ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΜΕΣΟΛΟΓΓΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ & ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ

Π Τ Υ Χ Ι Α Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

Πιθανότητες και εφαρμογές αυτών σε θέματα οικονομίας

ΜΑΓΓΟΥΡΙΩΤΟΥ ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ (Α.Μ. 13760)

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ

ΜΕΓΑΡΙΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ

Μ Ε Σ Ο Λ Ο Γ Γ Ι 2 0 1 2

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΜΕΣΟΛΟΓΓΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ & ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ

Π Τ Υ Χ Ι Α Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

Πιθανότητες και εφαρμογές αυτων σε θέματα οικονομίας

ΜΑΓΓΟΥΡΙΩΤΟΥ ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ (Α.Μ. 13760)

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ

ΜΕΓΑΡΙΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ

Μ Ε Σ Ο Λ Ο Γ Γ Ι 2012

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία πραγματοποιήθηκε στο Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Μεσολογγίου, στο Τμήμα Λογιστικής.

Σκοπός της εργασίας είναι η ανάδειξη της χρησιμότητας της Θεωρίας Πιθανοτήτων σε θέματα οικονομίας και ειδικότερα στη διαδικασία λήψης αποφάσεων των επιχειρήσεων. Ο παραπάνω σκοπός επιτυγχάνεται με την παρουσίαση πληθώρας εφαρμογών των πιθανοτήτων.

Με την ευκαιρία της συγγραφής της διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τα μέλη της επιτροπής της σχολής μου και ιδιαιτέρως τον επιβλέποντα της εργασίας μου καθηγητή κ. Μεγαρίτη Αθανάσιο, του οποίου η συμβολή και η στήριξη υπήρξε πολίτιμη για την ολοκλήρωση της πτυχιακής μου εργασίας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια της πιθανότητας είναι λίγο – πολύ γνώστη από την καθημερινή μας ζωή. Οι λέξεις πιθανό, βέβαιο, αδύνατο αποτελούν μέρος, σχεδόν, του καθημερινού μας λεξιλογίου. Οι πιθανότητες είναι ένας ενδιαφέρον και σημαντικός κλάδος εφαρμοσμένων μαθηματικών με μεγάλη ανάπτυξη τόσο στη θεωρία όσο και στις εφαρμογές. Ασχολείται με την έννοια της αβεβαιότητας και τη διατύπωση των νόμων που διέπουν τα διάφορα τυχαία φαινόμενα.

Στη φύση υπάρχουν φαινόμενα που υπακούουν σε συγκεκριμένους νόμους. Σε ένα τέτοιο φαινόμενο το αποτέλεσμα μπορεί να προβλεφθεί κάθε φορά με βεβαιότητα. Για παράδειγμα μια ποσότητα ποσότητα νερού υπό πίεση 760mmHg βράζει στους 100^{o}C. Υπάρχουν όμως και φαινόμενα που δεν υπακούουν σε συγκεκριμένους νόμους. Για παράδειγμα δεν υπάρχει μαθηματικός τύπος ή άλλο μέσο με το οποίο να υπολογίζεται η διάρκεια ζωής ενός ανθρώπου. Τα φαινόμενα αυτά ονομάζονται τυχαία ενώ η διαδικασία (μηχανισμός) ο οποίος μας επιτρέπει να τα παρατηρούμε ονομάζεται πείραμα τύχης. Θα πρέπει στο σημείο αυτό να ξεκαθαρίσουμε ότι το τυχαίο δεν οφείλεται σε κάποιο <<ελάττωμα>> της φύσης, αλλά στη δική μας αδυναμία να προβλέψουμε με βεβαιότητα και σε κάθε περίπτωση, ένα αποτέλεσμα. Όλα τα φαινόμενα, φυσικά, βιολογικά, οικονομικά, δεν είναι τίποτα άλλο παρά περίπλοκοι μηχανισμοί που εμείς προσπαθούμε να κατανοήσουμε, να ερμηνεύσουμε, να περιγράψουμε - τις περισσότερες φορές με τη γλώσσα των μαθηματικών - με στόχο την πρόβλεψή τους, τη λήψη αποφάσεων ή ακόμα και τον έλεγχό τους. Στην προσπάθειά μας αυτή, μας είναι πολύ δύσκολο και πολλές φορές ακατόρθωτο να <<δούμε>> κάθε λεπτομέρια που αγνοούμε ή σκόπιμα παραλείπουμε για λόγους απλούστευσης, μας οδηγεί σε νόμους, σχέσεις, μοντέλα που δεν μπορεί να είναι προσδιοριστικά. Η Θεωρία των πιθανοτήτων δεν είναι η μόνη αλλά είναι η πληρέστερη και ισχυρότερη, στις μέρες μας, μαθηματική θεωρία που διαθέτουμε για την περιγραφή και τον έλεγχο των περίπλοκων μηχανισμών.

Στη Θεωρία των πιθανοτήτων δεχόμαστε ότι ένα πείραμα μπορεί να επαναληφθεί όσες φορές θέλουμε κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Στην πράξη βέβαια κάτι τέτοιο είναι δύσκολο να συμβεί, αλλά στις πιθανότητες κάνουμε αυτήν την παραδοχή. Κι αυτό γιατί, η εμπειρία έχει δείξει ότι η επανάληψη του ίδιου πειράματος πολλές φορές αποκαλύπτει ένα είδος κανονικότητας στη συμπεριφορά του. Ένα μαθηματικό υπόδειγμα ή μοντέλο το οποίο θα μπορούσε να περιγράψει αυτήν την κανονικότητα θα ήταν επομένως χρήσιμο. Η Θεωρία πιθανοτήτων ενδιαφέρεται (χρησιμοποιείται) για τη διατύπωση τέτοιων μοντέλων (νόμων) που διέπουν τα διάφορα πειράματα τύχης.

Η έννοια της πιθανότητας εμφανίζεται για πρώτη φορά στις διδασκαλίες του Κορνεάδου, διευθυντού της Ακαδημίας του Πλάτωνος (2ος π.χ. Αιώνας) ο οποίος εξετάζει την έννοια αυτή από τη φιλοσοφική της υπόσταση. Στοιχεία της συνδιαστικής αναλύσεως η οποία αποτελεί τη βάση στον προσδιορισμό τησ πιθανότητας (υπό τον κλασσικό ορισμό) εμφανίζονται για πρώτη φορά, στα έργα των Αμμωνίου, Αριστοτέλους, Διοφάντου, Ευκλείδου, Πάππου, Πλούταρχου. Η γένεση του Λογισμού των Πιθανοτήτων οφείλεται στην ενασχόληση του ανθρώπου με τα τυχερά παιχνίδια (ρίψη κύβων, ρίψη νομίσματος, εξαγωγή μίας ή περισσοτέρων σφαιρών από μία κάλπη, εξαγωγή μίας ή περισσοτέρων καρτών από μία τράπουλα κ.λ.π.). Οι Ιταλοί μαθηματικοί Faccioli (1494), Tartaglia (1556), Peverone (1558) προσπάθησαν να προσδιορίσουν το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων και από αυτό αόριστα την πιθανότητα εμφανίσεως κάποιου αποτελέσματος (όπως το άθροισμα των ενδείξεων δύο κύβων κ.λ.π.). Ο Laplace (1749-1927) θεωρεί τους Fermat (1608-1665) και Pascal (1623-1662) ως θεμελιωτές του Λογισμού των Πιθανοτήτων.
Αναλυτικότερα,

Στο Κεφάλαιο 1 αναφέρεται η έννοια του πειράματος τύχης καθώς και η έννοια του δειγματικού χώρου και του ενδεχομένου. Επίσης μια ανασκόπηση των προσπαθειών ορισμού της πιθανότητας, εισάγεται ο κλασικός ορισμός, ο εμπειρικός ορισμός και ο αξιωματικός ορισμός.

Στη συνέχεια στο Κεφάλαιο 2 εισάγεται η δεσμευμένη πιθανότητα και τα δύο βασικά θεωρήματα της ολικής πιθανότητας και του Bayes. Επίσης, μελετάται η στοχαστική ανεξαρτησία.

Στο Κεφάλαιο 3 μελετώνται οι διατάξεις, οι μεταθέσεις και οι συνδυασμοί.

Η συνάρτηση κατανομής και οι συναρτήσεις πιθανότητας ή πυκνότητας μιας μονοδιάστατης τυχαίας μεταβλητής μελετώνται στο Κεφάλαιο 4. Το Κεφάλαιο αυτό συμπληρώνει η παρουσίαση της μέσης τιμής και της διασποράς (της κατανομής) μιας τυχαίας μεταβλητής.

Στο Κεφάλαιο 5 μελετώνται διεξοδικά οι σημαντικότερες διακριτές κατανομές. Συγκεκριμένα εξετάζονται η κατανομή Bernoulli και η διωνυμική κατανομή, η γεωμετρική κατανομή και η κατανομή Poisson.

Στο Κεφάλαιο 6 μελετώνται οι βασικές συνεχείς κατανομές. Έτσι, εξετάζονται η ομοιόμορφη και η εκθετική κατανομή. Επίσης μελετάται διεξοδικά η κανονική κατανομή, η οποία αποτελεί τη σημαντικότερη κατανομή, τόσο από θεωρητική άποψη όσο και από άποψη εφαρμογών καθώς και η τυπκή κανονική κατανομή.

Τέλος, το Κεφάλαιο 7 αφιερώνεται σε εφαρμογές της θεωρίας των πιθανοτήτων στην οικονομία.

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ

Οι διαπιστώσεις, τα αποτελέσματα, τα συμπεράσματα και οι πιθανές προτάσεις της παρούσας πτυχιακής εργασίας - εκτός των αναφορών που σημαίνονται ως λήμματα - αποτελούν προσωπικές θεωρητικές ή εμπειρικές διαπιστώσεις της σπουδάστριας που την επιμελήθηκε και δεν απηχούν κατ' ανάγκη τη γνώμη του εισηγητή εκπαιδευτικού, του Εκπαιδευτικού Προσωπικού του Τμήματος Λογιστικής ή του Α.Τ.Ε.Ι. Μεσολογγίου.

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ

1.1 ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΥΧΗΣ

Η Θεωρία των πιθανοτήτων έχει ως αντικείμενο τη μελέτη μαθηματικών υποδειγμάτων (προτύπων ή μοντέλων), γνωστών ως στοχαστικών υποδειγμάτων, τα οποία χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των στοχαστικών (ή τυχαίων) πειραμάτων (ή φαινομένων). Βασικό χαρακτηριστικό των πειραμάτων αυτών είναι οτι οι συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιούνται δεν προκαθορίζουν το αποτέλεσμα αλλά μόνο το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων. Στην αδυναμία προκαθορισμού του αποτελέσματος έγκειται το στοιχείο της τυχαιότητας. Έτσι η ρίψη ενός νομίσματος ή κύβου και η παρατήρηση του αποτελέσματος, όπως και η παρατήρηση του φύλου νεογέννητου σε μια σείρα γεννήσεων αποτελούν στοχαστικά (τυχαία) πειράματα (ή φαινομενα).

Όταν οι συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιείται ένα πείραμα ή εμφανίζεται ένα φαινόμενο καθορίζουν το αποτέλεσμα, το πείραμα ή το φαινόμενο είναι γνωστό ως αιτιοκρατικό (ή προσδιοριστικό). Για την περιγραφή τούτων αρκούν τα αιτιοκρατικά (ή προσδιοριστικά) μαθηματικά υποδείγματα (πρότυπα ή μοντέλα) τα οποία αποτελούν το αντικείμενο της μελέτης άλλων κλάδων της επιστήμης. Οι νόμοι της βαρύτητας που περιγράφουν την πτώση ενός σώματος αποτελούν ένα τέτοιο μαθηματικό υπόδειγμα (μοντέλο).

1.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

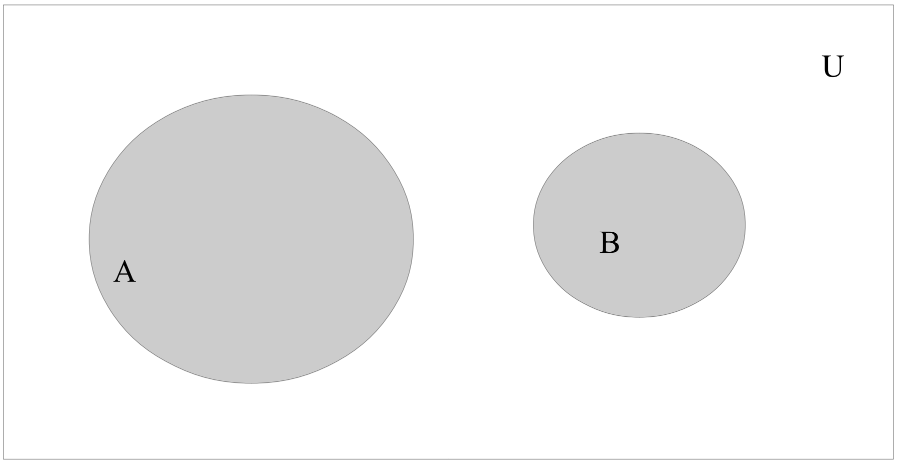
Ένα σύνολο είναι μία συλλογή αντικειμένων τα οποία ορίζονται με σαφήνεια και διακρίνονται σαφώς το ένα από το άλλο. Τα αντικείμενα που απαρτίζουν ένα σύνολο ονομάζονται μέλη ή στοιχεία του συνόλου. Τα σύνολα συνήθως τα συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα Α, Β, Γ... και τα στοιχεία του συνόλου συμβολίζονται με μικρά γράμματα α, β, γ...

- Όταν ένα στοιχείο α ανήκει σε ένα σύνολο Α, τότε συμβολίζεται $\alpha \in A$.
- Αν το α δεν ανήκει στο Α, συμβολίζεται $\alpha \notin A$.
- Όταν δύο στοιχεία α και β ανήκουν στο σύνολο Α, τότε $\alpha , \beta \in A$.

1.2.1 ΥΠΟΣΥΝΟΛΑ

- Αν κάθε στοιχείο του συνόλου Α ανήκει σε ένα σύνολο Β, τότε το σύνολο του Α ονομάζεται υποσύνολο του Β, και σημειώνουμε $A \subset B$ ή $B \supset A$
- Αν $A \subset B$ και $B \subset A$, τότε λέμε ότι τα σύνολα Α και Β είναι ίσα, Α = Β . Δηλαδή σε αυτή την περίπτωση τα σύνολα Α και Β έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.
- Όταν όμως τα Α και Β δεν είναι ίσα, δηλαδή δεν έχουν τα ίδια στοιχεία, τότε $A \neq B$.
- Αν όμως $A \subset B$ και $A \neq B$, τότε λέμε ότι το σύνολο Α είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου Β.
- Το σύνολο που επικεντρώνουμε κάθε φορά το ενδιαφέρον μας το ονομάζουμε βασικό σύνολο και το συμβολίζουμε με U .
- Ένα σύνολο χωρίς στοιχεία , ονομάζεται κένο σύνολο και συμβολίζεται με $\varnothing$. π.χ. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών για τους οποίους $x^2 = -1$, είναι ένα κενό σύνολο, διότι δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί των οποίων το τετράφωνο να ισούται με -1 .

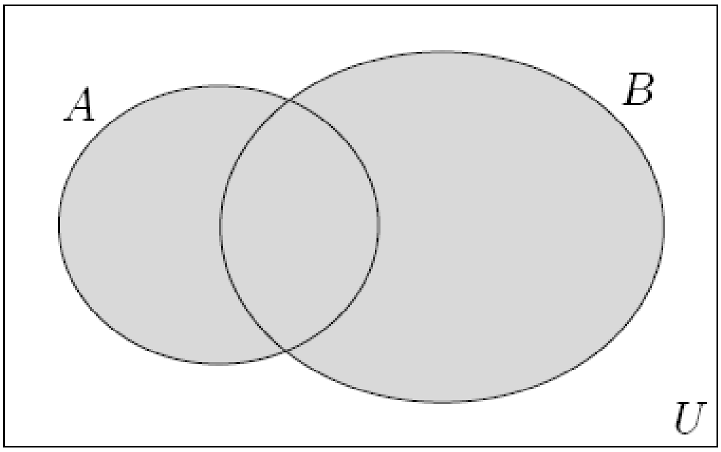
Τα σύνολα μπορούν να απεικονιστούν γεωμετρικά με τα διαγράμματα του Venn. Έτσι, ένα βασικό σύνολο U, απεικονίζεται από το σύνολο των σημείων ενός ορθογωνίου παραλληλογράμου, ένω ένα υποσύνολο του U απεικονίζεται από το σύνολο των σημείων ενός ενός κύκλου. (Σχήμα 1.2)



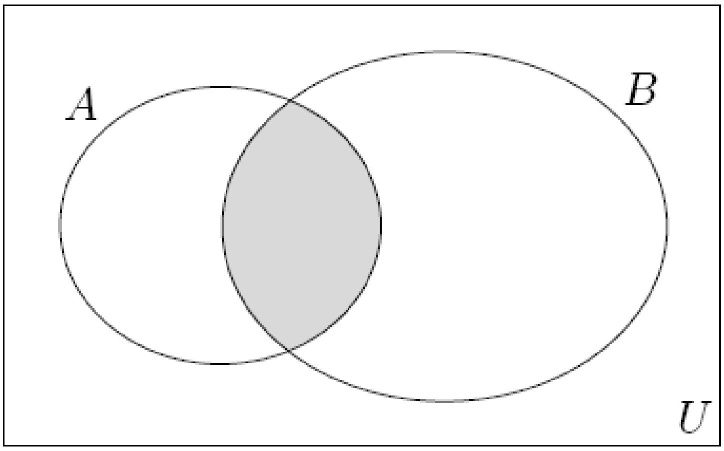
Σχήμα 1.1 Διάγραμμα Venn του βασικού συνόλου U και των υποσυνόλων του A, B

1.2.2 ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΟΛΑ

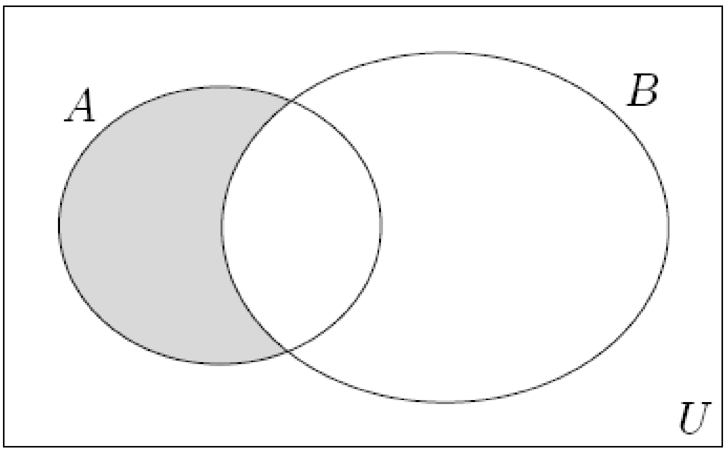
- Ένωση δύο συνόλων A και B, είναι το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν ή στο A ή στο B ή και στα δυο. Η ένωση των δύο συνόλων συμβολίζεται με $A \cup B$. (το σκιασμένο τμήμα στο Σχήμα 1.2)
- Η τομή δύο συνόλων A και B είναι το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν και στο A και στο B. Η τομή δύο συνόλων συμβολίζεται με $A \cap B$ (Σχήμα 1.3)
- Διαφορά δύο συνόλων A- B, είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B. (Σχήμα 1.4)
- Αν $B \subset A$, τότε το A- B καλείται συμπλήρωμα του B ως προς A και συμβολίζεται με B_A (Σχήμα 1.5)
- Αν A = U, τότε σύνολο U – B ονομάζεται απλά συμπλήρωμα του B και συμβολίζεται $\overline{B}$ (σχήμα 1.6)



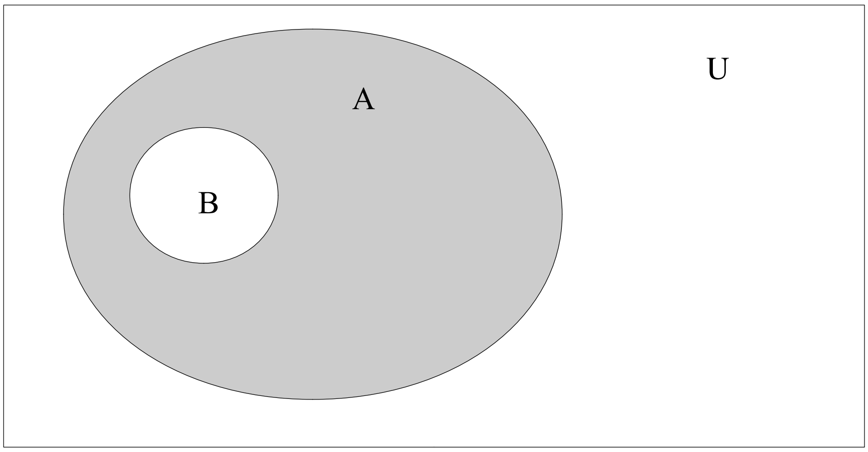
Σχήμα 1.2 Ένωση δύο συνόλων



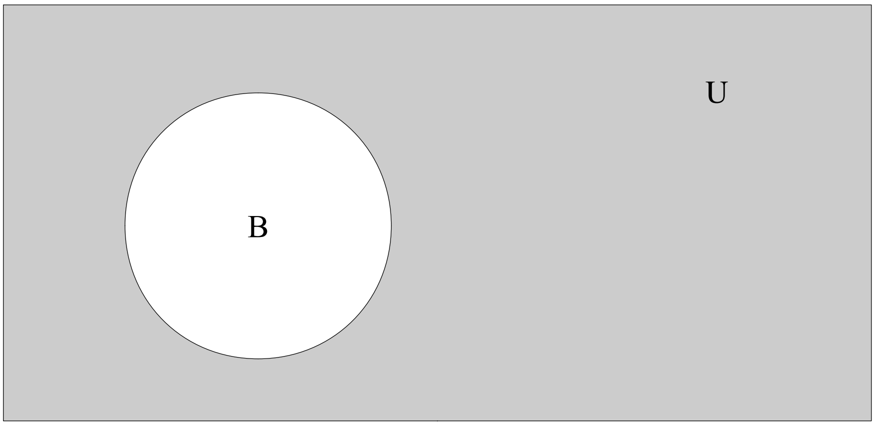
Σχήμα 1.3 Τομή δύο συνόλων



Σχήμα 1.4 Διαφορά δύο συνόλων



Σχήμα 1.5   Συμπλήρωμα του B ως προς A



Σχήμα 1.6 Συμπλήρωμα του B

1.2.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

$$A\cup B=B\cup A$$
$$A\cup(B\cup\Gamma)=(A\cup B)\cup\Gamma=A\cup B\cup\Gamma$$
$$A\cap B=B\cap A$$
$$A\cap(B\cap\Gamma)=(A\cap B)\cap\Gamma=A\cap B\cap\Gamma$$
$$A\cap(B\cup\Gamma)=(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$$
$$A\cup(B\cap\Gamma)=(A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$$
$$A-B=A\cap\bar{B}$$
$$A\cup\varnothing=A,\qquad A\cap\varnothing=\varnothing$$
$$A\cup U=U,\qquad A\cap U=A$$
$$(\overline{A\cup B})=\bar{A}\cap\bar{B}$$
$$(\overline{A\cap B})=\bar{A}\cup\bar{B}$$
$$A=(A\cap B)\cup(A\cap\bar{B})$$

1.3 ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ ΚΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο πείραμα. Όπως έχουμε ήδη σημειώσει, οι συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιείται δεν προκαθορίζουν το αποτέλεσμα του μόνο το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του.

Το σύνολο όλων των δυνατών εκβάσεων ενός πειράματος, ονομάζεται δειγματοχώρος. Κάθε στοιχείο του δειγματοχώρου, ονομάζεται απλό γεγονός ή ενδεχόμενο. Έτσι, ένα γεγονός είναι ένα υποσύνολο του δειγματοχώρου. Στην ρίψη ενός ζαριού για παράδειγμα,
όλα τα δυνατά αποτελέσματα που μπορούν να προκύψουν είναι ένας δειγματοχώρος που αποτελείται από έξι στοιχεία, δηλαδή Ω ={ 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Ένα απλό γεγονός του δειγματοχώρου αυτού, είναι μία απλή ρίψη, δηλαδή Α= {4}, ενώ μία σειρά ρίψεων
Α = {1, 5, 6} είναι ένα απλό γεγονός.

Γενικά αν Ω είναι ένας δειγματοχώρος ενός πειράματος, και Α ένα γεγονός του δειγματοχώρου Ω, λέμε ότι πραγματοποιήθηκε το γεγονός Α, όταν το αποτέλεσμα είναι του πειράματος είναι στοιχείο του Α.

- Οι δειγματοχώροι ονομάζονται *Διακριτοί*, εφόσον το πλήθος των στοιχείων που έχουν είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο.

- Ακόμα, ονομάζονται *Συνεχείς* όταν το πλήθος των στοιχείων που περιλαμβάνουν, είναι μη αριθμήσιμο.

- Ένας δειγματοχώρος είναι ένα *βέβαιο γεγονός.*

- Στη θεωρία των συνόλων, το κενό σύνολο Ø είναι ένα γεγονός το οποίο ονομάζεται *αδύνατο γεγονός*, εφόσον δεν περιλαμβάνει κανένα δυνατό αποτέλεσμα του δειγματοχώρου. Γενικότερα εφόσον τα γεγονότα είναι σύνολα, συμπεράσματα ή ιδιότητες που αναφέρονται σε γεγονότα, μπορούν να εκφραστούν με την βοήθεια της θεωρίας των συνόλων.

Έτσι αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματοχώρου Ω (δηλαδή ενός βασικού συνόλου), τότε :

- Η ένωση, των δύο γεγονότων $A \cup B$, σημαίνει ότι τουλάχιστον ένα, από τα δύο γεγονότα Α και Β πραγματοποιείται.

- Η τομή, των δύο γεγονότων $A \cap B$, σημαίνει ότι τα δύο γεγονότα Α και Β πραγματοποιούνται ταυτόχρονα.

- Το συμπλήρωμα, του γεγονότος Α, δηλαδή $\bar{A} = \Omega - A$, σημαίνει ότι το γεγονός Α, δεν πραγματοποιείται.

- Και η διαφορά των δύο γεγονότων Α – Β, σημαίνει ότι πραγματοποιείται το γεγονός Α χωρίς να πραγματοποιείται ταυτόχρονα το γεγονός Β .

- Επίσης δύο γεγονότα Α και Β ονομάζονται *ξένα ή ασυμβίβαστα* όταν η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου, δηλαδή όταν δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν και τα δύο. *Α, Β ασυμβίβαστα* $A \cap B = \emptyset$.

1.4 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1.4.1 ΚΛΑΣΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας διατυπώθηκε αρχικά από τον De Moivre (1711) ως εξής:

Η πιθανότητα της πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου είναι το πηλίκο με αριθμητή τον αριθμό των περιπτώσεων ευνοϊκών για την πραγματοποίηση του ενδεχομένου τούτου και παρανομαστή το συνολικό αριθμό των περιπτώσεων με την προϋπόθεση ότι όλες οι περιπτώσεις είναι εξίσου πιθανές (ισοπίθανες).

Η συνθήκη του ισοπιθάνου των περιπτώσεων είναι αναγκαία γιατί διαφορετικά θεωρώντας τις περιπτώσεις της πραγματοποίησης και της μη πραγματοποίησης ενδεχομένου θα καταλήγαμε στο συμπέρασμα ότι η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου είναι ίση με ½ . Το συμπέρασμα τούτο δεν ισχύει γενικά επειδή οι δύο αυτές περιπτώσεις δεν είναι πάντοτε εξίσου πιθανές.

Η έννοια των εξίσου πιθανών (ισοπιθάνων) περιπτώσεων είναι απαραίτητο να ορισθεί ανεξάρτητα από την έννοια της πιθανότητας γιατί διαφορετικά ο κλασικός αυτός ορισμός θα οδηγούσε σε φαύλο κύκλο. Επιτυγχάνεται με επίκληση της αρχής της έλληψης επαρκούς λόγου. Έτσι αν σύμφωνα με τα δεδομένα δεν υπάρχει λόγος να θεωρηθεί κάποια από τις περιπτώσεις περισσότερο ή λιγότερο πιθανή από τις άλλες τότε όλες θεωρούνται εξίσου πιθανές. Για παράδειγμα κατά τη ρίψη ενός κύβου υπάρχουν τόσα δυνατά αποτελέσματα όσες είναι κ οι έδρες του. Με την πρϋπόθεση ότι οι έδρες είναι ίσες και το βάρος του κύβου είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο δεν υπάρχει λόγος να θεωρηθεί κάποια από τις περιπτώσεις περισσότερο ή λιγότερο πιθανή από τις άλλες, οπότε όλες οι περιπτώσεις θεωρούνται ισοπίθανες. Σημειώνουμε ότι ο κλασικός αυτός ορισμός της πιθανότητας αφορά αναγκαστικά πεπερασμένους δειγματικούς χώρους.

Ας θεωρήσουμε έναν πεπερασμένο δειγματικό χώρο Ω του οποίου τα στοιχεία (δειγματικά σημεία, περιπτώσεις) σύμφωνα με την αρχή της έλλειψης επαρκούς λόγου, είναι εξίσου πιθανά (ισοπίθανα) και ένα οποιοδήποτε Α (ως προς το ενδεχόμενο χώρο Ω).

Η πιθανότητα του Α, συμβολιζόμενη με P(A), δίδεται από τη σχέση

$$P(A)=\frac{N(A)}{N}$$

όπου N(A) είναι ο αριθμός των στοιχείων του ενδεχομένου A και N = N (Ω) είναι ο αριθμός των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω. Η συνάρτηση P(A) η οποία σε κάθε ενδεχόμενο A (στον Ω) αντιστοιχεί τον αριθμό είναι :

(α) μη αρνητική : $P(A)\geqslant 0$ για κάθε ενδεχόμενο $A\subseteq\Omega$,

(β) νορμαλισμένη : P(Ω)= 1 ,

(γ) προσθετική : P(A+B) = P(A)+P(B) για οποιοδήποτε ξένα ενδεχόμενα A και $B\subseteq\Omega$

1.4.2 ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Η προϋπόθεση του ισοπιθάνου των περιπτώσεων ή στοιχειωδών περιοχών που απαιτούν τόσο ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας όσο και η γεωμετρική επέκτασή του περιορίζει σημαντικά το πεδίο των εφαρμογών της Θεωρίας των Πιθανοτήτων.

Έτσι σε στοχαστικά πειράματα (ή φαινόμενα) με πεπερασμένο δειγματικό χώρο στον οποίο τα δειγματικά σημεία δεν είναι ισοπίθανα ή με αριθμησίμως άπειρο δειγματικό χώρο, όπως για παράδειγμα η εκπομπή σωματιδίων από ραδιενεργό ουσία, δεν μπορεί να εφαρμοστεί ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας.

Επίσης σε στοχαστικά πειράματα (ή φαινόμενα) με μη αριθμήσιμο δειγματικό χώρο στον οποίο οι στοιχειώδεις περιοχές δεν είναι ισοπίθανες, όπως για παράδειγμα ο χρόνος ζωής μιας μηχανής, δεν μπορεί να εφαρμοστεί ο γεωμετρικός ορισμός της πιθανότητας.

Ο Von Mises στην προσπάθειά του να αντιμετωπίσει το πρόβλημα του ορισμού πιθανότητας σε οποιουσδήποτε δειγματικούς χώρους διατύπωσε τον ακόλουθο εμπειρικό ορισμό της πιθανότητας.

Ας υποθέσουμε ότι ένα στοχαστικό πείραμα(ή φαινόμενο) με δειγματικό χώρο Ω μπορεί να επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες απεριόριστο αριθμό φορών και ας θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$. *Έστω ότι σε ν επαναλήψεις του στοχαστικού πειράματος (ή φαινομένου) το ενδεχόμενο Α έχει πραγματοποιηθεί* $n_\nu(A)$ *φορές.*

Η σχετική συχνότητα του Α δίδεται από το λόγο

$$\frac{n_\nu(A)}{\nu}$$

Στην περίπτωση που υπάρχει το όριο της σχετικής συχνότητας όταν το ν τείνει στο άπειρο τούτο ορίζει,σύμφωνα με τον Von Mises,την πιθανότητα του Α :

$$P(A)=\lim_{\nu\to\infty}\frac{n_\nu(A)}{\nu}$$

Σημειώνουμε ότι , και η εμπειρική πιθανότητα είναι :

(α) μη αρνητική : $P(A)\geqslant 0$ για καθε ενδεχόμενο $A\subseteq\Omega$
(β) νορμαλισμένη : $P(\Omega)=1$,
(γ) προσθετική : P (A+B) = P(A)+P(B) για οποιοδήποτε ξένα ενδεχόμενα Α και $B\subseteq\Omega$.

1.4.3 ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Ο ορισμός της πιθανότητας δόθηκε από τον Ρώσο μαθηματικό A.N. Kolmogorov το 1933, παρακάμπτοντας ορισμένα θεωρητικά προβλήματα που προκύπτουν από τον ορισμό της πιθανότητας με η μέθοδο της σχετικής συχνότητας.

Η συνάρτηση πρέπει να ικανοποιεί τρεις ιδιότητες προκειμένου να θεωρείται πιθανότητα. Με βάση αυτές τις τρεις ιδιότητες και τη βοήθεια του μαθηματικού λογισμού ,αναπτύχθηκε εξ ολοκλήρου η θεωρία των πιθανοτήτων.

Έστω Ω ένας δειγματοχώρος και P μια πραγματική συνάρτηση τέτοια ώστε σε κάθε γεγονός A του Ω να αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός P(A). Η συνάρτηση P θα ονομάζεται συνάρτηση πιθανότητας και η τιμή της P(A) πιθανότητα, αν ικανοποιεί τα εξής αξιώματα :

- **Αξίωμα 1.** Για κάθε γεγονός A του Ω ισχύει $P(A) \geqslant 0$.
- **Αξίωμα 2.** Για το βέβαιο γεγονός Ω ισχύει P(Ω) = 1.
- **Αξίωμα 3**. Αν τα γεγονότα $A_1, A_2, \ldots A_n$ του Ω είναι ανά δύο ασυμβίβαστα, δηλαδή $A_i \cap A_j = \varnothing$ για κάθε i, j = 1, 2, …, n, τότε

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Από τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτουν ορισμένες βασικές ιδιότητες των πιθανοτήτων.

1. Αν $A_1 \subset A_2$ τότε $P(A_1) \leqslant P(A_2)$ και $P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)$.
2. Για κάθε γεγονός A είναι $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$, δηλαδή η τιμή κάθε πιθανότητας βρίσκεται μεταξύ 0 και 1 .
3. $P(\varnothing) = 0$, δηλαδή η πιθανότητα του αδύνατου γεγονότος είναι 0 .
4. Αν $\bar{A}$ είναι το συμπλήρωμα του A, τότε $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

5. Αν $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, όπου τα $A_1, A_2, \ldots A_n$ είναι n γεγονότα ανά δύο ασυμβίβαστα , τότε $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

   Ειδικότερα αν Α= Ω , τότε $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$

6. Αν Α και Β είναι δύο οποιαδήποτε γεγονότα , τότε
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

7. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

Γενικότερα ,αν A_1, A_2, A_3 είναι τρία οποιαδήποτε γεγονότα, τότε

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 A_3).$$

Η προηγούμενη ιδιότητα γενικεύεται για n γεγονότα .

2 . ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

2.1 ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Η ανάγκη εισαγωγής της δεσμευμένης πιθανότητας αναφύεται στις περιπτώσεις όπου μία μερική γνώση ως προς την έκβαση ενός τυχαίου πειράματος μειώνει την αβεβαιότητα συρρικνώνοντας το δειγματικό χώρο Ω και πιθανότατα P(A) για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$.

Ας υποθέσουμε ότι σε κάποιο στάδιο εκτέλεσής του πραγματοποιήθηκε ένα συγκεκριμένο ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$. Τότε, όσον αφορά την τελική του έκβαση, ο δειγματικός χώρος συρρικνώνεται στο A και ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο B (ως προς το δειγματικό χώρο Ω) συρρικνώνεται στο ενδεχόμενο Γ= $A \cap B$ το οποίο

- συμβολίζεται με B/A και διαβάζεται : το ενδεχόμενο B δεδομένου του (ενδεχομένου) A.
- Η πιθανότητα του εδεχομένου B δεδομένου του A, η οποία συμβολίζεται με P(B/A) και καλείται δεσμευμένη πιθανότητα (δεδομένου του A), συνδέεται, όπως είναι φυσικό, με τις πιθανότητες P(A) και P($A \cap B$).

Ορισμός : Έστω Ω δειγματικός χώρος ενός τυχαίου πειράματος και $A \subseteq \Omega$ ένα ενδεχόμενο με P(A) > 0 . Η δεσμευμένη πιθανότητα , δεδομένου του A , είναι μία συνάρτηση P(B/A), $B \subseteq \Omega$ η οποία ορίζεται ως εξής :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad B \subseteq \Omega \quad .$$

Όταν P(A)=0 , η P(B/A) δεν ορίζεται .

Για συγκεκριμένο ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega$, η P(B/A) καλείται δεσμευμένη πιθανότητα του B δεδομένου του A .

Άμεση συνέπει του ορισμού είναι ότι η δεσμευμένη πιθανότητα ικανοποιεί τα αξιώματα της πιθανότητας και, συνεπώς, είναι μια συνάρτηση πιθανότητας.

Θεώρημα 1: (πολλαπλασιαστικό θεώρημα). Έστω $A_i \subseteq \Omega, \quad i = 1,2, \ldots, \nu,$ ενδεχόμενα με $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{\nu-1}) > 0$. Τότε

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_\nu) = P(A_1) P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots P(A_\nu/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{\nu-1})$$

Η πιθανότητα οποιοδήποτε ενδεχομένου δύναται να αναλυθεί σε άθροισμα πιθανοτήτων με τη χρησιμοποίηση δεσμευμένων πιθανοτήτων του ενδεχομένου αυτού. Η ανάλυση αυτή απαιτεί την έννοια της διαμέρισης του δειγματικού χώρου Ω η οποία ορίζεται ως εξής :

Μία ακολουθία ενδεχομένων $A_i \subseteq \Omega, \quad i=1,2,\ldots,v,$ τα οποία είναι κατά ζεύγη ξένα, $A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i=j$, και η ένωσή τους είναι το Ω, $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_v = \Omega$, καλείται διαμέριση του Ω.

<u>Θεώρημα 2</u> : (θεώρημα ολικής πιθανότητας). Αν τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_v$ αποτελούν μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω με $P(A_\kappa)>0$, κ = 1, 2, ..., ν, και Β είναι ένα ενδεχόμενο στον Ω, τότε

$$P(B)=\sum_{\kappa=1}^{v} P(A_\kappa)\,P(B/A_\kappa).$$

<u>Θεώρημα 3</u> : (Τύπος του Bayes). Αν τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_v$ αποτελούν μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω με $P(A_\kappa)>0$, κ = 1, 2, ...ν, και Β είναι ένα ενδεχόμενο στον Ω με P(B)>0, τότε

$$P(A_r/B)=\frac{P(A_r)P(B/A_r)}{\sum_{\kappa=1}^{v} P(A_\kappa)P(B/A_\kappa)}, \qquad r=1,2,\ldots,v.$$

Το Θεώρημα του Bayes, είναι χρήσιμο , διότι δίνει τη δυνατότητα να υπολογιστεί εκ νέου η πιθανότητα ενός γεγονότος βάσει μιας νέας πληροφορίας που μπορεί να προκύψει γι'αυτό.

2.2 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Ας θεωρήσουμε ένα δειγματικό χώρο Ω και δύο ενδεχόμενα $A, B \subseteq \Omega$. Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας συνάγουμε ότι (α) αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ξένα μεταξύ τους, $A \cap B = \emptyset$ τότε P (B / A) = 0, επειδή δεδομένης της πραγματοποίησης του ενδεχομένου Α αποκλείεται η πραγματοποίηση του ενδεχομένου Β,
ενώ (β) αν το ενδεχόμενο Α είναι υποενδεχόμενο του ενδεχομένου Β, $A \subseteq B$, τότε
P (B / A) = 1, επειδή η πραγματοποίηση του ενδεχομένου Α συνεπάγεται της πραγματοποίησης και του ενδεχομένου Β.

Αυτές είναι οι δύο ακραίες περιπτώσεις όπου η γνώση της πραγματοποίησης του ενδεχομένου Α μας παρέχει μία πολύ θετική πληροφορία για την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου Β.

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις στις οποίες η γνώση της πραγματοποίησης του ενδεχομένου Α δεν έχει καμία επίδραση στην πραγματοποίηση ή μη του ενδεχομένου Β,

δηλαδή $P(B|A) = P(B)$

Στην περίπτωση αυτή το ενδεχόμενο Β καλείται στοχαστικώς ανεξάρτητο του ενδεχομένου Α. Επειδή, σύμφωνα με τον πολλαπλασιαστικό τύπο, ισχύει

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

Στην περίπτωση που το ενδεχόμενο Β είναι στοχαστικώς ανεξάρτητο ενδεχομένου Α έπεται ότι

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} \quad .$$

δηλαδή και το ενδεχόμενο Α είναι στοχαστικώς ανεξάρτητο του ενδεχομένου Β και επιπλέον

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad .$$

Με τη χρησιμοποίηση της τελευταίας αυτής σχέσης εισάγεται η έννοια της ανεξαρτησίας δύο ενδεχομένων.
Συγκεκριμένα θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

<u>Ορισμός</u> : *Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος στοχαστικού (τυχαίου)πειράματος (ή φαινομένου) και* $A, B \subseteq \Omega$ *. Τα ενδεχόμενα A και B καλούνται στοχαστικώς ανεξάρτητα αν και μόνο ισχύει η σχέση*

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad .$$

3. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Σε περιπτώσεις όπου το πλήθος των γεγονότων ενός δειγματοχώρου είναι μικρό, η απαρίθμησή τους προκειμένου να υπολογιστούν οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι διαδικασία σχετικά απλή. Αντίθετα, όταν το πλήθος των γεγονότων αυξάνει, η απαρίθμηση είναι πλέον διαδικασία δύσκολη ή ακόμη και αδύνατη και απαιτείται η χρήση ειδικών τεχνικών. Οι τεχνικές αυτές αποτελούν μέρος της ευρύτερης περιοχής των εφαρμοσμένων μαθηματικών, η οποία ονομάζεται συνδιαστική ανάλυση.

3.1 ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΑ

Δεδομένου ενός θετικού αριθμού *n*, το γινόμενο όλων των ακέραιων αριθμών από το *n* μέχρι το 1 ονομάζεται παραγοντικό και συμβολίζεται με *n*!. Δηλαδή,
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.
Εξ ορισμού : 0! = 1.

Για παράδειγμα,

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$
$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Με τη βοήθεια των παραγοντικών μπορούν να επιλυθούν προβλήματα που αφορούν απαριθμήσεις δυνατών τρόπων τοποθέτησης αντικειμένων σε μια σειρά, δηλαδή προβλήματα διάταξης.

3.2 ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

Έστω Α πεπερασμένο σύνολο με ν στοιχεία.

1. Διάταξη των ν ανά κ, όπου $\kappa \leqslant \nu$, καλείται κάθε διατεταγμένη κ-άδα $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa)$ που αποτελείται από κ διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία του Α.

Στην περίπτωση κ = ν, αντί του όρου ΄΄διάταξη των ν ανά κ΄΄ χρησιμοποιούμε τον όρο μετάθεση των ν στοιχείων του συνόλου Α.

Ο αριθμός των διατάξεων των ν στοιχείων ανά κ ισούται με

$$\nu \cdot (\nu - 1) \cdot \ldots \cdot (\nu - \kappa + 1) = \frac{\nu!}{(\nu - \kappa)!} .$$

Ειδικά για κ = ν, ο αριθμός των μεταθέσεων των ν στοιχείων του συνόλου Α, ισούται με

$$\nu \cdot (\nu - 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = \nu!.$$

2. Διάταξη με επανάληψη των ν ανά κ, όπου κ θετικός ακέραιος, καλείται κάθε διατεταγμένη κ-άδα ($\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa$) που αποτελείται από κ στοιχεία του Α.

Ο αριθμός των διατάξεων με επανάληψη των ν στοιχείων ανά κ ισούται με

$$\underbrace{\nu \cdot \nu \cdot \ldots \cdot \nu}_{\kappa-\varphi o \rho \acute{\varepsilon} \varsigma} = \nu^{\kappa} \quad .$$

3.3 ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Έστω Α πεπερασμένο σύνολο με ν στοιχεία.

1. Συνδυασμός των ν ανα κ, όπου $\kappa \leqslant \nu$, καλείται κάθε υποσύνολο του Α με κ στοιχεία.

Ο αριθμός των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά κ ισούται με

$$\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa! \cdot (\nu-\kappa)!} \quad .$$

2. Συνδυασμός με επαλάληψη των ν ανά κ, όπου κ θετικός ακέραιος, καλείται κάθε επιλογή κ στοιχείων ν, όχι απαραίτητα διαφορετικών μεταξύ τους, από τα ν στοιχεία του συνόλου Α.

Ο αριθμός των ν συνδυασμών με επανάληψη των ν στοιχείων ανά κ ισούται με

$$\binom{\nu+\kappa-1}{\kappa} = \frac{(\nu+\kappa-1)!}{\kappa! \cdot (\nu-1)!} \quad .$$

4. ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

4.1 ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Τα δειγματικά σημεία (στοιχειώδη ενδεχόμενα) ενός δειγματικού χώρου στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου) δύναται να είναι αριθμοί, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση που εκφράζουν ποσοτικό χαρακτηριστικό του στοχαστικού πειράματος, ή συμβολικές εκφράσεις με γράμματα του αλφάβητου, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση που περιγράφουν ποιοτικό χαρακτηριστικό του στοχαστικού πειράματος.

Οι περιπτώσεις αυτές αντιμετωπίζονται ενιαία με την αντιστοίχηση σε κάθε δειγματικό σημείο ενός πραγματικού αριθμού. Επιπλέον, σε ένα στοχαστικό (τυχαίο) πείραμα (ή φαινόμενο) το ενδιαφέρον και από πρακτική άποψη εστιάζεται στην πραγματοποίηση ή μη αριθμητικών μεγεθών τα οποία αντιστοιχούν σε δειγματικά σημεία.

Σχετικά θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1 : Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός τυχαίου πειράματος . Μια πραγματική συνάρτηση X που ορίζεται στο δειγματικό χώρο Ω καλείται τυχαία μεταβλητή (τ.μ.). Η συνάρτηση αυτή αντιστοιχεί σε κάθε δειγματικό σημείο $\omega \in \Omega$ έναν πραγματικό αριθμό $x = X(\omega)$.

- Σημειώνουμε ότι τυχαίες μεταβλητές συμβολίζονται με τα καφαλαία γράμματα χωρίς δείκτες X ,Y ,Z ,W ή με δείκτες $X_1, X_2, \dots X_\kappa$ και οι τιμές τους με τα αντίστοιχα μικρά γράμματα x, y, z, w ή $x_1, x_2, \dots x_\kappa$.
- Το σύνολο $R_x \subseteq R$ των τιμών της τυχαίας μεταβλητής X αποτελεί το νέο δειγματικό χώρο του στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου).

- Το διάστημα $(-\infty, x)$ είναι βασικό ενδεχόμενο στο νέο αυτόν δειγματικό χώρο. Οποιοδήποτε άλλο ενδεχόμενο $B \subseteq R_x$ δύναται να εκφραστεί συναρτήσει του διαστήματος αυτού.

Είναι επομένος χρήσιμη η εισαγωγή της ακόλουθης συνάρτησης.

Ορισμός 2 : *Η συνάρτηση* $F(x) = P(X \leqslant x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\}), -\infty < x < \infty$ *καλείται συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) ή αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) της τ.μ. X.*

Στις περιπτώσεις που υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X συμβολίζεται με F_X και η τιμή της στο x με $F_X(x)$.

4.2 ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Η μελέτη πολλών σημαντικών εννοιών που συνδέονται με τις τυχαίες μεταβλητές διευκολύνεται με το διαχωρισμό των δύο βασικών κατηγοριών : των διακριτών και των συνεχών τυχαίων μεταβλητών.

Ορισμός *1* : *Μία τυχαία μεταβλητή X καλείται διακριτή αν το σύνολο* R_X *των δυνατών τιμών της είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο. Δηλαδή,* $R_X = \{x_0, x_1, \ldots\}$.

Στις περιπτώσεις που υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. X συμβολίζεται με f_X και η τιμή της στο x_κ με $f_X(x_\kappa)$.

- Επίσης η συνάρτηση πιθανότητας, όπως προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της, είναι μη αρνητική

$$f(x_\kappa) \geqslant 0, \quad \kappa = 0,1, \ldots \kappa\alpha\iota \quad f(x) = 0, x \notin R_x$$

και

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(x_\kappa) = 1$$

- Στην περίπτωση που το σύνολο των τιμών της τυχαίας μεταβλητής X είναι πεπερασμένο, $R_x = x_0, x_1, \ldots x_\nu$, η σειρά $\sum_{k=0}^{\nu} f(x_\kappa) = 1$ γίνεται ένα πεπερασμένο άθροισμα $\sum_{k=0}^{\nu} f(x_\kappa) = 1$.

<u>Ορισμός 2</u> *: Μία τυχαία μεταβλητή X καλείται συνεχής αν το σύνολο* R_X *των δυνατών τιμών της είναι ένα διάστημα ή ένωση διαστημάτων του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Μια συνάρτηση f καλείται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X αν:*

1) $f(x) \geqslant 0, \quad x \in R_X$
2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Για κάθε α<β ορίζουμε

$$P(\alpha < X \leqslant \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Άμεση συνέπεια των ορισμών της συνάρτησης κατανομής F και της συνάρτησης πυκνότητας f μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής είναι η σχέση

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\beta} f(x) dx, \quad -\infty < x < \infty \quad .$$

4.3 ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Η κατανομή πιθανότητας μια τυχαίας μεταβλητής, όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, δύναται να εκφρασθεί είτε από τη συνάρτηση κατανομής είτε από τη συνάρτηση πιθανότητας ή πικνότητας αυτής.

Μια περιληπτική περιγραφή της πιθανοθεωρητικής συμπεριφοράς μιας τυχαίας μεταβλητής παρέχεται από τη θεώρηση και μελέτη μερικών βασικών παραμέτρων της κατανομής της.

Η μέση τιμή που αποτελεί μέτρο θέσης ή κεντρικής τάσης και η διασπορά που αποτελεί μέτρο συγκεντρωτικότητας ή μεταβλητότητας είναι οι πιο βασικές παράμετροι της κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής.

1) ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΔΙΑΚΡΙΤΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Έστω X διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f(x_\kappa)=P(X=x_\kappa)$ $\kappa = 0,1,...$ Η μέση τιμή της δίνεται από τον τύπο

$$E(X)= \sum_{\kappa=1}^{\infty} x_\kappa f(x_\kappa) \quad ,$$

με την προυπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει, ειδάλλως η μέση τιμή δεν υπάρχει.

Αν η X παίρνει πεπερασμένο πλήθος τιμών, $x_0, x_1, \dots, x_\nu$, τότε έχουμε

$$E(X)= \sum_{\kappa=1}^{\nu} x_\kappa f(x_\kappa) \quad .$$

2) ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x). Η μέση τιμή της δίνεται από τον τύπο

$$E(X)= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx \quad ,$$

με την προυπόθεση ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει, ειδάλλως η μέση τιμή δεν υπάρχει.

3) ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Το βασικότερο μέτρο διασποράς μιας τυχαίας μεταβλητής είναι η διακύμανσή της, η οποία ορίζεται ως εξής:

Έστω Χ τυχαία μεταβλητή (διακριτή ή συνεχής) με μέση τιμή μ = Ε(Χ). Η διακύμανση της Χ συμβολίζεται με V(X) ή σ^2 και δίνεται από τον τύπο
V (X) = E[(X-E (X))^2].

Δηλαδή,

V (X) = $\sum_{\kappa=1}^{\infty}(x_\kappa - E(X))^2 f(x_\kappa)$ στη διακριτή περίπτωση

και

V (X) = $\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2 f(x)\,dx$ στη συνεχή περίπτωση.

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω ορισμό, διακύμανση δεν εκφράζεται στις μονάδες της Χ αλλά στα τετράγωνα των μονάδων της. Για να ξεπεράσουμε το πρόβλημα αυτό, χρησιμοποιούμε συνήθως, αντί της διακύμανσης, την τετραγωνική της ρίζα

$$\sigma=\sqrt{V(X)}$$

η οποία καλείται τυπική απόκλιση.

Για τη διακύμανση μιας τυχαίας μεταβλητής αποδεικνύεται ότι ισχύουν ορισμένες ιδιότητες, οι σπουδαιότερες από τις οποίες παρουσιάζονται στη συνέχεια:

1. V(α)= 0 , όπου α σταθερά,

2. V(X+β)= V (X), όπου β σταθερά,

3. V(αX)= $α^2$ V(X), όπου α σταθερά,

4. V(αX+β)= $α^2$ V(X), όπου α, β σταθερές.

5. ΒΑΣΙΚΕΣ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

5.1 ΚΑΤΑΝΟΜΗ BERNOULLI ΚΑΙ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

5.1.1 ΚΑΤΑΝΟΜΗ BERNOULLI

Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο πείραμα με δειγματικό χώρο Ω και ένα ενδεχόμενο Α στον Ω . Αν Α' είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του Α στο Ω , τότε τα ενδεχόμενα Α και Α' αποτελούν μια διαίρεση του δειγματικού χώρου Ω, εφόσον $A \cap A' = \varnothing$ και $A \cup A' = \Omega$.

Το ενδεχόμενο Α χαρακτηρίζεται συνήθως ως επιτυχία και το Α' ως αποτυχία. Παριστάνοντας με ε την επιτυχία και α την αποτυχία, ο δειγματικός χώρος μπορεί να παρασταθεί ως $\Omega = \{\alpha, \varepsilon\}$. Ένα τέτοιο πείραμα καλείται *δοκιμή Bernoulli* .

Έστω

$$P(\{\varepsilon\}) = p, \quad P(\{a\}) = 1 - P(\{e\}) = 1 - p = q$$

και X ο αριθμός των επιτυχιών σε μια δοκιμή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p
(και αποτυχίας $q = 1 - p$) .

Ορισμός : *Η κατανομή της δίτιμης (μηδέν – ένα) τυχαίας μεταβλητής X καλείται κατανομή Bernoulli με παράμετρο p .*

Οι συναρτήσεις πιθανότητας και κατανομής, όπως επίσης η μέση τιμή και η διασπορά της καντανομής Bernoulli δίδονται στο ακόλουθο θεώρημα.

<u>Θεώρημα</u> *: Η συνάρτηση πιθανότητας και κατανομής Bernoulli, με παράμετρο p δίδεται από την*

$$f(x)=P(X=x)=p^x q^{1-x}, \quad x=0,1$$

και η συνάρτηση κατανομής από την

$$F(x)=\begin{cases} 0, & -\infty<x<0, \\ q, & 0\leqslant x<1 \\ 1, & 1\leqslant x<\infty \end{cases} \quad .$$

Η μέση τιμή και η διασπορά της κατανομής Bernoulli με παράμετρο p δίδονται από τις

$$\mu=E(X)=p, \quad \sigma^2=V(X)=pq \quad .$$

5.1.2 ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Η κατανομή Bernoulli αποτελεί ειδική περίπτωση της διωνυμικής κατανομής.
Έστω *X* ο αριθμός των επιτυχιών σε μια ακολουθία ν ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας *p* (και αποτυχίας *q* = 1- *p*) , σταθερή (ίδια) σε όλες τις δοκιμές.

<u>Ορισμός :</u> *Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται διωνυμική κατανομή με παραμέτρους ν και p . Επίσης, λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους ν και p και συμβολικά γράφουμε X~B(ν,p).*

Οι συναρτήσεις πιθανότητας και κατανομής της διωνυμικής κατανομής δίδονται στο ακόλουθο θεώρημα .

<u>Θεώρημα</u> *: Η συνάρτηση πιθανότητας της διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους ν και p δίδεται από την*

$$f(x)=P(X=x)=\binom{\nu}{x} p^x q^{\nu-x}, \quad x=0,1,\ldots,\nu$$

και η συνάρτηση κατανομής από την

$$F(x)=\begin{pmatrix} 0, & -\infty<x<0, \\ \sum_{\kappa=0}^{[x]}\binom{\nu}{\kappa}p^{\kappa}q^{\nu-\kappa}, & 0\leqslant x<\nu, \\ 1, & \nu\leqslant x<\infty, \end{pmatrix}$$

όπου [x] παριστάνει το ακέραιο μέρος του x, δηλαδή το μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος του x.

Η μέση τιμή και η διασπορά της διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους ν και p δίδονται από τις $\mu=E(X)=\nu p,\qquad \sigma^2=V(X)=\nu pq.$

5.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

<u>Ορισμός</u> *: Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας q) , σταθερή (ίδια) σε όλες τις δοκιμές .Έστω Χ ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλτής Χ καλείται γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p .*

Οι συναρτήσεις πιθανότητας και κατανομής της γεωμετρικής κατανομής δίνονται στο ακόλουθο θεώρημα.

<u>Θεώρημα</u> *: Η συνάρτηση πιθανότητας της γεωμετρικής κατανομής με παράμετρο p δίδεται από την*

$$f(x)=P(X=x)=pq^{1-x},\ \ x=1,2...$$

και η συνάρτηση κατανομής από την $F(X)=\begin{pmatrix} 0, & -\infty<x<1 \\ 1-q^{[x]}, & 1\leqslant x<\infty \end{pmatrix},$

όπου [x] παριστάνει το ακέραιο μέρος του x .

Η μέση τιμή και η διασπορά της γεωμετρικής κατανομής με παράμετρο p δίδονται από τις

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}, \quad \sigma^2 = V(X) = \frac{q}{p^2}$$

5.3 ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON

Όταν σε μια τυχαία διωνυμική μεταβλητή Χ το γεγονός που μελετάται έχει πολύ μικρή πιθανότητα επιτυχίας p, ενώ επιπλέον το πλήθος ν των δοκιμών που χρησιμοποιούνται είναι πολύ μεγάλο, τότε η χρήση του διωνυμικού υποδείγματος δεν εξυπηρετεί για τον υπολογισμό της κατανομής πιθανότητα της τυχαίας μεταβλητής Χ.

Σε αυτές τις περιπτώσεις η διωνυμική κατανομή προσεγγίζεται πολύ καλά από μία άλλη θεωρητική κατανομή, την κατανομή του Poisson, από το όνομα του Γάλλου μαθηματικού Simeon Denis Poisson (1781-1840), που τη μελέτησε πρώτος.

Ορισμός *: ‘Εστω Χ μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας* $f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots,$ *όπου* $0 < \lambda < \infty$ *. Η κατανομή της τ.μ. Χ καλείται κατανομή Poisson με παράμετρο λ . Επίσης, λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ και συμβολικά γράφουμε Χ~Ρ(λ).*

Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. Χ δίνεται από την

$$F(x) = \begin{Bmatrix} 0, & -\infty < x < 0 \\ \sum_{k=0}^{[x]} e^{-\lambda}\frac{\lambda^\kappa}{\kappa!}, & 0 \leqslant x < \infty \end{Bmatrix}$$

όπου [x] παριστάνει το ακέραιο μέρος του x.

Η μέση τιμή και η διασπορά της κατανομής Poisson με παράμετρο λ δίνονται από τις

$\mu = E(X) = \lambda, \quad \sigma^2 = V(X) = \lambda$

6. ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

6.1 ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Η απλούστερη συνεχής κατανομή είναι η ομοιόμορφη κατανομή που ορίζεται σ' ένα διάστημα [α,β], όπου α < β πραγματικοί αριθμοί.

Ορισμός *: Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας την*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha \leqslant x \leqslant \beta \\ 0, & x < \alpha \ \ ή \ \ x > \beta \end{cases} \quad .$$

Η κατανομή της τ.μ. X καλείται ομοιόμορφη ή ορθογώνια κατανομή με παραμέτρους α και β. Επίσης, λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή με παραμέτρους α και β και συμβολικά γράφουμε X~U(a,β).

Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X, δίνεται από την

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta - \alpha}, & \alpha \leqslant x < \beta \\ 1, & \beta \leqslant x < \infty \end{cases} \quad .$$

Η μέση τιμή και η διασπορά της ομοιόμορφης κατανομής με παραμέτρους α και β δίνονται από τις

$$\mu = E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \sigma^2 = V(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} \quad .$$

6.2 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

<u>Ορισμός</u> *: Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας*

$$f(x)=\begin{pmatrix} \theta\, e^{-\theta x}, & 0\leqslant x<\infty \\ 0, & -\infty<x<0 \end{pmatrix}$$

όπου $0<\theta<\infty$ *Η κατανομή της τ.μ. X καλείται εκθετική με παράμετρο* θ *. Επίσης, λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο* θ *και συμβολικά γράφουμε X~E(θ).*

Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X, δίνεται από την

$$F(x)=\begin{pmatrix} 0, -\infty<x<0 \\ 1-e^{-\theta x}, 0\leqslant x<\infty \end{pmatrix} .$$

Η μέση τιμή και η διασπορά της *εκθετικής με παράμετρο θ* δίνονται από τις

$$\mu=E(X)=\frac{1}{\theta}, \quad \sigma^2=V(X)=\frac{1}{\theta^2}$$

6.3 ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Η σημαντικότερη κατανομή πιθανότητας τόσο από θεωρητική άποψη όσο και από άποψη εφαρμογών είναι η κανονική κατανομή. Η κατανομή αυτή χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τους De Moivre και Laplace για την προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής όταν το ν είναι μεγάλο. Ο Gauss, ο οποίος διατύπωσε τη θεωρία των σφαλμάτων, χρησιμοποίησε την κανονική κατανομή ως προσεγγιστική της κατανομής των τυχαίων σφαλμάτων.

Η ονομασία κανονική είναι σχετικά πρόσφατη και οφείλεται στον Karl Pearson.

<u>Ορισμός</u> *: Έστω X μια συνεχής μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας*

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}, \quad -\infty<x<\infty$$

όπου $-\infty<\mu<\infty$ *και* $0<\sigma<\infty$ *είναι παράμετροι. Η κατανομή της τ.μ. X καλείται κανονική με παραμέτρους* μ *και* σ^2 *. Επίσης, λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους* μ *και* σ^2 *και συμβολικά γράφουμε X~* $N(\mu,\sigma^2)$.

Η μέση τιμή και η διασπορά της *κανονικής κατανομής με παραμέτρους* μ *και* σ^2 δίνονται από τις

$E(X)=\mu, \quad V(X)=\sigma^2$

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ</u>

- Είναι συμμετρική γυρω από τη μέση τιμή της μ .
- Η μέση τιμή , η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή συμπίπτουν.
- Το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από την καμπύλη της κατανομής και τον οριζόντιο άξονα ισούται με τη μονάδα .Λόγω της συμμετρίας που προαναφέρθηκε , 50% της περιχής της κατανομής (άρα και των τιμών της) βρίσκεται από αριστερά της καθέτου που φέρεται στη μέση τιμή της και 50% από τα δεξιά.
- Αν εκατέρωθεν της μέσης τιμής της και σε αποστάσεις ίσες με μία τυπική απόκλιση φέρουμε δύο καθέτους , η υπο-περιοχή που ορίζεται από την καμπύλη της κατανομής, τις καθέτους και τον οριζόντιο άξονα αντιστοιχεί περίπου στο 68% της συνολικής επιφάνειας της περιοχής της κατανομής.

Αν αντίστοιχες καθέτους φέρουμε σε αποστάσεις ίσες με δύοφορές την τυπική απόκλιση εκατέρωθεν τησ μέσης τιμής, η αντίστοιχη υπο-περιοχή της κατανομής είναι ίση με το 95%, περίπου της συνολικής επιφάνειάς της, ενώ σε αποστάσεις ίσες με τρεις φορές την τυπική της απόκλιση οι ανίστοιχες κάθετοι που φέρονται ορίζουν περιοχή με επιφάνεια περίπου 99% της συνολικής.

Οι παραπάνω ιδιότητες αποτελούν τη βάση του εμπειρικού κανόνα , ο οποίος επεκτείνει τις ιδιότητες αυτές σε όλες τις μονοκόρυφες συμμετρικές κατανομές.

- Η κανονική κατανομή ορίζεται πλήρως και μονοσήμαντα από τις παραμέτρους μ και σ. Με άλλα λόγια , σε διαφορετκές τιμές των μ και σ αντιστοιχούν διαφορετικές κανονικές κατανομές. Διαφορετικές τιμές της μέσης τιμής μ παράγουν διαφορετικές κανονοκές κατανομές της ίδιας διασποράς . Ενώ οι διαφορετικές τιμές της τυπικής απόκλισης σ ορίζουν κατανομές με διαφορετικό βαθμό διασποράς με την ίδια μέση τιμή .

6.3.1 ΤΥΠΙΚΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

<u>Ορισμός</u> *:* Η κανονική κατανομή με παραμέτρους 0 και 1 καλείται *τυπική κανονική κατανομή* ή *τυποποιημένη κανονική κατανομή*. .

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή Z ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή, δηλαδή Z~N(0,1). Τότε, η Z έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ -\infty<x<\infty.$$

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Z συμβολίζεται με Φ. Η εύρεση των τιμών Φ(z) της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της Z γίνεται μέσω πινάκων. Συνήθως, στο τέλος κάθε συγγράμματος στατιστικής υπάρχει ένας πίνακας που περιέχει (προσεγγιστικές) τιμές της Φ(z) για διάφορες τιμές του z. Επειδή ισχύει Φ(-z)=1-Φ(z), αρκεί οι πίνακες να περιέχουν τις τιμές Φ(z), $z \geqslant 0$.

<u>Θεώρημα:</u> Αν η τυχαία μεταβλητή *X ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους* μ *και* σ^2 *, τότε η τυχαία μεταβλητή* $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ *ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή.*

Πατατήρηση: Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους μ και σ^2 . Τότε, από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι ο υπολογισμός πιθανοτήτων της μορφής $P(X\leqslant b)$, $P(X\geqslant a)$, $P(\alpha\leqslant X\leqslant b)$
ανάγεται στον υπολογισμό των αντιστοίχων πιθανοτήτων μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή.

7 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

7.1 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1.

Η χορήγηση δανείων από τις τράπεζες στις επιχειρήσεις για την ανάπτυξη της δραστηριότητάς τους αποτελεί μια σημαντική τραπεζική λειτουργία . Από ιστορικά στοιχεία που τηρεί μια Τράπεζα γνωρίζει ότι :

- το 5% των επιχειρήσεων που δανείζονται κηρύσσουν πτώχευση και δεν μπορούν να αποπληρώσουν το δάνειο.
- Από τις εταιρίες που δεν κηρύσσουν πτώχευση , το 20% καθυστερεί τουλάχιστον 1 μηνιαία δόση αποπληρωμής .

- Το 20% των δανειζόμενων επιχειρήσεων ανήκουν σε νέους επιχειρηματίες , το 10% των οποίων κηρύσσει πτώχευση .

Με βάση αυτά τα στοιχεία :

1. Θα υπολογίσουμε το ποσοστό των εταιριών που καθυστερούν την αποπληρωμή δανείου .

2. Από τις εταιρίες που καθυστερούν την αποπληρωμή δανείου να υπολογιστεί το ποσοστό εκείνων που τελικά πτωχεύουν .

3. Αν μια εταιρία πτωχεύσει, να υπολογιστεί η πιθανότητα να ανήκει σε νέο επιχειρηματία .

4. Από τις εταιρίες που δεν ανήκουν σε νέους επιχειρηματίες, να υπολογιστεί το ποσοστό εκείνων που πτωχεύουν.

Έτσι ορίζουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα :

Π : << η επιχείρηση που έχει λάβει κάποιο δάνειο κηρύσσει πτώχευση >> και το συμπλήρωμά του

Π' : << η επιχείρηση που έχει λάβει κάποιο δάνειο δεν κηρύσσει πτώχευση >>

Κ : << η επιχείρηση που έχει λάβει κάποιο δάνειο καθυστερεί τουλάχιστον μία μηνιαία δόση αποπληρωμής >> και το συμπλήρωμά του

Κ' : << η επιχείρηση που έχει λάβει κάποιο δάνειο δεν καθυστερεί κάποια δόση αποπληρωμής >>

Ν : << η επιχείρηση που έχει λάβει κάποιο δάνειο ανήκει σε νέο επιχειρηματία >> και το συμπλήρωμά του

Ν' : << η επιχείρηση που έχει λάβει κάποιο δάνειο δεν ανήκει σε νέο επιχειρηματία >>

- Η πιθανότητα, κάποια εταιρία που έχει δανειστεί να κηρύξει πτώχευση, είναι

$$P(\Pi)=\frac{5}{100}$$

- Η πιθανότητα κάποια εταιρία που έχει δανειστεί να μην κηρύσσει πτώχευση είναι

$$P(\Pi')=1-P(\Pi)=1-\frac{5}{100}=\frac{95}{100} \quad .$$

- Η πιθανότητα κάποια εταιρία που έχει δανειστεί να καθυστερήσει κάποια δόση αποπληρωμής δεδομένου ότι δεν έχει κηρύξει πτώχευση είναι $P(K/\Pi')=\frac{20}{100}$

- Η πιθανότητα κάποια εταιρία που έχει δανειστεί να μην ανήκει σε νέο επιχειρηματία είναι $P(\Pi/N)=\frac{10}{100}$.

1. Το ποσοστό των εταιριών που καθυστερούν την αποπληρωμή του δανείου ισούται με την πιθανότητα μια δανειζόμενη εταιρία να καθυστερήσει τουλάχιστον μια δόση αποπληρωμής.

Από το θεώρημα της ολικής πιθανότητας έχουμε :

$$P(K)=P(\Pi')\cdot P(K/\Pi')+P(\Pi)\cdot P(K/\Pi)=\frac{95}{100}\cdot\frac{20}{100}+\frac{5}{100}\cdot 1=\frac{19\cancel{0}\cancel{0}}{100\cancel{0}\cancel{0}}+\frac{5}{100}=\frac{24}{100}$$

Άρα το ποσοστό των εταιριών που καθυστερούν την αποπληρωμή δανείου είναι 24 %.

2. Το ποσοστό των εταιριών που τελικά πτωχεύουν δεδομένου ότι καθυστερούν την αποπληρωμή ισούται σύμφωνα με το θεώρημα του Bayes με την παρακάτω πιθανότητα :

$$P(\Pi/K)=\frac{P(\Pi\cap K)}{P(K)}=\frac{P(\Pi)\cdot P(K/\Pi)}{P(K)}=\frac{\frac{5}{100}}{\frac{24}{100}}=\frac{5}{24}=0{,}2083$$

Άρα από τις εταιρίες που καθυστερούν την αποπληρωμή δανείου, το ποσοστό εκείνων που τελικά πτωχεύουν είναι 20,83 %.

3. Η πιθανότητα μία εταιρία να ανήκει σε νέο επιχειρηματία δεδομένου ότι έχει πτωχεύσει ισούται σύμφωνα με το θεώρημα του Bayes με την παρακάτω πιθανότητα :

$$P(N/\Pi)=\frac{P(\Pi\cap N)}{P(\Pi)}=\frac{P(\Pi/N)\cdot P(N)}{P(\Pi)}=\frac{\frac{1\cancel{0}}{1\cancel{0}\cancel{0}}\cdot\frac{2\cancel{0}}{1\cancel{0}\cancel{0}}}{\frac{5}{1\cancel{0}\cancel{0}}}=\frac{2}{5}=0{,}4$$

Άρα, αν μια εταιρία πτωχεύσει, η πιθανότητα να ανήκει σε νέο επιχειρηματία είναι 0.4.

4. Το ποσοστό των εταιριών που πτωχεύουν δεδομένου ότι δεν ανήκουν σε νέους επιχειρηματίες ισούται με την πιθανότητα P(Π/N') .

$$P(\Pi)=P(\Pi/N)\cdot P(N)+P(\Pi/N')\cdot P(N') \;=>$$

$$=> P(\Pi/N') = \frac{P(\Pi)-P(\Pi/N)\cdot P(N)}{P(N')}=\frac{\frac{5}{100}-\frac{10}{100}\,\frac{20}{100}}{\frac{80}{100}}=\frac{\frac{3\cancel{0}\cancel{0}}{1\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}}}{\frac{80}{1\cancel{0}\cancel{0}}}=\frac{3}{80}=0{,}0375$$

Συνεπώς, από τις εταιρίες που δεν ανήκουν σε νέους επιχειρηματίες, το ποσοστό εκείνων που πτωχεύουν είναι 3,75 %.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2.

Μία αεροπορική εταιρία πρέπει να δρομολογήσει μία έκτακτη πτήση . Το πλήρωμα της καμπίνας πρέπει να αποτελείται από 6 άτομα και ο υπεύθυνος για τη σύνθεση των πληρωμάτων έχει στη διάθεσή του τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή 9 άνδρες και 5 γυναίκες .

Με βάση τα στοιχεία αυτά :

1. Να υπολογιστεί με πόσους τρόπους μπορεί να επιλέξει το πλήρωμα της καμπίνας .
2. Αν επιλέξει τυχαία 6 άτομα να υπολογιστεί η πιθανότητα το πλήρωμα να περιλαμβάνει τουλάχιστον 3 άνδρες.
3. Αν ο αριθμός των ανδρών και των γυναικών στο πλήρωμα πρέπει να είναι ίσος και επιπλέον θα πρέπει να υπάρχουν στο πλήρωμα ταυτόχρονα ένας

συγκεκριμένος άνδρας και μία συγκεκριμένη γυναίκα να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορεί να αλλάξει το πλήρωμα.

Έτσι ,

1. Εφόσον ο υπεύθυνος για τη σύνθεση των πληρωμάτων έχει στη διάθεσή του τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή 9 άνδρες και 5 γυναίκες και δεν τον ενδιαφέρει η σειρά επιλογής των 6 ατόμων ,οι τρόποι επιλογής του πληρώματος της καμπίνας είναι ίσοι και οι συνδυασμοί των 9+5=14 ανά 6 δηλαδή

$$\binom{14}{6}=\frac{14!}{6!(14-6)!}=\frac{14!}{6!8!}=\frac{8!\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 8!}=3003 \quad \text{τρόποι .}$$

2. Το πλήρωμα να περιλαμβάνει τουλάχιστον 3 άνδρες σημαίνει ότι αποτελείται από 3 Α και 3 Γ είτε από 4 Α και 2 Γ , είτε από 5 Α και 1 Γ , είτε από 6 Α και καμία γυναίκα .

Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με :

$$p=\frac{\binom{9}{3}\cdot\binom{5}{3}+\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{2}+\binom{9}{5}\cdot\binom{5}{1}+\binom{9}{6}\cdot\binom{5}{0}}{\binom{14}{6}} =$$

$$\frac{840+1260+630\,84}{3003}=\frac{2814}{3003}=0{,}937$$

3. Αν ο αριθμός των ανδρών και των γυναικών στο πλήρωμα πρέπει να είναι ίσος , δηλαδή 3 Α και 3 Γ , και επιπλέον θα πρέπει να υπάρχουν στο πλήρωμα ταυτόχρονα ένας συγκεκριμένος άνδρας και μία συγκεκριμένη γυναίκα δηλαδή θα επιλέξει τους 2 Α από τους 8 και τις 2 Γ από τις 4 ,

οι τρόποι που μπορεί να επιλέξει το πλήρωμα είναι :

$$\binom{8}{2}\cdot\binom{4}{2}=168 \quad .$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3.

Μια επιχείρηση που παράγει δύο προϊόντα (προϊόν Α και προϊόν Β) έχει 1000 πελάτες. Οι 800 από αυτούς έχουν αγοράσει το προϊόν Α και οι 450 το προϊόν Β. Επιλέγουμε τυχαία έναν πελάτη της επιχείρησης.

1. Να υπολογισθεί η πιθανότητα ο πελάτης να αγόρασε και τα δύο προϊόντα.
2. Να υπολογισθεί η πιθανότητα ο πελάτης να αγόρασε το προϊόν Β εάν ξέρουμε ότι αγόρασε το προϊόν Α.
3. Η επιχείρηση θέλει να διαφημίσει το προϊόν Β σε όσους αγόρασαν το προϊόν Α και δεν αγόρασαν το Β. Σε πόσους πελάτες της πρέπει να στείλει διαφημιστική επιστολή;

Θεωρούμε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

Α: ΄΄Ο πελάτης αγόρασε το προϊόν Α΄΄

Β: ΄΄Ο πελάτης αγόρασε το προϊόν Β΄΄

Τότε, P(A) = $\frac{800}{1000}=0{,}8$ και P(B) = $\frac{450}{1000}=0{,}45$.

1. Έχουμε

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

ή

$$P(A \cap B) = 0.8 + 0.45 - 1 = 0.25.$$

Συνεπώς η πιθανότητα ο πελάτης να αγόρασε και τα δύο προϊόντα είναι 0,25.

2. Έχουμε

$$P(A/B)=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}=\frac{0{,}25}{0{,}8}=0{,}3125.$$

Συνεπώς, η πιθανότητα πελάτης να αγόρασε το προϊόν Β εάν ξέρουμε ότι αγόρασε το προϊόν Α είναι 0,3125.

3. Η πιθανότητα ένας τυχαίος πελάτης να αγόρασε το προϊόν Α και όχι το Β είναι

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.8 - 0.25 = 0.55.$$

Άρα, η επιχείρηση πρέπει να στείλει διαφημιστική επιστολή σε $1000 \cdot 0.55 = 550$ πελάτες.

7.2 ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

7.2.1 ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1.

Ένας πωλητής διενεργεί τηλεφωνικές πωλήσεις για το προϊόν της εταιρίας στην οποία εργάζεται. Από ιστορικά στοιχεία που τηρούνται στο Τμήμα πωλήσεων της εταιρίας προκύπτει ότι η πιθανότητα επίτευξης πώλησης για το συγκεκριμένο πωλητή είναι 28%. Έστω ότι ο πωλητής σε μία τυχαία επιλεγμένη ημέρα τηλεφωνεί σε 12 άτομα.

Να υπολογιστούν :

1. Η πιθανότητα να επιτύχει 4 πωλήσεις.
2. Η πιθανότητα να μην επιτύχει καμία πώληση.
3. Η πιθανότητα να επιτύχει το πολύ 2 πωλήσεις.
4. Η πιθανότητα να επιτύχει τουλάχιστον 3 πωλήσεις.
5. Ο αναμενόμενος αριθμός και η τυπική απόκλιση των πωλήσεων.

Θεωρούμε ως τυχαία μεταβλητή Χ τον αριθμό πωλήσεων του πωλητή. Επειδή ο αριθμός των ατόμων που τηλεφωνεί είναι 12, με πιθανότητα επίτευξης πώλησης 28% η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί διωνυμική κατανομή με αριθμό δοκιμών $\nu=12$ και πιθανότητα επιτυχίας $p = 0{,}28$, δηλαδή $X \sim B(\nu = 2, p = 0{,}28)$.

1. Η πιθανότητα να επιτύχει 4 πωλήσεις είναι :

$$P(X=4)=\binom{12}{4}\cdot 0{,}28^4\cdot(1-0{,}28)^{12-4}=\frac{12!}{4!(12-4)!}\cdot 0{,}28^4\cdot 0{,}72^8 =$$

$$\frac{\cancel{8!}\,9\cdot 10\cdot 11\cdot \cancel{12}}{1\cdot 2\cdot \cancel{3\cdot 4}\cdot \cancel{8!}}\cdot 0{,}28^4\cdot 0{,}72^8=9\cdot 5\cdot 11\cdot 0{,}28^4\cdot 0{,}72^8=0{,}2197 \quad .$$

2. Η πιθανότητα να μην επιτύχει καμία πωληση είναι

$$P(X=0)=\binom{12}{0}\cdot 0{,}28^0\cdot(1-0{,}28)^{12-0}=\frac{12!}{0!(12-0)!}\cdot 0{,}28^0\cdot 0{,}72^{12} =$$

$$1\cdot 1\cdot 0{,}72^{12}=0{,}0194 \quad .$$

3. Η πιθανότητα να επιτύχει το πολύ 2 πωλήσεις είναι :

$$P(X\leqslant 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) =$$

$$\binom{12}{0}\cdot 0{,}28^0\cdot(1-0{,}28)^{12-0} + \binom{12}{1}\cdot 0{,}28^1\cdot(1-0{,}28)^{12-1} + \binom{12}{2}\cdot 0{,}28^2\cdot(1-0{,}28)^{12-2} =$$

$$0{,}72^{12}+12\cdot 0{,}28\cdot 0{,}72^{11}+\frac{12!}{2!(12-2)!}\cdot 0{,}28^2\cdot 0{,}72^{10} =$$

$$0{,}72^{12}+12\cdot 0{,}28\cdot 0{,}72^{11}+\frac{\cancel{10!}\,11\cdot 12}{2!(\cancel{10})!}\cdot 0{,}28^2\cdot 0{,}72^{10} =$$

$$0{,}72^{12}+12\cdot 0{,}28\cdot 0{,}72^{11}+6\cdot 11\cdot 0{,}28^2\cdot 0{,}72^{10} =$$

0,0194 + 0,0906 + 0,1937 = 0,3037.

4. Η πιθανότητα να επιτύχει τουλάχιστον 3 πωλήσεις είναι

$$P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - 0{,}3037 = 0{,}6963$$

5. Ο αναμενόμενος αριθμός των πωλήσεων είναι Ε(Χ) = ν p = 12x0,28 = 3,36 και η τυπική απόκλιση είναι :

$$\sqrt{V(X)} = \sqrt{\nu p(1-p)} = \sqrt{12 \cdot 0{,}28 \cdot (1-0{,}28)} = \sqrt{12 \cdot 0{,}28 \cdot 0{,}72} = \sqrt{2.4192} = 1{,}5554$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2.

Μία αντιπροσωπεία αυτοκινήτων εκτιμά ότι από το σύνολο των αυτοκινήτων ενός συγκεκριμένου τύπου που κυκλοφορούν σήμερα στη χώρα, το 12% είναι ηλικίας μικρότερης των 2 ετών. Επιπλέον εκτιμά ότι η πιθανότητα εμφάνισης μιας συγκεκριμένης βλάβης στο ηλεκτρικό σύστημα των αυτοκινήτων αυτών σε διάστημα ενός έτους είναι 5% για τα αυτοκίνητα ηλικίας μικρότερης των 2 ετών και 35% για τα αυτοκίνητα μεγαλύτερης ηλικίας. Το κόστος επισκευής της βλάβης αυτής ανέρχεται, κατά μέσο όρο σε 200 ευρώ ανά αυτοκίνητο, ανεξάρτητα από την ηλικία του.

Με βάση αυτά τα στοιχεία :

Α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα

1. Σε ένα τυχαίο δείγμα 10 αυτοκινήτων του τύπου αυτού, ηλικίας μικρότερης των 2 ετών τουλάχιστον ένα να παρουσιάσει τη συγκεκριμένη βλάβη μέσα σ’ ένα έτος.
2. Σε ένα τυχαίο δείγμα 20 αυτοκινήτων του τύπου αυτού, ηλικίας μεγαλύτερης των 2 ετών το πολύ 2 αυτοκίνητα να παρουσιάσουν τη συγκεκριμένη βλάβη μέσα σ’ ένα έτος.
3. Σε ένα συγκεκριμένο δείγμα 30 αυτοκίνητων του τύπου αυτού 4 ακριβώς αυτοκίνητα να παρουσιάσουν τη συγκεκριμένη βλάβη μέσα σε ένα έτος .

B) Αν η αντιπροσωπεία πουλήσει 30 αυτοκίνητα το Δεκέμβριο του 2005 ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός των αυτοκινήτων που θα παρουσιάσουν τη συγκεκριμένη βλάβη το επόμενο έτος ;
Ποιο είναι το αναμενόμενο κόστος επισκευής των αυτοκινήτων αυτών ;

Ορίζουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα :

Η : << το αυτοκίνητο του συγκεκριμένου τύπου που κυκλοφορεί σήμερα στη χώρα είναι ηλικίας μικρότερης των 2 ετών >>
Η' : << το αυτοκίνητο του συγκεκριμένου τύπου που κυκλοφορεί σήμερα στη χώρα είναι ηλικίας μεγαλύτερης είτε ίσης (τουλάχιστον) των 2 ετών >>
Β : << το αυτοκίνητο του συγκεκριμένου τύπου που κυκλοφορεί σήμερα στη χώρα εμφανίζει μια συγκεκριμένη βλάβη στο ηλεκτρικό του σύστημα σε διάστημα ενός έτους >>

Με πιθανότητες,
P (H) = 0,12 , P(H') = 1- P(H) = 0,88 , P(B/H) = 0,05 , P(B/H') = 0,35.

A) **1)** Ορίζουμε τη τυχαία μεταβλητή
X : << αριθμός αυτοκινήτων του συγκεκριμένου τύπου που κυκλοφορεί σήμερα στη χώρα, ηλικίας μικρότερης των 2 ετών που εμφανίζει τη συγκεκριμένη βλάβη στο ηλεκτρικό του σύστημα σε διάστημα ενός έτος>>.

Τότε η τ.μ. X ~ B (ν = 10 , p = 0,05).

Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot (1 - 0{,}05)^{10} = 0{,}4013.$$

2) 0ρίζουμε την τυχαία μεταβλητή
Y : << αριθμός αυτοκινήτων του συγκεκριμένου τύπου που κυκλοφορεί σήμερα στη χώρα, ηλικίας τουλάχιστον 2 ετών που εμφανίζει τη συγκεκριμένη βλάβη στο ηλεκτρικό του σύστημα σε διάστημα ενός έτους >> .

Τότε η τ.μ. Y ~ B (ν=20 , p = 0,35).

Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(Y \leqslant 2) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) \quad =$$

$$\binom{20}{0} \cdot 0{,}35^0 \cdot (1-0{,}35)^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0{,}35^1 \cdot (1-0{,}35)^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0{,}35^2 \cdot (1-0{,}35)^{18} \quad =$$

$$0{,}65^{20} + 20 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65^{19} + 190 \cdot 0{,}35^2 \cdot 0{,}65^{18} \quad = 0{,}021.$$

3) Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή, W:<<αριθμός αυτοκινήτων του συγκεκριμένου τύπου που κυκλοφορεί σήμερα στη χώρα που εμφανίζει τη συγκεκριμένη βλάβη στο ηλεκτρικό του σύστημα σε διάστημα ενός έτους>>.

Η πιθανότητα να εμφανίσει τη συγκεκριμένη βλάβη ισούται σύμφωνα με το θεώρημα ολικής πιθανότητας :

$$P(B) = P(H) \cdot P(B/H) + P(H') + P(H') \cdot P(B/H') \quad =$$

$$0{,}12 \cdot 0{,}05 + 0{,}88 \cdot 0{,}35 = 0{,}006 + 0{,}308 = 0{,}314 \quad .$$

Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(W=4) = \binom{30}{4} \cdot 0{,}314^4 \cdot (1-0{,}314)^{26} = 27405 \cdot 0{,}314^4 \cdot 0{,}686^{26} = 0{,}01479 \quad .$$

Β) Αν η αντιπροσωπεία πουλήσει 30 αυτοκίνητα το Δεκέμβριο του 2005 ο αναμενόμενος αριθμός των (νέων, αφού η ηλικία τους είναι 1 έτος) αυτοκινήτων που θα παρουσιάσουν τη συγκεκριμένη βλάβη το επόμενο έτος είναι

$$E(W) = \nu \cdot p = 30 \cdot 0{,}05 = 1{,}5 \quad .$$

Το αναμενόμενο κόστος επισκευής των αυτοκινήτων αυτών είναι K = 200*1,5= 300 ευρώ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3.

Επιχείρηση παραγωγής μηχανημάτων εκτιμά ότι η πιθανότητα ένα μηχάνημα να επιστραφεί για αντικατάσταση λόγω ελαττώματος είναι 5%. Η επιχείρηση παρήγαγε 20 μηχανήματα τον προηγούμενο μήνα.

1. Ποια η πιθανότητα κανένα να μην χρειαστεί αντικατάσταση ;
2. Ποια η πιθανότητα να χρειαστούν αντικατάσταση το πολύ 4 μηχανήματα;
3. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός των μηχανημάτων που θα χρειαστούν αντικατάσταση ;

Έστω X η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στον αριθμό των μηχανημάτων που επιστρέφονται για αντικατάσταση λόγω ελαττώματος. Η μεταβλητή X ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους ν = 20 και p = 0,05 δηλαδή,

X ~ B (ν = 20 , p = 0,05)

Η συνάρτηση πιθανότητας της X είναι :

$$P(X=x)=\binom{20}{X}\cdot 0{,}05^{x}\cdot(1-0{,}05)^{20-x} \quad .$$

1. Ζητάμε την πιθανότητα X = 0 δηλαδή

$$P(X=0)=\binom{20}{0}\cdot 0{,}05^{0}\cdot(1-0{,}05)^{20}=\frac{20!}{0!20!}\cdot 0{,}05^{0}\cdot(1-0{,}05)^{20}=0{,}3585$$

2. Ζητάμε την πιθανότητα

$$P(X\leqslant 4)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4) \quad =$$

$$\binom{20}{0}\cdot 0{,}05^{0}\cdot 0{,}95^{20}+\binom{20}{1}\cdot 0{,}05^{1}\cdot 0{,}95^{19}+\binom{20}{2}\cdot 0{,}05^{2}\cdot 0{,}95^{18} \quad +$$

$$\binom{20}{3}\cdot 0{,}05^3\cdot 0{,}95^{17}+\binom{20}{4}\cdot 0{,}05^4\cdot 0{,}95^{16} \quad =$$

0,358 + 0,377 + 0,189 +0,059 + 0,013 =

ή

$$P(X \leqslant 4) \;= 0{,}99743.$$

3. Ζητάμε τη μέση τιμή της κατανομής, δηλαδή ο αναμενόμενος αριθμός μηχανημάτων που θα χρειαστούν αντικατάσταση είναι :

$$E(X)=\nu\cdot p=20\cdot 0{,}05=1 \quad \text{μηχάνημα} .$$

7.2.2 ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1.

Την εποχή της τουριστικής αιχμής, η υπηρεσία κρατήσεων ενός ξενοδοχείου δέχεται κατά μέσο όρο 0,3 αιτήσεις για κρατήσεις δωματίων ανά λεπτό.
Να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι η συγκεκριμένη υπηρεσία κρατήσεων

1. Θα δεχτεί τουλάχιστον 1 αίτηση σε ένα τυχαία επιλεγμένο λεπτό.

2. Δε θα δεχτεί καμία αίτηση σε ένα τυχαία επιλεγμένο δεκαπεντάλεπτο.

Έστω Χ τ.μ. που αντιστοιχεί στον αριθμό των κλήσεων ανά λεπτό. Τότε η Χ ακολουθεί κατανομή Poisson με λ = 0,3 και η συνάρτηση πιθανότητας είναι η

$$f(x)=P(X=x)=e^{-0,3}\frac{0{,}3^x}{x!} \quad .$$

1. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - e^{-0,3}\dfrac{0,3^0}{0!} = 1 - 0,741 \quad ή\, P(X \geqslant 1) = 0,259$.

2. Στη δεύτερη περίπτωση αλλάζει το λ και έχουμε λ' = $15 \cdot \lambda$ => λ' = 4,5

Επομένως,

$P(X=x) = e^{-4,5}\dfrac{4,5^x}{x!}$ και $P(X=0) = e^{-4,5}\dfrac{4,5^x}{x!}$ ή P (X=0) = 0,0111.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2.

Μία ασφαλιστική εταιρία για να εξασφαλίσει ότι δεν θα βρεθεί σε αδυναμία πληρωμής σε περίπτωση απαίτησης από συμβόλαιο με μεγάλο ποσό αποζημίωσης ασφαλίζεται με τη σειρά της σε μεγαλύτερη ασφαλιστική εταιρία. Η μεγαλύτερη ασφαλιστική εταιρία προκειμένου να καθορίσει το ύφος των ασφαλίστρων θέλει να γνωρίζει τις πιθανότητες εμφάνισης κάποιων ενδεχομένων. Υποτίθεται ότι η εμφάνιση των απαιτήσεων ακολουθεί την κατανομή Poisson και ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών απαιτήσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Αν είναι γνωστό ότι τα τελευταία πέντε χρόνια υπήρξαν δύο απαιτήσεις για αποζημίωση :

α) Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρξουν περισσότερες από δύο απαιτήσεις σε ένα χρόνο.

β) Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρξει μία απαίτηση μέσα στα επόμενα δύο χρόνια, αλλά μετά την απαιτηση αυτή να μεσολαβήσει διάστημα μικρότερο από ένα χρόνο μέχρι να υπάρξει η επόμενη απαίτηση.

Έτσι,

α) Αν Χ είναι οι απαιτήσεις για αποζημίωση μέσα σε ένα χρόνο, τότε η Χ ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ = 0,4 αποζημιώσεις ανά χρόνο. Η συνάρτηση κατανομής της Χ δίνεται από τον τύπο $P(X=\kappa) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}, \quad x=0,1,2...$

$P(X>2) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - P(X=0) - P(X=2) = 1 - e^{-0,4}\dfrac{0,4^0}{0!} - e^{-0,4}\dfrac{0,4^2}{2!}$ και τελικά

P(X>2)= 0,008

β) Έστω T_1 ο χρόνος (σε χρόνια) από σήμερα μέχρι την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης και ο T_2 ο χρόνος (σε χρόνια) που μεσολαβεί μεταξύ της 1ης και της 2ης απαίτησης. Οι τ.μ. T_1 Και T_2 είναι ανεξάρτητες και έχουν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ= 0,4 απαιτήσεις το χρόνο. Η συνάρτηση πυκνότητας είναι :

$$f(x)=\left\{\begin{matrix} 0{,}4e^{-0{,}4x} & ,x>0 \\ 0 & ,x\leqslant 0 \end{matrix}\right\} \quad .$$

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής δίνεται από τον τύπο :

$$F(x)=\left\{\begin{matrix} 1-e^{-0{,}4x} & ,x>0 \\ 0 & ,x\leqslant 0 \end{matrix}\right\} \quad .$$

Για τη ζητούμενη πιθανότητα έχουμε :

$$P(T_1\leqslant 2,\ T_2<1)=P(T_1\leqslant 2)P(T_2<1)=[1-\exp(-0{,}4\cdot 2)]\cdot[1-\exp(-0{,}4)]$$

και τελικά $P(T_1\leqslant 2,\ T_2<1)=0{,}182$.

7.2.3 ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1.

Σε έρευνα που έγινε από τη Διεύθυνση Μελετών της Τράπεζας διαπιστώθηκε ότι το ύψος των λογαριασμών όψεως που τηρούνται σ' αυτήν ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο και 500 ευρώ και τυπική απόκλιση 150 ευρώ.

Α) να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι ένας τυχαία επιλεγμένος λογαριασμός έχει ύψος μεταξύ 317 ευρώ και 770 ευρώ.

Β) Η Τράπεζα στο πλαίσιο της πολιτικής προσέλκυσης νέων πελατών προγραμματίζει να προσφέρει υψηλότερο επιτόκιο που το μέσο ύψος του λογαριασμού τους υπερβαίνει κάποιο ποσό Π .

Αν το μέτρο αυτό δεν πρέπει να επεκταθεί σε περισσότερους από το 1% των πελατών της να υπολογιστεί ποιο θα πρέπει να είναι το ποσό Π .

Έστω η τυχαία μεταβλητή X : το ύψος ενός λογαριασμού.

Γνωρίζουμε ότι το X ακολουθεί κανονική κατανομή X ~ N (μ = 500 , σ^2 = 1502).

A) Ζητάμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα P (317 < X < 770).

Έχουμε

P(317 < X 770) = $P(\frac{317-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{770-\mu}{\sigma})$ =

$P(\frac{317-500}{150}<Z<\frac{700-500}{150})=P(\frac{-183}{150}<Z<\frac{270}{150})$ =

P(- 1,22 < Z< 1,80) = P(Z<1,80) –P(Z < 1,22) =

P(Z<1,8)-[1-P(Z<1,22)]= P(Z<1,8)+P(Z<1,22)-1 =

0,9641 + 0,8888-1 = 1,8529-1 = 0,8529 =

P(317<X< 770)= 0,8529.

Άρα, P(317<X< 770)= 0,8529.

B) Έστω Π το ζητούμενο ποσό, το οποίο θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση :

P(X>Π)= 0,01

P(X>Π) =0,01 P(X<Π)= 0,99

$P(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{\Pi-\mu}{\sigma})=0{,}99$ =

$P(Z<\frac{\Pi-\mu}{\sigma})=0{,}99$ ή $\frac{\Pi-\mu}{\sigma}=2{,}33$ =

Π-μ = 2,33 σ => Π = μ +2,33 σ

=> Π = 500 + 2,33·150 => Π = 500 + 349,5 => Π = 849, 5

=> Έτσι το ζητούμενο ποσό είναι 850ευρώ .

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2.

Ο χρόνος εκτύπωσης των αρχείων που αποστέλλονται από τους υπαλλήλους μιας εταιρίας στον κεντρικό εκτυπωτή ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 2 min και διακύμανση 6, 25 min^2.

Α) Να υπολογιστεί πιθανότητα το επόμενο αρχείο που θα σταλεί για εκτύπωση να χρειαστεί χρόνο :

1) Μεγαλύτερο από 2,3 λεπτά.

2) Μεταξύ 1,35 και 3 λεπτών.

Β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα μεταξύ 3 αρχείων που στέλνονται ανεξάρτητα για εκτύπωση το ένα ακριβώς να εκτυπωθεί σε χρόνο μικρότερο του 1,5 λεπτού.

Γ) Ο Προϊστάμενος Πληροφορικής της εταιρίας στο πλαίσιο της διερεύνησης του για την ανάγκη προμήθειας ενός ταχύτερου εκτυπωτή πρέπει, μεταξύ άλλων να υπολογίσει ποιος είναι, κάτω από τις παρούσες συνθήκες, ο χρόνος εκτύπωσης τον οποίο υπερβαίνουν μόνο το 5% από τα αποστελλόμενα προς εκτύπωση αρχεία.
Να υπολογιστεί ο χρόνος αυτός.

Θέτουμε Χ την τυχαία μεταβλητή του χρόνου εκτύπωσης των αρχείων που αποστέλλονται από τους υπαλλήλους της εταιρίας στον κεντρικό εκτυπωτή.
Τότε η τ.μ. Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ = 2 και διακύμανση
σ^2 = 6,25 min^2 Δηλαδή Χ ~ Ν (μ =2 , σ^2 = 6,25). Είναι σ = $\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{6{,}25}=2{,}5\,min$.

Α) **1)** Η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$P(X>2{,}3)=1-P\,9\mathrm{X}\leqslant 2{,}3=1-P(\frac{X-2}{2{,}5})\leqslant\frac{2{,}3-2}{2{,}5}=1-P(Z\leqslant\frac{0{,}3}{2{,}5})=1-P(Z\leqslant 0{,}12)\ =$$

1- 0,5478 = 0,4522.

2) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$P(1{,}35 \leqslant X \leqslant 3) = P\left(\frac{1{,}35-2}{2{,}5} < \frac{X-2}{2{,}5} \leqslant \frac{3-2}{2{,}5}\right) = P\,(\frac{-0{,}65}{2{,}5}) \leqslant Z \leqslant \frac{1}{2{,}5} \quad =$$

$$P(-0{,}26 \leqslant Z \leqslant 0{,}4) = \Phi(0{,}4) - \Phi(-0{,}26) = 0{,}6554 - 0{,}3974 = 0{,}258 \quad .$$

Β) Έστω η τ.μ. Υ που εκφράζει τον αριθμό αρχείων που στέλνονται ανεξάρτητα για εκτύπωση. Η πιθανότητα να εκτυπωθεί σε χρόνο μικρότερο από 1,5 min είναι :

$$P(X < 1{,}5) = P\left(\frac{X-2}{2{,}5} < \frac{1{,}5-2}{2{,}5}\right) = P(z < \frac{-0{,}5}{2{,}5}) = P(Z < -0{,}2) = 0{,}4207 \quad .$$

Η τ.μ. Υ ακολουθεί διωνυμική με αριθμό δοκιμών n = 3 και πιθανότητα επιτυχίας p = 0,4207, δηλαδή X ~ B (n = 3, p = 0,4207).

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$P(Y=1) = \binom{3}{1} \cdot 0{,}4207^1 \cdot (1-0{,}4207)^{3-1} = 3 \cdot 0{,}4207 \cdot 0{,}593^2 = 0{,}4235 \quad .$$

Γ) Έστω c ο ζητούμενος χρόνος. Επειδή το 5% από τα αποστελλόμενα προς εκτύπωση αρχεία υπερβαίνει αυτό το χρόνο εκτύπωσης έχουμε:

$$P(X > c) = 0{,}05 \quad \Rightarrow$$

$$1 = P(X \leqslant c) = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad P(X \leqslant c) = 1 - 0{,}05$$

$$P(X \leqslant c) = 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad p\left(\frac{X-2}{2{,}5} \leqslant \frac{c-2}{2{,}5}\right) = 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad p\left(Z \leqslant \frac{c-2}{2{,}5}\right) = P(Z \leqslant 1{,}64)$$

$$\frac{c-2}{2{,}5} = 1{,}645 \quad \Rightarrow \quad c-2 = 2{,}5 \cdot 1{,}645 \quad \Rightarrow \quad c = 2 + 4{,}1125 \quad \Rightarrow \quad c = 6{,}1125 \text{ min}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3.

Ένα εργοστάσιο παράγει μπαταρίες συγκεκριμένου τύπου για χρήση σε συσκευές κινητής τηλεφωνίας τις οποίες συσκευάζει σε πακέτα των 120 . Σύμφωνα με στοιχεία του εργοστασίου ο χρόνος ζωής μιας μπαταρίας του τύπου αυτού μπορεί να θεωρηθεί ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 40$ ώρες και τυπική απόκλιση $\sigma = 5$ ώρες .

Ακόμα σύμφωνα με τις προδιαγραφές που έχει θέσει η Ευρωπαϊκή Ένωση αν μια μπαταρία του συγκεκριμένου τύπου έχει χρόνο ζωής μικρότερο από 30 ώρες θεωρείται ελαττωματική .

Με βάση τα στοιχεία αυτά :

1. Αν επιλεγεί τυχαία ένα πακέτο μπαταριών να υπολογιστεί ο αριθμός των ελαττωματικών μπαταριών που περιέχει.
2. Αν επιλεγεί τυχαία ένα πακέτο μπαταριών να υπολογιστεί ο αριθμός των μπαταριών των οποίων χρόνος ζωής θα ξεπερνά τις 45 ώρες καθώς και ο αριθμός των μπαταριών των οποίων ο χρόνος ζωής θα είναι μεταξύ 30 και 50 ώρες .
3. Αν επιλεγούν τυχαία 4 μπαταρίες από ένα τυχαίο επιλεγμένο πακέτο να υπολογιστεί η πιθανότητα δύο τουλάχιστον να είναι ελαττωματικές;
4. Αν ανοιχτούν δύο τυχαία επιλεγμένα πακέτα και επιλεγεί μια μπαταρία από το καθένα, να υπολογιστεί η πιθανότητα η πρώτη να είναι ελαττωματική και της δεύτερης ο χρόνος ζωής να ξεπερνά τις 40 ώρες;
5. Σύμφωνα με μια νέα Κοινοτική Οδηγία ο κατασκευαστής είναι υποχρεωμένος να αναγράφει στη συσκευασία τον ελάχιστο χρόνο ζωής της μπαταρίας και θα υπόκειται σε κυρώσεις στην περίπτωση που περισσότερες από το 7 % των μπαταριών διαρκέσουν λιγότερο από τον αναγραφόμενο χρόνο . Να υπολογιστεί ο χρόνος που θα πρέπει να αναγράφεται στη συσκευασία ώστε ο κατασκευαστής να μην υποστεί κυρώσεις .

Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή,

X : << ο χρόνος ζωής μιας μπαταρίας του συγκεκριμένου τύπου για χρήση σε συσκευές κινητής τηλεφωνίας >>.

Τότε η τ.μ. X ~ N (μ = 40 , $\sigma^2 = 5^2$)

Όρίζουμε το ενδεχόμενο

E : << η μπαταρία του συγκεκριμένου τύπου θεωρείται ελαττωματική >>.

Τότε P(E) = P (X > 30).

1. Έχουμε

$$P(E) = P(X<30) = P\left(\frac{X-40}{5} < \frac{30-40}{5}\right) = P(Z<-2) = \Phi(-2) = 0{,}0227.$$

Σε ένα πακέτο των 120 μπαταριών ο αναμενόμενος αριθμός ελαττωματικών ισοούται με

$$n \cdot P(E) = 120 \cdot 0{,}0227 = 2{,}724 \simeq 3 \text{ μπαταρίες .}$$

2. Έχουμε

$$P(X>45) = P\left(\frac{X-40}{5} > \frac{45-40}{5}\right) = P(Z>1) = 1-\Phi(1) = 1-0{,}8413 = 0{,}1587\,.$$

Σε ένα πακέτο των 120 μπαταριών ο αναμενόμενος αριθμός των μπαταριών των οποίων ο χρόνος ζωής ξεπερνά τις 45 ώρες ισούται με

$$n \cdot P(X>45) = 120 \cdot 0{,}1587 = 19{,}044 \simeq 19 \text{ μπαταρίες .}$$

Έχουμε

$$P(30<X<50) = P\left(\frac{30-40}{5} > \frac{X-40}{5} < \frac{50-40}{5}\right) = P(-2<Z<2) = \Phi(2) - \Phi(-2) =$$

$$0{,}9772 - 0{,}0227 = 0{,}9545.$$

Σε ένα πακέτο των 120 μπαταριών ο αναμενόμενοςαριθμός των μπαταριών των οποίων ο χρόνος ζωής θα είναι μεταξύ 30 και 50 ώρες ισούται με

$$n \cdot P(30<X<50) = 120 \cdot 0{,}9545 = 114{,}54 \simeq 115 \text{ μπαταρίες.}$$

3. Ορίζουμε την τ.μ. Y : << αριθμός ελαττωματικών μπαταριών >>

Τότε η τ.μ. Y ~ B (n = 4 , p = 0, 0227)

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$P(Y\geqslant 2)=1-P(Y\leqslant 1)=1-[P(Y=0)+P(Y=1)]$ =

$1-[\binom{4}{0}\cdot 0{,}0227^0\cdot(1-0{,}0227)^4+\binom{4}{1}\cdot 0{,}0227^1\cdot(1-0{,}0227)^3]$ =

$1-[0{,}9773^4+4\cdot 0{,}0227\cdot 0{,}9773^3]=1-0{,}997=0{,}003$

4. Ορίζουμε το ενδεχόμενο :

M_1: <<η μπαταρία του συγκεκριμένου τύπου του πρώτου τυχαία επιλεγμένου πακέτου θεωρείται ελαττωματική >> με P (M_1)=P(X<30) = 0,0227

και

M_2 : <<η μπαταρία του συγκεκριμένου τύπου, του δεύτερου τυχαία επιλεγμένου πακέτου, έχει χρόνο ζωής που ξεπερνά τις 45 ώρες>> με P (M_2) = P (X > 45) = 0,1587 .

Τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(M_1\cap M_2)=P(M_1)P(M_2)=0{,}0227\cdot 0{,}1587=0{,}0036 \quad .$$

5. Έστω c ο ελάχιστος χρόνος ζωής της μπαταρίας. Τότε:

$$P(X<c)=7 \quad \Rightarrow \quad P(\frac{X-40}{5}<\frac{C-40}{5})=0{,}07 \quad \Rightarrow \quad \Phi(\frac{c-40}{5})=0{,}07$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(\frac{c-40}{5})=\Phi(-1{,}48) \quad \Rightarrow \quad \frac{c-40}{5}=-1{,}48 \quad \Rightarrow \quad c-40=-7{,}4$$

=> c = 40 - 7,4 = 32 , 6 ώρες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4.

Ο διευθυντής λογιστηρίου ενός εργοστασίου παραγωγής απορρυπαντικού σε σκόνη προσπαθεί να υπολογίσει τη μεταβλητότητα της εβδομαδιαίας παραγωγής σε απορρυπαντικό. Είναι γνωστό ότι η κατανομή παραγωγής του απορρυπαντικού είναι κανονική με μέση τιμή 10 τόνους την εβδομάδα. Επίσης το 89,8 % της εβδομαδιαίας παραγωγής βρίσκεται κάτω από 11,5 τόνους. Να βρεθεί η τυπική απόκλιση της κατανομής.

Θεωρούμε τη συνεχή μεταβλητή Χ που αναπαριστά την εβδομαδιαία παραγωγή απορρυπαντικού (σε τόνους).

Από τα δεδομένα η Χ ακολουθεί κανονική κατανομή

Χ ~ Ν (μ , σ^2)

ή Χ ~ Ν (10 , σ^2) οπότε $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ~ Ν (0,1).

Δίνεται επίσης ότι P(X<11,5) = 0,898 ή αλλιώς, χρησιμοποιώντας την τυποποιημένη κανονική κατανομή

$$P\left(\frac{X-10}{\sigma} < \frac{11{,}5-10}{\sigma}\right) \quad \text{ή} \quad P(Z < Z_0) = 0{,}898 \quad .$$

Από τους πίνακες των κατανομών βρίσκουμε ότι $Z_0 = 1{,}27$.

Άρα, $Z_0 = \frac{11{,}5-10}{\sigma} = 1{,}27$ ή $\sigma = 1{,}18$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5.

Εργοστάσιο παραγωγής ζάχαρης χρησιμοποιεί αυτόματες μηχανές κατά τη διαδικασία συσκευασία των πακέτων ζάχαρης. Σύμφωνα με τις προδιαγραφές του προϊόντος, για να θεωρηθεί μια συσκευασία αποδεκτή πρέπει το βάρος των πακέτων ζάχαρης ενός κιλού να είναι εντός των ορίων [989 γρ., 1010 γρ.].

Σύμφωνα με τα στοιχεία του εργοστασίου το βάρος των πακέτων ζάχαρης που συσκευάζονται μπορεί να θεωρηθεί ότι ακολουθεί την κανονική με μέση τιμή μ = 999,5 γραμμάρια και τυπική απόκλιση σ = 6 γραμμάρια.

Με βάση τα στοιχεία αυτά :

1. Αν επιλεγεί τυχαία ένα πακέτο ζάχαρης να υπολογιστεί η πιθανότητα το βάρος του να ξεπερνά τα 1004 γραμμάρια.
2. Αν επιλεγεί τυχαία ένα πακέτο ζάχαρης να υπολογιστεί η πιθανότητα το βάρος του να βρίσκεται μεταξύ 998 και 1001 γραμμάρια.
3. Ποιο είναι το ποσοστό των μη αποδεκτών συσκευασιών;
4. Έστω ότι γίνεται έλεγχος σε 20 τυχαία επιλεγμένα πακέτα ζάχαρης. Ποια είναι η πιθανότητα 18 να πληρούν τις προδιαγραφές;

Έστω X η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στο βάρος του πακέτου ζάχαρης. Από τα δεδομένα γνωρίζουμε ότι η X ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους μ = 999,5 και τυπική απόκλιση σ = 6 δηλαδή X ~ N $(\mu = 999{,}5 . \sigma^2 = 6^2)$.

1. Η πιθανότητα που ζητάμε είναι

$$P(X > 1004) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{1004-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{X-999{,}5}{6} > \frac{1004-999{,}5}{6}\right) = P(Z > 0{,}75)$$

=> $1 - P(Z \leqslant 0{,}75) = 1 - \Phi(0{,}75) = 1 - 0{,}773373 \quad ή \quad P(X > 1004) = 0{,}2266$

2. Η πιθανότητα που ζητάε είναι

$$P(998 < X < 1001) = P\left(\frac{998-999{,}5}{6} < \frac{X-999{,}5}{6} < \frac{1001-999{,}5}{6}\right) = P(-0{,}25 < Z < 0{,}25) =$$

Φ(0,25)-Φ(-0,25) = Φ(0,25) -1 + Φ(0,25) =2Φ(0,25) -1 = 2 x 0, 5987 -1

ή

P (998<X<1001) = 0,1974.

3. Από την εκφώνηση δίνεται ότιη συσκευασία δεν είναι αποδεκτή όταν το βάρος της είναι εκτός τν ορίων [99γρ., 1010 γρ.].

Έχουμε

$$P(X<989 \cup X>1010)=P(X<989)+P(X>1010) \quad =$$

$$P\left(\frac{X-999{,}5}{6} \leqslant \frac{989-99{,}5}{6}\right)+\left(\frac{X-999{,}5}{6} > \frac{1010-999{,}5}{6}\right) \quad =$$

$$P(Z<-1{,}75)+P(Z>1{,}75)=\Phi(-1{,}75)+1-\Phi(1{,}75) \quad =$$

$$2-2\Phi(1{,}75)=2-2\cdot 0{,}96 \quad \acute{\eta} \quad P(X<989 \cup X>1010)=0{,}08 \quad .$$

Επομένως το ζητούμενο ποσοστό είναι 8%.

4. Έστω Y η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στον αριθμό των πακέτων ζάχαρης που πληρούν τις προδιαγραφές. Τότε η Y ακολουθεί διωνυμική κατανομή με πραμέτρους n = 20 και πιθανότητα επιτυχίας

$$p=P(989 \leqslant X \leqslant 1010)=1-P(X<989 \cup X>1010)=1-0{,}08=0{,}92 \quad .$$

Δηλαδή : Y ~ B (n=20, p =0,92)

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(Y=18)=\binom{20}{18}\cdot 0{,}92^{18}\cdot 0{,}08^{2}$$

ή

P (Y = 18) = 0, 2714.

<u>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ</u>

Στην παρούσα εργασία ασχοληθήκαμε με τη Θεωρία Πιθανοτήτων και τις εφαρμογές αυτής σε θέματα οικονομίας.

Η χρήση των Πιθανοτήτων βοηθά στην ανάλυση καταστάσεων που εξελίσσονται σε συνθήκες αβεβαιότητας. Οι Πιθανότητες χρησιμοποιούνται σε πολλές επιστήμες και σε πολλές δραστηριότητες της καθημερινής ζωής.

Μερικές σημαντικές εφαρμογές της Θεωρίας Πιανοτήτων βρίσκουμε στις τράπεζες, στα λογιστήρια των εργοστασίων, στις αεροπορικές εταιρίες, στα τμήματα πωλήσεων των εταιριών, στις αντιπροσωπείες αυτοκινήτων και στα ξενοδοχεία.

Στη λήψη αποφάσεων των επιχειρήσεων, υπάρχουν πολλές περιπτώσεις όπου η πιθανότητα εμπλέκενται στον καθορισμό του αποτελέσματος μιας απόφασης.

Οι Πιθανότητες χρησιμοποιούνται όταν μια επιχείρηση αποφασίζει να επτεκταθεί ή να συρρικνωθεί. Οι Πιθανότητες χρησμοποιούνται επίσης για τον καθορισμό των κερδών στα στοιχήματα που οργανώνονται από το κράτος. Μια ακόμα μεγάλη περιοχή εφαρμογής των Πιθανοτήτων είναι στις ασφαλιστικές επιστήμες, όταν καθορίζονται τα ασφάλιστρα. Για να καθορισθεί, για παράδειγμα, το ασφάλιστρο σε μια ασφάλεια ζωής, η ασφαλιστική εταιρεία θα πρέπει να υπολογίζει πόσο πιθανό είναι ο ασφαλιζόμενος να πεθάνει σύντομα.

Τέλος, λογιστές πραγματοποιούν ελέγχους όσον αφορά τις οικονομικές δηλώσεις των πελατών τους και υπογράφουν τις δηλώσεις ως ακριβείς, ενώ συνειδητοποιούν ότι υπάρχει μια πιθανότητα να υπάρχουν προβλήματα που δεν αποκαλύφθηκαν από τον έλεγχο.

Ολοκληρώνοντας την παρούσα εργασία και έχοντας παρουσιάσει πληθώρα εφαρμογών των πιθανοτήτων, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η Θεωρία Πιθανοτήτων έχει πολυάριθμες και σημαντικές εφαρμογές σε πολλές περιοχές των οικονομικών και κοινωνικών επιστημών, στη λογιστική και στον επιχειρηματικό κόσμο.

Βιβλιογραφία

[1] Χαράλαμπος Γναρδέλλης, **Εφαρμοσμένη Στατιστική**, (2003) εκδ. Παπαζήση.

[2] Χρυσούλα Ζαχαροπούλου, **Ασκήσεις Στατιστικής**, (2006) εκδ. Σοφία.

[3] Π.Κικιλιας, Δ.Παλαμούρδας, Α.Πετράκης, Δ.Τσουκαλάκης, **Στατιστική-Πιθανότητες**, (2001) εκδ. Δήρος.

[4] Πέτρος Κιόχος, Απόστολος Κιόχος, **Στατιστική για τις Επιχειρήσεις και την Οικονομία**, (2010) εκδ. Ελένη Κιόχου.

[5] Στρατής Κουνιάς , Χρόνης Μωϋσιάδης, **Θεωρία Πιθανοτήτων Ι** (1995), εκδ. ΖΗΤΗ.

[6] Γ. Γ. Ρούσσα, **Θεωρία Πιθανοτήτων**, (1992), εκδ. ΖΗΤΗ.

Διαδικτυακές Πηγές

http://www.arnos.gr/oktonia/index.php

http://www.prenhall.com/behindthebook/0132416921/pdf/Groebner_CH04.pdf

http://users.uoa.gr/~dcheliotis/PithanotitesPliroforikis2010/CharalambidesNotes.pdf

http://www.autom.teithe.gr/gr/akadimaika/math-III/mathima1.pdf

https://static.eudoxus.gr/books/74/chapter-11774.pdf

http://www.esofia.net/index.php