[ARTA3, 5], Part[ARFA3, 1]];
D52b = Min[Part[ARTA3, 5], Part[ARFA3, 2]];
D21b = Min[Part[ARTA3, 2], Part[ARFA3, 1]];
D31b = Min[Part[ARTA3, 3], Part[ARFA3, 1]];
D32b = Min[Part[ARTA3, 3], Part[ARFA3, 2]];
D42b = Min[Part[ARTA3, 4], Part[ARFA3, 2]];
D43b = Min[Part[ARTA3, 4], Part[ARFA3, 3]];
```

```
D53b = Min[Part[ARTA3, 5], Part[ARFA3, 3]];
D54b = Min[Part[ARTA3, 5], Part[ARFA3, 4]];


D12c = Min[Part[ARTA4, 1], Part[ARFA4, 2]];
D13c = Min[Part[ARTA4, 1], Part[ARFA4, 3]];
D23c = Min[Part[ARTA4, 2], Part[ARFA4, 3]];
D24c = Min[Part[ARTA4, 2], Part[ARFA4, 4]];
D34c = Min[Part[ARTA4, 3], Part[ARFA4, 4]];
D35c = Min[Part[ARTA4, 3], Part[ARFA4, 5]];
D45c = Min[Part[ARTA4, 4], Part[ARFA4, 5]];
D14c = Min[Part[ARTA4, 1], Part[ARFA4, 4]];
D15c = Min[Part[ARTA4, 1], Part[ARFA4, 5]];
D25c = Min[Part[ARTA4, 2], Part[ARFA4, 5]];
D11c = Min[Part[ARTA4, 1], Part[ARFA4, 1]];
D22c = Min[Part[ARTA4, 2], Part[ARFA4, 2]];
D33c = Min[Part[ARTA4, 3], Part[ARFA4, 3]];
D44c = Min[Part[ARTA4, 4], Part[ARFA4, 4]];
D55c = Min[Part[ARTA4, 5], Part[ARFA4, 5]];
D41c = Min[Part[ARTA4, 4], Part[ARFA4, 1]];
D51c = Min[Part[ARTA4, 5], Part[ARFA4, 1]];
D52c = Min[Part[ARTA4, 5], Part[ARFA4, 2]];
D21c = Min[Part[ARTA4, 2], Part[ARFA4, 1]];
D31c = Min[Part[ARTA4, 3], Part[ARFA4, 1]];
D32c = Min[Part[ARTA4, 3], Part[ARFA4, 2]];
D42c = Min[Part[ARTA4, 4], Part[ARFA4, 2]];
```

```
D43c = Min[Part[ARTA4, 4], Part[ARFA4, 3]];
D53c = Min[Part[ARTA4, 5], Part[ARFA4, 3]];
D54c = Min[Part[ARTA4, 5], Part[ARFA4, 4]];

D12d = Min[Part[ARTA5, 1], Part[ARFA5, 2]];
D13d = Min[Part[ARTA5, 1], Part[ARFA5, 3]];
D23d = Min[Part[ARTA5, 2], Part[ARFA5, 3]];
D24d = Min[Part[ARTA5, 2], Part[ARFA5, 4]];
D34d = Min[Part[ARTA5, 3], Part[ARFA5, 4]];
D35d = Min[Part[ARTA5, 3], Part[ARFA5, 5]];
D45d = Min[Part[ARTA5, 4], Part[ARFA5, 5]];
D14d = Min[Part[ARTA5, 1], Part[ARFA5, 4]];
D15d = Min[Part[ARTA5, 1], Part[ARFA5, 5]];
D25d = Min[Part[ARTA5, 2], Part[ARFA5, 5]];
D11d = Min[Part[ARTA5, 1], Part[ARFA5, 1]];
D22d = Min[Part[ARTA5, 2], Part[ARFA5, 2]];
D33d = Min[Part[ARTA5, 3], Part[ARFA5, 3]];
D44d = Min[Part[ARTA5, 4], Part[ARFA5, 4]];
D55d = Min[Part[ARTA5, 5], Part[ARFA5, 5]];
D41d = Min[Part[ARTA5, 4], Part[ARFA5, 1]];
D51d = Min[Part[ARTA5, 5], Part[ARFA5, 1]];
D52d = Min[Part[ARTA5, 5], Part[ARFA5, 2]];
D21d = Min[Part[ARTA5, 2], Part[ARFA5, 1]];
D31d = Min[Part[ARTA5, 3], Part[ARFA5, 1]];
D32d = Min[Part[ARTA5, 3], Part[ARFA5, 2]];
D42d = Min[Part[ARTA5, 4], Part[ARFA5, 2]];
```

```
D43d = Min[Part[ARTA5, 4], Part[ARFA5, 3]];
D53d = Min[Part[ARTA5, 5], Part[ARFA5, 3]];
D54d = Min[Part[ARTA5, 5], Part[ARFA5, 4]];

a11 = Max[D41, D51, D52];
a12 = Max[D21, D31, D32, D42, D43, D53, D54];
a13 = Max[D11, D22, D33, D44, D55];
a14 = Max[D12, D13, D23, D24, D34, D35, D45];
a15 = Max[D14, D15, D25];

a21 = Max[D41a, D51a, D52a];
a22 = Max[D21a, D31a, D32a, D42a, D43a, D53a, D54a];
a23 = Max[D11a, D22a, D33a, D44a, D55a];
a24 = Max[D12a, D13a, D23a, D24a, D34a, D35a, D45a];
a25 = Max[D14a, D15a, D25a];

a31 = Max[D41b, D51b, D52b];
a32 = Max[D21b, D31b, D32b, D42b, D43b, D53b, D54b];
a33 = Max[D11b, D22b, D33b, D44b, D55b];
a34 = Max[D12b, D13b, D23b, D24b, D34b, D35b, D45b];
a35 = Max[D14b, D15b, D25b];

a41 = Max[D41c, D51c, D52c];
a42 = Max[D21c, D31c, D32c, D42c, D43c, D53c, D54c];
a43 = Max[D11c, D22c, D33c, D44c, D55c];
a44 = Max[D12c, D13c, D23c, D24c, D34c, D35c, D45c];
```

a45 = Max[D14c, D15c, D25c];

a51 = Max[D41d, D51d, D52d];

a52 = Max[D21d, D31a, D32d, D42d, D43d, D53d, D54d];

a53 = Max[D11d, D22d, D33d, D44d, D55d];

a54 = Max[D12d, D13d, D23d, D24d, D34d, D35d, D45d];

a55 = Max[D14d, D15d, D25d];

aDlist = List[a11, a12, a13, a14, a15, a21, a22, a23, a24, a25, a31, a32, a33, a34, a35, a41, a42, a43, a44, a45, a51, a52, a53, a54, a55]

aD = Partition[aDlist, 5] // MatrixForm (*Έξοδος συμπεράσματος, πίνακας-δύναμη πυρός της δυσκολίας*)

(* Τέλος Διαδικασίας Inference (Εξαγωγή συμπεράσματος)*)

(* Αρχή Διαδικασίας Ασαφοποίησης με την μέθοδο COG DT = Sum x*mx/Sum mx *)

z = {0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9};

ad1 = Part[aD, 1, 1];

ad2 = Part[aD, 1, 2];

ad3 = Part[aD, 1, 3];

ad4 = Part[aD, 1, 4];

ad5 = Part[aD, 1, 5];

dt1 = Total[(ad1*z)/(Total[ad1])];

dt2 = Total[(ad2*z)/(Total[ad2])];

dt3 = Total[(ad3*z)/(Total[ad3])];

dt4 = Total[(ad4*z)/(Total[ad4])];

```
dt5 = Total[(ad5*z)/(Total[ad5])];

DT = List[dt1, dt2, dt3, dt4, dt5]
```

(* Τέλος Διαδικασίας Ασαφοποίησης*)